Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Гидропневмоавтоматика»

А. В. Михневич

ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по одноименному курсу
для студентов специальности
1-36 01 07 «Гидропневмосистемы
мобильных и технологических машин»
заочной формы обучения

Гомель 2011

УДК 621.22:621.6(075.8)
ББК 32.965я73
М69

Рекомендовано научно-методическим советом заочного факультета ГГТУ им. П. О. Сухого (*протокол № 3 от 10.02.2011 г.*)

Рецензент: зав. каф. «Технология машиностроения» ГГТУ им. П. О. Сухого канд. техн. наук *М. П. Кульгейко*

Михневич, А. В.

М69 Теория автоматического управления : метод. указания по одноим. курсу для студентов специальности 1-36 01 07 «Гидропневмосистемы мобильных и технологических машин» заоч. формы обучения / А. В. Михневич. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2011. – 122 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: http://lib.gstu.local. – Загл. с титул. экрана.

Содержатся необходимые сведения для изучения основ теории автоматического управления, позволяющие в последующем легче усваивать специальные разделы данной дисциплины.

Для студентов специальности 1-36 01 07 «Гидропневмосистемы мобильных и технологических машин» заочной формы обучения.

УДК 621.22:621.6(075.8)
ББК 32.965я73

ОГЛАВЛЕНИЕ

Теория автоматического управления – общеинженерная дисциплина, формирующая технический интеллект инженера.

Теория автоматического управления изучает принципы построения систем автоматического управления техническими объектами, способы построения математических моделей технических объектов, методы исследования их устойчивости и качества, способы реализации теоретических положений в конкретных примерах.

В результате изучения этой дисциплины инженер должен знать: классификацию, назначение и принцип работы систем управления, сущность процессов преобразования информации в динамических системах, математические методы анализа динамических характеристик, уметь составлять функциональные и структурные модели систем автоматического управления, выводить уравнения и передаточные функции систем и их звеньев, находить временные и частотные характеристики САУ, оценивать влияние различных параметров на поведение систем.

Литература.

1. Гидропневмоавтоматика и гидропривод мобильных машин. Теория систем автоматического управления. Автушко В.Л. и др. 2001(396с.)
2. Попов Д.Н. Динамика и регулирование гидропневмосистем. М. Маш-е, 1976 (423с.)
3. Солодовников В.В. и др. Основы теории и элементы систем автоматического регулирования. – М. Маш-ие, 1985.
4. Иващенко И.Ч. Автоматическое регулирование. – М. Маш-ие, 1979.
5. Воронов А.А. Основы теории автоматического управления (Автоматическое регулирование непрерывных линейных систем) – М. Энергия, 1980.
6. Сборник задач по теории автоматического регулирования и управления. Под ред. В.А. Бесекерского. – М. Наука, 1978.
7. Теория автоматического управления. Под ред. А.В. Нетушила. М. ВШ, 1976.
8. Теория автоматического управления. Под ред. Воронова А.А. ч. I и II. М. ВШ, 1977.

9. Бесекерский В.А., Попов Е.П., Теория систем автоматического регулирования. М. Наука, 1972.

1. Основные понятия и определения.

Управление любым промышленным объектом или системой сводится к решению двух задач:
– контролю за ходом технологического процесса, пуску и остановке различных агрегатов, обеспечению надежной и безаварийной работы оборудования;
– обеспечению требуемых значений параметров, определяющих желаемый ход технологического процесса в управляемом объекте.

Объект управления (управляемый объект) –
устройство, осуществляющие технологический процесс, которое нуждается в специально организованных воздействиях извне для осуществления его алгоритма функционирования.

Система – совокупность объектов или элементов, связанных формами взаимодействия и взаимозависимости и образующих некоторое целостное единство.

Алгоритм функционирования – совокупность предписаний, ведущих к правильному выполнению технологического процесса в объекте (системе).

Алгоритм управления – совокупность предписаний, определяющих характер воздействия извне на управляемый объект (УО) с целью осуществления им заданного алгоритма функционирования.

Управление – процесс осуществления воздействий на технический объект или систему, направленных на достижение определенной цели: поддержание требуемого состояния системы или перевод ее из одного состояния в другое; –
процесс осуществления воздействий, соответствующих алгоритму управления.

Управление осуществляется регулированием различных физических, химических и др. процессов, происходящих в объекте (системе).

Если процесс управления осуществляется без участия человека (т.е. автоматическим управляющим устройством), то такое управление называется автоматическим.

Управление (регулирование) может быть также полуавтоматическим или ручным).

Совокупность управляемого объекта (системы) и автоматического управляющего устройства, взаимодействующих между собой, называется системой автоматического управления (САУ).

Внешнее воздействие – воздействие на САУ внешней среды или устройств, не являющихся частью системы автоматического управления.

Структура системы автоматического управления.

Системы автоматического управления можно разделить на две основные части:

– управляемый объект (УО);
– управляющее устройство (УУ).

Структура автоматической системы управления – совокупность частей, на которые она может быть разделена по определенным признакам.
Различают алгоритмическую и функциональную структуры САУ.

Алгоритмическая структура – структура, где каждая часть предназначена для выполнения определенного алгоритма преобразования информации, являющегося частью алгоритма функционирования САУ.

Функциональная структура – структура, где каждая часть предназначена для выполнения определенной функции автоматического управляющего устройства: передача сигналов, сравнение сигналов, переработка информации и т.д.

Графическое изображение структуры САУ называется **структурной схемой САУ**.

Части и элементы САУ изображаются в виде прямоугольников, в поле которых указывается назначение элемента или его математическое описание. Связи между элементами показываются стрелками в направлении передачи воздействия или информации. Приняты обозначения:
УО – управляемый объект; РО – регулируемый объект;
УУ – управляющее устройство; Р – регулятор;
СУ – суммирующее устройство.

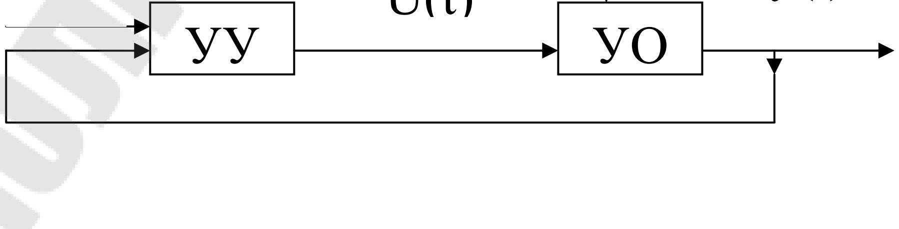
Связи структурной схемы САУ делятся на:
<u>основные;</u>
<u>дополнительные;</u>
<u>обратные.</u>

Основная связь – связь, образуемая основной цепью воздействия между участками цепи.

Дополнительная связь – связь, образующая путь передачи воздействия в дополнение к основной цепи воздействий.

Обратная связь – дополнительная связь, по которой информация об изменении регулируемой величины от управляемого объекта передаются управляющему устройству (т.е. от выхода к входу САУ).

<u>Простейшая структурная схема САУ</u>:



Текущее значение регулируемой величины y(t) сравнивается с заданным значением g(t) и выявляется ошибка (рассогласование):

$$\varepsilon(t) = g(t) - y(t).$$

Для уменьшения ошибки до допустимых пределов УУ (регулятор) оказывает управляющее воздействие U(t) на управляемый объект. Ошибки в системах автоматического управления возникают вследствие внешних возмущающих воздействий f(t).

Система автоматического управления всегда имеет вход и выход.

<u>Вход</u> – часть цепи воздействия САУ, на которую непосредственно подается воздействие извне.

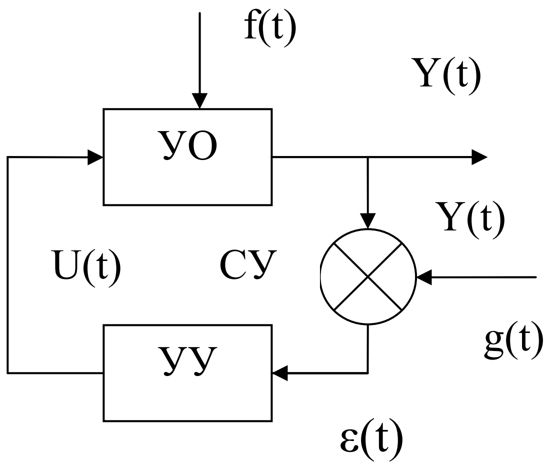
На схеме: g(t) – вход по каналу задающего воздействия;

f(t) – вход по каналу возмущающего воздействия.

<u>Выход</u> – часть цепи воздействия САУ, которая в соответствии с алгоритмом функционирования непосредственно воздействует вне системы – y(t).

<u>Основной принцип построения САУ</u> – применение обратной связи, по которой информация об изменении регулируемой величины от управляемого объекта передается управляющему устройству (регулятору). Эта обратная связь является отрицательной, т.к. для выявления ошибки (рассогласования) регулируемого параметра его текущее значение должно вычитаться из заданного значения.

Наибольшее распространение получили САУ, в которых закон регулирования зависит только от ошибки ε --- принцип управления по отклонению.



Структурная схема системы автоматического управления по отклонению.

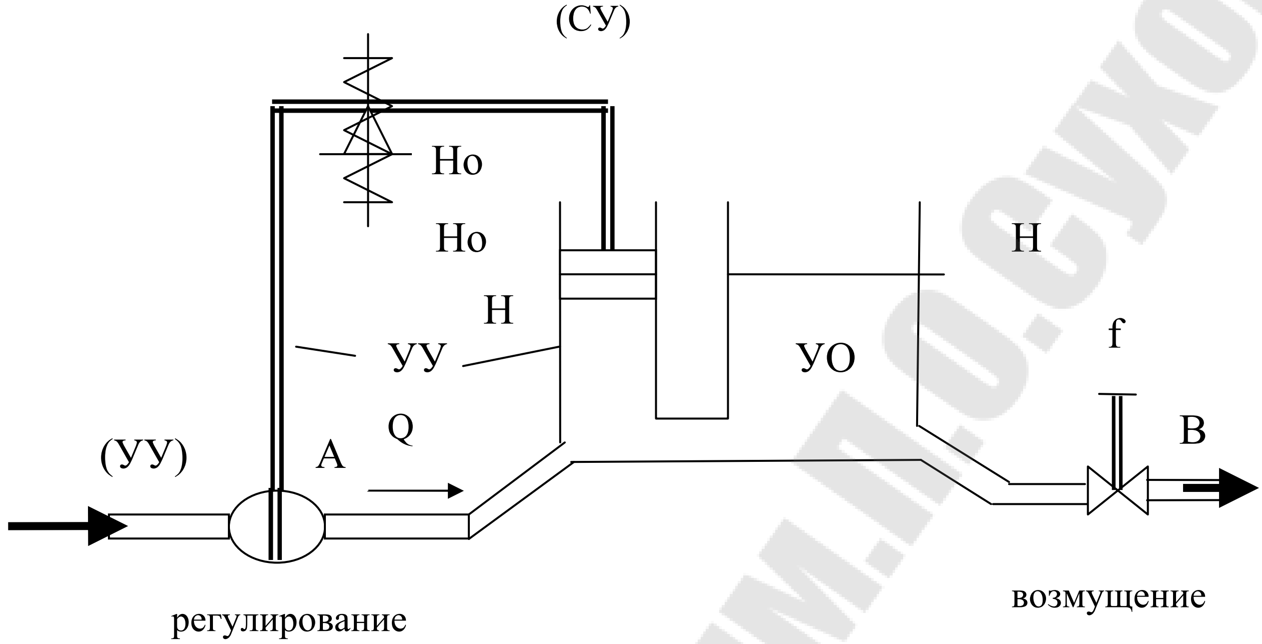
В данной системе значение управляемой величины Y(t) в специальном суммирующем устройстве “СУ” сравнивается со значением задающей величины g(t).

СУ формирует новую величину --- отклонение: ε(t)=g(t) - y(t), которая подается на вход управляющего устройства УУ для выработки управляющего воздействия U(t) на управляемый объект УО с целью ликвидации отклонения управляемой величины Y(t) от предписанного значения g(t).

[зачерненный сектор СУ означает, что входящее в этот сектор воздействие Y(t) подается с обратным знаком по отклонению к g(t)].

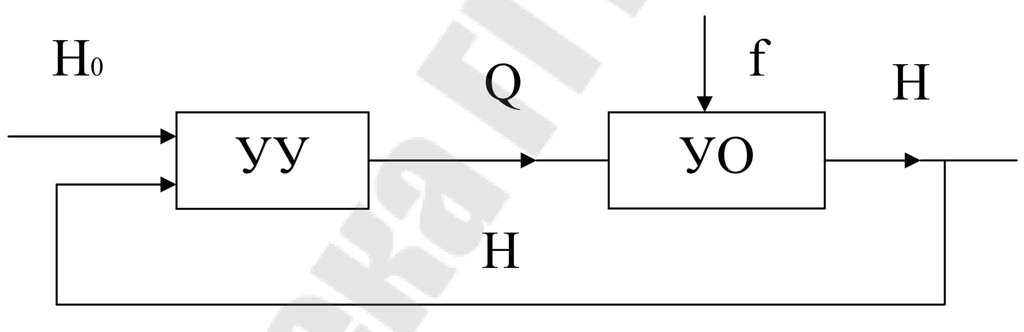
2. Примеры автоматического регулирования в технике.

а) Автоматическое регулирование уровня жидкости в баке.



Структурная схема.

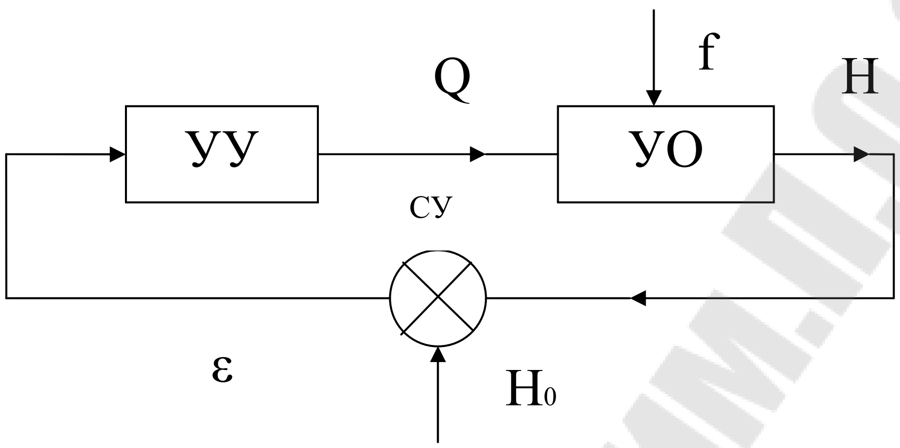
I вариант:



УУ – поршень с регулирующей задвижкой А.
f – внешнее возмущение.
Заданное значение регулируемой величины --- H_0 .
Текущее значение регулируемой величины --- H.
Управляющее воздействие на УО – расход --- Q.

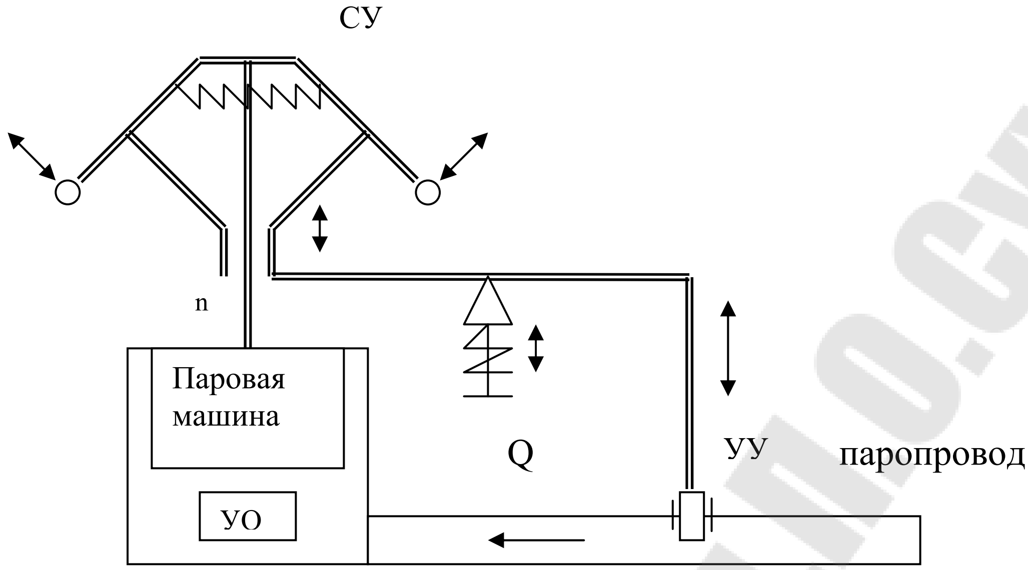
Когда уровень в банке $H = H_0$, регулирующая задвижка А закрыта. При открытии задвижки В (т.е. внешнем возмущении f) уровень в баке снижается, что фиксируется регистрирующим органом (поршнем) УУ → т.е. осуществляется обратная связь. В УУ открывается регулирующая задвижка, т.е. подается в бак расход Q, поддерживающий уровень жидкости в баке, т.е. оказывается управляющее воздействие на УО.

II вариант (с автоматическим регулированием по отклонению.)

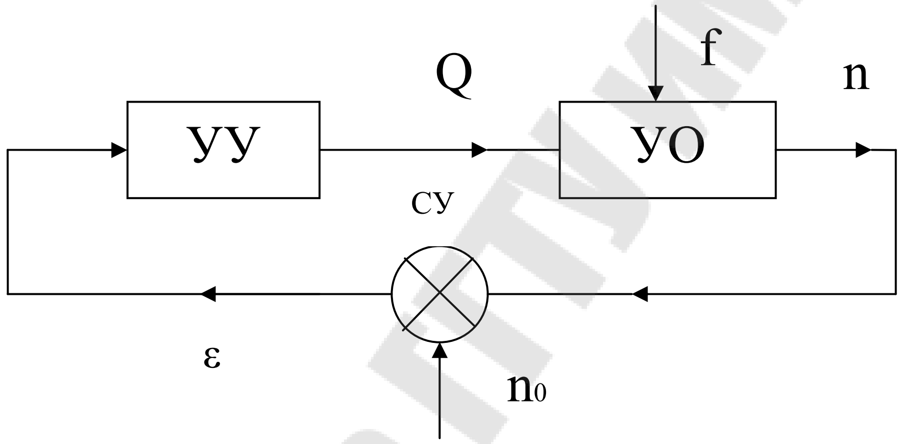


СУ – поршень; УУ – регулирующая задвижка. Поршень (СУ) сравнивает заданное значение H_0 с текущим значением H и формирует новую величину – отклонение: $\varepsilon = H_0 - H$, которая подается на УУ (регулирующую задвижку) для выработки управляющего воздействия Q, поддерживающего заданный уровень жидкости в баке.

б) Автоматическое регулирование скорости паровой машины с помощью центробежного регулятора (1784г. Д. Уатт.)



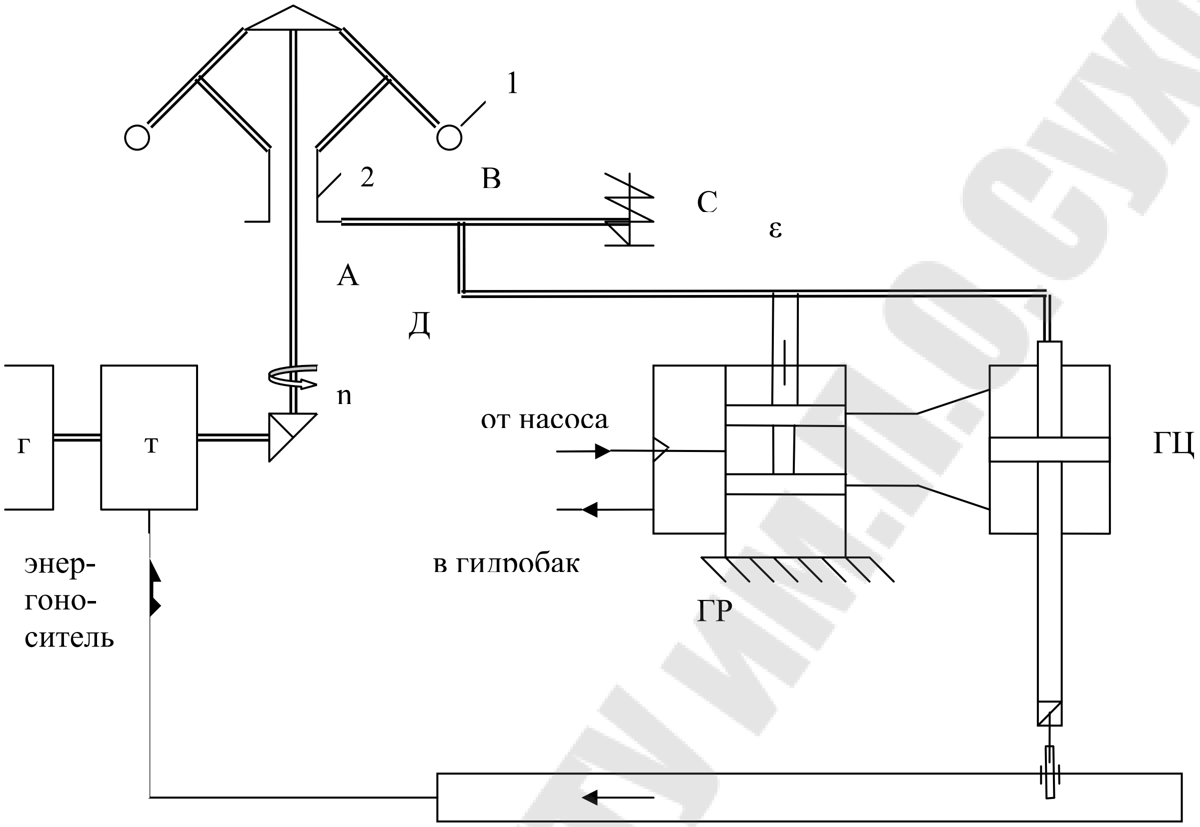
Кинематическая схема.



Структурная схема.

f – внешнее воздействие, изменяющее скорость вращения вала паровой машины (уменьшение внешней нагрузки и т.д.)
$\varepsilon = n_0 - n$.

Схема гидромеханического регулятора для поддержания скорости двигателя (турбины, ДВС и т.д.)



1 – центробежный маятник (чувствительный элемент).
Муфта 2 соединена рычагами АВС и ДЕG с гидрораспределителем ГР и штоком исполнительного гидроцилиндра ГЦ. Рычагом ДЕG осуществляется отрицательная обратная связь от штока ГЦ к ГР. Положение опоры С может регулироваться, что регулирует заданную частоту вращения n_0.

При увеличении скорости вращения вала двигателя n муфта 2 перемещается на валу маятника вверх. Через систему рычагов золотник ГР смещается вверх из нейтрального положения, сообщая верхнюю полость ГЦ со вспомогательным насосом, а нижнюю – со сливной гидролинией. Под действием давления жидкости от насоса поршень ГЦ будет двигаться вниз, прикрывая задвижку, регулирующую поступление энергоносителя в двигатель. Одновременно, вследствие движения вниз точки G рычага, вниз (т.е. в нейтральное положение) будет смещаться золотник ГР, прекращая подачу жидкости в ГЦ.

В этом управляющем устройстве чувствительный элемент (маятник) управляет золотником, который управляет гидроцилиндром. В результате слабые сигналы от маятника усиливаются и получается большой мощности выходной сигнал – усилие на штоке гидроцилиндра, способное перемещать регулирующую задвижку.
В этом управляющем устройстве:
золотниковый гидрораспределитель с гидроцилиндром является усилителем; причем гидроцилиндр выполняет роль также исполнительного элемента.

3. Классификация систем автоматического управления.

А) В зависимости от закона задающего воздействия

системы автоматического регулирования и управления разделяют на:

1) **<u>системы стабилизации</u>** (собственно - системы автоматического регулирования), в которых задающее воздействие g имеет постоянное значение, причём основной режим работы системы направлен на уменьшение или полное устранение отклонений, вызываемых возмущающими воздействиями.

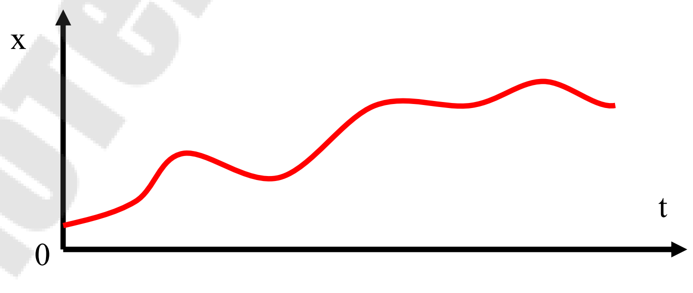
2) **<u>системы программного регулирования</u>**, в которых задающее воздействие g является заранее известной функцией времени; основной режим работы этих систем связан с изменением регулируемой (управляемой) величины по требуемой программе и устранением отклонений вследствие возмущающих воздействий.

3) **<u>следящие системы</u>**, в которых закон задающего воздействия g заранее не определён и основной режим работы направлен на воспроизведение регулируемой (управляемой) величины этого закона.

Б) По характеру формирования и виду передаваемых сигналов

САУ (САР) разделяют на:

1) **<u>непрерывные системы</u>**, в которых передаваемые по контуру сигналы являются непрерывными функциями времени:

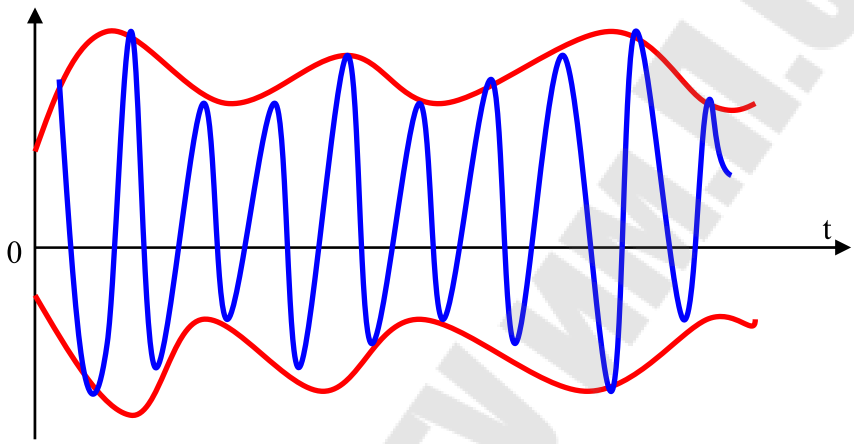


2) <u>с гармонической модуляцией сигналов</u>, в которых при непрерывном изменении задающего воздействия [g(t)] или регулируемой

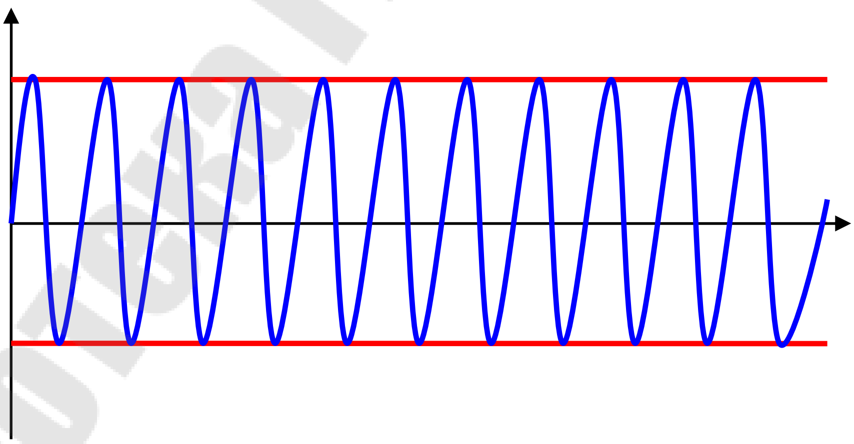
величины [y(t)] специально модулируется (создаётся) гармонический сигнал специальным модулятором; этот сигнал формирует управляющее воздействие [U(t)], которое обычно имеет вид непрерывного сигнала.
Гармонический сигнал может шифровать информацию (т.е. управляющее воздействие) изменением амплитуды, частоты или фазы.

Поэтому различают САУ с:

--- амплитудной модуляцией (АМ)



--- с частотной модуляций (ЧМ)

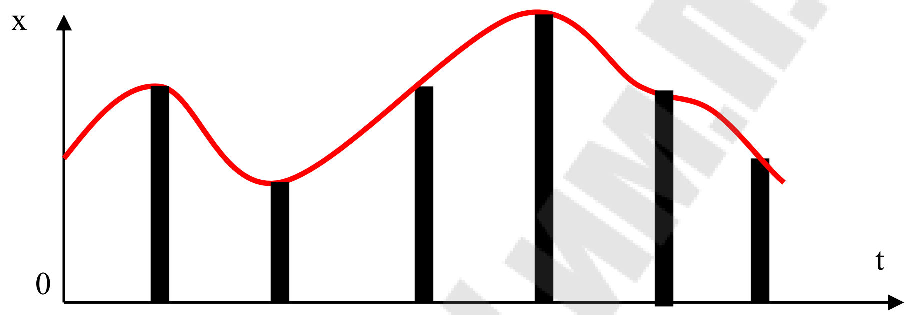


--- с фазовой модуляцией (ФМ).

3) <u>с импульсной модуляцией</u> ----- специальный элемент формирует сигналы (т.е. информацию) в виде периодической последовательности импульсов.

Существуют следующие виды модуляции импульсных сигналов:

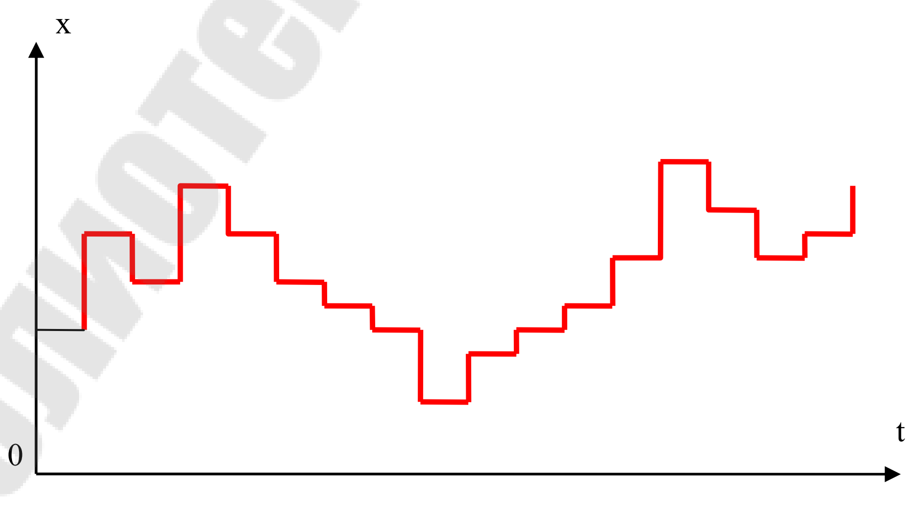
--- <u>амплитудно-импульсная модуляция</u> (АИМ):



- <u>частотно-импульсная модуляция</u> (ЧИМ);
- <u>широтно-импульсная модуляция</u> (ШИМ).

4) <u>с релейной модуляцией</u>

(отличается от импульсной тем, что благодаря наличию специальных реле достигается дискретность сигналов по уровню).

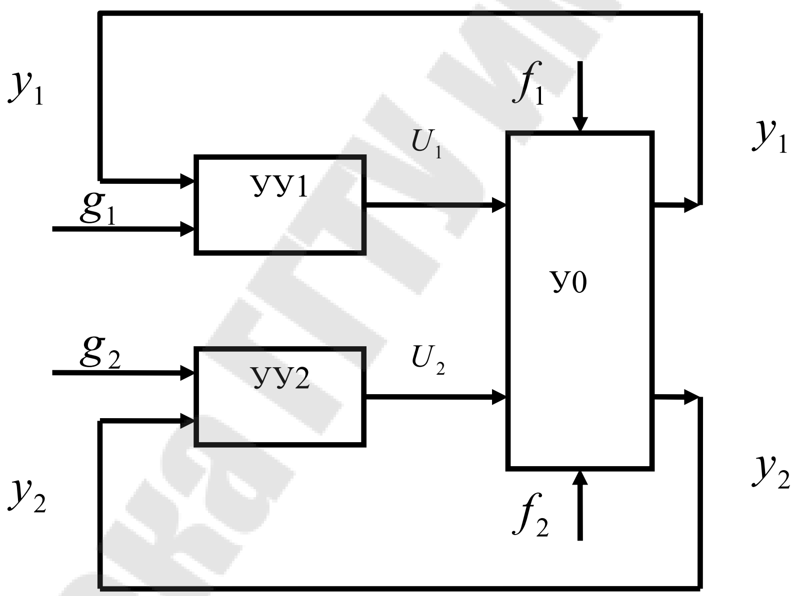


Импульсные и релейные системы относятся к дискретным системам и особенно удобны в САУ с цифровыми ЭВМ.

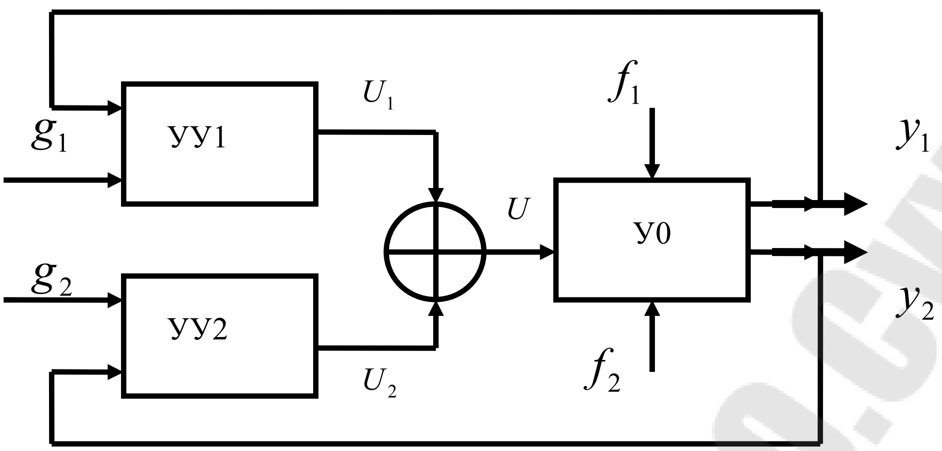
В) САУ (САР) могут быть:

- **<u>одноконтурными</u>** (один УО и одно УУ).
- **<u>многоконтурными</u>** (один УО и несколько связанных или несвязанных УУ).

а) структурная схема двухконтурной несвязанной САУ.



б) структурная схема двухконтурной связанной САУ:



В данном случае два регулирующих воздействия $U_1(t)$ и $U_2(t)$ алгебраически суммируются, формируя новое воздействие $U(t) = U_1(t) \pm U_2(t)$. Эта операция на структурных схемах показывается знаком + (или -).

Г) САУ также делятся на:
- **<u>жесткие</u>** (не приспосабливающиеся).
- **<u>адаптивные</u>** (приспосабливающиеся).

В адаптивных системах при изменении внешних условий происходят целенаправленные изменения свойств управляющей системы. Адаптивные системы делят на:
- экстремальные:
- самонастраивающиеся;
- самоорганизующиеся;
- самообучающиеся.

Д) САУ различаются также по алгоритму управления (регулирования).

Используются следующие алгоритмы регулирования:

<u>- пропорциональный:</u>

$U = K_n \varepsilon$ ---- система с управлением по ошибке;

- ***<u>дифференциальный:</u>***

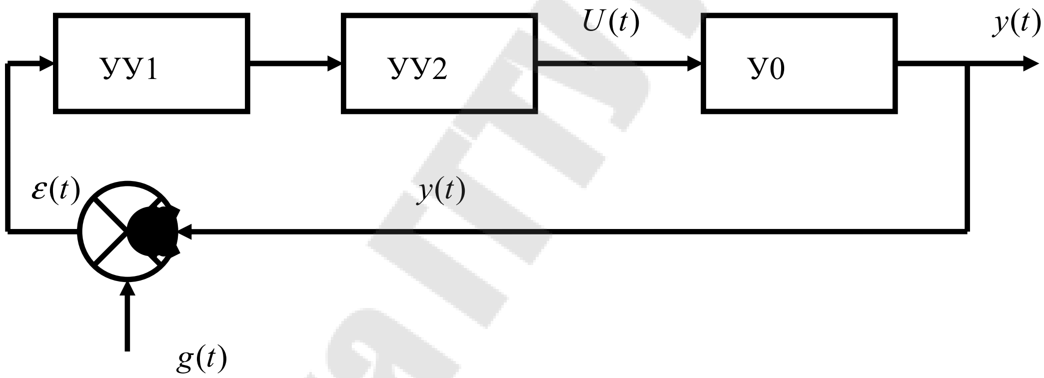
$$U = K_з \frac{d\varepsilon}{dt}$$ ---- система с управлением по производной;

- ***интегральный:***

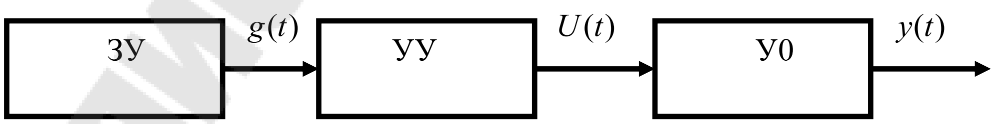
$$U = K_и \int \varepsilon dt$$ ---- система с управлением по интегралу.

Е) По характеру регулирования САУ или её подсистемы разделяются на 2 класса:
---- **замкнутые**
---- **разомкнутые**.

В замкнутых системах управляющее воздействие на управляемый объект формируется в результате сравнения текущего значения управляемой величины с заданным.



В разомкнутых системах управляющее воздействие не сравнивается с текущим значением управляемой величины. Закон управляющего воздействия выбирается исходя из цели управления, свойств управляемого объекта и не связан с изменениями управляемой величины.



ЗУ -- задающее или програмное устройств

4. Основные элементы управляющих систем.

Управляющая система – это совокупность управляющих устройств (регуляторов), совместно осуществляющая управление САУ. Управляющая система состоит из отдельных, связанных между собой элементов (устройств), каждый из которых осуществляет преобразование воздействий, полученных от предыдущего элемента и передачу преобразованных сигналов дальше по контуру САУ.

Величина, характеризующая воздействие на элемент, называется входной (входной сигнал, вход).

Величина, определяющая сигнал после элемента, называется выходной (выходной сигнал, выход).

По принципу действия и конструктивному исполнению элементы управляющих систем могут быть: механическими, гидравлическими, пневматическими, электрическими, электронными.

По исполняемой в САУ функции различают следующие типовые элементы управляющих систем:

1. **Чувствительные элементы** – устройства, измеряющие отклонение регулируемой величины от заданного значения и преобразующие результаты таких измерений в сигналы управления. Т.е. чувствительный элемент – это измерительный прибор, а часто – просто его первичный датчик (манометр, расходомер, тахометр, вольтметр, термопара и др.).

2. **Элементы сравнения** – устройства, осуществляющие вычитание одной величины из другой. Суммирующие устройства относятся к элементам сравнения.

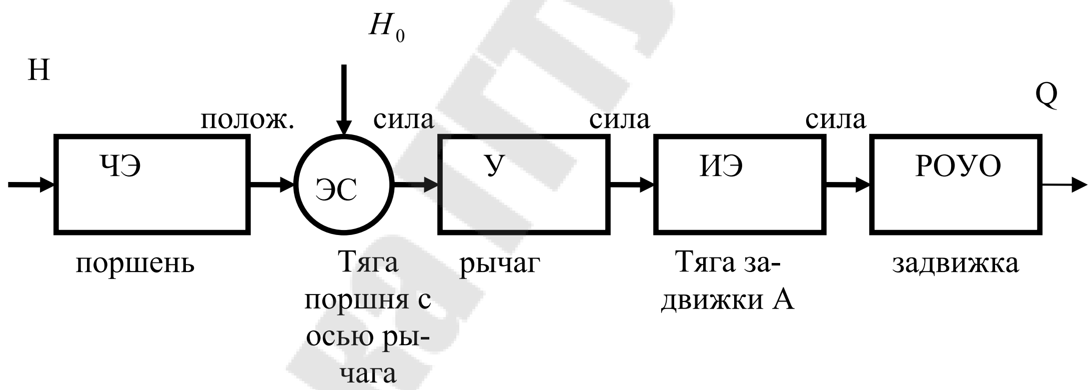
3. **Усилители** – устройства, которые усиливают по мощности сигналы управления, поступающие от чувствительного элемента сравнения к исполнительному элементу. Усилители могут быть: механическими (простейший – рычаг), гидравлическими и пневматическими (мультипликаторы давления), электрическими и электронными.

4. **Преобразователи** - устройства, преобразующие сигнал одной физической природы в другой (механический в электрический, пневматический в электрический и т.д.).

5. **Исполнительные элементы** – устройства, воспринимающие сигналы управления и воздействующие непосредственно или через вспомогательные устройства на регулирующие органы управляемых объектов:
   - механические – тяги;
   - гидравлические – гидроцилиндры.

6. **Корректирующие элементы** – дополнительные устройства, вводимые в управляющую систему для придания ей тех свойств, которые необходимы для обеспечения требуемых режимов регулирования.

Для примера составим структурную схему управляющей системы «автоматического регулирования уровня жидкости в баке».



РОУО – регулирующий орган управляемого объекта.
Управляющая система без усилителя называется управляющей системой прямого действия, с усилителем – непрямого действия.

Математическое описание систем автоматического управления.

Для расчёта любой системы необходимо составить математическое описание протекающих в ней физических процессов, т. е. по-

лучить математическую модель системы. Для построения математической модели САУ используются алгебраические и дифференциальные уравнения.

При математическом описании САУ различают два рода уравнений:

1. *Уравнения статики -- уравнение установившихся режимов.*
2. *Уравнения динамики -- уравнения переходных процессов.*

5. Статические характеристики САУ.

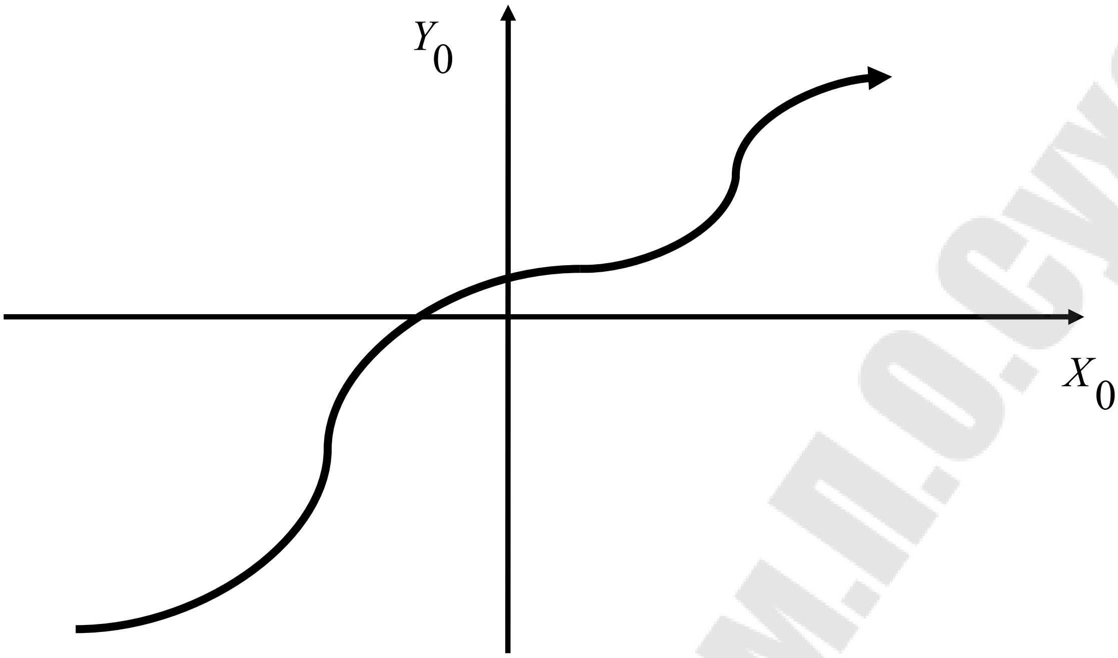
До тех пор пока величина, определяющая состояние системы не изменяется во времени, система находится в равновесии. Соотношения, связывающие между собой входные и выходные величины при различных равновесных (установившихся) состояниях системы или её элементов называются <u>уравнениями статики.</u>

Уравнение статики элемента или системы в общем случае:

$$y_0 = f(x_0), \qquad (1)$$

где x_0 и y_0 - входная и выходная величины при равновесии (т.е. в установившемся режиме) элемента или системы.

График, построенный уравнению (1), является <u>статической характеристикой</u> элемента или системы.



Пример статической характеристики -- зависимость установившейся скорости вала двигателя от открытия задвижки.

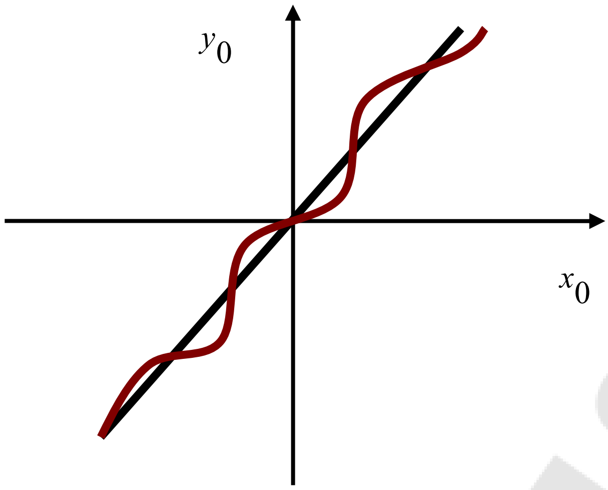
Когда статическая характеристика близка к линейной, она может бать представлена уравнением прямой:

$$y_0 = k \cdot x_0, \tag{2}$$

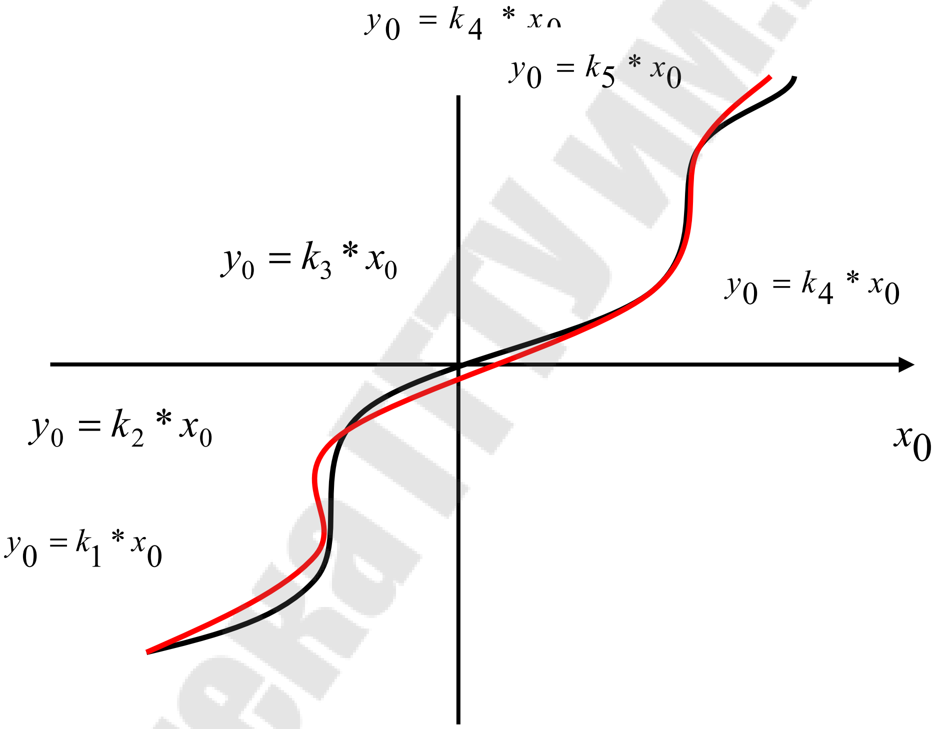
где k – коэффициент передачи или коэффициент преобразования (если x и y разнородны по физической природе).

Если x и y – имеют одинаковую размерность, то k – коэффициент усиления (безразмерный).

Если статическая характеристика нелинейная, то её в ТАУ стараются аппроксимировать одной или несколькими линейными характеристиками:



Линерализация нелинейной статической характеристики:

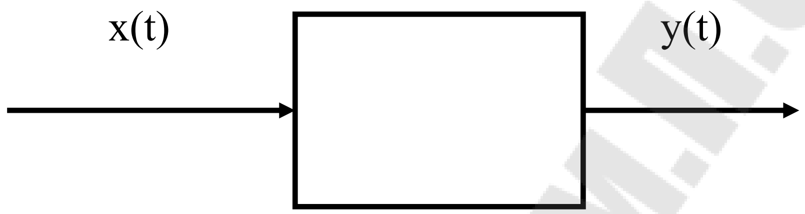


Пример кусочно-линейной аппроксимации --- нелинейная характеристика заменяется несколькими линейными в определённых диапазонах *x, y*.

6. Уравнения динамики САУ

Уравнения, которое описывает изменяющиеся во времени состояния элемента или системы называются уравнениями динамики.

Для математического описания САУ чаще всего используют дифференциальные уравнения динамики, связывающие входные и выходные величины и время:



$$\frac{dy}{dt} = f(x, y, t, ...). \tag{3}$$

Эти дифференциальные уравнения динамики могут быть:

1. **<u>Линейными</u> -------**
   ------- уравнение (3) представляется в виде сумы переменных и их производных по времени с постоянными коэффициентами, например:
   $$A_0 \frac{d^2 y}{dt^2} + A_1 \frac{dy}{dt} + A_2 y = B_0 \frac{d^2 x}{dt^2} + B_1 \frac{dx}{dt} + B_2 x \ , \tag{4}$$

$A_0 .... B_0$ ---- постоянные коэффициенты.

Линейными дифференциальными уравнениями можно описать простейшие элементы и системы. Задачи автоматического управления в этом случае решаются наиболее просто.

2. **Нелинейными --------**

----- уравнения содержат переменные и их производные в степенях, отличных от 1, либо их произведения, например:

$$\frac{dy}{dt} = A_1 \frac{y^2}{x^3} + A_2 \left(\frac{dx}{dt}\right)^{1/2}. \qquad (5)$$

Большинство реальных элементов и систем автоматического управления описываются нелинейными дифференциальными уравнениями. В этом случае решение задач автоматического управления значительно усложняется.

Для упрощения решения задач автоматического управления нелинейные дифференциальные уравнения динамики подвергаются линеаризации, т.е. заменяются приближенными линейными.

Линеаризация нелинейных дифференциальных уравнений основана на описании элементов и систем в малых отклонениях переменных от равновесных значений этих переменных. Следует отметить, что в большинстве случаев отклонения переменных при их регулировании в системах автоматического управления действительно малы, т.е. линеаризация вполне оправдана.

Допустим, нелинейное уравнение динамики САУ имеет вид:

уравнение 1-го порядка: $$\frac{dy}{dt} = F(x, y, t), \qquad (6)$$

x_0, y_0– равновесные (установившиеся) значения входной и выходной переменных в момент t ; $x = f(t)$: $y = f(t)$;

x', y'- соответствующие малые отклонения от равновесных значений x_0 и y_0.

$$x = x_0 + x'; \qquad y = y_0 + y';$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy_0}{dt} + \frac{dy}{dt}.$$

Разложим нелинейную функцию *F(x,y,t)* в ряд Тейлора в окрестности значений x_0 и y_0:

$$F(x, y, t) = F(x_0, y_0, t) + \frac{\partial F}{\partial x}\bigg|_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}} * x' + \frac{\partial F}{\partial y}\bigg|_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}} * y' + ... \qquad (7)$$

Обозначим: $\frac{\partial F}{\partial y}\Big|.... = a(t)$ и $\frac{\partial F}{\partial x}\Big|... = b(t)$.

$$\frac{dy_0}{dt} + \frac{dy'}{dt} + ay' = F(x_0, y_0, t) + bx'$$

(8)

При $x' = y' = 0$ уравнение (8) описывает невозмущенное состояние системы:

$$\frac{dy_0}{dt} = F(x_0, y_0, t) \ . \tag{9}$$

Вычитая из (8) выражение (9), получим линейное дифференциальное уравнение (для малых отклонений переменных):

$$\frac{dy'}{dt} + ay' = bx'. \tag{10}$$

Если элемент или система находится в равновесии, то $\frac{dy_0}{dt} = 0$ и уравнение (9) превращается в уравнение статики:

$$F(x_0, y_0) = 0 \tag{11}$$

(в этом случае коэффициенты a и b становятся постоянными).

Уравнение (10) обычно приводится к стандартному виду (делением на a)

$$1/a = T \ ; \quad b/a = K \ ;$$

$$T\frac{dy'}{dt} + y' = Kx' ; \tag{12}$$

T - постоянная времени (имеет размерность времени);

K - коэффициент передачи, преобразования или усиления (определяется по статической характеристики).

Уравнение (12) часто приводится к безразмерной (нормированной) форме используя соотношения:

$$x' = \bar{x}' \cdot x^* \quad ; \quad y' = \bar{y}' \cdot y^*$$

где $\bar{x}'$ и $\bar{y}'$ - безразмерные отклонения; x^* и y^* - масштабы этих переменных.

$$T\frac{d\bar{y}'}{dt} + \bar{y}' = K_0 \bar{x}', \tag{13}$$

где $K_0 = K\dfrac{x^*}{y^*}$ ---- коэффициент усиления (безразмерный).

Выражение (13) – линеаризованное нормированное уравнение динамики САУ 1-го порядка.

Если нелинейное дифференциальное уравнение динамики САУ является уравнением 2-го порядка:

$$a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} = F(x, y, t)\,, \tag{14}$$

то в результате его линеаризации получим нормированное линеаризованное уравнение динамики САУ в виде:

$$T_2^2 \frac{d^2 \bar{y}'}{dt^2} + T_1 \frac{d \bar{y}'}{dt} + \bar{y}' = K_0 \bar{x}'\,. \tag{15}$$

Вид уравнений динамики определяет <u>характерные типы САУ.</u>

Системы, динамика которых описывается линейными дифференциальными уравнениями, называются <u>**линейными.**</u>

Системы, динамика которых описывается нелинейными дифференциальными уравнениями (причём их линеаризация недопустима, т.к. существенно искажаются качественные особенности происходящих в системе процессов), называются <u>**нелинейными**</u>.

Системы, математическое описание которых представляется дифференциальным уравнением 1-го порядка, называются <u>системами 1-го порядка</u> (линейными или нелинейными).

Системы, математическое описание которых представляется дифференциальным уравнением 2-го порядка, называются <u>системами 2-го порядка</u> (линейными или нелинейными).

7. Передаточные функции.

В самом общем виде линейное или линеаризованное дифференциальное уравнение динамики САУ или её элемента имеет вид:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \ldots + b_0 x. \qquad (1)$$

В линейном уравнении x, y – входная и выходная переменные, в нелинейном – малые отклонения этих переменных.

Введём обозначение – оператор дифференцирования:

$$\frac{d}{dt} \equiv p \;; \quad \left(\frac{d^n}{dt^n} \equiv p^n\right).$$

Тогда уравнение (1) можно записать в следующем виде:

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_0) y = (b_m p^m + b_{m-1} p^{p-1} + \ldots + b_0) x \;. \qquad (2)$$

Обозначим: $a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_0 = Д(p)$:

$$b_m p^m + b_{m-1} p^{p-1} + \ldots + b_0 = M(p).$$

Тогда (2) приводится к виду:

$$Д(p) y = M(p) x \;. \qquad (3)$$

$Д(p)$ - называется собственным оператором.

$M(p)$ - называется оператором воздействия.

Отношение

$$\frac{M(p)}{Д(p)} = W(p)$$

(4)

называется передаточной функцией и также является дифференциальным оператором.

Итак (3) можно записать в виде:

$$y = W(p) x. \qquad (5)$$

(5) – уравнение динамики элемента или системы в операционной форме.

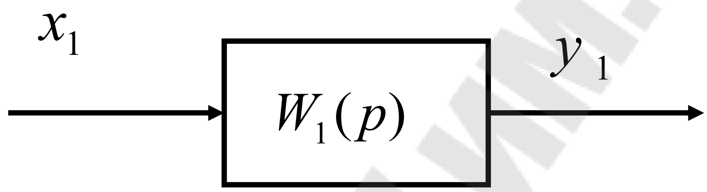
Введение понятия передаточной функции существенно упрощает решение инженерных задач при расчётах систем автоматического управления, т.к.

---- передаточные функции стандартных элементов САУ известны;
---- для типовых уравнений динамики передаточные функции определены и имеются в справочниках.

8. Передаточные функции соединений элементов.

Если известны передаточные функции звеньев (элементов) САУ, то передаточная функция системы находится по передаточным функциям её элементарных звеньев. Для этого составляют алгоритмическую структурную схему системы, в которой каждое звено осуществляет простейший алгоритм функционирования.

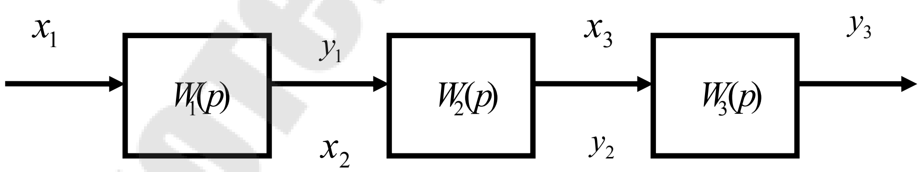
В алгоритмической структурной схеме элементы системы изображаются в виде прямоугольников с указанием в них передаточных функций.



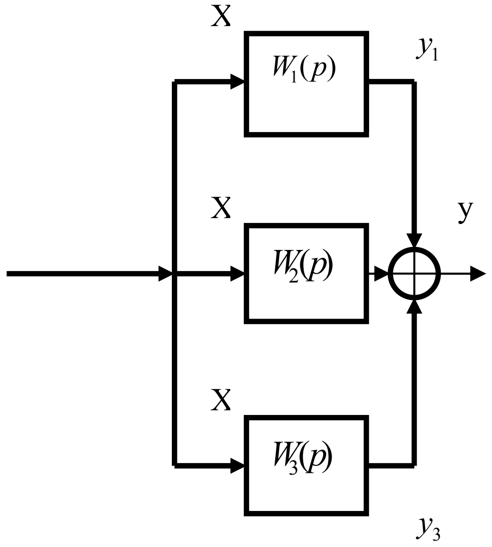
В САУ элементарные звенья могут соединяться различным образом:

А) последовательно
Б) параллельно
В) встречно-параллельно.

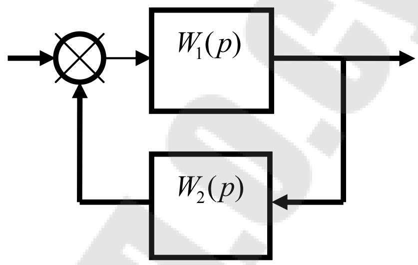
А)



Б



В)



А) <u>последовательное соединение элементов</u>.

При последовательном соединении элементов выходная величина предыдущего звена является входной для последующего. Передаточная функция системы в этом случае равна произведению передаточных функций отдельных элементов:

$$W(p) = \prod_{i=1}^{n} W_i(p) \ ; \qquad (1)$$

$$W_1 = \frac{y_1}{x_1}; \quad W_2 = \frac{y_2}{x_2}; \quad W_3 = \frac{y_3}{x_3}; \quad W = \frac{y_3}{x_1}$$

$$y_1 = x_2; \quad y_2 = x_3$$

$$W_1 W_2 W_3 = \frac{y_1 y_2 y_3}{x_1 x_2 x_3} = \frac{y_3}{x_1} = W \ .$$

Для схемы А) операционное уравнение динамики:

$$. \quad y_3 = [W_1(p) W_2(p) W_3(p)] x_1 = W(p) x_1$$
(2)

Б) **<u>параллельное соединение элементов.</u>**

В данном случае входная величина системы одновременно подаётся на входы всех элементов, а её выходная величина равна сумме выходных величин отдельных звеньев:

$$W(p)=\sum_{i=1}^{n}W_i(p)\ ; \tag{3}$$

$$y=y_1+y_2+y_3$$

$$y_1=W_1x;\quad y_2=W_2x\ ;\quad y_3=W_3x\ ;\quad y=Wx\ ;$$

$$\begin{aligned} &y_1+y_2+y_3=(W_1+W_2+W_3)x=y=W(x)\\ &W=W_1+W_2+W_3 \end{aligned} \tag{4}$$

В) **<u>встречно-параллельное соединение элементов</u>** (соединение с обратной

связью).

При встречно-параллельном соединении звеньев на вход системы одновременно с входной величиной системы подаётся её выходная величина, преобразованная звеном обратной связи с передаточной функцией $W_{oc}(p)$. Передаточная функция соединения:

$$W(p)=\frac{W_1(p)}{1\pm W_1(p)W_{oc}(p)}\ ; \tag{5}$$

$$y=Wx;\quad y=W_1x_1$$

$$x_1=x-x_{oc}\ ;\quad x_{oc}=W_{oc}y$$

$$y=W_1x_1=W_1x-W_1x_{oc}=W_1x-W_1W_{oc}y$$

$$y(1+W_1W_{oc})=W_1x$$

$$\frac{y}{x}=W=\frac{W_1}{1+W_1W_{oc}}$$

Знак + относится к отрицательной обратной связи, когда $x_1=x-x_{oc}$

Знак – относится к положительной обратной связи, когда $x_1=x+x_{oc}$

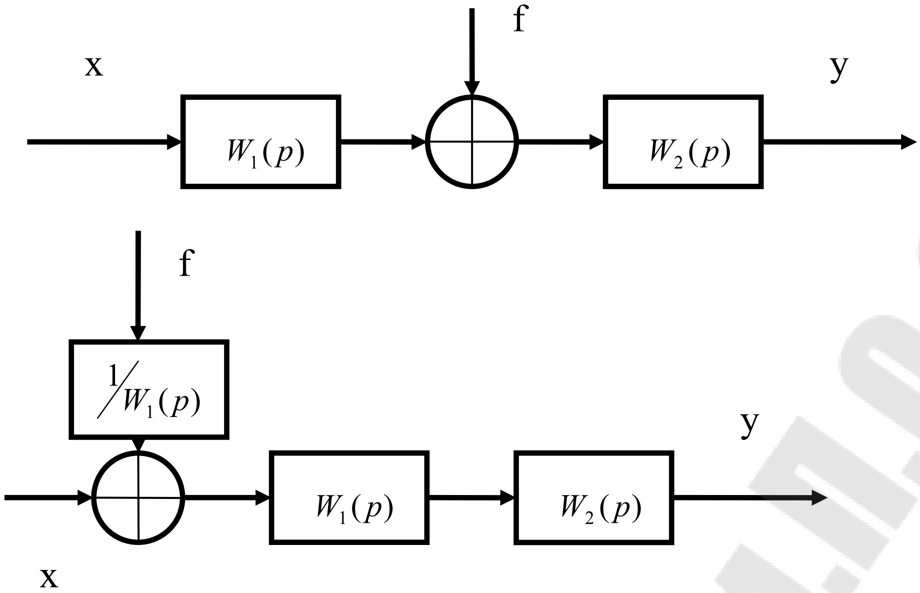
(положительная обратная связь в САУ используется очень редко).

Эквивалентные преобразования структурных схем.

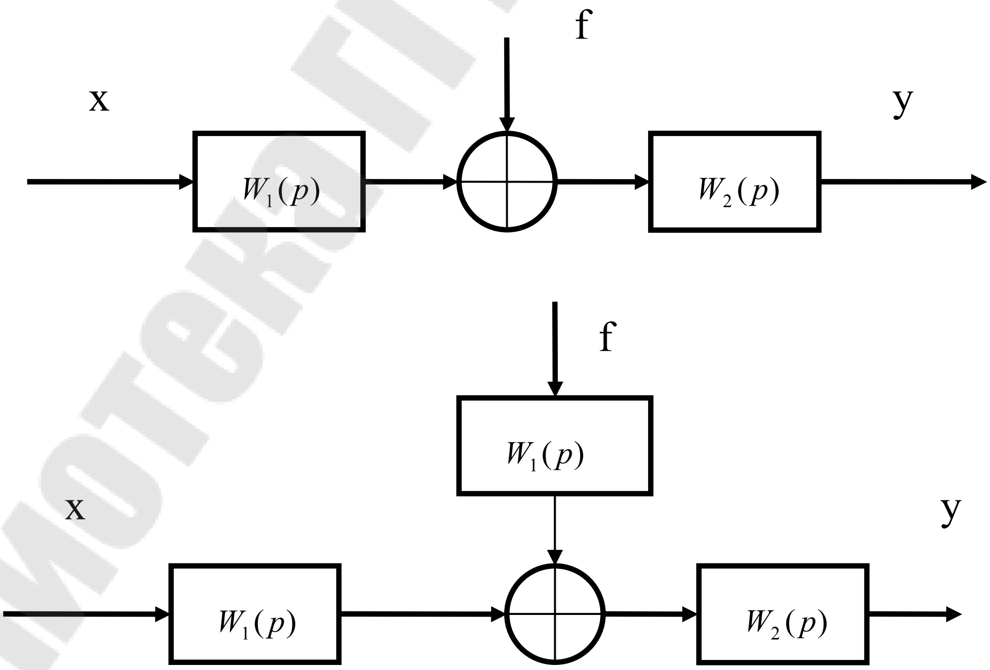
Один и тот же процесс автоматического управления может быть осуществлён с помощью САУ различным образом скомпонованной из отдельных звеньев с различными структурными связями между ними. Имея в качестве исходной одну из схем САУ и определив передаточные функции всех её элементов, можно упростить структурную схему системы путём эквивалентных преобразований её. Во всех различных структурных схемах САУ, полученных в результате эквивалентных преобразований, передаточная функция системы в целом не изменяется и не зависит от того, на сколько и на какие элементарные звенья разбита система и какие структурные связи имеются между её звеньями.

Основные правила эквивалентного преобразования алгоритмических структурных схем:

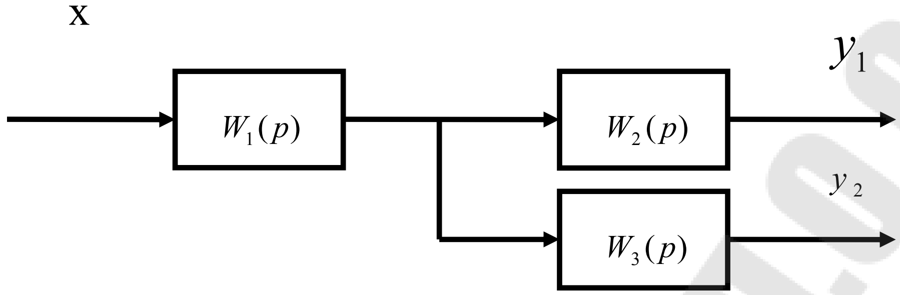
1. Звенья, соединённые последовательно, могут быть заменены одним звеном с передаточной функцией, равной произведению передаточных функций последовательно соединенных звеньев (формула (1)).
2. Звенья, соединённые параллельно, могут быть заменены одним звеном с передаточной функцией, равной сумме передаточных функций параллельно соединённых звеньев (формула (3)).
3. Звенья, соединённые встречно-параллельно, могут быть заменены одним звеном с передаточной функцией, определяемой по формуле (5).
4. Внешнее воздействие f, приложенное к выходу звена с передаточной функцией $W_1(p)$, можно перенести на его вход, поместив между воздействием и входом звена дополнительное звено с передаточной функцией $1/W_1(p)$:

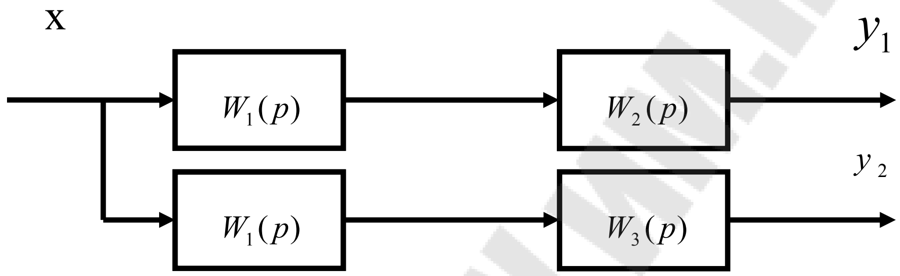


5. Внешнее воздействие f, приложенное к входу звена с передаточной функцией $W_1(p)$, можно перенести на его выход, поместив между воздействием и выходом звена дополнительное звено с той же передаточной функцией:

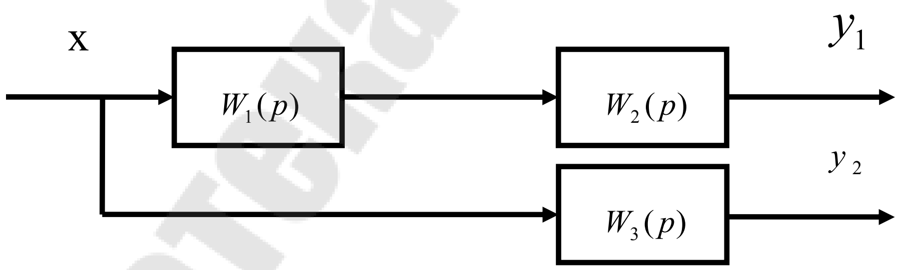


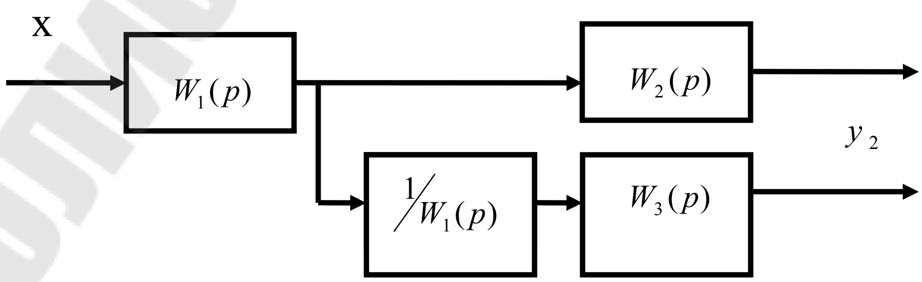
6. Точку присоединения любой структурной связи к выходу звена, имеющего передаточную функцию $W_1(p)$, можно перенести на его вход, включив в эту связь дополнительное звено с той же передаточной функцией:





7. Точку присоединения любой структурной связи к входу звена с передаточной функцией $W_1(p)$ можно перенести на его выход, включив в эту связь дополнительные звено с передаточной функцией $1/W_1(p)$.





С помощью эквивалентных преобразований структурные схемы с перекрестными связями можно преобразовать в схемы без перекрёстных связей, заменять многоконтурные САУ одноконтурными и т.д.

9. Преобразования Лапласа уравнений динамики.

Решение дифференциальных уравнений динамики САУ, значительно упрощается, если их преобразовать по Лапласу. Этот метод основан на использовании интеграла Лапласа:

$$F(S) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt, \tag{1}$$

который переводит функцию-оригинал *f(t)* в функцию-изображение *F(S),*
где S – комплексное время.

$$t - S; \quad f(t) - F(S).$$

Таким образом, с помощью преобразования Лапласа функции действительного переменного *{f(t)}* ставится в соответствие функция комплексного переменного *{F(S)}*.

Для сокращения записи интегральное преобразование (1) обычно записывается в виде:

$$F(S) = L\{f(t)\}. \tag{2}$$

Обратный переход от изображения к функции-оригиналу осуществляется обратным преобразованием Лапласа:

$$f(t) = L^{-1}\{F(S)\}. \tag{3}$$

Прямое и обратное преобразования Лапласа для широкого класса различных функций определены и сведены в таблицы.

Важнейшим преимуществом использования преобразований Лапласа является то, что сложные операции дифференцирования и интегрирования функций-оригиналов для их изображений заменяются простыми алгебраическими действиями – умножением и делением:

$$\frac{df}{dt} \to S \cdot F(S); \qquad \frac{d^n f}{dt^n} \to S^n \cdot F(S);$$

$$\int_0^t f(t)dt \to \frac{F(S)}{S}.$$

Некоторые свойства:

$$f(at) \to \frac{1}{a} F\left(\frac{S}{a}\right); \qquad f_1(t) + f_2(t) \to F_1(S) + F_2(S).$$

$$a \cdot f(t) \to aF(S); \qquad f(t-\tau) \to e^{-\tau S} \cdot F(S).$$

Произведём преобразования Лапласа общего дифференциального уравнения динамики элементов САУ:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \ldots + b_0 x \quad (4)$$

$t \to$ S оригинал $\to$ изображение

$$x(t) \to X(S)$$

$$y(t) \to Y(S)$$

Используя свойства преобразований Лапласа, получим:

$$\begin{aligned} &a_n S^n Y(S) + a_{n-1} S^{n-1} Y(S) + \ldots + a_0 Y(s) = \\ &= b_m S^m X(S) + b_{m-1} S^{m-1} X(S) + \ldots + b_0 X(S) \end{aligned} \quad (5)$$

или

$$(a_n S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \ldots + a_0) Y(S) = (b_m S^m + b_{m-1} S^{m-1} + \ldots + b_0) X(S) \quad (6)$$

Обозначим:

$$a_n S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \ldots + a_0 = D(S)$$
$$b_m S^m + b_{m-1} S^{m-1} + \ldots + b_0 = M(S).$$

Тогда уравнение (6) запишем в виде:

$$Y(S) = \frac{M(S)}{D(S)} \cdot X(S). \tag{7}$$

Отношение:

$\frac{M(S)}{D(S)} = W(S)$ ----- передаточная функция

для изображений входной и выходной переменных;

т.о. $$Y(S) = W(S) \cdot X(S) \tag{8}$$

Решение дифференциальных уравнений динамики САУ не в действительных переменных *x(t), y(t),* а в их изображениях *X(S), Y(S)* сводится к простым алгебраическим операциям (сложение, вычитание, умножение, деление), т.е. элементарно. Таким образом, определяется выходная функция-изображение *Y(S).* Затем обратным преобразованием Лапласа находится функция-оригинал *y(t).*

Динамические характеристики САУ

Свойства элементов, их соединений и САУ в целом определяются их характеристиками.
САУ и её элементы имеют статические и динамические характеристики

Статические характеристики *определяют зависимость между выходной и входной величинами элемента или системы в установившемся состоянии.*

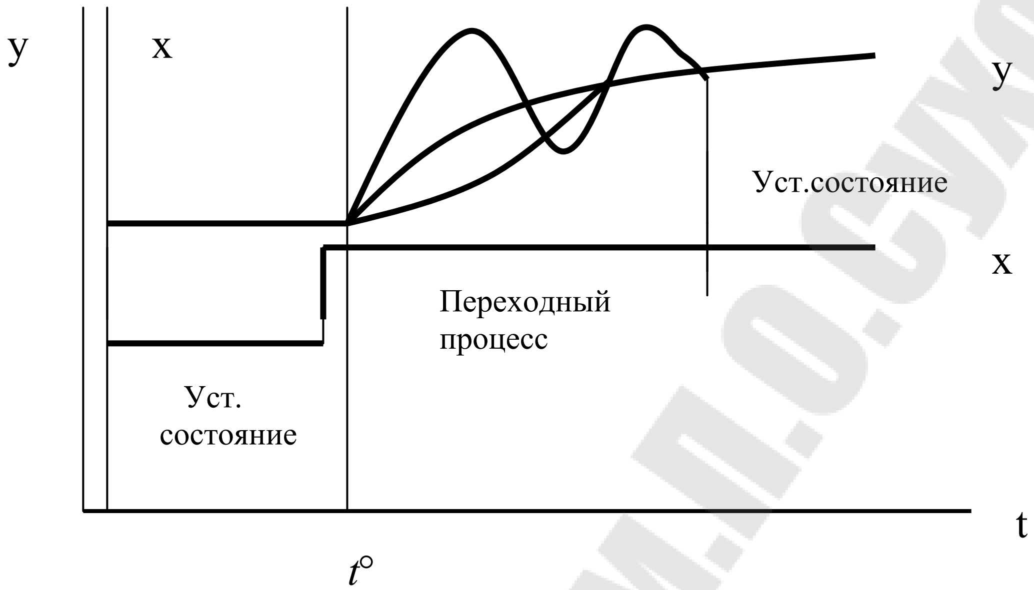
Динамические характеристики *определяют свойства элементов или системы в переходном процессе.*

Динамические характеристики подразделяются на временные (переходные) и частотные.
Знание характеристик элементов и САУ необходимо для оценки их динамических свойств, анализа и синтеза систем с требуемым качеством функционирования.

10. Переходная функция САУ.

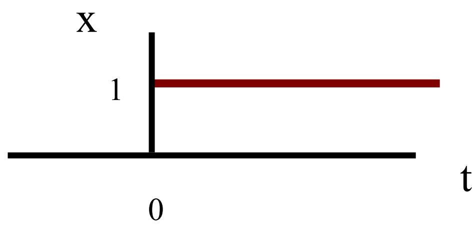
ВременнÓй характеристикой элемента или системы называется изменение во времени значений выходной величины (т.е. отклик) при скачкообразном (ступенчатом) изменении входной величины.

Для САУ в целом временна́я характеристика --- это процесс изменения выходной величины при переходе системы из одного равновесного состояния в другое в результате ступенчатого изменения входной величины.



Для анализа динамических свойств САУ ступенчатое входное воздействие обычно задают в виде единичной ступенчатой функции (единичного скачка):

$$x(t) = \begin{cases} 0, \; при \; t < 0 \\ 1, \; при \; t \geq 0 \end{cases}$$



Отклик выходной величины *y(t)* элемента или системы (т.е. временнáя характеристика) в этом случае называется переходной функцией (переходной характеристикой элемента или системы) и обозначается *h(t).*

Переходные (вообще, временные) характеристики легко определяются с помощью преобразований Лапласа.

Уравнение динамики элемента или системы (в операционной форме):

$$y(t)=W(p)x(t); \qquad (1)$$

запишем для переходной функции *(y(t) – h(t))*

$$h(t)=W(p)x(t)\ . \qquad (2)$$

После преобразования по Лапласу этого уравнения получим уравнение в изображениях:

$$h(t) - H(s)$$
$$x(t) \to X(s)$$
$$H(S)=W(S)X(S)\ . \qquad (3)$$

Изображение *X(S)* для входного воздействия в виде единичной ступенчатой функции:

$$X(S) = L[(x(t))] = L(1) = \frac{1}{S}\ . \qquad (4)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-st} x dt = -\frac{e^{-st}}{s}\Bigg|_0^{\infty} = \frac{1}{s}\ .$$

Таким образом, переходная функция (точнее её изображение) по уравнению (3):

$$H(S) = \frac{W(S)}{S} \qquad (5)$$

Определив *H(S),* с помощью обратного преобразования Лапласа можно определить переходную функцию (оригинал) элемента или системы:

$$h(t) = L^{-1}[H(S)]. \qquad (6)$$

С другой стороны, если известна переходная функция (например, определена экспериментально), можно определить передаточную функцию элемента или системы:

---- для изображений $W(S) = S \cdot H(S);$

---- для оригиналов $W(P)=L^{-1}[W(S)]$.

Переходная функция *h(t)* может быть использована для определения отклика элемента или системы на произвольное входное воздействие:

Допустим: *x(t)* – произвольная входная функция, а её изображение *X(S)*.
Тогда изображение выходной величины *Y(S),* т.е. отклик:

$$Y(S) = SH(S) \cdot X(S). \tag{7}$$

Далее стандартными методами определяем оригинал выходной функции *y(t)*.

11. Частотные характеристики САУ.

Наиболее часто при исследовании динамических свойств элементов и систем применяют гармоническое входное воздействие:

$$x = a_x \sin \omega t \ , \tag{1}$$

где a_x и ω --- амплитуда и угловая частота входного воздействия.

Такое воздействие проще осуществить при проведении экспериментов и позволяет при минимальном объёме вычислений получить достаточно полные динамические характеристики элементов и системы.

Если на вход системы подавать синусоидальные колебания (1), то на выходе после затухания переходных процессов (этим пока заниматься не будем) также возникают синусоидальные гармонические колебания с той же частотой, но с другой амплитудой и сдвинутые по фазе относительно входных колебаний:

$$y = A_y \sin(\omega t + \varphi), \tag{2}$$

где φ – сдвиг по фазе выходных колебаний относительно входных.

Зависимости отношения амплитуд $A_y \big/ a_x$ и сдвига по фазе φ от частоты ω

$$\frac{A_y}{a_x} = f(\omega); \quad \varphi(a)$$

дают полную картину динамических свойств САУ или её элементов.

Получение этих зависимостей значительно упрощается, если использовать комплексную форму описания гармонических сигналов.

В комплексном виде:
входное гармоническое воздействие:

$$x = a_x e^{i(\omega t)}; \tag{3}$$

выходное гармоническое колебание:

$$y = A_y \cdot e^{i(\omega t+\varphi)} \,. \tag{4}$$

В соответствии с теорией комплексных чисел:

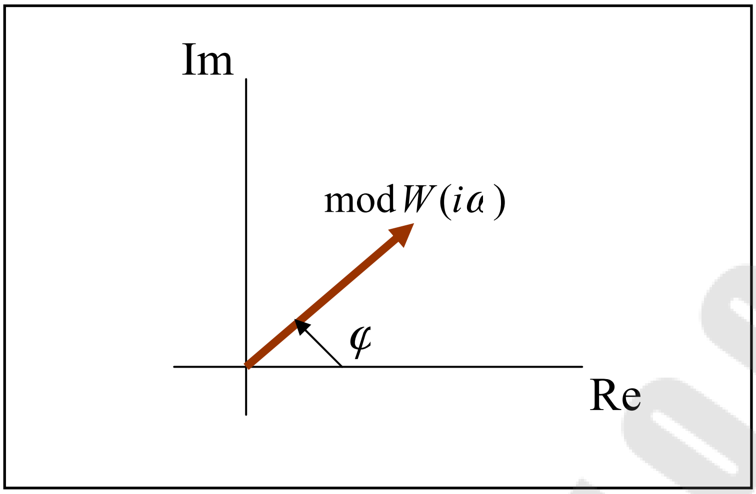
$$ae^{i(\omega t+\varphi)} = \underbrace{a\cos(\omega t+\varphi)}_{\substack{\textit{действ.часть} \\ \textit{компл.величины} \\ \mathrm{Re}(ae^{i(\omega t+\varphi)})}} + \underbrace{ia\sin(\omega t+\varphi)}_{\substack{\textit{мнимая часть} \\ \mathrm{Im}(ae^{i(\omega t+\varphi)})}} . \tag{5}$$

Отношение значений выходной величины к значениям входной величины в комплексной форме называется амплитудно-фазовой частотной характеристикой системы или элемента (АФЧХ):

$$A\Phi ЧX = W(i\omega) = \frac{[y(t)]_k}{[x(t)]_k} = \frac{A_y e^{i(\omega t+\varphi)}}{a_x \cdot e^{i\omega t}} = \frac{A_y}{a_x} e^{i\varphi} \,. \tag{6}$$

W(iω) – называется также частотной передаточной функцией.

W(iω) – это комплексная величина:



$$\operatorname{mod} W(i\omega) = \frac{A_y}{a_x}.$$

Фаза (т.е.угол) – φ.

Зависимость модуля АФЧХ от частоты колебаний ω называется амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ):

$$A(\omega) = \frac{A_y}{a_x}.$$

Зависимость сдвига фаз входных и выходных колебаний φ от частоты ω называется фазо-частотной характеристикой (ФЧХ):

$$\varphi(\omega).$$

С учетом АЧХ и ФЧХ – АФЧХ (6) можно записать в виде:

$$W(i\omega) = A(\omega)e^{i\varphi(\omega)}$$

или

$$W(i\omega) = P(\omega) + iQ(\omega),$$

где $P(\omega)$ – вещественная часть комплексной величины $W(i\omega)$ – – называется вещественной частотной характеристикой (ВЧХ).

$Q(\omega)$ – мнимая часть --- мнимая частотная характеристика элемента или системы (МЧХ).

Таким образом, получаем пять частотных характеристик элемента или системы:

Амплитудно-фазо-чсастотную (АФЧХ) - $W(i\omega)$;

Амплитудно-частотную (АЧХ) *A(ω);*
Фазо-частотную (ФЧХ) *φ(ω);*
Вещественную частотную (ВЧХ) *P(ω);*
Мнимую частотную (МЧХ) *Q(ω).*

Между ними имеется ряд зависимостей:

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} \;; \tag{7}$$

$$\varphi(\omega) = atctg\frac{Q(a)}{P(\omega)} \;. \tag{8}$$

А теперь рассмотрим общее уравнение динамики при подаче на вход элемента или системы гармонических колебаний.

$$a_n\frac{d^n y}{dt^n} + \ldots + a_1\frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m\frac{d^m x}{dt^m} + \ldots + b_1\frac{dx}{dt} + b_0 x \;; \tag{9}$$

$$x = a_x e^{i\omega t}; \qquad y = A_y e^{i(\omega t + \varphi)} \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = a_x i\omega a_x e^{i\omega t} = i\omega x; \qquad &&\frac{d^2 x}{dt} = (i\omega)^2 x; \\ &\frac{d^m x}{dt^m} = (i\omega)^m x; &&\frac{d^n y}{dt^n} = (i\omega)^n y;\ldots \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Подставляя (11) в (9), получим:

$$\left[a_n(i\omega)^n + \ldots + a_1 i\omega + a_0\right]y = \left[b_m(i\omega)^m + \ldots + b_1(i\omega) + b_0\right]x \tag{12}$$

Отношение $\frac{y}{x}$ называется **передаточной функцией.** В данном случае это будет частотная передаточная функция:

$$W(i\omega) = \frac{y}{x} = \frac{\left[b_m(i\omega)^m + \ldots + b_1 i\omega + b_0\right]}{\left[a_n(i\omega)^n + \ldots + a_1 i\omega + a_0\right]}. \tag{13}$$

Из сравнения передаточной функции $W(i\omega)$ с ранее полученными передаточными функциями $W(p)$ и $W(S)$ видно, что АФЧХ можно получить непосредственно из передаточных функций $W(p)$ или $W(S)$, заменив символы p или S на $i\omega$.

Итак, уравнение динамики элемента или системы в случае гармонического входного воздействия записывается в виде:

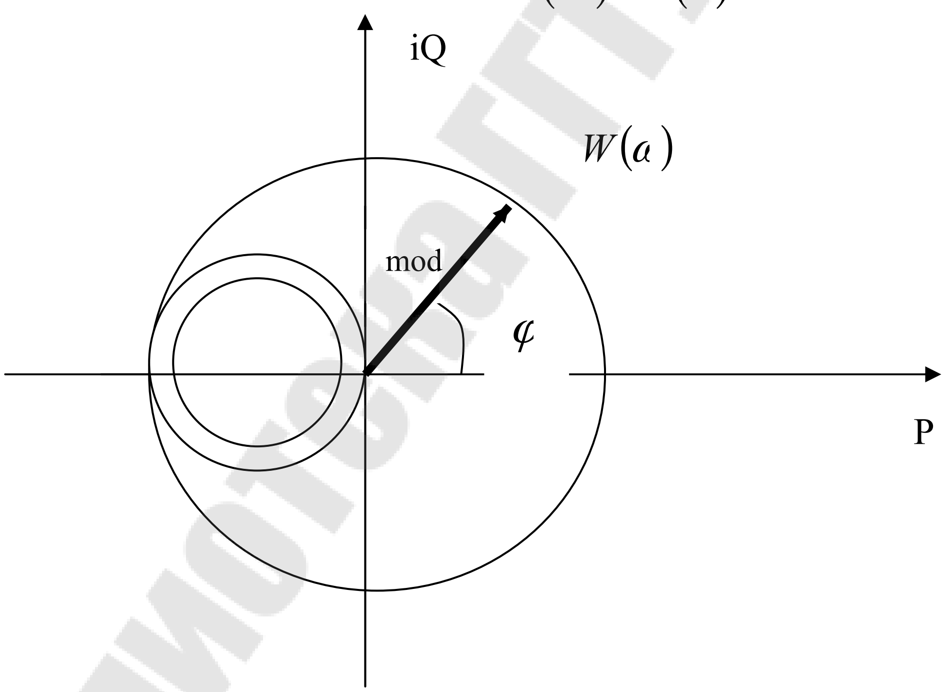
$$. \qquad y(t) = W(i\omega)x(t)$$

(14)

В инженерных расчётах широко используется графическое изображение АФЧХ на комплексной плоскости в координатах *(P; iQ)*.

График АФЧХ на комплексной плоскости называется **годографом АФЧХ** ------ это симметрично замкнутая кривая, прочерченная радиус–вектором $W(i\omega)$ при изменении частоты от 0 до ∞.

$$\mathrm{mod}\,W(i\omega) = A(\omega).$$



Каждый типовой элемент САУ (так же как и типовые САУ) имеет свой характерный годограф АФЧХ.

12. Логарифмические частотные характеристики.

В настоящее время метод логарифмических частотных характеристик является одним из основных методов анализа и синтеза САУ. Он удобен тем, что при переходе к логарифмам операции умножения величин заменяются более простыми операциями сложения, а крутизна зависимостей в логарифмическом масштабе существенно уменьшается.

Частотная передаточная функция:

$$W(i\omega) = A(\omega)e^{i\varphi(\omega)}, \qquad (1)$$

где $A(\omega) = \dfrac{A_{вых}}{A_{вх}}$ --- отношение амплитуд выходного и входного гармонических сигналов.

Логарифмируем (1):

$$\lg W(i\omega) = \lg A(\omega) + i\varphi(\omega)\lg e \; . \qquad (2)$$

В технике широко используется понятие **коэффициент усилия (ослабления) мощности сигнала:**

$$\frac{N_{вых}}{N_{вх}},$$

который обычно выражается в логарифмах

$$\lg\left(\frac{N_{вых}}{N_{вх}}\right).$$

Логарифмической единицей усилия мощности сигнала при прохождении его через какое-либо устройство в технике принят **бел (Б)** или **децибел(дБ).**

$$\left[\lg\frac{N_{вых}}{N_{вх}}\right] = Б; \qquad \left[10\lg\frac{N_{вых}}{N_{вх}}\right] = \partial Б.$$

Мощность сигнала (гармонического) пропорционально на квадрат его амплитуды: $N \approx A^2$.

$$10\lg\frac{N_{вых}}{N_{вх}} = 10\lg\left(\frac{A_{вых}}{A_{вх}}\right)^2 = 20\lg\frac{A_{вых}}{A_{вх}} = 20\lg A(\omega) \qquad (3)$$

Функция $$L(a) = 20\lg A(a), \qquad (4)$$

построенная в логарифмических координатах:

$$L(a) = f(\lg a), \qquad (L \text{ ---- в дБ})$$

– называется **логарифмической амплитудно-частотной характеристикой (ЛАЧХ).**

Фазо - частотная характеристика $\varphi(a)$, построенная в полулогарифмическом масштабе $\varphi(\lg a)$ называется **логарифмической фазо-частотной характеристикой (ЛФЧХ)**, $[\varphi]$---- в рад.

За единицу измерения частоты принимается логарифмическая единица **октава** или более крупная – **декада**.

Октава – это диапазон частот между какой-либо частотой и её удвоенным значением.

Декада – диапазон частот, ограниченный различающимися между собой в 10 раз частотами.

13. Частотные характеристики систем I порядка.

Дифференциальное уравнение динамики системы первого порядка:

$$T_1\frac{dy}{dt} + y = kx \ . \qquad (1)$$

Преобразуем по Лапласу уравнение (1):

$$T_1Y(s) + Y(s) = kx(s). \qquad (2)$$

Передаточная функция

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{k}{1 + T_1 \cdot s} \ . \qquad (3)$$

Подставив в передаточную функцию *W(S)* вместо *S* --- *i ω*, получим АФЧХ системы I порядка:

$$W(i\omega) = \frac{k}{1 + i\omega T_1} \ . \tag{4}$$

Для того чтобы выделить вещественную и мнимую частотные характеристики [*P(ω) и Q(ω)*] умножим числитель и знаменатель (4) на сопряжённое знаменателю комплексное число:

$$W(i\omega) = \frac{K(1 -\ i a T_1)}{(1 + i\omega T_1)(1 - i\omega T_1)} = \frac{k}{1 + (\omega T_1)^2} - i\frac{k a T_1}{1 + (\omega T_1)^2} \tag{5}$$

$$P(\omega) = \frac{k}{1 + (\omega T_1)^2} \quad . \qquad Q(\omega) = -\frac{k a T_1}{1 + (\omega T_1)^2} \tag{6}$$

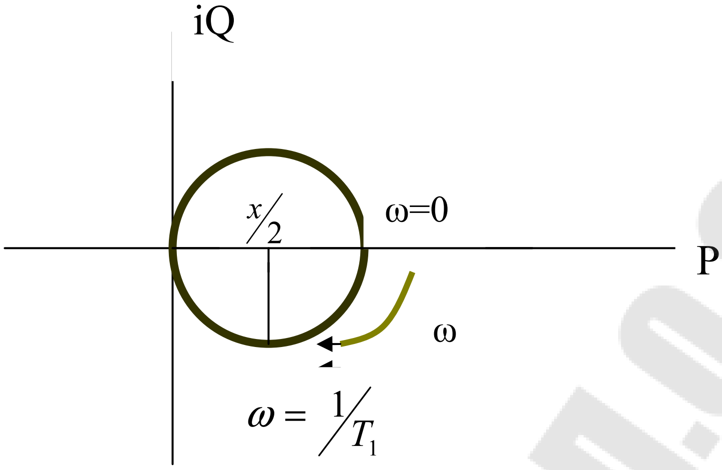
Модуль *W(iω)* т.е. АЧХ:

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = \frac{K}{\sqrt{1 + (\omega T_1)^2}} \quad . \tag{7}$$

ФЧХ:

$$\varphi(\omega) = arctg\,\frac{Q(a)}{P(\omega)} = -arctg\,\omega T_1 \tag{8}$$

Задавая значения ω от 0 до $+\infty$ в выражении (6) в комплексной плоскости поучим годограф АФЧХ:



В данном случае годограф АФЧХ – окружность с центром на вещественной оси.

14. Частотные характеристики системы II порядка.

Дифференциальное уравнение динамики системы второго порядка возьмем в виде:

$$T_2^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + T_1 \frac{dy}{dt} + y = kx. \qquad (1)$$

Преобразовав (1) по Лапласу, получим:

$$T_2^2 S^2 Y(S) + T_1 S Y(S) + Y(S) = KX(S) . \qquad (2)$$

Передаточная функция:

$$W(S) = \frac{Y(S)}{X(S)} = \frac{K}{T_2^2 S^2 + T_1 S + 1} . \qquad (3)$$

При замене $S - i\omega$ передаточная функция (3) превращается в АФЧХ:

$$W(i\omega) = \frac{K}{1 + i\omega T_1 - \omega^2 T_2^2} . \qquad (4)$$

Действительная частотная характеристика:

$$P(\omega)=\frac{K\left(1-\omega^2T_2^2\right)}{\left(1-\omega^2T_2^2\right)+\left(\omega T_1\right)^2}\,. \tag{5}$$

Мнимая частотная характеристика:

$$Q(\omega)=-\frac{K}{\left(1-\omega^2T_2^2\right)^2+\left(\omega T_1\right)^2}\,. \tag{6}$$

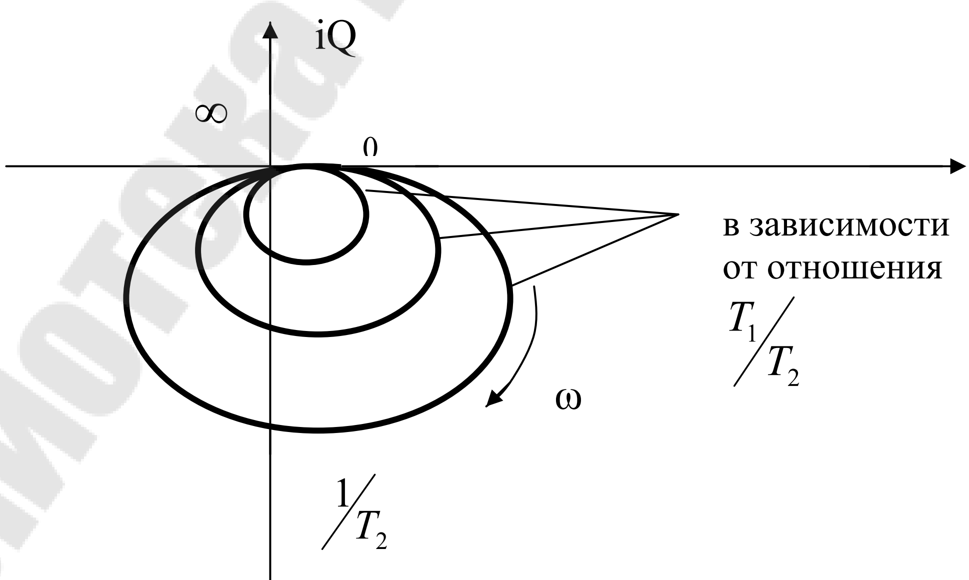
АЧХ:

$$A(\omega)=\sqrt{P^2(\omega)+Q^2(\omega)}=........$$

ФЧХ:

$$\varphi(\omega)=arctg\frac{Q(a\ )}{P(\omega)}=............$$

Годограф АФЧХ:



15. Типовые динамические звенья САУ.

Любая САУ строится из весьма широкого набора элементов, разнообразных по конструктивному исполнению и принципу действия (электрические, электронные, механические, гидравлические, пневматические и т.д.). Однако, независимо от особенностей протекающих в них физических процессов, все элементы, используемые в САУ, по своим динамическим свойствам, т.е. по динамическим уравнениям или передаточным функциям, можно разделить на небольшое число типов.

Элементы САУ, характеризующиеся определённым типом динамического уравнения (передаточной функции), называются типовым динамическим звеном.

Типы динамических звеньев САУ:

– пропорциональное
– запаздывающее
– интегрирующее
– дифференцирующее
– апериодическое I порядка
– форсирующее I порядка
– колебательное
– апериодическое II порядка
– форсирующее II порядка
– особые (неминимально-фазовые неустойчивые с распределёнными параметрами).

15.1. Пропорциональное звено.

Динамическое управление:

$$y = kx \ , \tag{1}$$

где k ---- коэффициент усиления или передачи; $k = const$.

Пропорциональное звено также называется усилительным. Пропорциональное звено передаёт сигналы от входа к выходу без сдвига по фазе, причём отношение амплитуд входной и выходной величин сохраняется постоянным при всех частотах.

Передаточная функция:

$$W(p) = k = const \ .$$

Переходная функция (при единичном ступенчатом воздействии на вход):

$$h(t) = W(p) \cdot x(t) \ . \tag{2}$$

$$x(t) = \begin{cases} 0 & : \quad t < 0 \\ 1 & : \quad t \ge 0 \end{cases}; \qquad \begin{matrix} h(t) = 0 & t < 0 \\ h(t) = k & t \ge 0 \end{matrix}.$$

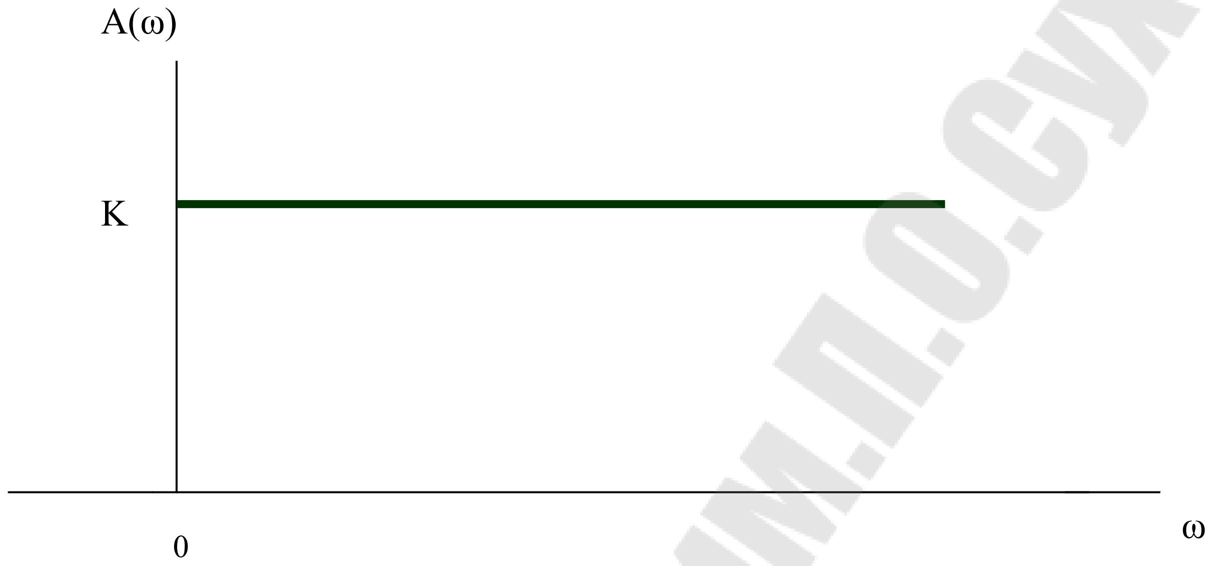
АФЧХ.

Получаем непосредственно из передаточной функции *W(p),* заменив *p* на *iω:*

$$W(i\omega) = k = k + i \cdot 0 \qquad (3)$$

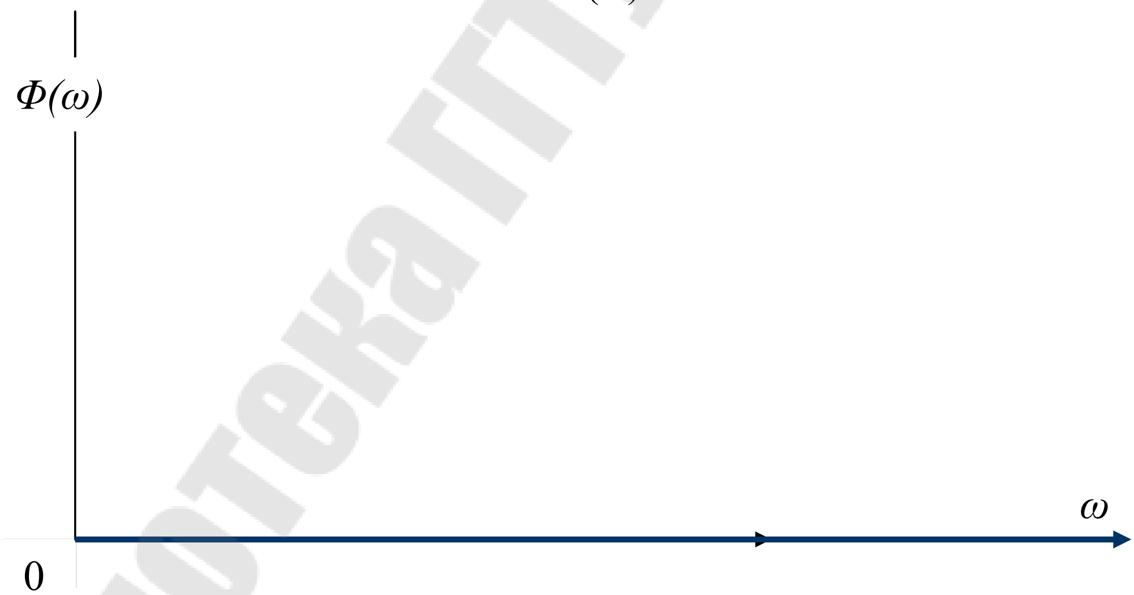
АЧХ

$$A(\omega) = \mathrm{mod}(W(i\omega)) = k \qquad (4)$$



ФЧХ

$$\varphi(\omega) = arctg\frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = 0 \qquad (5)$$



К пропорциональным звеньям САУ относятся:

- рычажные механизмы,
- зубчатые передачи механических устройств автоматики;
- электрические потенциометры.

В автоматике регулирующие пропорциональные звенья (К - регулируется) называются П – регуляторами (пропорциональный регулятор).

15.2. Запаздывающее звено.

Входная и выходная величины этого звена описываются уравнением связи:

$$y(t - \tau) = x(t), \tag{6}$$

где τ – время запаздывания в передаче сигнала.

Преобразуем уравнение (6) по Лапласу:

$$e^{-\tau s y} y(s) = x(s). \tag{7}$$

Откуда передаточная функция (в изображениях):

$$W(s) = \frac{y(s)}{x(s)} = e^{\tau s} \quad . \tag{8}$$

<u>Переходная функция:</u>

- в изображениях:

$$H(s) = \frac{W(s)}{s} = \frac{e^{\tau s}}{s} \; ; \tag{9}$$

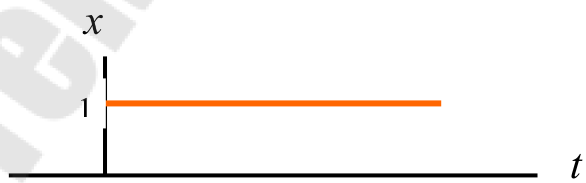
- оригинал

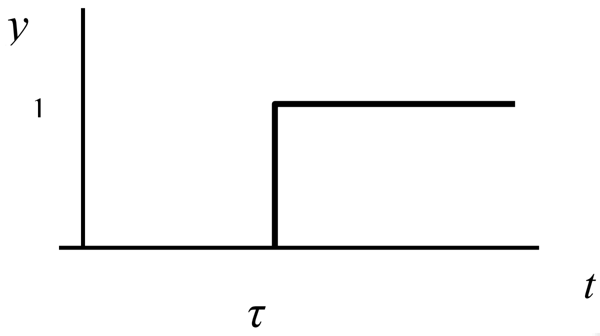
$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{e^{\tau s}}{s}\right\} = 1(t-\tau) \qquad \text{----------} \tag{10}$$

------ это единичная функция:

$$h(t) = 0 \quad \text{при} \quad t < \tau$$

$$h(t) = 1 \quad \text{при} \quad t \geq \tau .$$





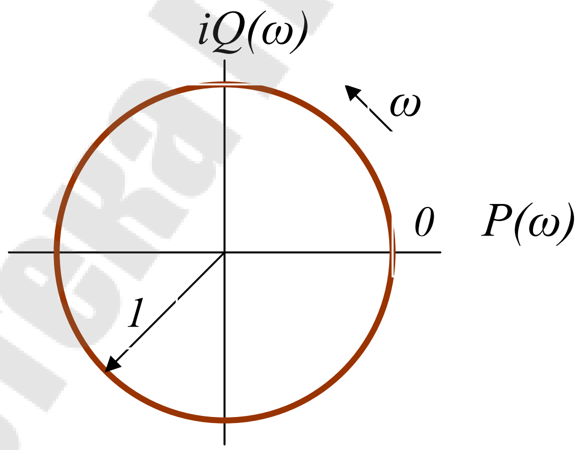
АФЧХ запаздывающего звена:

$$W(i\omega) = e^{i\omega t} = \cos\omega\tau + i\sin\omega\tau \qquad (11)$$

АЧХ:
$$A(\omega) = \mathrm{mod}\big(W(i\omega)\big) \qquad (12)$$

ФЧХ:
$$\varphi(\omega) = arctg\,\frac{Q(\omega)}{P(\omega)} =$$

$$= arctg\,\frac{\sin\omega\tau}{\cos\omega t} = arctg\;tg\,\omega\tau = \omega\tau\ . \qquad (13)$$



Примерами запаздывающих звеньев в системах автоматики являются:
– размерные реле времени (электронные, электрические, механические, гидравлические, пневматические).

– длинные связи между элементами системы (длинные трубопроводы в гидропневмосистемах).

16. Интегрирующее и дифференцирующее звенья.

16.1. Интегрирующее звено.

Динамическое уравнение:

$$T\frac{dy}{dt} = x, \tag{1}$$

где T – постоянная времени.

Передаточная функция: получим, преобразовав (1) по Лапласу:

$$TsY(s) = X(s) . \tag{2}$$

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{TS} . \tag{3}$$

W(s) – передаточная функция для изображений входной и выходной величин.

Переходная характеристика.

Её определим двумя способами:

= непосредственным интегрированием (1):

$h(t) = y(t)$ при единичном ступенчатом входном сигнале: $x = 1$

$$h(t) = y(t) = \int\frac{x}{T}dt = \frac{t}{T} \tag{4}$$

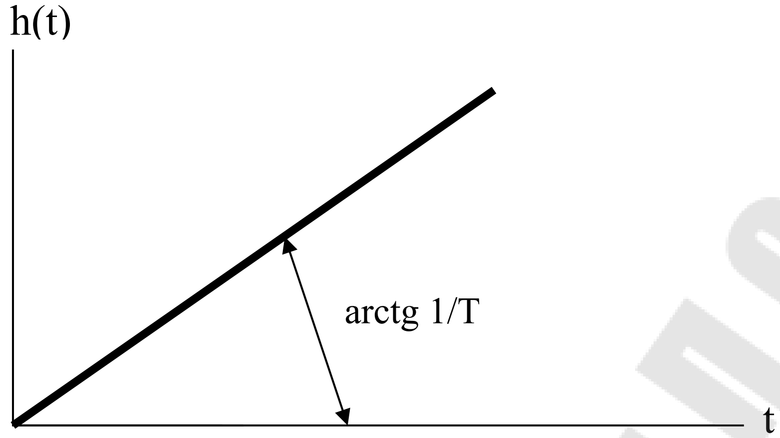
= используя преобразование Лапласа:

Переходная характеристика в изображениях:

$$H(S) = \frac{W(S)}{S} = \frac{1}{TS^2} . \tag{5}$$

Оригинал переходной функции определяем обратным преобразованием Лапласа:

$$h(t) = L^{-1}\{H(S)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{TS^2}\right\} = \frac{t}{T} \tag{6}$$

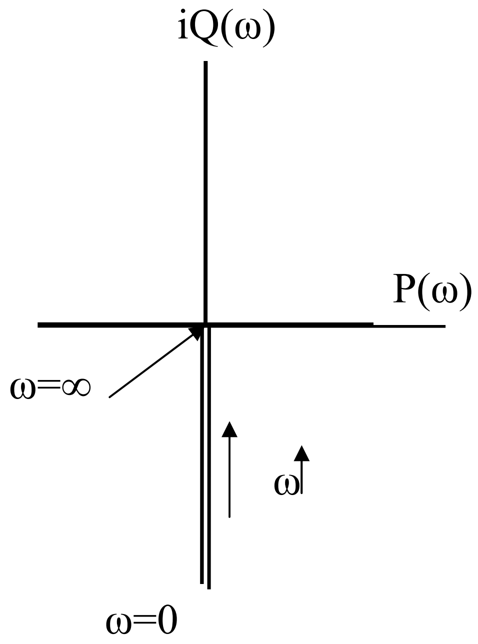


<u>АФЧХ</u>: получаем из *W(S)* заменой $S \to i\omega$:

$$W(i\omega) = \frac{1}{iT\omega} = -\frac{i}{T\omega} \qquad (7)$$

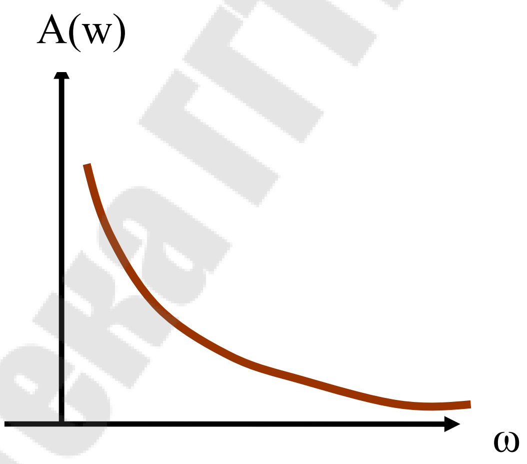
$$P(\omega) = 0 \qquad\qquad Q(\omega) = -\frac{1}{T\omega} \qquad (8)$$

<u>Годограф АФЧХ:</u>



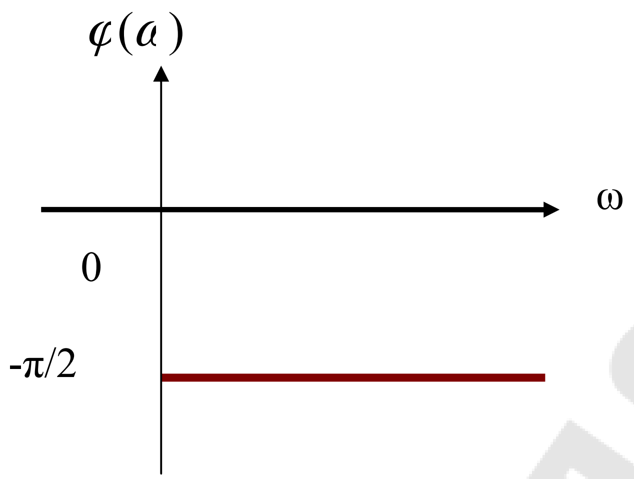
АЧХ.

$$A(\omega) = \mathrm{mod}\{W(i\omega)\} = \frac{1}{T\omega}. \tag{9}$$



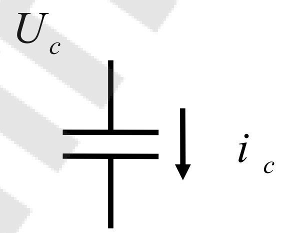
ФЧХ.

$$\varphi(\omega) = arctg\ \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = -\frac{\pi}{2}. \tag{10}$$



Примеры интегрирующих звеньев:

- электрический конденсатор.



При прохождении тока i_c (т.е. зарядка конденсатора) напряжение на его обкладках интегрируется:

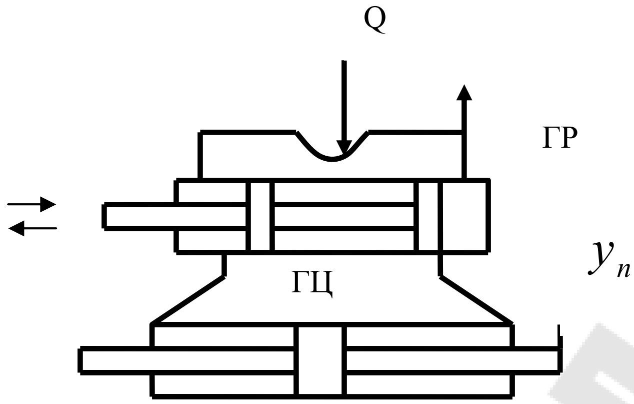
$$U_c = \frac{1}{c}\int i_c\,dt \quad . \tag{11}$$

Уравнение динамики конденсатора:

$$c\frac{dU_c}{dt} = i_c \tag{12}$$

(12) соответствует уравнению динамики интегрирующего звена.

<u>- гидравлическое управляющее устройство, состоящее из гидрораспределителя и ненагруженного гидроцилиндра</u>.



Смещение поршня гидроцилиндра y_n по мере поступления расхода жидкости Q в одну из полостей гидроцилиндра непрерывно возрастает (накапливается):

$$\pm\, y_n = \frac{1}{F_ц}\int Qdt \; . \tag{13}$$

Уравнение динамики поршня гидроцилиндра:

$$F_ц \frac{dy_n}{dt} = Q \; . \tag{14}$$

- **пневмогидроаккумуляторы** (интегрирующие звенья по давлению)
- **спидометры автомобилей.**
- **электрические счётчики.**

В автоматике регулирующие интегрирующие звенья [Т – регулируется] называются <u>И – регуляторами</u> (интегральный регулятор).

16.2. Дифференцирующее звено.

Описывается динамическим уравнением вида:

$$y = T\frac{dx}{dt} \; . \tag{15}$$

<u>Передаточная функция</u> (в изображениях):

$$Y(S) = TS \cdot X(S)\,; \qquad W(S) = \frac{Y(S)}{X(S)} = TS \; . \tag{16}$$

Переходная функция:

в изображениях:

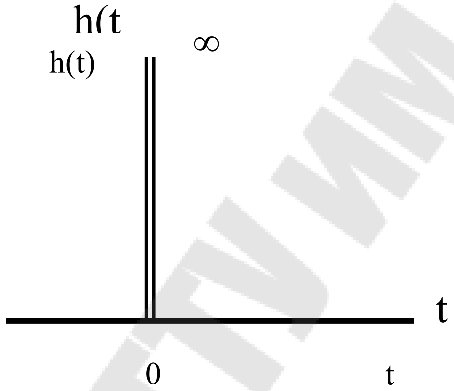
$$H(S) = \frac{W(S)}{S} = T\ ; \qquad (17)$$

оригинал:

$$h(t) = L^{-1}(T) = T\delta(t), \qquad (18)$$

где $\delta(t)$ - импульсная функция Дирака:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, t = 0 \\ 0, t \neq 0 \end{cases}$$



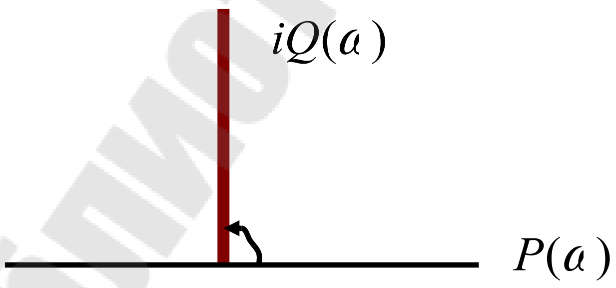
АФЧХ. Из (16) :

$$S - i\omega$$

$$W(i\omega) = iT\omega\ . \qquad (17)$$

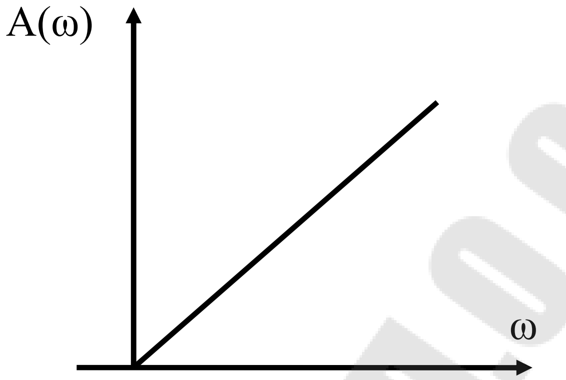
$$P(\omega) = 0\ ; \qquad Q(\omega) = T\omega\ . \qquad (18)$$

Годограф АФЧХ:



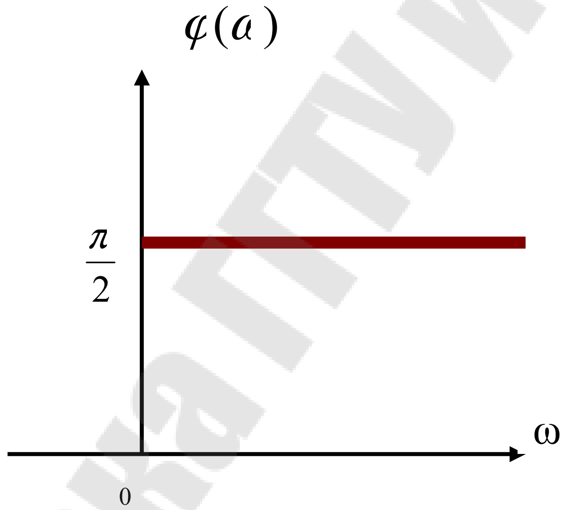
АЧХ.

$$A(\omega) = T\omega \; . \qquad (19)$$



ФЧХ.

$$\varphi(\omega) = +\frac{\pi}{2} \qquad (20)$$



Все частотные характеристики дифференцирующих звеньев являются обратными по отношению к интегрирующим звеньям.

Примеры дифференцирующих звеньев.

---- тахогенератор:
Преобразует угловую скорость:

$\Omega = \dfrac{d\alpha}{dt}$ ротора в электрическое напряжение U, пропорциональное угловой скорости Ω.

$$U = K\frac{d\alpha}{dt}.$$ ---- это уравнение аналогично дифференциальному уравнению (15).

В автоматике регулирующие дифференцирующие звенья называются дифференциаторами.

17. Апериодическое и форсирующее звенья 1-го порядка.

17.1. Апериодическое звено 1-го порядка.

Описывается динамическим уравнением:

$$T\frac{dy}{dt} + y = kx \ , \tag{1}$$

T--- постоянная времени;

k --- коэффициент передачи звена.

Передаточная функция (в изображениях): -------

уравнение (1) преобразуем по Лапласу:

$$TsY(s) + Y(s) = kX(s) \ , \tag{2}$$

откуда:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{k}{1+Ts} \tag{3}$$

Переходная характеристика:

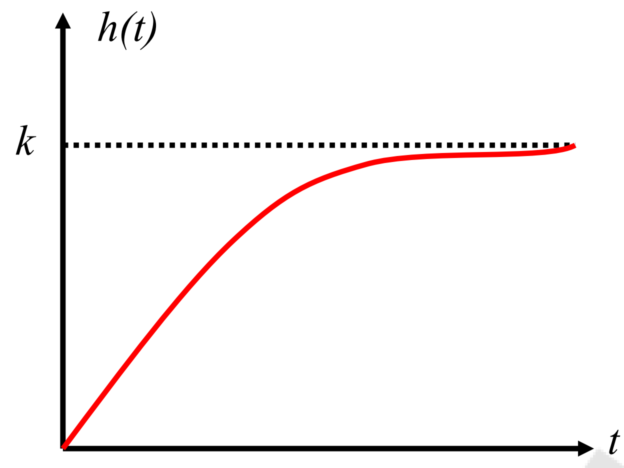
В изображениях:

$$H(s) = \frac{W(s)}{s} = \frac{k}{(1+Ts)s} \ . \tag{4}$$

Оригинал: (по таблице $L^{-1}(\frac{1}{(\alpha+s)s}) = \frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})$);

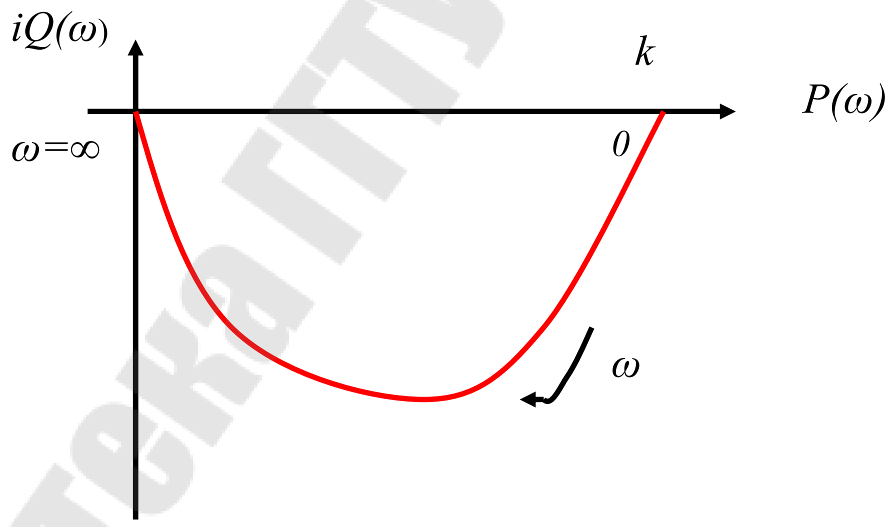
$$h(t) = L^{-1}\left(\frac{k/T}{(\frac{1}{T}+s)s}\right) = \frac{k}{T}T\,(1-e^{-t/T}) \tag{5}$$

$$h(t) = k(1-e^{-t/T})$$



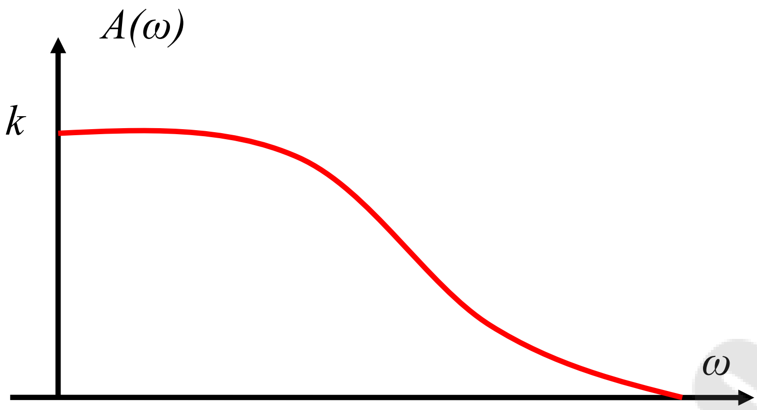
АФЧХ. (из (3) $s - i\omega$)

$$W(i\omega)=\frac{k}{1+i\omega T}=\frac{k}{1+\omega^2T^2}-i\frac{k\omega T}{1+\omega^2T^2}\ . \qquad (6)$$



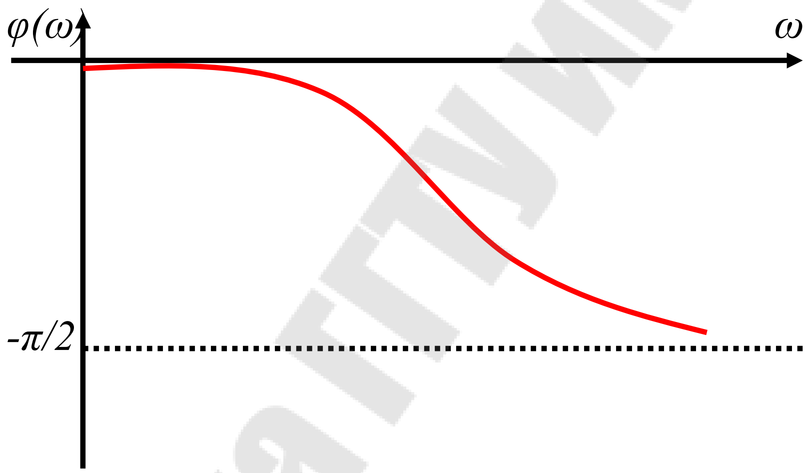
АЧХ.

$$A(\omega)=\sqrt{P^2(\omega)+Q^2(\omega)}=\sqrt{\frac{k^2(1+\omega^2T^2)}{(1+\omega^2T^2)^2}}=\sqrt{\frac{k^2}{1+\omega^2T^2}}=\frac{k}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}\ . \qquad (7)$$



ФЧХ.

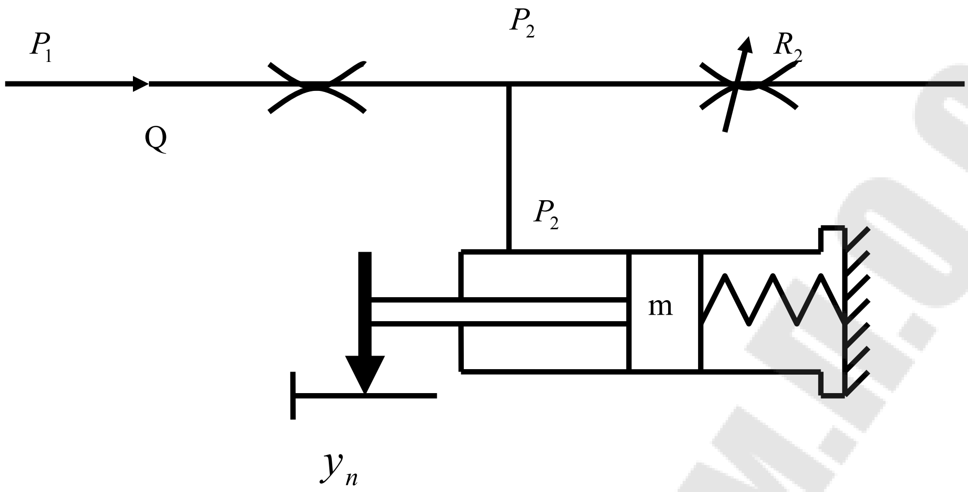
$$\varphi(\omega) = actg\,\frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = -arctg\,\omega T \quad . \tag{8}$$



К апериодическим звеньям 1-го порядка относится широкий класс устройств автоматики, обладающих инерционными свойствами.

Примеры апериодических звеньев 1-го порядка.

1) Гидравлический регулятор.



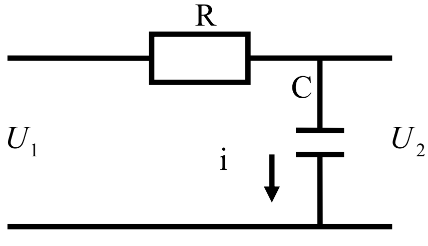
Регулятор состоит из нерегулируемого дросселя R_1, регулируемого дросселя R_2, гидроцилиндра с поршнем массой m (т.е. обладающим инерционностью). На поршень с одной стороны действует давление P_2, а с дугой пружина.

Входная величина - P_2.

Выходная величина – перемещение поршня - y_n.

Регулируя гидравлическое сопротивление R_2, можно изменять давление P_2 и тем самым вызывать перемещение поршня. Причём, вследствие значительной инерционности поршня, отклик на изменение R_2, т.е. перемещение поршня y_n, будет не мгновенным, а плавным – апериодическим.

2) Электрическая цепь с сопротивлением и конденсатором.



Входная величина - U_1.
Выходная величина - U_2.

Система описывается известным уравнением:

$$RC\frac{dU_2}{dt} + U_2 = U_1 . \qquad (9)$$

При изменении напряжения U_1, напряжение U_2 изменяется постепенно, пока не закончится подзарядка или подразрядка конденсатора.

17.2. Форсирующее звено 1-го порядка.

Описывается динамическим уравнением:

$$y = T\frac{dx}{dt} + kx . \qquad (10)$$

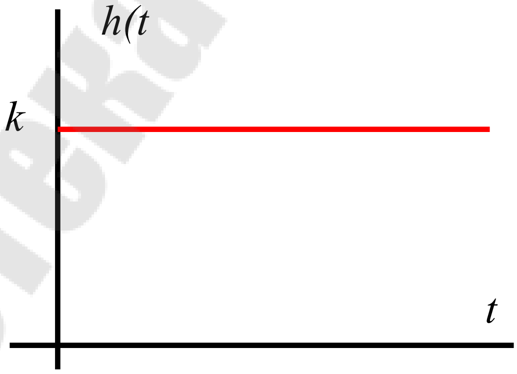
Передаточная функция (в изображениях):

$$W(s) = Ts + k \qquad (11)$$

есть сумма передаточных функций дифференцирующего и пропорционального звеньев.

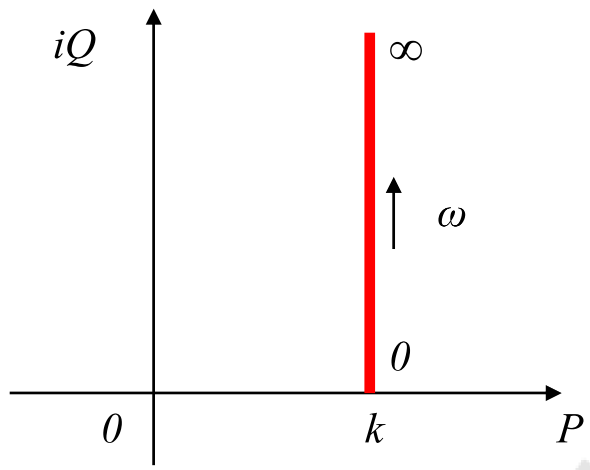
Поэтому переходную функцию найдём как суму переходных функций этих звеньев:

$$h(t) = T\delta(t) + k . \qquad (12)$$



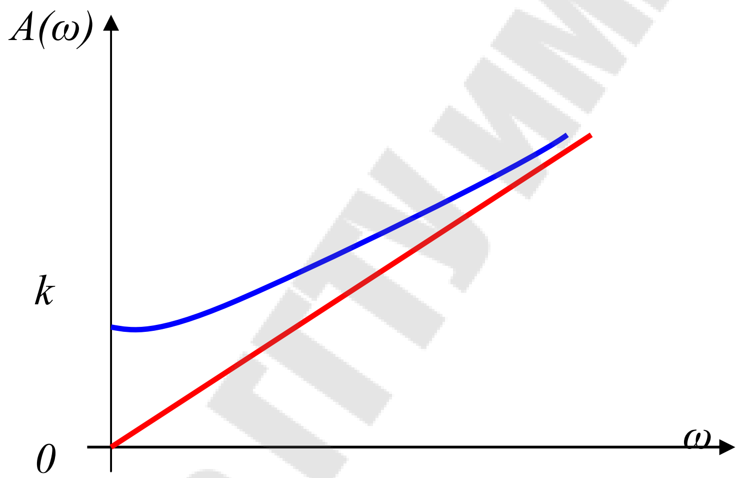
АФЧХ:

$$W(i\omega) = k + i\omega T . \qquad (13)$$



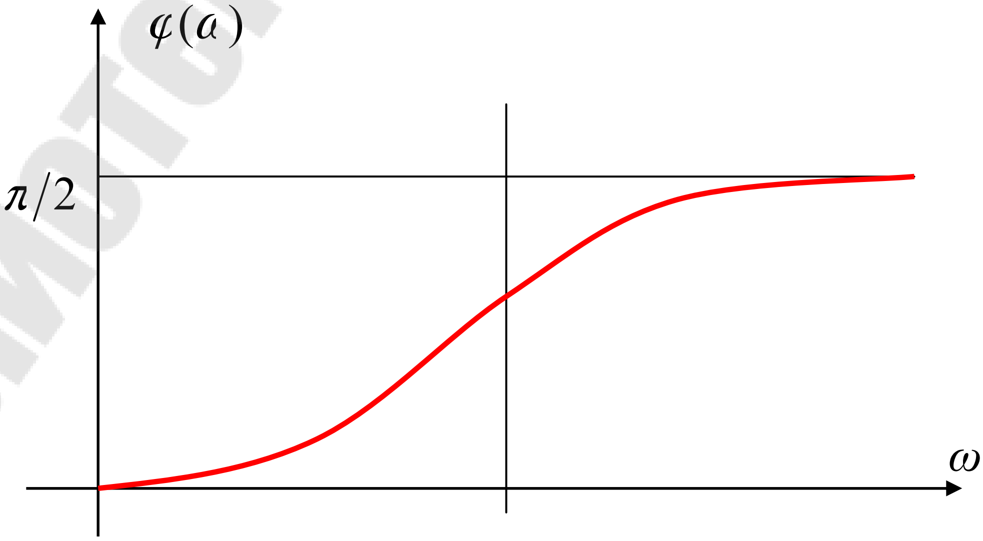
АЧХ:

$$A(\omega) = \operatorname{mod} W(i\omega) = \sqrt{k^2 + \omega^2 T^2}\ . \tag{14}$$



ФЧХ:

$$\varphi(\omega) = arctg\ \frac{T}{k}\omega\ . \tag{15}$$



18. Динамические звенья 2-го порядка.

Динамическое уравнение:

$$T^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2\xi T \frac{dy}{dt} + y = kx \qquad (1)$$

где T - постоянная времени,

ξ - коэффициент демпфирования, определяет динамические свойства звена.

Если $0 < \xi < 1$, звено называется **колебательным** (график переходной функции имеет вид затухающих колебаний).

Если $\xi > 1$, звено называется **апериодическим**.

Если $\xi = 1$, звено становится **консервативным** (график переходной функции имеет вид незатухающих колебаний, амплитуда которых определяется значением вызвавшего их воздействия).

Передаточная функция звеньев, описываемых уравнением (1):

$$W(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1}. \qquad (2)$$

АФЧХ:

$$W(i\omega) = \frac{k}{1 - \omega^2 T^2 + i\omega 2\xi T}. \qquad (3)$$

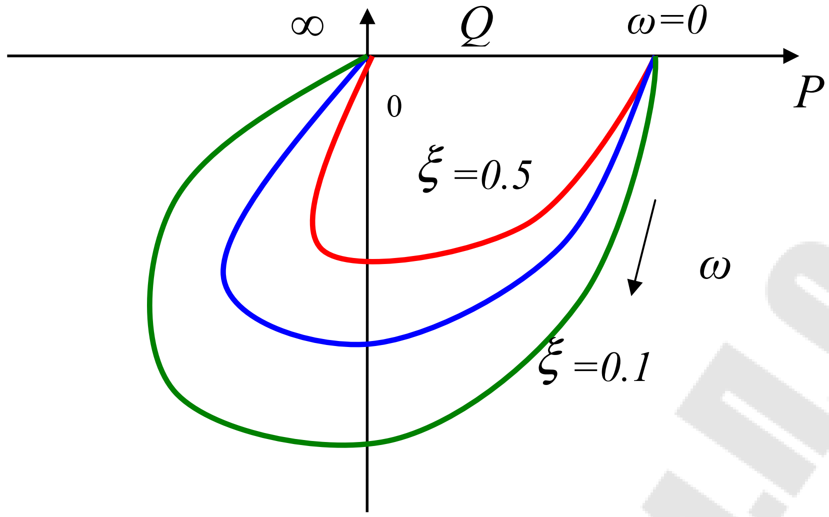
Вещественная часть АФЧХ:

$$P(\omega) = \frac{k(1-\omega^2 T^2)}{(1+\omega^2 T^2) + (2\xi\omega T)^2}. \qquad (4)$$

Мнимая часть:

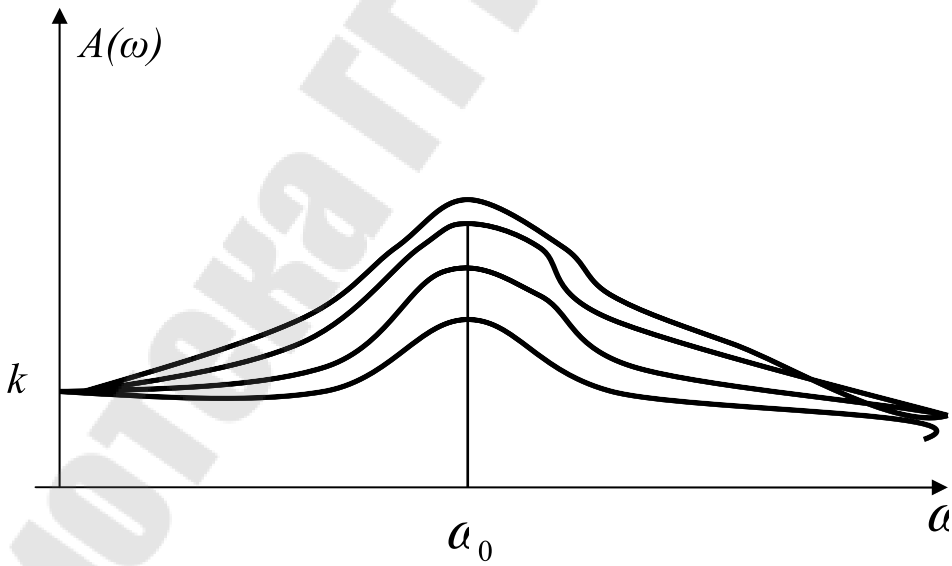
$$Q(\omega) = -\frac{2k\xi\omega T}{(1-\omega^2 T^2)^2 + (2\xi\omega T)^2}. \qquad (5)$$

Годограф АФЧХ:



АЧХ:

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(1-\omega^2 T^2)^2 + (2\xi\omega T)^2}}. \qquad (6)$$



19. Переходные характеристики динамических звеньев 2-го порядка.

Переходная функция (в изображениях):

$$H(s)=\frac{W(s)}{s}=\frac{k}{s(T^2s^2+2\xi Ts+1)}. \qquad (1)$$

Здесь переход к оригиналу существенно зависит от коэффициента демпфирования ξ:

а) $\xi=0$ (консервативное звено – незатухающие колебания)

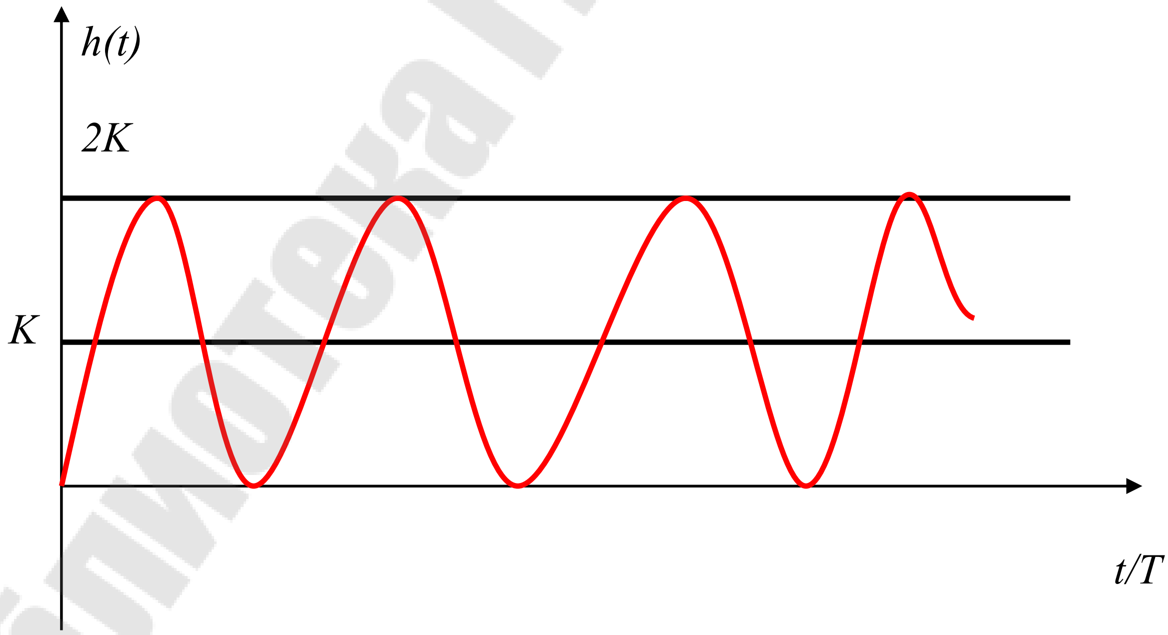
$$H(s)=\frac{k}{s(T^2s^2+1)}=\frac{k}{T^2}\left(\frac{1}{s(s^2+\frac{1}{T^2})}\right). \qquad (2)$$

Используя обратное преобразование Лапласа, получим оригинал переходной функции в виде:

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+\alpha^2)}\right)=\frac{1}{\alpha^2}(1-\cos\alpha t).$$

$$h(t)=k(1-\cos\frac{t}{T}). \qquad (3)$$

Выражение (3) определяет гармонические незатухающие колебания.



б) $\xi > 0$.

$$H(s)=\frac{k}{s(T^2s^2+2\xi Ts+1)}=\frac{k}{T^2}\left(\frac{1}{s(s^2+\frac{2\xi}{T}s+\frac{1}{T^2})}\right)= \tag{4}$$

$$=\frac{k}{T^2}\left(\frac{1}{s(s+\alpha)(s+\gamma)}\right).$$

Обратное преобразование по Лапласу:

$$\frac{1}{s(s+\alpha)(s+\gamma)}\to\frac{1}{\alpha\gamma}\left(1+\frac{\gamma e^{-\alpha t}-\alpha e^{-\gamma t}}{\alpha-\gamma}\right);$$

$$\alpha=\frac{\xi}{T}+\frac{\sqrt{\xi^2-1}}{T}\quad;\qquad\gamma=\frac{\xi}{T}-\frac{\sqrt{\xi^2-1}}{T};$$

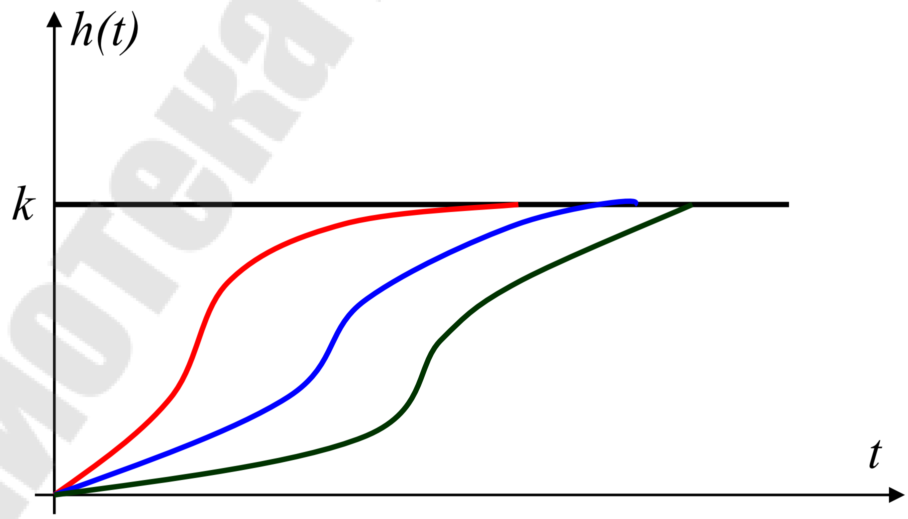
$$\alpha\gamma=\frac{1}{T^2}\;;\qquad\alpha-\gamma=\frac{2\sqrt{\xi^2-1}}{T}.$$

Итак, оригинал переходной функции:

$$h(t)=k\left(1+\frac{\gamma e^{-\alpha t}-\alpha e^{-\gamma t}}{\alpha-\gamma}\right) \tag{5}$$

– если ξ*>1*, то параметры α и γ будут действительными, а переходная характеристика (отклик) будет иметь вид непериодической кривой.

Такое звено называется <u>апериодическим звеном 2-го порядка</u>.



– если $0<\xi<1$, то параметры α и γ будут комплексными. Комплексные функции на графике времени выражаются тригонометрическими функциями (cos и sin).

В этом случае можно показать, что переходная характеристика такого звена будет иметь вид затухающего колебательного процесса:

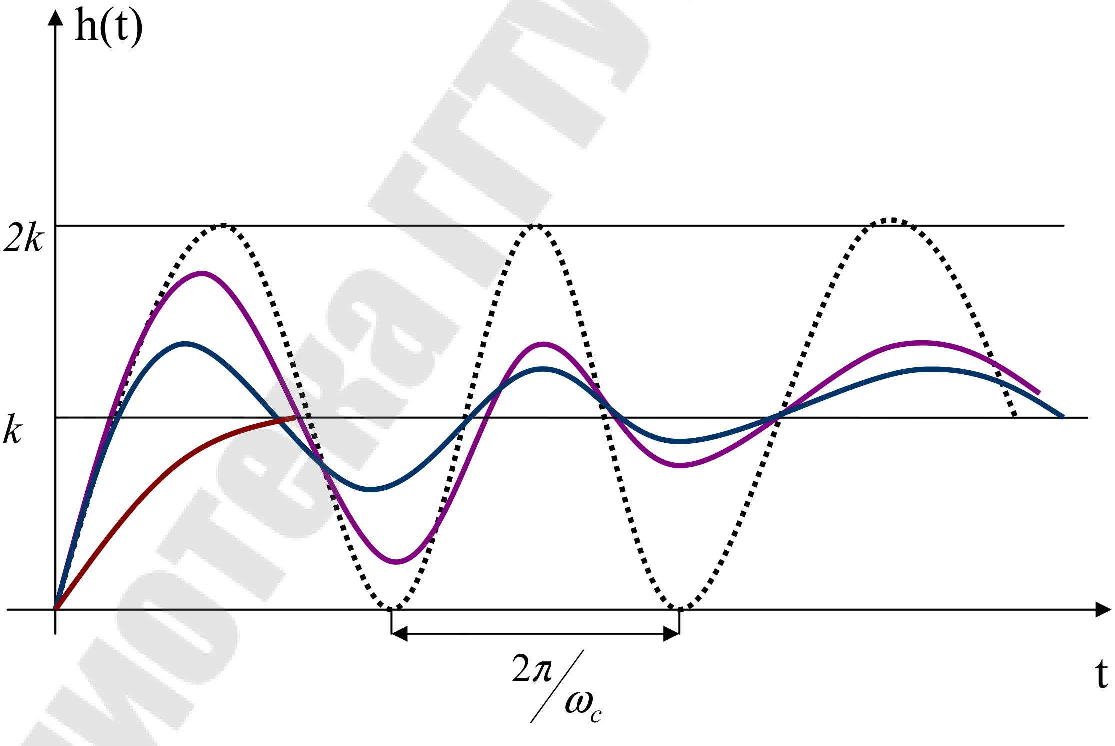
$$h(t) = k(1 - Ae^{-\xi t/T}\sin(\omega_c t + \varphi)) \qquad (6)$$

$$A = \sqrt{1 + \left(\frac{\xi}{T\omega_c}\right)^2}$$

$$\omega_c = \frac{1}{T}\sqrt{1-\xi^2}$$

$$\varphi = arctg\ \frac{\omega_c T}{\xi}$$

ω_c --- частота свободных затухающих колебаний при переходном процессе.



Такое звено называется колебательным.

Колебательное звено имеет три характерные частоты:

a_c--- собственная частота свободных затухающих колебаний при переходном процессе (т.е. при едином ступенчатом входном воздействии).

$$\omega_c = \frac{1}{T}\sqrt{1-\xi^2} \quad ; \tag{7}$$

a_0 --- частота незатухающих колебаний.

$$\omega_0 = \frac{1}{T} \quad ; \tag{8}$$

a_p--- резонансная частота.

$$\omega_p = \omega_0\sqrt{1-2\xi^2} \ . \tag{9}$$

При этой частоте гармонического входного воздействия амплитудная частотная характеристика достигает максимума.

Интенсивность затухания колебаний оценивается логарифмом отношения амплитуд a_1 и a_2 в моменты времени, отличающиеся на период колебания $2\pi/\omega_c$.

Эта величина называется логарифмическим <u>декрементом затухания</u>.

$$\delta = \ln\frac{a_1}{a_2} = \frac{\xi}{T}\frac{2\pi}{\omega_c} \tag{10}$$

<u>Динамическое равнение:</u>

$$y = T^2\frac{d^2x}{dt^2} + 2\xi T\frac{dx}{dt} + x \tag{11}$$

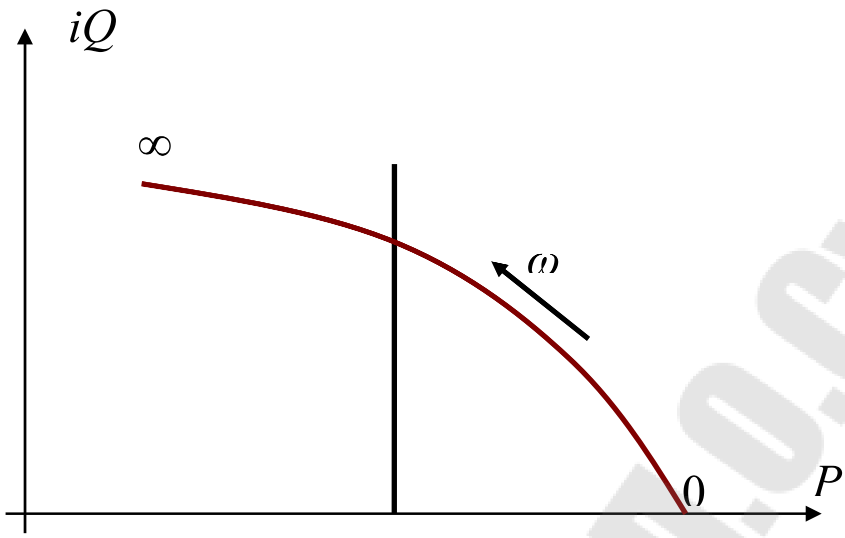
описывает так называемое <u>форсирующие звено 2-го порядка</u>.

Передаточная функция форсирующего звена:

$$W(s) = T^2s^2 + 2\xi Ts + 1. \tag{12}$$

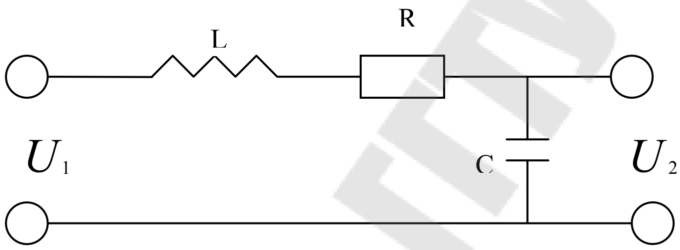
АФЧХ:

$$W(i\omega) = 1 - T^2\omega^2 + i2\xi\omega T\ . \tag{13}$$



Примеры колебательных звеньев

1. <u>Электрический колебательный контур.</u>

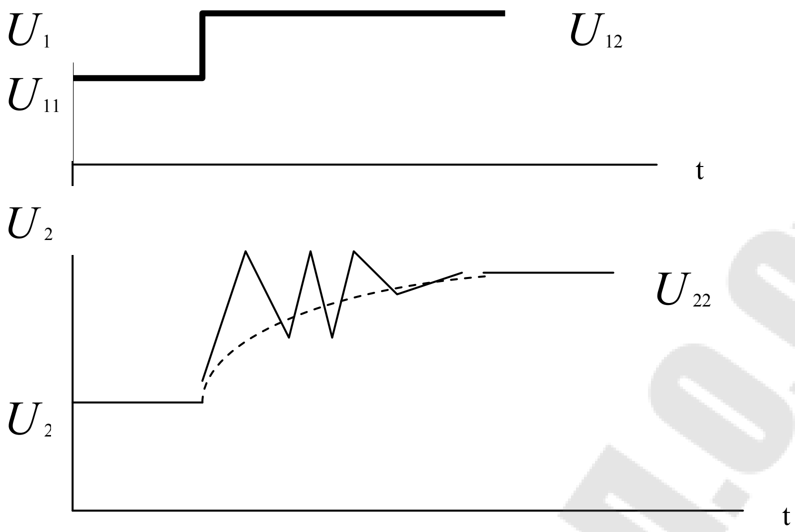


L - Индуктивная катушка; *R* - Омическое сопротивление;
C – конденсатор; U_1 - входное напряжение; U_2 - выходное напряжение.

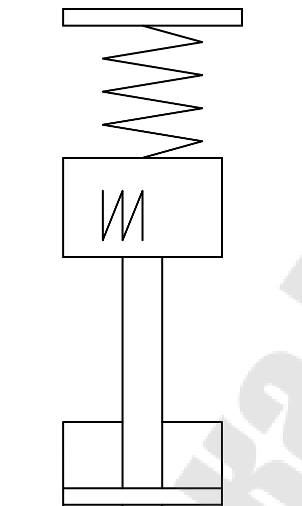
Уравнение динамики такого контура:

$$LC\frac{d^2U_2}{dt^2} + RC\frac{dU_2}{dt} + U_2 = U_1.$$

Это уравнение колебательного звена.
При изменении входного напряжения U_1 в контуре возникают колебания напряжения U_2, которые затухают по мере зарядки или разрядки конденсатора.



2. Механическая колебательная система.



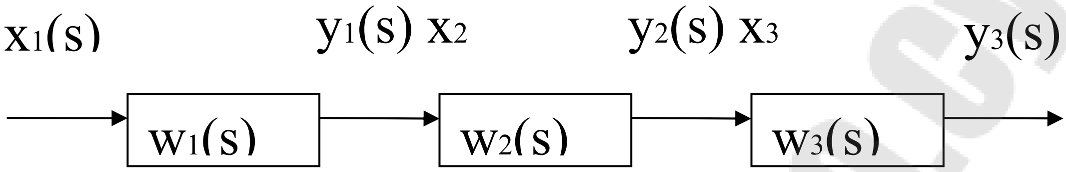
20. Соединение звеньев.

Если известны динамические характеристики элементарных звеньев, то можно определить динамические характеристики их соединений.

Возможны: последовательное соединение;
параллельное соединение;

соединение с обратной связью (встречно- параллельное).

а) Последовательное соединение звеньев:



Передаточная функция соединения:

$$W(s) = \prod_{k=1}^{n} W_k(s) \tag{1}$$

А.Ф.Ч.Х.

$$W(i\omega) = \prod_{k=1}^{n} W_k(i\omega) \tag{2}$$

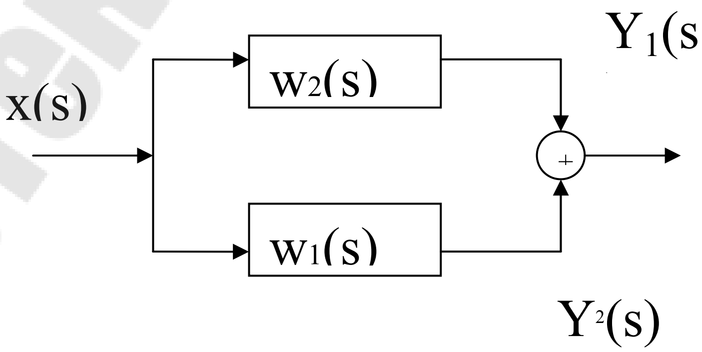
А.Ч.Х.

$$A(\omega) = \prod_{k=1}^{n} A_k(\omega) \tag{3}$$

Ф.Ч.Х.

$$\varphi(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(\omega) \tag{4}$$

б) Параллельное соединение звеньев:



Передаточная функция соединения:

$$W(s) = \sum_{k=1}^{n} W_k(s) \tag{5}$$

А.Ф.Ч.Х.

$$W(i\omega) = \sum_{k=1}^{n} W_k(i\omega) = \sum_{k=1}^{n} P_k(\omega) + i\sum_{k=1}^{n} Q_k(\omega) \qquad (6)$$

Переходная функция:

$$h(t) = \sum_{k=1}^{n} h_k(t) \qquad (7)$$

Действительно:

$$h_k(t) = W_k(p)x(t) \qquad (8)$$

$$h(t) = W(p)x(t) \qquad (9)$$

Если просуммировать (6), то получим:

$$\sum_{k=1}^{n} h_k(t) = (\sum_{k=1}^{n} W_k(p))x(t) = W(p)x(t) = h(t)$$

А.Ч.Х.

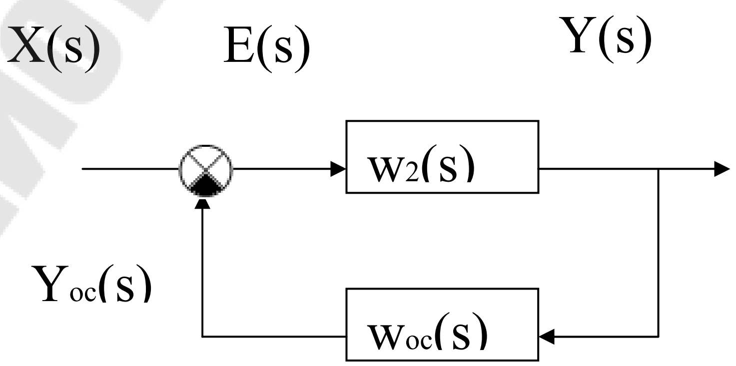
$$A(\omega) = \operatorname{mod} W(i\omega) = \sqrt{(\sum_{k=1}^{n} P_k(\omega))^2 + (\sum_{k=1}^{n} Q_k(\omega))^2}\ . \qquad (10)$$

$$(A(\omega) \neq \sum_{k=1}^{n} A_k(\omega))$$

Ф.Ч.Х.

$$\varphi(\omega) = arctg\frac{\sum Q_k}{\sum P_k} \neq \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(\omega) \qquad (11)$$

<u>в) Соединение с обратной связью:</u>



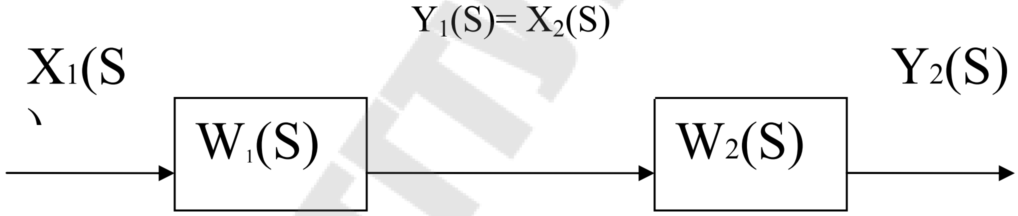
$$W(s) = \frac{W_1(s)}{1 \pm W_1(s) W_{oc}(s)} \qquad (12)$$

$$E(s) = X(s) \pm Y_{oc}(s)$$

$W(i\omega)$............

21. Составные звенья. Регуляторы.

<u>1. Последовательное соединение пропорционального и апериодического звеньев.</u>



Первое звено --- пропорциональное:

$$W_1 = K_1 .$$

Второе звено --- апериодическое:

$$W_2 = \frac{K_2}{1+TS} .$$

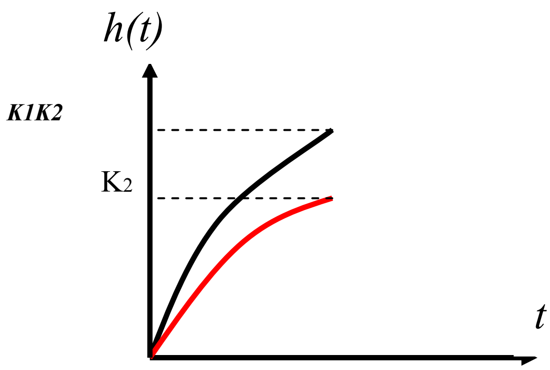
Передаточная функция данного составного звена:

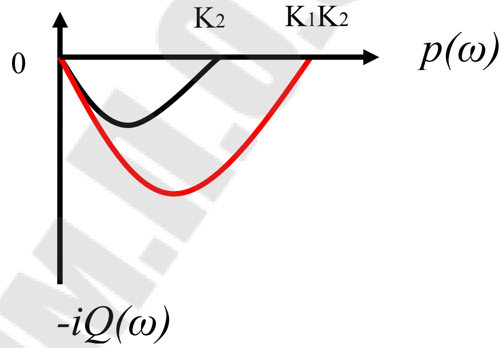
$$W(S) = \frac{K_1 K_2}{1+TS} ; \qquad (1)$$

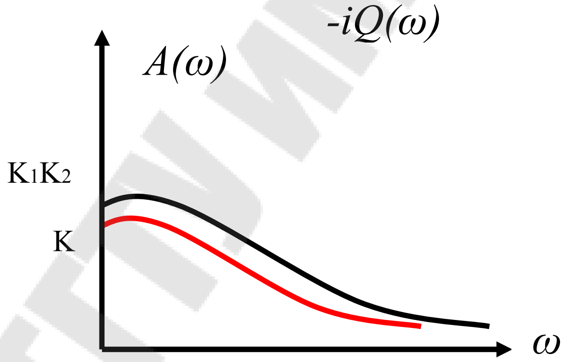
$$W(i\omega) = \frac{K_1 K_2}{1+i\omega T} . \qquad (2)$$

Выражение (1) по своему виду есть передаточная функция также апериодического звена с коэффициентом пропорциональности (усиления) $K_1 K_2$.

Соответствующе образом видоизменяются все динамические характеристики:







Такое составное звено называется апериодическим с усилителем или инерционным усилителем.

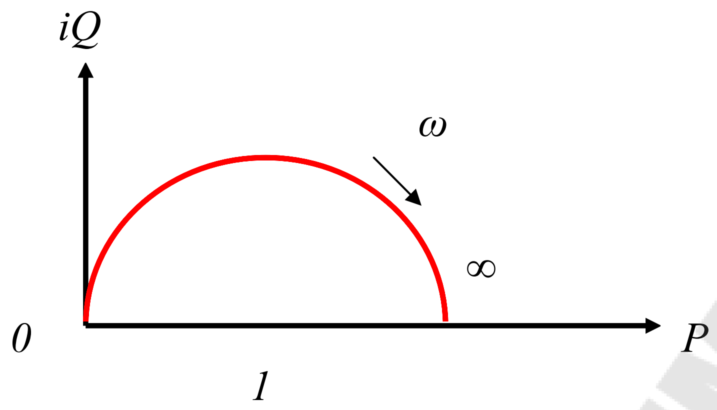
2. Последовательное соединение дифференцирующего и апериодического звеньев.

Передаточная функция составного звена:

$$W(S) = \frac{TS}{TS + 1} \tag{3}$$

АФЧХ.

$$W(i\omega)=\frac{i\omega T}{1+i\omega T}=\underbrace{\frac{\omega^2T^2}{1+\omega^2T^2}}_{P(\omega)}+i\underbrace{\frac{\omega T}{1+\omega^2T^2}}_{Q(\omega)} \qquad (4)$$

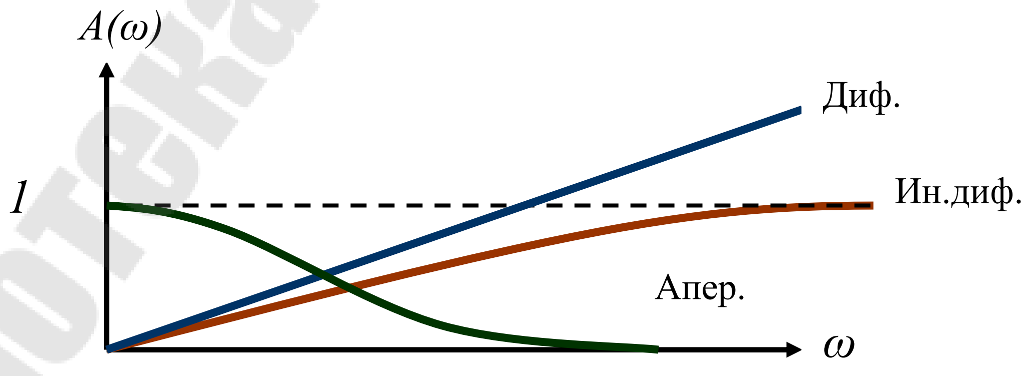


АЧХ.

$$A(\omega)=A_{диф}(\omega)A(\omega)=\frac{T\omega}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}\ . \qquad (5)$$

Ф.Ч.Х.

$$\varphi(\omega)=arctg\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}=arctg\frac{1}{\omega T}\ . \qquad (6)$$



Переходная функция:

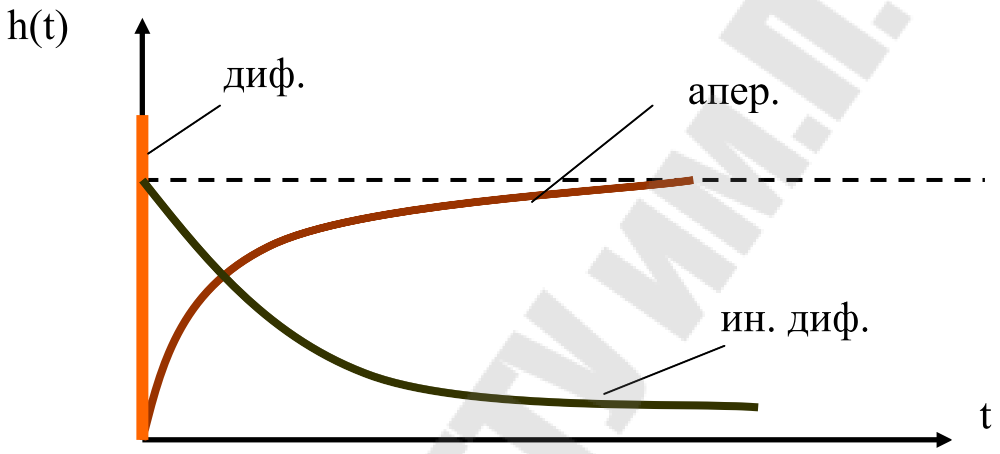
$$H(S)=\frac{W(S)}{S}=\frac{T}{TS+1}=\frac{1}{S+\frac{1}{T}}=\frac{1}{S+\alpha}\quad. \tag{7}$$

По таблице:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{S+\alpha}\right\}=e^{-\alpha t}. \tag{8}$$

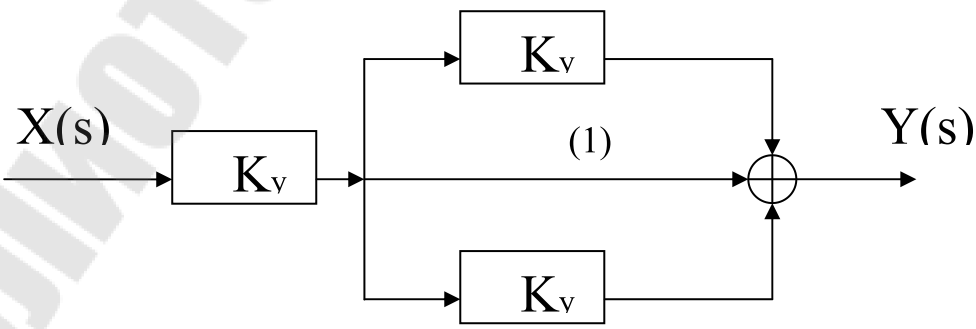
Таким образом:

$$h(t)=e^{-\frac{t}{T}}. \tag{9}$$



Такое составное звено называется реальным дифференцирующим (инерционно – дифференцирующим).

3. <u>П.И.Д. – регулятор (пропорционально-интегрально-дифференциальный).</u>



Передаточная функция:

$$W(s) = K_y\left(1 + \frac{1}{T_И S} + T_П S\right). \qquad (10)$$

K_y --- коэффициент усиления регулятора;

$T_И$ --- постоянная времени изодрома;

$T_П$ --- постоянная времени предварения регулятора.

Таблица 1

Типовые динамические уравнения элементов САУ

Уравнение	**Звено**
y = k · x	пропорциональное
y (t) = x (t + τ)	запаздывающее
$T\frac{dy}{dt} = x$	интегрирующее
$y = T\frac{dx}{dt}$	дифференцирующее
$T\frac{dy}{dt} + y = kx$	апериодическое I порядка
$y = T\frac{dx}{dt} + rx$	форсирующее I порядка
$T_0^2\frac{d^2y}{dt^2} + T_1\frac{dy}{dt} + y = kx$	колебательное и апериодическое II порядка в зависимости от T_1
$T_0^2\frac{d^2y}{dt^2} + y = kx$	колебательное (идеальное) [консервативное]
$y = T_0\frac{d^2x}{dt^2} + T_1\frac{dx}{dt} + x$	форсирующее II порядка

$T\frac{dy}{dt} + y = K\frac{dx}{dt}$	реальное дифференцирующее
$T\frac{dy}{dt} + y = K_1\frac{dx}{dt} + K_2x$	интегро - дифференцирующее
$T\frac{dy}{dt} = K_1\frac{dx}{dt} + K_2x$	пропорционально – интегральное (ПИ – регулятор)
$T\frac{dy}{dt} = K_1\frac{d^2x}{dt^2} + K_2\frac{dx}{dt} + K_3x$	ПИД - регулятор

Таблица 2

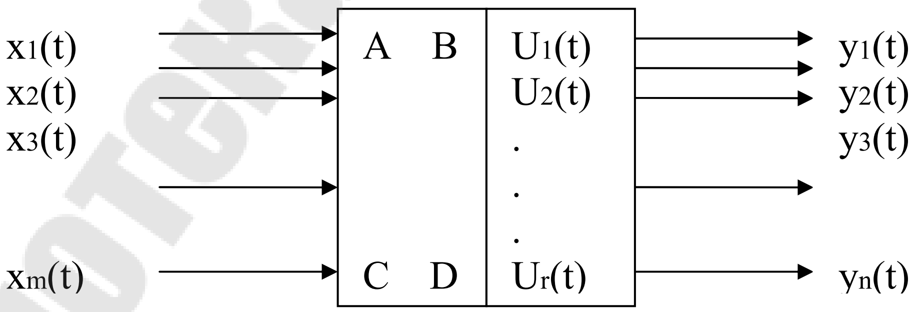
Таблица передаточных функций типовых элементов САУ

W(S)	**Тип звена**	**Характеристика**
К	пропорциональное	Линейное, усилительное, безынерционное
$\frac{1}{TS}$	интегрирующее	
$\frac{K}{TS + 1}$	апериодическое I порядка	инерциооное
TS	дифференцирующее (идеальное)	безынерционное
$TS+K$	форсирующее I порядка	Составное (параллельное): пропорциональное + идеальное дифференцирующее
$\frac{K}{T^2S + 1}$	консервативное	Идеальное колебательное

$\dfrac{K}{T^2S^2 + 2\zeta TS + 1}$ $\zeta > 1$	апериодическое II порядка	инерционное
$\dfrac{K}{T^2S^2 + 2\zeta TS + 1}$ $0 < \zeta < 1$	колебательное	инерционное
$T^2S^2 + 2\zeta TS + 1$	форсирующее II порядка	
$\ell^{-\tau s}$	запаздывающее	
$\dfrac{TS}{TS + 1}$	реальное дифференцирующее	инерционно-дифференцирующее

22. Многомерные системы.

Системы автоматического управления могут содержать элементы с несколькими входными и выходными величинами. Такие системы называются **<u>многомерными</u>**. При их математическом описании получаются системы дифференциальных уравнений, в правые части которых входит несколько функций времени. Наиболее компактно эти уравнения записываются в векторно-матричной форме.



При составлении векторно-матричной модели многомерной системы используют следующие понятия:

– вектор входа (вектор входных величин, сигналов):

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_m \end{bmatrix} \tag{1}$$

– вектор выхода (вектор выходных величин, сигналов):

$$\vec{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{bmatrix} \tag{2}$$

– вектор состояния (вектор переменных состояний):

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ . \\ . \\ u_r \end{bmatrix} \tag{3}$$

– матрицы:

$A = [a_{ik}]$ квадратная матрица *(r,r)*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & \cdots & & a_{1r} \\ & \ddots & & \iddots & \\ \vdots & & a_{ik} & & \vdots \\ & \iddots & & \ddots & \\ a_{r1} & & \cdots & & a_{22} \end{bmatrix};$$

$B = [b_{ik}]$ прямоугольная матрица *(r,m)*

$$\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & & b_{1m} \\ . & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & . \\ . & b_{ik} & & . \\ b_{r1} & \cdots & & b_{rm} \end{bmatrix};$$

$C = [c_{ik}]$ прямоугольная матрица *(n,r);*

$D = [d_{ik}]$ прямоугольная матрица *(n,m).*

В этих обозначениях математическое описание многомерной системы сводятся к двум уравнениям:

---- векторному дифференциальному уравнению состояния:

$$\frac{d\vec{U}}{dt} = [A]\vec{U} + [B]\vec{X}; \tag{4}$$

--- векторному алгебраическому уравнению выхода:

$$\vec{Y} = [C]\vec{U} + [D]\vec{X}. \tag{5}$$

Преобразуем по Лапласу векторно-матричные уравнения (4) и (5):

$$S\vec{U}(S) = [A]\vec{U}(S) + [B]\vec{X}(S); \tag{6}$$

$$\vec{y}(S) = [C]\vec{U}(S) + [D]\vec{X}(S). \tag{7}$$

Из (6) получаем:

$$(S[1] - [A])\vec{U}(S) = [B]\vec{X}(S), \tag{8}$$

где [1] --- единичная квадратная матрица:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Из выражения (8) получим:

$$\vec{U}(S) = [s[1] - [A]]^{-1} \cdot [B] \cdot \vec{X}(s). \qquad (9)$$

Подстановка (9) в (7) дает уравнение выхода системы в изображениях ------- в векторно-матричной форме:

$$\vec{y}(s) = ([C] \cdot [S[1] - [A]]^{-1} [B] + [D]) \vec{X}(S). \qquad (10)$$

Уравнение (10) связывает вектор изображений выходных величин $\vec{y}(s)$ с вектором изображений входных величин $\vec{x}(s)$.

Матрица:

$$([C] \cdot [S[1] - [A]]^{-1} [B] + [D]) = [W(S)] \qquad (11)$$

называется передаточной матрицей (матрицей передаточной функции).

Передаточная матрица $W_{ik}(S)$ ---- прямоугольная матрица *(m,n)*.

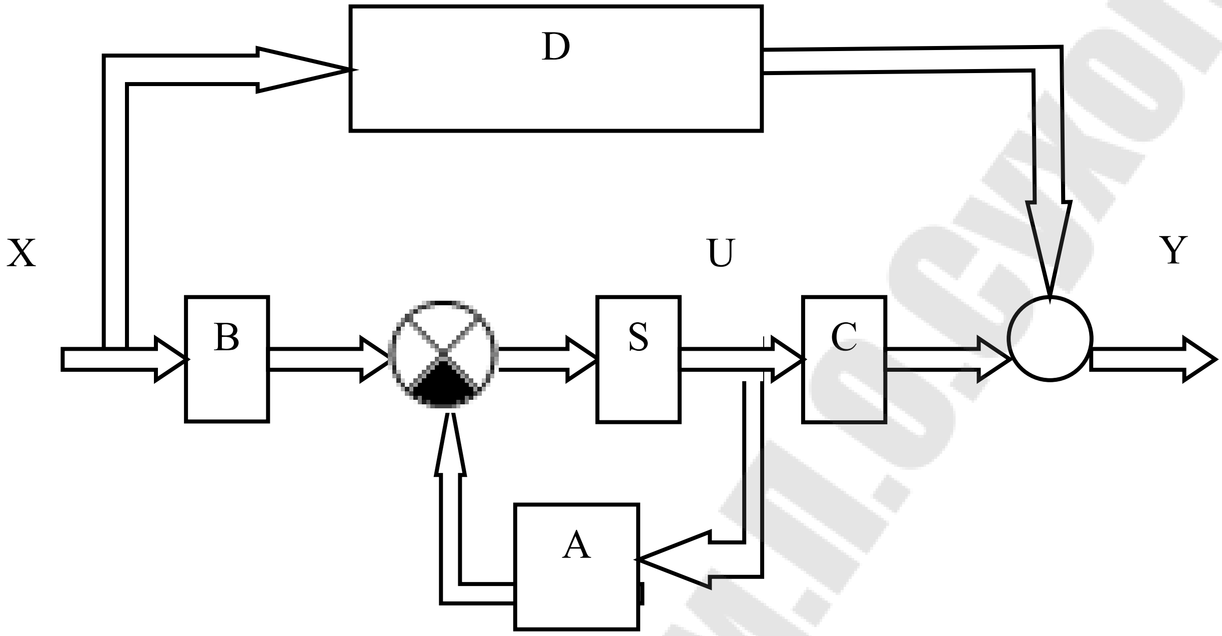
Элементы передаточной матрицы

$$W_{ik}(S) = \frac{Y_i(S)}{X_k(S)} \qquad (12)$$

являются передаточными функциями от входной величины $X_k(S)$ к выходной величине $Y_i(S)$.

Структурные схемы многомерных систем.

Отличие структурной схемы многомерной системы от схемы одномерной системы заключается в том, что в схеме многомерной системы вместо передаточных функций записываются передаточные матрицы. В связях между звеньями показываются несколько входных и выходных сигналов. В структурной схеме многомерной системы связи между звеньями изображаются двойными линиями.



23. Устойчивость систем автоматического управления.

Системы автоматического управления в зависимости от характеристик и параметров входящих в них устройств могут быть устойчивыми и неустойчивыми.

Устойчивость системы – это её способность сохранять состояние равновесия или возвращаться к состоянию равновесия после устранения возмущения, нарушившего равновесие.

Обеспечение устойчивости САУ – одна из основных задач, решаемых при создании системы.

23.1. Понятие устойчивости системы.

Рассмотрим некоторую систему, динамика которой описывается линейным (или линеаризованным) дифференциальным уравнением:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + \ldots + a_0 x \ . \qquad (1)$$

Это уравнение описывает изменение выходной величины *y(t)* во времени при переменном входном воздействии *x(t)*.

Если входное воздействие отсутствует, или устранено ($x=0$ при $t \geq 0$), то уравнение (1) описывает «свободное движение» системы:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 y = 0 . \qquad (2)$$

Решение уравнения (2) существует и может быть представлено в виде:

$$y(t) = \sum C_i e^{\lambda_i t} , \qquad (3)$$

где C_i – постоянные, определяемые начальными условиями.

(Уравнение (2) – $n^{\underline{го}}$ порядка; требует задания n начальных условий и имеет n постоянных).

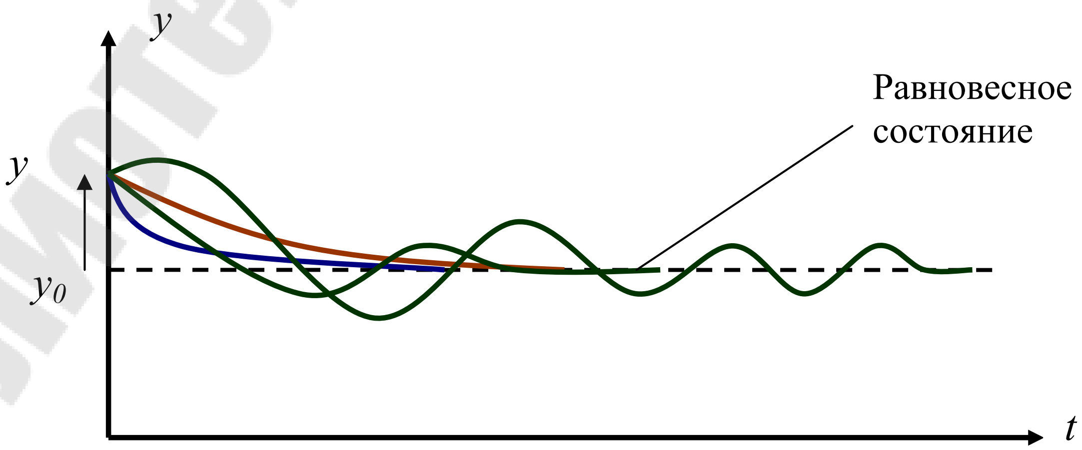
λ_i – корни так называемого характеристического уравнения:

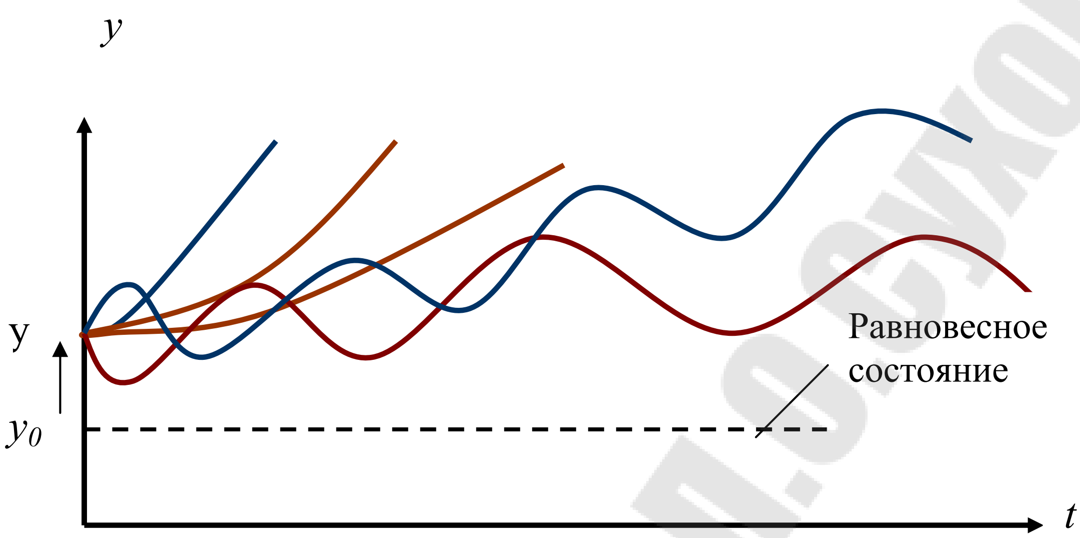
$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda^1 + a_0 = 0 . \qquad (4)$$

Алгебраическое уравнение $n^{\underline{ой}}$ степени имеет n корней ($\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_i \ldots \lambda_n$). – в общем случае комплексных.

Итак, для того чтобы решить дифференциальное уравнение (2) – т.е. определить функцию $y(t)$, необходимо решить алгебраическое характеристическое уравнение (4), т.е. определить корни $\lambda_1 \ldots \lambda_i \ldots \lambda_n$.

Решение уравнения (2), т.е. выражение (3), определяет поведение переменной y во времени, т.е. её «свободное движение» после устранения возмущения, которое может быть весьма сложным:





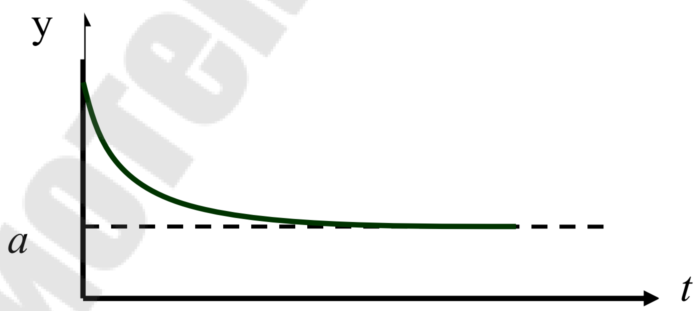
Если при $t \to \infty$ $y(t) \to y(0)$, т.е. к равномерному состоянию, то система является устойчивой; в противном случае – не устойчивой.

Характер изменения функции $y(t)$ во времени зависит от корней $[\lambda_1 \dots \lambda_i \dots \lambda_n]$.

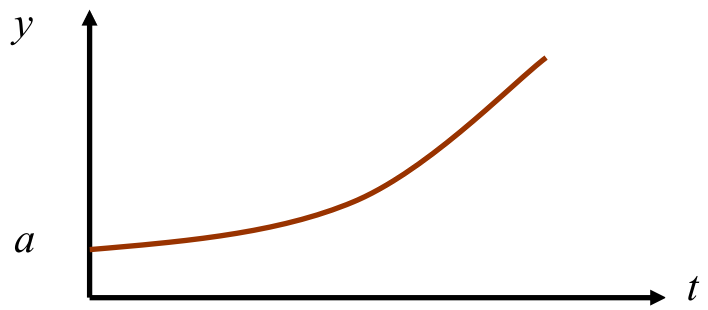
Действительно, если мы рассмотрим простейшую степенную функцию

$$y = a + ce^{\lambda t},$$

то если $\lambda<0$, функция y – убывающая: $y \to a$, и эта простейшая система устойчива.



Если $\lambda>0.$, – y неограниченно возрастает, т.е. система не устойчива.



Анализируя более сложную степенную зависимость (3) можно сделать вывод, что устойчивость системы определяется корнями λ_1 … λ_i… λ_n.

<u>Теорема Ляпунова [условие устойчивости Ляпунова]:</u>

«Чтобы система была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы действительные части всех корней характеристического уравнения были отрицательными».

Система не устойчива, если действительная часть, хотя бы одного из корней (λ_1 … λ_i… λ_n) положительна.

Таким образом, определение устойчивости системы сводится к выяснению условий, при которых все корни характеристического уравнения имеют отрицательные действительные части, т.е. все корни располагались бы в левой полуплоскости комплексной плоскости.

23.2. Характеристическое уравнение.

Составление дифференциальных уравнений динамики сложной системы, на основе которых можно составить характеристическое уравнение и тем самым решить вопрос об устойчивости системы, ---- сложнейшая проблема для инженеров – практиков. С другой стороны передаточные функции элементов и системы в целом, как правило, известны или легко определяются.

Поэтому удобно было бы решать вопрос об устойчивости системы по её передаточной функции (например, из передаточной функции выразить характеристическое уравнение).

Рассмотрим дифференциальное уравнение «свободного движения» системы:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = 0 . \qquad (5)$$

Преобразуем его по Лапласу:

$$\underbrace{(a_n S^n + a_n S^{n-1} + ... + a_1 S + a_0)}Y(s) = 0; \qquad (6)$$

D(s) – собственный оператор выходной переменной.

Тождество (6) будет выполняться для всех значений *Y(s)* при условии, что:

$$D(s) = a_n S^n + a_n S^{n-1} + ... + a_1 S + a_0 = 0. \qquad (7)$$

Тождество (7) выражает условие свободного движения системы (т.е. при отсутствии или снятия входного воздействия).

Это условие свободного движения системы выразим через передаточную функцию:

$$W(S) = \frac{Y(s)}{X(s)}; \quad \frac{Y(s)}{W(s)} = X(s) = 0; \qquad (8)$$

или $$\frac{1}{W(s)} Y(s) = 0; \qquad \left(\frac{1}{W(s)} = 0 \right). \qquad (9)$$

Уравнения (6) и (9) идентичны и выражают свободное движение системы.

Итак, для свободного движения системы необходимо:

$$\frac{1}{W(s)} \cong D(s) = a_n S^n + a_n S^{n-1} + ... + a_1 S + a_0 = 0. \qquad (10)$$

А теперь запишем характеристическое уравнение исходя из уравнения (8):

$$a_n \lambda^n + a_n \lambda^{n-1} + ... + a_1 \lambda + a_0 = 0. \qquad (11)$$

Сравнивая (10) и (11) можно сделать вывод, что коэффициенты характеристического уравнения можно получить из передаточной функции, приравняв обратную величину передаточной функции нулю.

24. Алгебраические критерии устойчивости. Критерий Гурвица.

Алгебраический критерий устойчивости позволяют получить соотношения между коэффициентами характеристического уравнения:

$$a_n\lambda^n + a_n\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0 = 0\,, \qquad (1)$$

при которых все его корни имеют отрицательные действительные части, т.е. система является устойчивой.

Известны критерии Рауса (1875) и Гурвица (1895).

Наибольшее распространение получил критерий Гурвица.

<u>Критерий Гурвица.</u>

«Для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы определитель Гурвица, все его главные диагональные миноры, а так же коэффициент a_n были положительны».

Определитель Гурвица составляется из коэффициентов характеристического уравнения (1) по следующим правилам:

1. На главной диагонали выписывают последовательно коэффициенты характеристического уравнения от a_{n-1} до a_0 включительно.

2. Строки определителя влево от главной диагонали заполняют коэффициентами с убывающими индексами, а вправо – коэффициентами с возрастающими индексами.

3. Все коэффициенты с индексами меньше 0 и более n заменяют нулями.

Главный определитель Гурвица:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & 0 & . & . & 0 \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & . & . \\ a_{n-7} & a_{n-6} & a_{n-5} & a_{n-3} & a_{n-3} & a_{n-2} & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 \end{vmatrix} \qquad 2)$$

Все последующие определители – главные диагональные миноры Δ_{n-1}, Δ_{n-2}, …, получаются вычеркиванием столбцов и строк, начиная, соответственно, с крайнего правого столбца и нижней строки.

Например:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} \end{vmatrix}; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n \\ a_{n-3} & a_{n-2} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_1 = a_{n-1}.$$

Таким образом, условие устойчивости Гурвица сводится к следующим неравенствам:

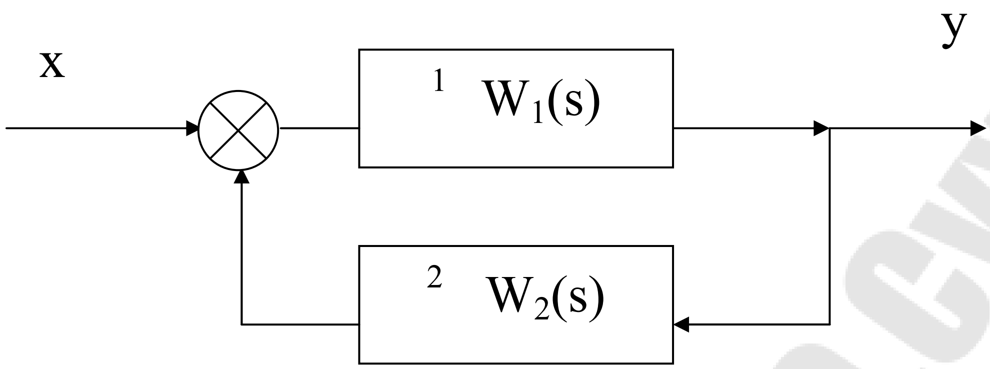
$$a_n > 0;\ \Delta_1 > 0;\ \Delta_2 > 0;\ \Delta_3 > 0;\ \Delta_4 > 0; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Delta_n > 0 \qquad (3)$$

Условие устойчивости для системы II порядка ($n=2$):

$$a_2 > 0; \quad a_1 > 0; \quad a_0 > 0; \quad (a_1 a_0 > 0)\ .$$

25. Расчет устойчивости системы по критерию Гурвица.

Рассмотрим систему, состоящую из интегрирующего и колебательного звеньев с обратной связью:



1 – Интегрирующее звено:

$$W_1 = \frac{1}{T_1 S}; \qquad (1)$$

2 – Колебательное звено:

$$W_2 = \frac{K}{T_2^2 S^2 + 2\xi T_2 S + 1}. \qquad (2)$$

Передаточная функция системы:

$$W(S) = \frac{W_1(s) W_2(s)}{1 + W_1(s) W_2(s)}. \qquad (3)$$

Для свободного движения системы (после снятия входного воздействия):

$$\frac{1}{W(S)} = \frac{1 + W_1(s) W_2(s)}{W_1(s) W_2(s)} = 0; \qquad (4)$$

откуда:

$$1 + W_1(s) W_2(s) = 0; \qquad (5)$$

или

$$1 + \frac{K}{T_1 S (T_2^2 S^2 + 2\xi T_2 S + 1)} = 0; \qquad (6)$$

$$T_1 T_2^2 S^3 + 2\xi T_1 T_2 S^2 + T_1 S + K = 0. \qquad (7)$$

Таким образом, характеристическое уравнение можно записать в виде:

$$T_1T_2\lambda^3 + 2\xi T_1T_2\lambda^2 + T_1\lambda + K = 0. \qquad (8)$$

Составим определитель Гурвица II порядка:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_0 \end{vmatrix}. \qquad (9)$$

Условие устойчивости данной системы записывается в виде:

$$a_3 > 0; \quad \Delta_3 > 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} > 0; \quad \Delta_1 = a_2 > 0. \qquad (10)$$

Так как $\Delta_3 = \Delta_2 a_0$, то вместо условия $\Delta_3 > 0$ можно записать

$$a_3 > 0;$$

Из условия $\Delta_3 = a_2a_1 - a_0a_3 > 0$ и $a_2 > 0$ следует, что $a_1 > 0$.

Итак, для устойчивости системы необходимо, чтобы соблюдались неравенства:

$$a_3 > 0; \quad a_2 > 0; \quad a_1 > 0; \quad a_0 > 0; \quad a_2a_1 > a_0a_3. \qquad (11)$$

Так как все параметры T_1, T_2, и ξ положительны по своей физической природе, то единственным условием устойчивости данной системы является неравенство:

$$a_2a_1 > a_0a_3; \qquad \text{т.е.} \qquad \frac{2\xi}{KT_2} > \frac{1}{T_1};$$

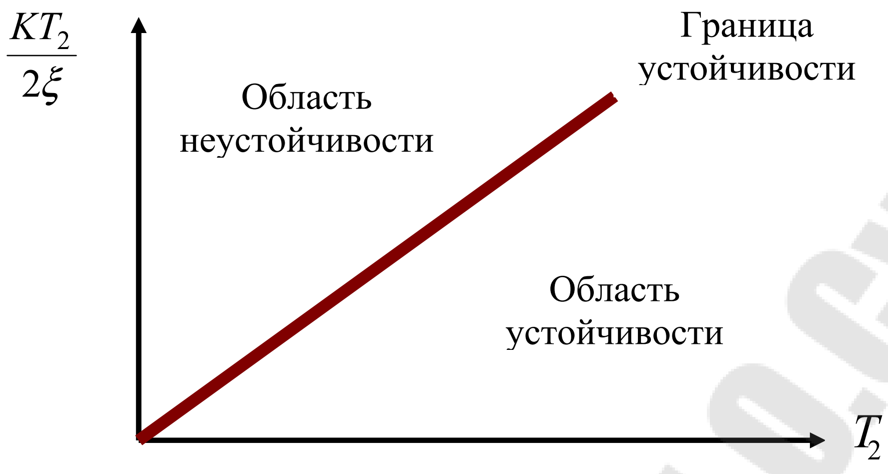
или

$$T_1 > \frac{KT_2}{2\xi}. \qquad (12)$$

Если неравенство заменим равенством:

$$T_1 = \frac{KT_2}{2\xi}., \qquad (13)$$

то получим границу устойчивости.



26. Частотные критерии устойчивости.

Частотные критерии устойчивости нашли широкое применение при расчетах различных (особенно электронных) систем автоматического управления. Частотные критерии устойчивости основаны на анализе характеристического уравнения в комплексной плоскости.

Известны критерии Найквиста (1932) и Михайлова (1936).

<u>Критерий Михайлова</u>

<u>Если в характеристическом уравнении:</u>

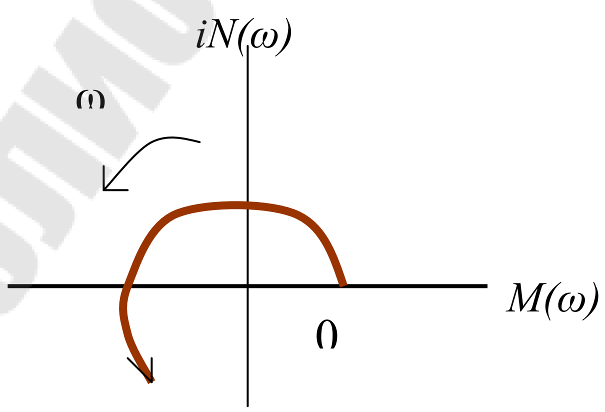
$$D(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots\ldots + a_1\lambda + a_0 \qquad (1)$$

заменить λ на $i\omega$, то получим <u>характеристический вектор:</u>

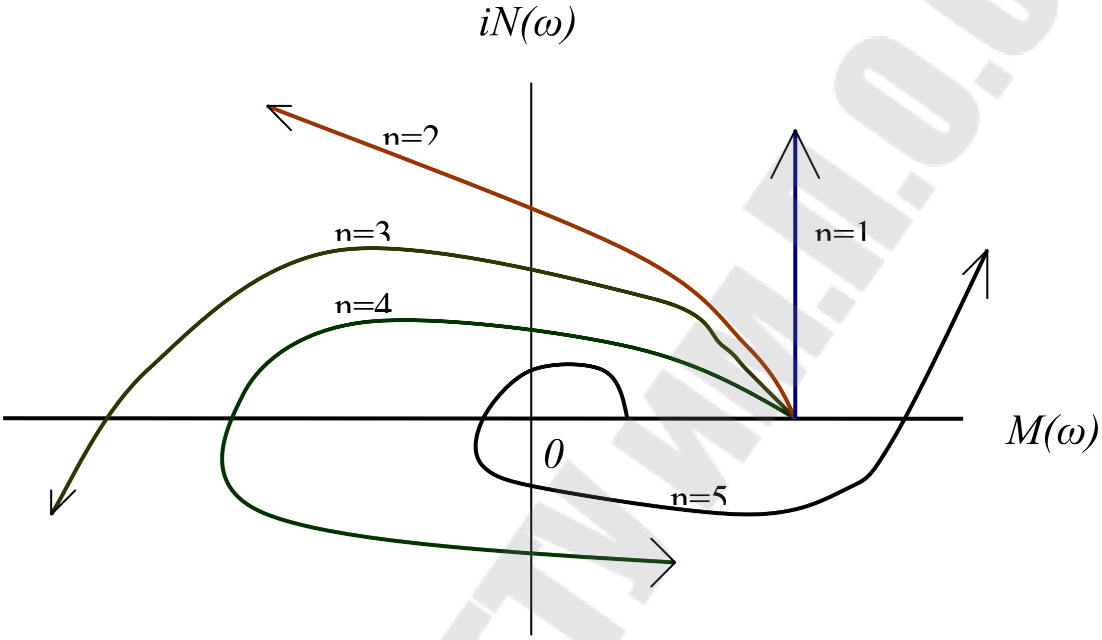
$$D(i\omega) = a_n(i\omega) + a_{n-1}(i\omega)^{n-1} + \ldots . + a_1 i\omega + a_0 = M(\omega) + iN(\omega).$$

При изменении ω от 0 до ∞ конец вектора $D(i\omega)$ в комплексной плоскости вычертит кривую, называемую характеристической кривой или годографом вектора $D(i\omega)$.

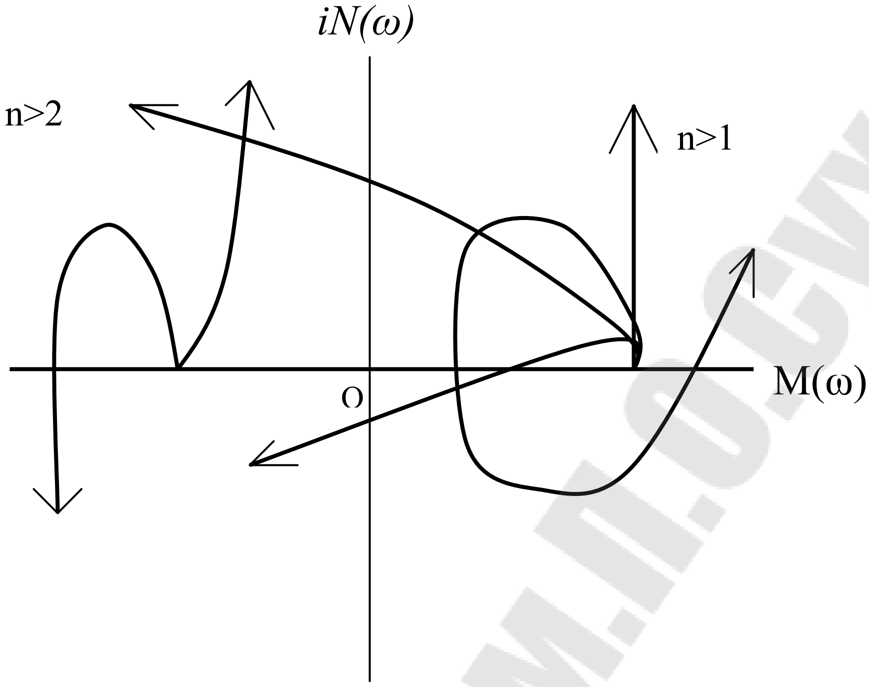
По виду характеристической кривой можно судить об устойчивости САУ.



Критерий Михайлова: ”Чтобы система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы характеристическая кривая при изменении ω от 0 до ∞, начав свое движении с положительной части вещественной оси, последовательно в направлении против часовой стрелки прошла *n* квадрантов в комплексной плоскости, нигде не обращаясь в нуль”.
(n - степень характеристического уравнения).



Годографы Михайлова для устойчивых систем.



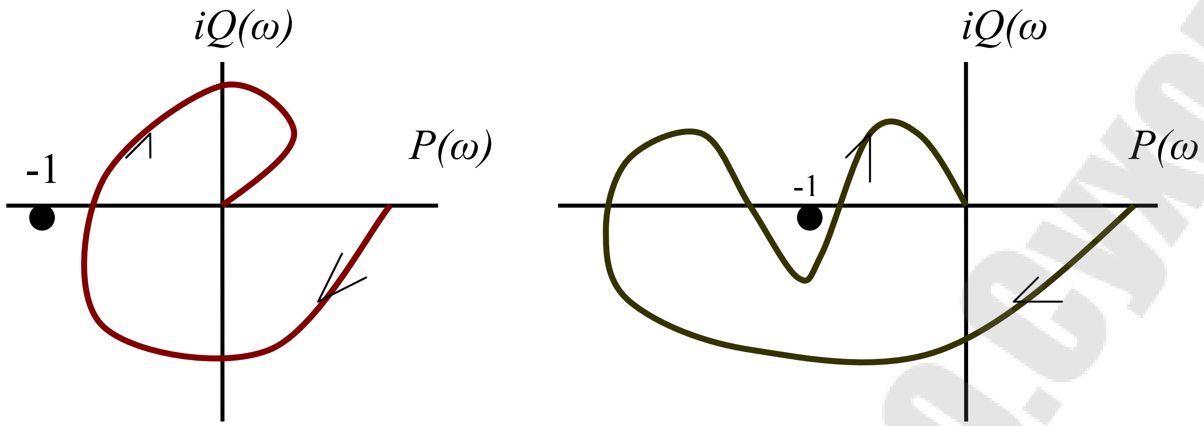
Годографы Михайлова для неустойчивых систем.

Из критерия Михайлова вытекает, что для устойчивости системы корни уравнений *M(ω)=0* и *N(ω)=0* должны чередоваться.

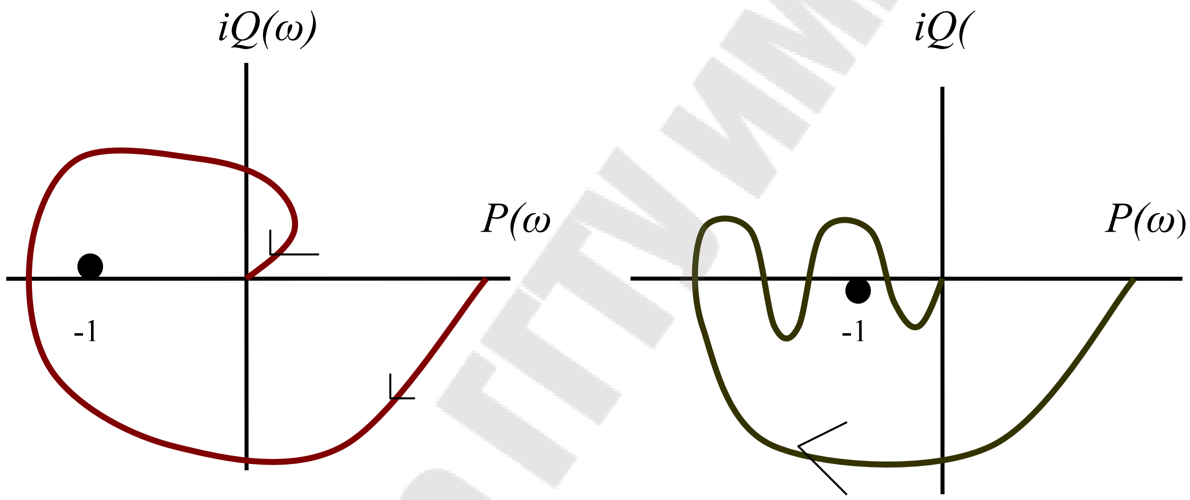
Критерий Найквиста

Критерий Найквиста дает возможность судить об устойчивости замкнутой САУ посредством исследования АФЧХ ее разомкнутой системы.

Критерий Найквиста: Для того чтобы замкнутая система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы АФЧХ ее разомкнутой системы не охватывала точку (-1; i0); т.е. чтобы при изменении ω от 0 до $\propto$ разность между числом положительных (сверху вниз) и отрицательным (снизу вверх) переходов АФЧХ разомкнутой системы через ось абсцисс слева от точки (-1;i0) равна нулю.



АФЧХ устойчивых систем.

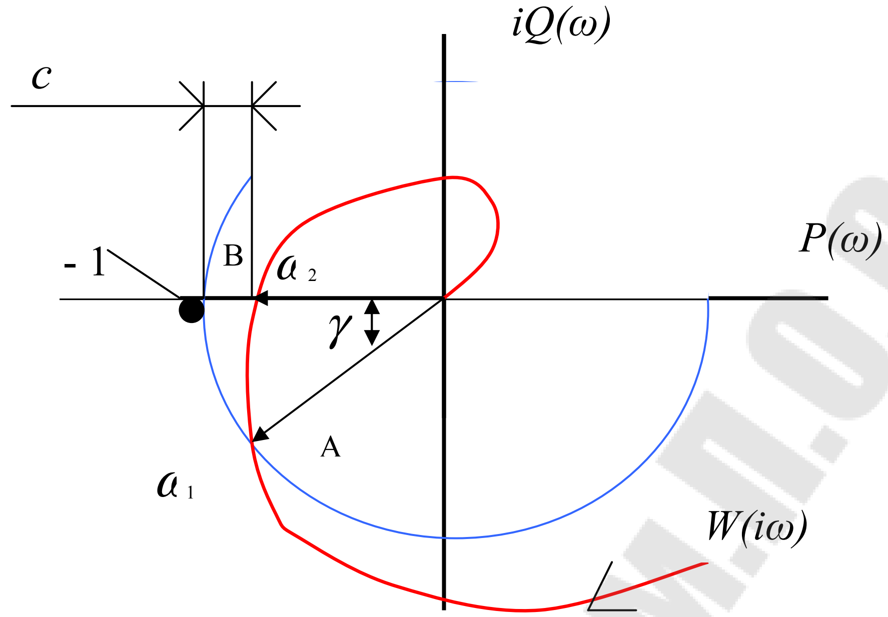


АФЧХ неустойчивых систем.

Запас устойчивости

В соответствии с критерием Найквиста: замкнутая система является устойчивой, если АФЧХ ее устойчивого разомкнутого контура не охватывает точку (-1; i0).

В комплексной плоскости с АФЧХ разомкнутой системы проведем окружность единичного радиуса.



Очевидно, что при приближении вектора АФЧХ справа к точке (-1, i0) устойчивая система приближается к границе устойчивости. Поэтому, степень устойчивости системы будет находиться в прямой зависимости от степени удаленности точки B от точки (-1,i0). Расстояние c называется запасом устойчивости системы по модулю.

Угол γ называется запасом устойчивости системы по фазе.

Запас устойчивости по модулю c показывает, насколько может измениться модуль АФЧХ для выхода системы на границу устойчивости.

Запас устойчивости по фазе γ показывает, насколько должна изменяться фаза АФЧХ для выхода системы на границу устойчивости.

26. Расчет переходных процессов по частотным характеристикам.

Метод определения переходных процессов по частотным характеристикам системы основан на прямом и обратном преобразованиях Фурье.

Прямым преобразованием Фурье непериодической вещественной функции *f(t)* называется интеграл:

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t} dt = \Phi\{f(t)\}. \tag{1}$$

Обратное преобразование Фурье:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega)\, e^{i\omega t} dt = \Phi^{-1}\{F(i\omega)\}, \tag{2}$$

$f(t)$ - непериодическая функция времени; должна удовлетворять условию Дирихле:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| f(t) \right| dt \le M$$

Преобразование Фурье (1) позволяет непериодическую вещественную функцию времени *f(t)* преобразовать в комплексную функцию частоты $F(i\omega)$.

Ранее было показано, что АФЧХ – $W(i\omega)$ ---- есть отношение выходной и входной величин, выраженных в комплексной форме:

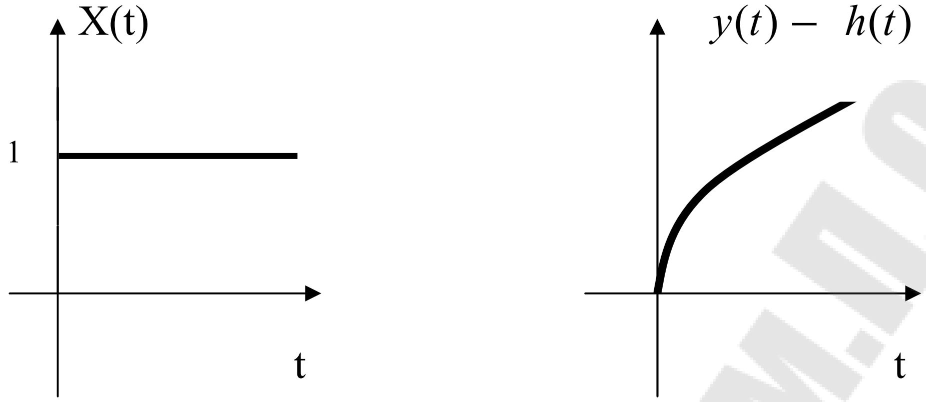
$$W(i\omega) = \frac{[Y(t)]_k}{[X(t)]_k}, \tag{3}$$

т.е. преобразованных по Фурье.

Таким образом, в этом случае $W(i\omega)$ приобретает определенный физический смысл как комплексная передаточная функция.

Рассмотрим переходной процесс в системе, вызванный единичным ступенчатым входным воздействием:

$$x(t)=\begin{cases}0; & t < 0\\ 1; & t \ge 0.\end{cases}$$



Обозначим преобразованные по Фурье входную и выходную величины в виде:

входная: $X(ia)$;

выходная: $Y(ia)=H(ia)$----- как отклик на единичное входное воздействие.

Их связь через комплексную передаточную функцию:

$$H(ia)=W(ia)X(ia). \tag{4}$$

Определим преобразованную по Фурье единичную ступенчатую входную функцию:

$$X(i\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-i\omega t}\,dt=\int_{0}^{\infty}1e^{-i\omega t}\,dt=-\frac{1}{i\omega}e^{-i\omega t}\Big|_{0}^{\infty}=\frac{1}{i\omega}\ . \tag{5}$$

Итак:
$$H(i\omega)=\frac{a(ia)}{ia} \tag{6}$$

Обратным преобразованием Фурье комплексной функции $H(ia)$ определим вещественную переходную функцию *h(t)* при $t \ge 0$:

$$h(t)=\Phi^{-1}[H(i\omega)]=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{W(i\omega)}{i\omega}e^{i\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A(\omega)e^{i\varphi}e^{i\omega t}}{i\omega}d\omega=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A(\omega)}{\omega}[-i\cos(\omega t+\varphi)+\sin(\omega t+\varphi)]d\omega.$$

$$h(t)=\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}.....\right\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A(\omega)}{\omega}\sin(\omega t+\varphi)d\omega; \qquad (7)$$

$$(\sin(\omega t+\varphi)=\sin\omega t\cdot\cos\varphi+\cos\omega t\cdot\sin\varphi).$$

$$h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A(\omega)\cos\varphi}{\omega}\sin\omega td\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A(\omega)\sin\varphi}{\omega}\cos\omega td\omega= \qquad (8)$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(\omega)}{\omega}\sin\omega td\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Q(\omega)}{\omega}\cos\omega td\omega.$$

При $t<0$:
$$\sin\omega t=-\sin(-\omega t).$$
$$\cos\omega t=\cos(\omega t);$$
$$h(t)=0.$$

$$0=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(\omega)}{\omega}\sin\omega td\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Q(\omega)}{\omega}\cos\omega td\omega. \qquad (9)$$

Вычитаем (9) из (8):

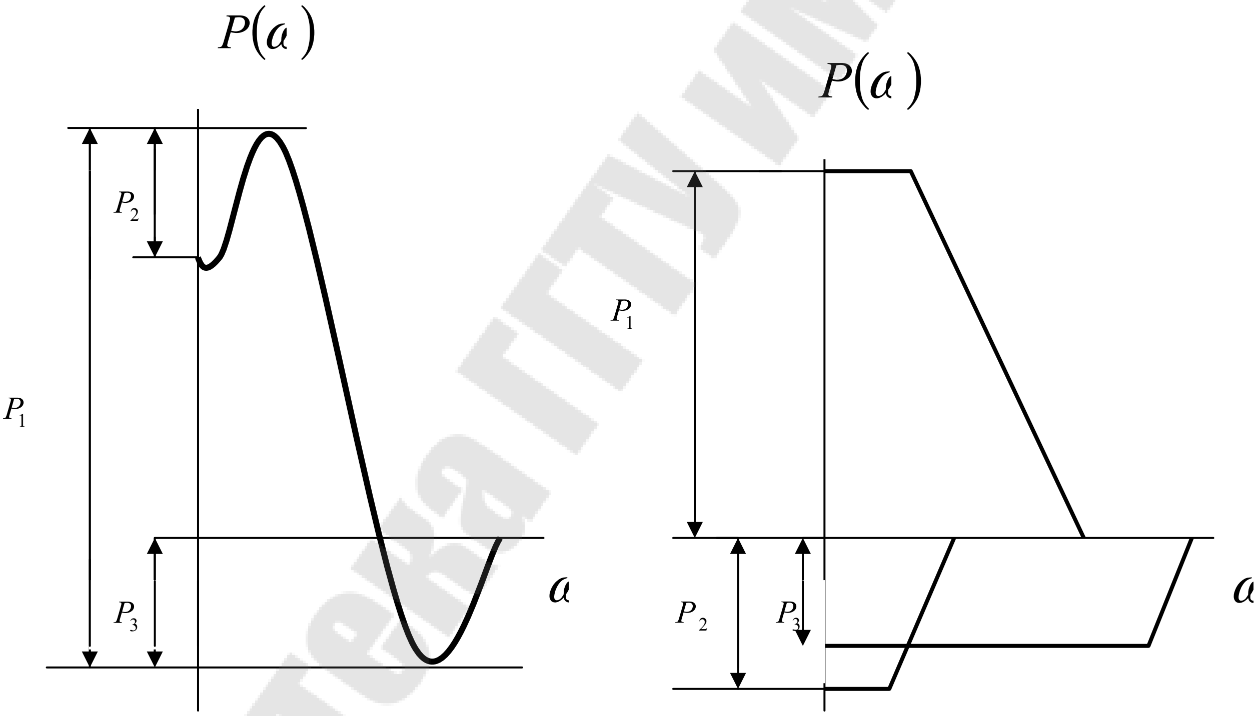
$$h(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(\omega)}{\omega}\sin\omega td\omega. \qquad (10)$$

$$\frac{\sin\omega t}{\omega}=\frac{\sin(-\omega t)}{-\omega}.$$

$$h(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{P(\omega)}{\omega}\sin\omega t d\omega \ . \qquad (11)$$

Формула (11) лежит в основе частотного метода определения качества переходного процесса при единичном ступенчатом возмущении; формула (11) связывает переходную функцию с вещественной частотной характеристикой замкнутой системы.

Однако, непосредственное определение переходного процесса по формуле (11) затруднено вычислением интеграла. Поэтому на практике применяют метод В.В. Солодовникова, по которому вещественная частотная характеристика аппроксимируется трапециодальной характеристикой, чтобы её можно было представить алгебраической суммой конечного числа элементарных трапеций. Каждая из трапеций должна быть прямоугольной со сторонами, совпадающими с осями координат.



Замена вещественной частотной характеристики трапециодальными.

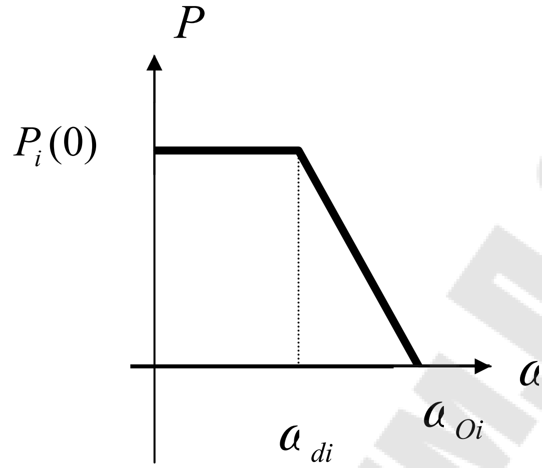
Для каждой трапеции определяют:

----- высоту $P_i(0)$;

----- частоту пропускания сигнала a_0;

----- частоту пропускания сигнала без искажения ω_d;

----- коэффициент наклона: $\chi_i = \dfrac{\omega_{di}}{\omega_{0i}}$.



Переходная функция для каждой трапеции вычисляется с помощью специальной таблицы по формуле:

$$h_i(t) = P_0(0) h_\chi (\frac{\tau}{\omega_{oi}}),$$

где τ - табличное время, связанное с истинным временем: $\tau = t \cdot \omega_{oi}$;

h_χ - табулированная функция, определяемая по таблице в зависимости от χ и τ.

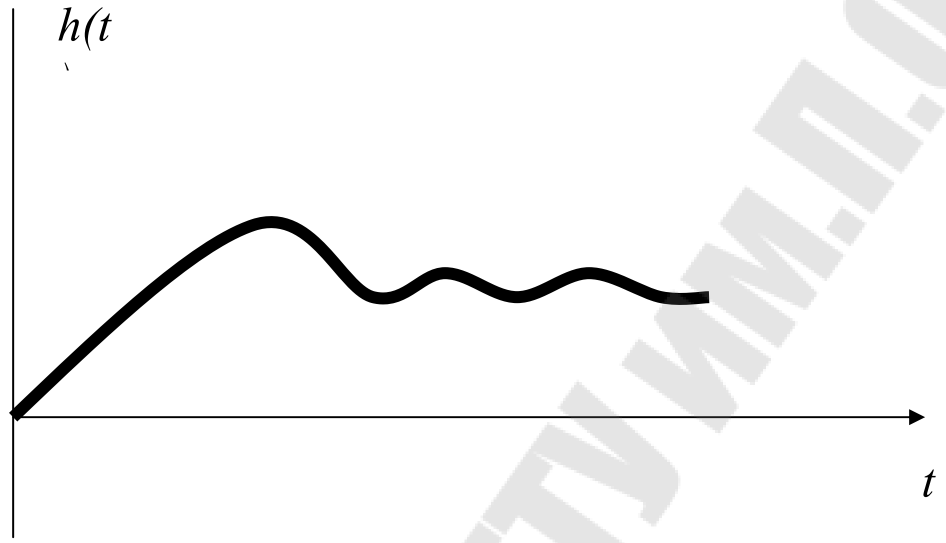
Значения $h_i(t)$ для каждой трапеции определяются в следующей последовательности:
Сначала вычисляют коэффициент наклона χ_i. Затем по таблице для ряда значений τ находят значения h_{xi}, каждое из которых умножают на $P_i(o)$. В результате получают ряд значений $h_i(t)$.

Истинное время подсчитывают по формуле $t = \dfrac{\tau}{\omega_{oi}}$.

Переходной процесс является алгебраической суммой составляющих:

$$h(t)=\sum_{i=1}^{m}h_i(t).$$

Поэтому для получения графика переходного процесса суммируют ординаты $h_i(t)$ составляющих этого процесса с учетом знаков для каждого t.

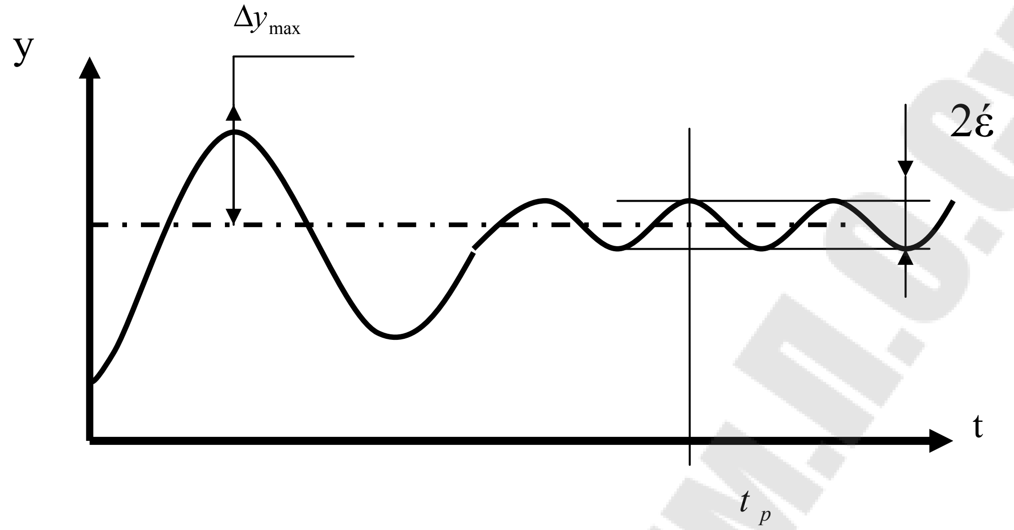


28. Качество регулирования САУ.

Любая промышленная САУ кроме устойчивости должна обеспечивать определённые качественные показатели процесса регулирования.

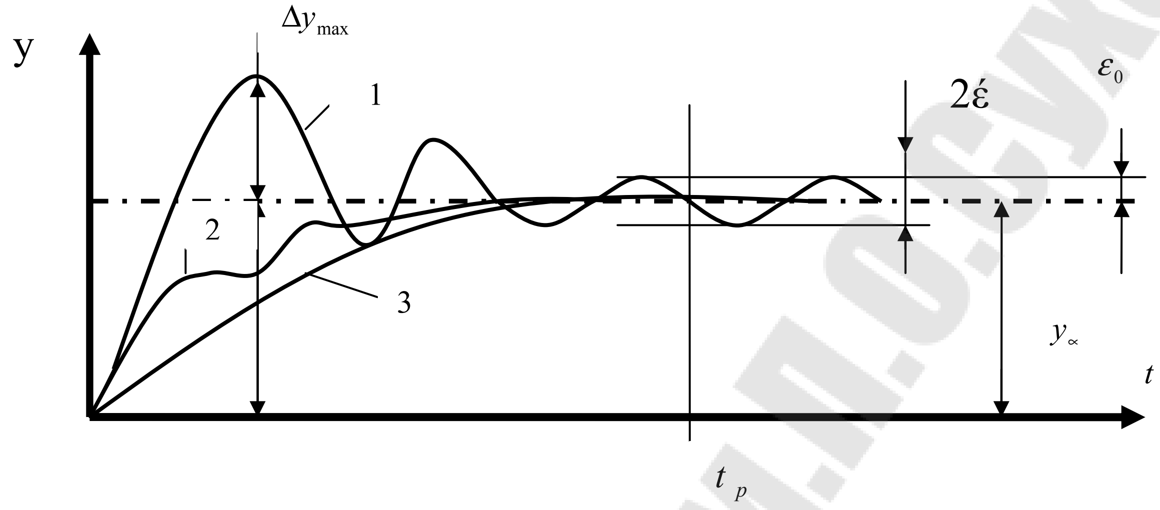
Если к системе прикладывается внешнее воздействие, то в ней возникает переходный процесс, при котором выходная (регулируемая) величина изменяется во времени. В устойчивой системе переходный процесс является затухающим, т.е. с течением времени устанавливается определенное значение выходной величины в соответствии с задающим воздействием.

Качество процесса регулирования оценивают по переходному процессу (т.е. по переходной функции *h(t)*); при этом наиболее существенны: вид переходного процесса, максимальное значение выходной величины, время регулирования и некоторые другие показатели.



Качество регулирования определяют по отклику выходной величины на типовые воздействия входной и возмущающей величин. Обычно используются единичные ступенчатые воздействия.

Различают три характерных вида переходного процесса для выходной величины при единичном ступенчатом входном воздействии:
----- колебательный.
----- монотонный.
----- апериодический.



Основными показателями качества являются:
------ время регулирования;
------ перерегулирование;
------ колебательность;
------ установившаяся ошибка.

В устойчивой системе выходная величина при переходном процессе приближается к своему установившемуся значению y_∞ при $t - \infty$. Поэтому продолжительность регулирования определяется до того момента, когда отклонения y от y_∞ оказывается в допустимых пределах $\pm\varepsilon$.
Обычно $\varepsilon = \pm 0.05\, y_\infty$. Время, по истечении которого переходный процесс попадает в “канал” допустимых отклонений, называется **временем переходного процесса** или **временем регулирования** t_p.

Перерегулирование – максимальное отклонение регулируемой величины от установившегося значения:

Абсолютное Δy_{max}

Относительное $c_{max} = (\Delta y_{max} / y_\infty)/100$.

Перерегулирование также называется максимальной динамической ошибкой.

Колебательность – число колебаний регулируемой величины за время регулирования t_p.

Установившаяся ошибка – разность между установившимся значением регулируемой величины $y_\propto$ после окончания процесса регулирования и её заданным значением $y_{зад}$.

$$\varepsilon_0 = y_{зад} - y_\propto .$$

Установившаяся ошибка характеризует точность регулирования.

Показатели качества регулирования САУ можно определить:

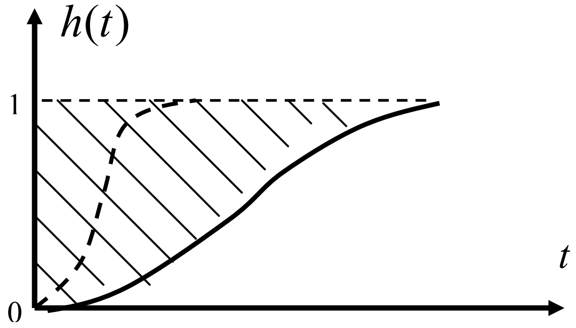
---- экспериментально.

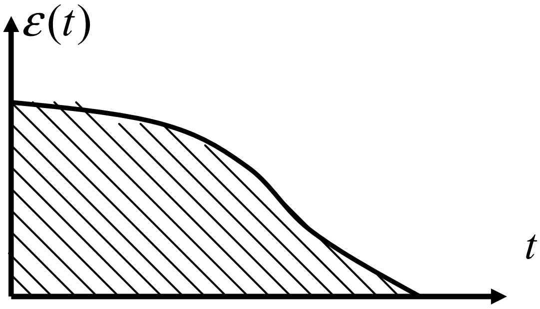
---- аналитически: анализируя переходную функцию систему при ступенчатом входном воздействии.

---- аналитически – по частотным характеристикам.

<u>Интегральные оценки качества</u>.

В основе этого метода лежит предположение, что качество регулирования тем выше, чем меньше площадь между кривой переходного процесса и заданным значением регулируемой величины.





$\varepsilon(t)$ - отклонение параметра от заданного значения:

$$\varepsilon(t) = 1 - h(t).$$

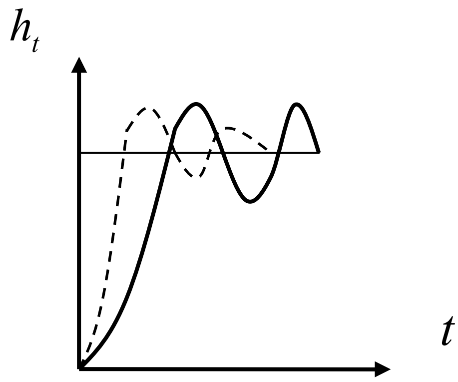
Используются следующие интегральные оценки:

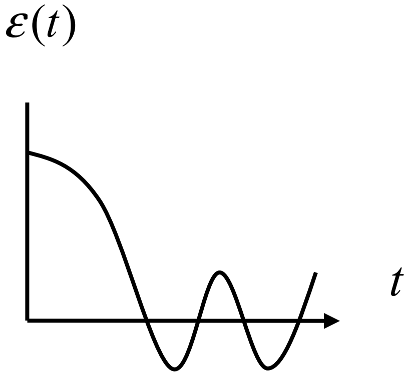
$$I_1 = \int_0^{\infty} \varepsilon(t)dt;$$

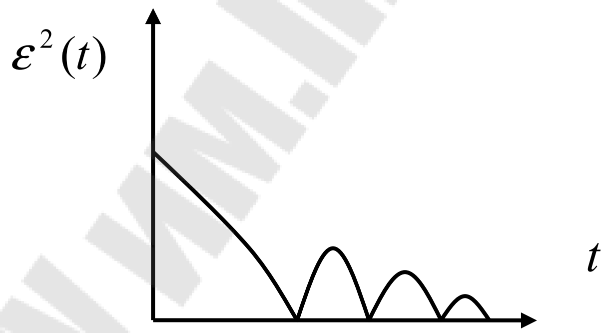
$$I_2 = \int_0^{\infty} \varepsilon^2(t)dt.$$

I_1 - удобен для оценки неколебательных монотонных переходных процессов.

I_2 - удобен для оценки качества колебательных переходных процессов.







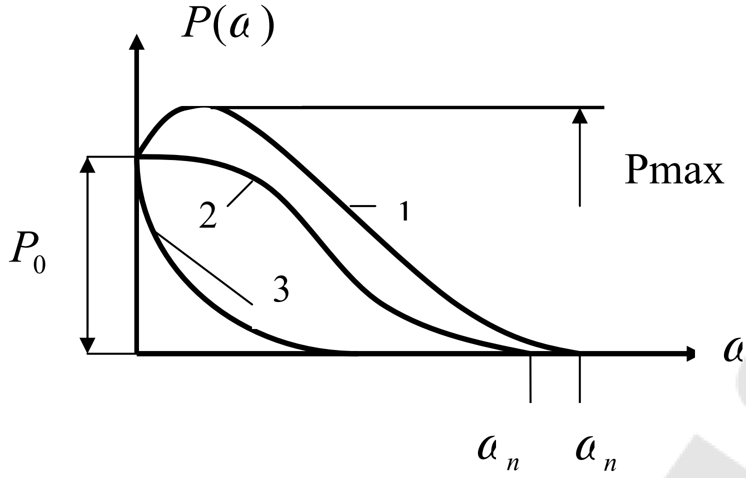
Минимизируя эти интегралы, можно получить те значения параметров системы (например, коэффициентов дифференциального уравнения САУ), которые обеспечивают высокое качество регулирования (например, наибольшие быстродействие системы).

29. Оценка качества переходных процессов по частотным характеристикам.

Формула

$$h(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{P(\omega)}{\omega}\sin\omega t\,d\omega \tag{1}$$

показывает, что переходный процесс, вызванный единичным ступенчатым воздействием, зависит от вида вещественной частотной характеристики. Это позволяет приближённо оценить качество регулирования, используя свойства ВЧХ, без расчёта переходного процесса.



Типичные вещественные частотные характеристики.

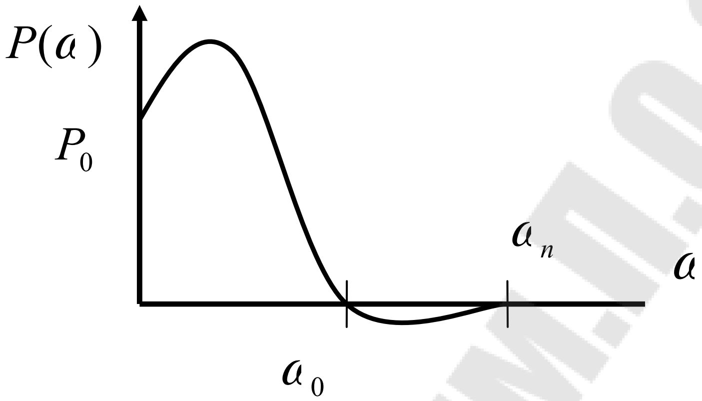
1. Приблизительно одинаковым $P(\omega)$ соответствуют приблизительно одинаковые $h(t)$.
2. Значение ВЧХ при $\omega = 0$, т.е. $P(0)$, совпадает с установившимся значением выходной величины:
$$P(0) = h(\infty).$$
3. При невозрастающей $P(\omega)$ (кривая 2) максимальная динамическая ошибка (т.е. перерегулирование) не превышает 18%.

4. При ВЧХ, имеющей вид кривой 1, максимальная динамическая ошибка удовлетворяет условию:
$$\sigma_{\max} = \frac{1.18P_{\max} - P(0)}{P(0)}100\%.$$
5. Если $P(\omega)$ является монотонно убывающей кривой (кривая 3), то переходный будет монотонным (без перерегулирования).
6. Длительность монотонного переходного процесса t_p (до достижения регулируемой величиной значения $\pm 0.05y_\infty$):
$$t_p \le \frac{4\pi}{\omega_n}.$$
7. Для других процессов (кривые 1, 2):
$$\frac{3\pi}{\omega_n} < t_p < \frac{8\pi}{\omega_n},$$

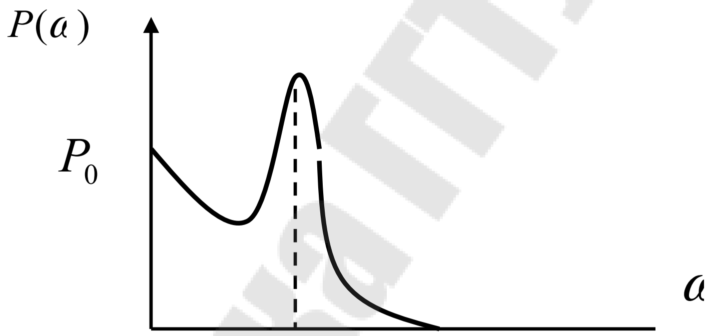
причём переходный процесс затухает тем быстрее, чем больше a_n (т.е. чем больше растянута область $P(a) > 0$ вдоль оси a).

8. Если $P(a)$ имеет вид кривой 4, то длительность регулирования:

$$t_p \geq \frac{\pi}{\omega_{o1}}.$$



9. Если P(ω) обращается в бесконечность при некотором значении a, то система является неустойчивой.



30. Точность регулирования САУ

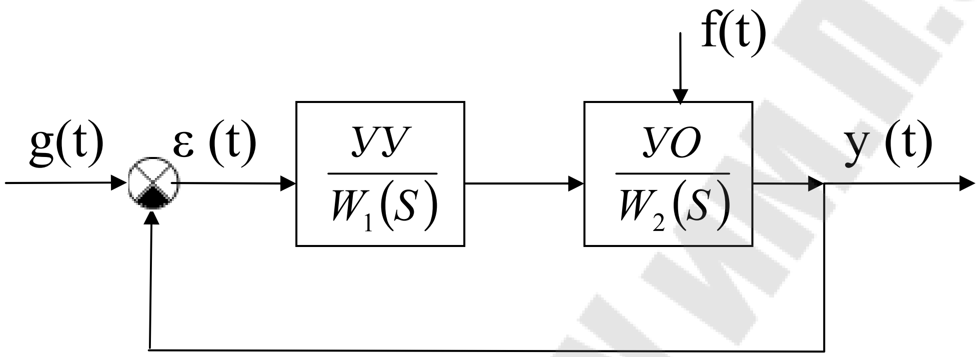
Точность регулирования оценивается ошибкой, с которой воспроизводится заданное значение регулируемой величины. Чем выше точность регулирования, тем меньше должна быть эта ошибка.

Определение установившейся ошибки.

Установившуюся ошибку можно определить по кривой переходного процесса, полученной в результате эксперимента или построенной, например, частотными методами. Однако её также можно вычислить по так называемой передаточной функции ошибки системы.

Принято различать: ошибку по управляющему воздействию;
ошибку по возмущающему воздействию.

Рассмотрим одноконтурную замкнутую систему:



Все характерные величины системы преобразуем по Лапласу:

f(t) – возмущающее воздействие → *F(S);*

g(t) – управляющее (задающее) воздействие → *G(S);*

$\varepsilon_f(t)$ - ошибка (отклонение) выходной величины от заданного значения вследствие действия возмущающего воздействия → $\mathrm{E}_f(S)$;

$\varepsilon_g(t)$ - ошибка выходной величины системы по каналу управляющего воздействия → $\mathrm{E}_g(S)$;

$\Phi_f(S)$ - передаточная функция ошибки системы по каналу возмущающего воздействия;

$\Phi_g(S)$ - передаточная функция ошибки системы по каналу задающего воздействия.

а) Ошибка выходной величины, вызвана возмущающим воздействием:

$$E_f(S) = \Phi_f(S) \cdot F(S). \qquad (1)$$

Если возмущающее воздействие ступенчато:

$$f(t) = \begin{cases} f_0, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

то его изображение:

$$F(S) = L(f_0) = \frac{f_0}{S}. \tag{2}$$

Таким образом:

$$E_f(S) = f_0 \cdot \frac{\Phi_f(S)}{S}; \qquad E_f(S) \cdot S = f_0 \cdot \Phi_f(S) \cdot \tag{3}$$

Известная теорема операционного исчисления:

$$\lim_{S-0} = [S \cdot \varphi(S)] = \lim_{t-\infty} \varphi(t) \cdot \tag{4}$$

Поэтому:

$$\lim_{S \to 0} [E_f(S) \cdot S] = \lim_{t \to \infty} \varepsilon_f(t) = \varepsilon_{f\infty}, \tag{5}$$

$\varepsilon_{f\infty}$---- установившаяся ошибка.

$$\varepsilon_{f\infty} = \lim_{S \to 0} [f_0 \cdot \Phi_f(S)]. \tag{6}$$

Передаточная функция данной системы по каналу возмущающего воздействие (система с обратной связью):

$$\Phi_f(S) = \frac{W_2(S)}{1 + W_1(S) \cdot W_2(S)}. \tag{7}$$

Итак, установившаяся ошибка по каналу возмущающего воздействия:

$$\varepsilon_{f\infty} = \lim_{S \to 0} \frac{f_0 \cdot W_2(S)}{1 + W_1(S) \cdot W_2(S)}. \tag{8}$$

Например:

1.. Если УУ и УО – статические, т.е.

$$W_1(S) = K_1, \qquad W_2(S) = K_2,$$

то

$$\varepsilon_{f\infty} = \frac{f_0 \cdot K_2}{1 + K_1 \cdot K_2}. \tag{9}$$

2.. Если: УО – статический:

УУ – астатическое: $W_1(S) = \dfrac{K_1}{S^\nu}$ ($\nu > 1$, *т.е.* $\nu = 2,3,4$)

то

$$\varepsilon_{f\infty} = \lim \frac{f_0 \cdot K_2}{1 + \dfrac{K_1 \cdot K_2}{S^\nu}} = 0; \tag{10}$$

<u>б) ошибка выходной величины по каналу задающего воздействия.</u>

В данном случае:

$$\varepsilon_g(t) = g(t) - y(t), \tag{11}$$

$$\mathrm{E}_g(S) = G(S) - Y(S), \tag{12}$$

$$\frac{E_g(S)}{G(S)} = 1 - \frac{Y(S)}{G(S)}, \tag{13}$$

$$E_g(S) = \Phi_g(S) \cdot G(S), \tag{14}$$

где $\Phi_g(S)$ ---- передаточная функция ошибки системы по задающему воздействию.

Кроме того, очевидно:

$$Y(S) = [W_1(S) \cdot W_2(S)] \cdot E_g(S), \tag{15}$$

Подставим (14) и (15) в (13):

$$\Phi_g(S) = \frac{1}{1 + W_1(S) \cdot W_2(S)} \quad . \tag{16}$$

Если на систему поступает ступенчатое задающее воздействие:

$$g(t) = \begin{cases} g_0\,, & t \geq 0 \\ 0\,, & t < 0 \end{cases} \quad ;$$

$$G(S) = L(g_0) = \frac{g_0}{S}, \tag{17}$$

то из (14)

$$E_g(S) = \Phi_g(S) \cdot \frac{g_0}{S};$$

$$E_g(S) \cdot S = \Phi_g(S) \cdot g_0; \tag{18}$$

$$\lim_{S \to 0} [E_g(S) \cdot S] = \lim_{t \to \infty} \varepsilon_g(t) = \varepsilon_{g\infty}, \tag{19}$$

$\varepsilon_{g\infty}$ - установившаяся ошибка по каналу задающего воздействия.

Из (18), (19) и (16) имеем:

$$\varepsilon_{g\infty} = \lim_{S \to 0} [E_g(S) \cdot S] = \lim_{S \to 0} [\Phi_g(S) \cdot g_0] = ...$$

$$\varepsilon_{g\infty} = \lim_{S \to 0} \frac{g_0}{1 + W_1(S) \cdot W_2(S)} \quad . \tag{20}$$

1.. <u>Если УУ и УО – статические</u>,

то

$$\varepsilon_{g\infty} = \frac{g_0}{1 + K_1 \cdot K_2}. \tag{21}$$

2.. <u>Если: УО – сатический,</u>
<u>УУ – астатическое</u>

то $$\varepsilon_{g\infty} = 0.$$

Михневич Анатолий Васильевич

ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Методические указания по одноименному курсу для студентов специальности 1-36 01 07 «Гидропневмосистемы мобильных и технологических машин» заочной формы обучения

Подписано к размещению в электронную библиотеку
ГГТУ им. П. О. Сухого в качестве электронного
учебно-методического документа 10.06.11.
Рег. № 20Е.
E-mail: ic@gstu.by
http://www.gstu.by