

Олег Никифорович Шабловский,

*доктор физико-математических наук, профессор,
Гомельский государственный технический университет им. П. О. Сухого
(246746, Беларусь, г. Гомель, пр-т Октября, 48),
e-mail: shablowsky-on@yandex.ru*

Дмитрий Григорьевич Кроль,

*кандидат физико-математических наук, доцент,
Гомельский государственный технический университет им. П. О. Сухого
(246746, Беларусь, г. Гомель, пр-т Октября, 48),
e-mail: kr-dmitry@yandex.ru*

Иван Александрович Концевой,

*старший преподаватель,
Гомельский государственный технический университет им. П. О. Сухого
(246746, Беларусь, г. Гомель, пр-т Октября, 48),
e-mail: ivankon@yandex.ru*

Нелинейное сопротивление и завихренность течения жидкости между коаксиальными вращающимися цилиндрами

Дано новое точное аналитическое решение, определяющее стационарное течение вязкой жидкости между двумя коаксиальными цилиндрами. Центральным пунктом применяемой гидродинамической модели является внешняя сила трения Рэлея. Рассмотрены изотермический и неизотермический режимы движения жидкости. Представлены два типа неизотермического поведения эффективного коэффициента внешнего сопротивления по отношению к температуре потока: речь идет о росте/убывании коэффициента сопротивления при возрастании температуры. Установлено, что основным элементом аналитической структуры профилей скорости и температуры является функция синус, имеющая своим аргументом логарифмическую координату. Проведены числовые расчёты и представлены варианты течения, относящиеся к подвижному/неподвижному внешнему и внутреннему цилиндрам. Определены функциональные связи завихренности с динамическими и тепловыми параметрами течения: «градиент давления – завихренность», «тепловой поток – завихренность», «вязкое напряжение – завихренность» и др. Обнаружена неоднозначная зависимость завихренности течения от вязкого касательного напряжения. Представлена графическая информация, дающая возможность проанализировать свойства изотермического и неизотермического течений. Обсуждены закономерности формирования профилей скорости, давления, коэффициента сопротивления, вязкого касательного напряжения, завихренности. Обнаружен важный в теоретическом и практическом отношении факт: температура подвижной стенки цилиндра может служить управляющим параметром воздействия на завихренность течения. В частности, это означает, что можно указать такую температуру вращающейся стенки, что завихренность на ней будет нулевой.

Ключевые слова: цилиндрическое течение, сила трения Рэлея, нелинейный коэффициент сопротивления, завихренность

Oleg N. Shablovsky,

*Doctor of Physics and Mathematics, Professor,
Pavel Sukhoi State Technical University of Gomel
(48 Oktyabrya pr., Gomel, 246746, Belarus),
e-mail: shablovsky-on@yandex.ru*

Dmitry G. Kroll,

*Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor,
Pavel Sukhoi State Technical University of Gomel
(48 Oktyabrya pr., Gomel, 246746, Belarus),
e-mail: kr-dmitry@yandex.ru*

Ivan A. Kontsevoy,

*Senior Lecturer,
Pavel Sukhoi State Technical University of Gomel
(48 Oktyabrya pr., Gomel, 246746, Belarus),
e-mail: ivankon@yandex.ru*

Nonlinear Resistance and Vorticity of the Fluid Flow Between Two Coaxial Rotating Cylinders

A new exact analytical solution for the stationary flow of a viscous fluid between two coaxial cylinders is given. The main point of the hydrodynamical model is the external Rayleigh friction force. Isothermal and non-isothermal regimes of the fluid flow are considered. We present two types of non-isothermal behaviour of the effective coefficient of external resistance on account of the flow temperature. Namely we regard elevation/decrease of the resistance coefficient at the rise of temperature. We have established that the main element of analytical structures of the profiles of velocity and temperature is sine function with a logarithmic coordinate as an argument. We present the flow variants referring to movable and stationary cylinders. We determined a series of functional connections between vorticity and flow parameters: “pressure gradient — vorticity”, “heat flux — vorticity”, “viscous stress — vorticity”, etc. An ambiguous dependence of the flow vorticity on the shear viscous strain is discovered. The properties of isothermal and non-isothermal flows are presented in graphical form. Formation of profiles of velocity, pressure, resistance coefficient, viscous shear strain and vorticity is discussed. It is established that the temperature of the cylinder’s movable wall can regulate the flow vorticity. Namely, there can exist a temperature of zero vorticity.

Keywords: cylindrical flow, Rayleigh friction force, nonlinear resistance coefficient, vorticity

Введение. Для вязкой несжимаемой жидкости в полярных координатах (r, φ) рассмотрим следующий класс стационарных цилиндрических течений:

$$v_r \equiv 0, \quad v_\varphi = v(r), \quad p = p(r), \quad T = T(r), \quad (1)$$

$$F_r \equiv 0, \quad F_\varphi = F_\varphi(v^2, T, r), \quad q_v = q_v(v^2, T, r), \quad c_p, \lambda, \mu, \rho - const,$$

$$\tau_{rr} \equiv 0, \quad \tau_{\varphi\varphi} \equiv 0, \quad \tau_{r\varphi} = \mu \left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right).$$

Здесь $\mathbf{v}(v_r, v_\varphi)$ – вектор скорости; ρ – плотность; $\mathbf{F}(F_r, F_\varphi)$ – вектор массовой силы; $\tau_{rr}, \tau_{\varphi\varphi}, \tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi r}$ – компоненты девиатора тензора напряжений; T – температура; c_p – удельная теплоемкость; λ – коэффициент теплопроводности; μ – коэффициент динамической вязкости; q_v – объемная мощность внутренних источников энергии.

Задача о течении вязкой жидкости между двумя коаксиальными вращающимися цилиндрами относится к классическим проблемам гидродинамики. Прикладные аспекты данного вопроса связаны с гидродинамической теорией смазки, с формированием вихревых структур в природных и технических гидродинамических системах. Цилиндрическое течение Куэтта [11, с. 90] описывается точным решением стационарных уравнений Навье-Стокса и определяет ламинарное движение ньютоновской жидкости, возникающее при относительном вращении двух цилиндров. Фундаментальные исследования задачи о течении между цилиндрами связаны со следующими проблемами: гидродинамическая устойчивость/неустойчивость движения жидкости и начало турбулизации течения; изучение природы установления профиля скорости в зазоре между цилиндрами; влияние нагрева/охлаждения жидкости на устойчивость тепловой конвекции во вращающемся цилиндрическом слое. Современное состояние этих исследований и библиография представлены в книгах [1; 2; 6]. В данной работе рассматривается неклассический вариант задачи о течении жидкости между соосными вращающимися цилиндрами. А именно: учитывается рэлеевская сила сопротивления $\mathbf{F} \equiv \mathbf{F}^R = -\zeta \mathbf{v}$, где $\zeta > 0$ – коэффициент «внешнего» трения. Такая физическая модель означает [4, с. 118], что влияние стенок и ламинарного пограничного слоя сводится к эффективному затормаживанию движения жидкости. Уравнения гидродинамики с рэлеевским трением применялись в [4; 5] для теоретического изучения и лабораторного моделирования периодических течений в тонких слоях жидкости, а также для анализа крупномасштабных физических явлений в океане и атмосферах вращающихся планет. Модель сопротивления Рэлея оказалась эффективной в задачах тепломассообмена при кристаллизации полупроводников в условиях орбитального полета [7]. Основная идея этого подхода состоит в том, что гидродинамическое описание расплава учитывает наличие кластерных образований, которые оказывают сопротивление течению. Обычно в теоретических расчетах используется линейный вариант силы трения: $\zeta = \text{const}$. В рамках приближения $\zeta \sim |\mathbf{v}|$ в [4] построены гидродинамические системы, описывающие каскадный процесс преобразования энергии в турбулентном потоке. Далее полагаем, что коэффициент сопротивления монотонно растет при увеличении $|\mathbf{v}|$ и является четной функцией скорости: $\zeta = \zeta(v^2, T, r)$, $\partial\zeta/\partial(v^2) > 0$. Объемный источник энергии $q_v(v^2, T, r)$ моделирует воздействие внутренних источников тепла и теплообмен жидкости с внешней средой. Для представленной здесь задачи вид функции источника детерминирован структурой применяемого аналитического решения. Для диссипативной функции Φ принимаем оценку $\Phi \ll |q_v|$, т. е. рассматриваем процессы, для которых можно пренебречь выделением тепла за счет вязкой диссипации энергии. Несколько новых аналитических решений стационарных уравнений гидродинамики вязкой жидкости с учетом нелинейной внешней силы сопротивления течению построены и изучены в [8; 9]; в этих статьях были рассмотрены плоские двумерные движения. Настоящая работа имеет своей целью: 1) дать новое точное решение, определяющее цилиндрическое течение вязкой жидкости, испытывающей нелинейное воздействие внешнего сопротивления; 2) изучить динамические и тепловые свойства завихренности потока для двух типов температурной зависимости коэффициента сопротивления.

Точное решение. В классе решений (1) уравнения Навье-Стокса и уравнение энергии [11, с. 73] имеют вид

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} = \frac{v^2}{r}, \quad (2)$$

$$\frac{d^2v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} = \frac{v}{r^2} - \frac{F_\varphi}{\nu}, \quad \frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} = -\frac{q_v}{\lambda}, \quad (3)$$

$$F_\varphi = -\zeta v, \quad \zeta = \zeta(v^2, T, r), \quad q_v = q_v(v^2, T, r).$$

Очевидно, что уравнение неразрывности выполняется тождественно. Давление $p(r)$ подсчитывается автономно от динамической системы (3). Два уравнения в (3) зацепляются друг за друга из-за температурной зависимости коэффициента сопротивления ($\partial\zeta/\partial T \neq 0$), а также вследствие зависимости объемного источника энергии от кинетической энергии жидкости, $\partial q_v/\partial(v^2) \neq 0$.

Применяя логарифмическую координату $\alpha \equiv \bar{R}/2 = \ln(r/r_0)$, запишем уравнения (2–3) в следующей форме

$$dp/d\alpha = \rho v^2, \quad (4)$$

$$d^2v/d\alpha^2 = v[1 + (r^2\zeta/\nu)], \quad d^2\tau/d\alpha^2 = -r^2q_v c_1/(\lambda v_1). \quad (5)$$

Здесь $T - T_0 = v_1\tau/c_1$, где c_1, v_1 — положительные постоянные, имеющие размерность удельной теплоемкости Дж/(кг·град) и скорости соответственно; T_0 — отсчетное значение температуры. Далее будем применять безразмерные величины, обозначая их чертой сверху: $\bar{v} = v/v_1, \bar{\tau} = \tau/v_1, \bar{r} = r/r_0$.

Для коэффициента сопротивления и источника энергии применяем частные зависимости следующего вида:

$$\bar{\zeta} \equiv r_0^2\zeta/\nu = [2(1 - 3\bar{\tau}^2 + \bar{v}^2) - 1]/\bar{r}^2, \quad (6)$$

$$\bar{q}_v \equiv c_1 r_0^2 q_v/(\lambda v_1^2) = 2\bar{\tau}(\bar{\tau}^2 - 3\bar{v}^2 - 1)/\bar{r}^2 \quad (7)$$

и тогда из (5) получаем

$$d^2\bar{v}/d\alpha^2 = 2\bar{v}(1 - 3\bar{\tau}^2 + \bar{v}^2), \quad d^2\bar{\tau}/d\alpha^2 = 2\bar{\tau}(1 - \bar{\tau}^2 + 3\bar{v}^2).$$

Применяя для этой динамической системы математические результаты работы [10], находим точное решение, определяющее скорость и температуру жидкости

$$\bar{v} = 2\varepsilon \cdot \sin(2\alpha)/\delta, \quad \bar{\tau} = (1 - \varepsilon^2)/\delta, \quad \delta = 1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cdot \cos(2\alpha). \quad (8)$$

Здесь ε — параметр решения. В частном случае $\varepsilon^2 = 1$ получаем изотермическое течение, $T = T_0 \equiv \text{const}$. Для функций (6, 7) явная зависимость от радиальной координаты характеризует структурную неоднородность, присущую внешней силе сопротивления за счет образования кластеров. В формуле (7) разность $\bar{\tau}^2 - 3\bar{v}^2$ можно интерпретировать как конкуренцию между выделением тепловой энергии и потерями кинетической энергии вязкого потока. Динамические и тепловые свойства коэффициента сопротивления определяются неравенствами $\partial\bar{\zeta}/\partial(\bar{\tau}^2) < 0, \partial\bar{\zeta}/\partial(\bar{v}^2) > 0$. Условие $\zeta > 0$ выполнено при

$$-\frac{\pi}{2} - \Delta < 2\alpha < \frac{\pi}{2} + \Delta, \quad \frac{18 - \sqrt{224}}{10} < \varepsilon^2 < \frac{18 + \sqrt{224}}{10},$$

где $\Delta > 0$ — малое конечное число.

Изотермическое течение. При $\varepsilon = 1$ представленное выше точное решение (4, 6, 8) имеет вид

$$\bar{v} = \frac{\sin \bar{R}}{1 + \cos \bar{R}}, \quad \bar{p} \equiv \frac{(p - p_0)}{\rho v_1^2} = \bar{v} - \frac{\bar{R}}{2}, \quad (9)$$

$$\bar{\zeta} \equiv r_0^2\zeta/\nu = (1 + 2\bar{v}^2)/\bar{r}^2, \quad \bar{r} \neq \exp(\pi/2).$$

Здесь \bar{R} – логарифмическая координата; r_0, v_1 – положительные константы, они имеют размерность длины и скорости соответственно. Условие $p > 0$ обеспечивается подходящим выбором константы $p_0 > 0$. Данное решение справедливо на конечном отрезке r и определяет течение между двумя непроницаемыми коаксиальными цилиндрами. На обеих граничных окружностях выполнено условие прилипания. Возможны следующие три варианта (рис. 1). Вариант 1: $r \in [r_0, r_1]$, $0 < r_0 < r_1$. Вариант 2: $r \in [r_2, r_0]$, $0 < r_2 < r_0$. Вариант 3: $r \in [r_2, r_1]$, $0 < r_2 < r_0 < r_1$. Для варианта 1 имеем: внутренний цилиндр $r = r_0$ неподвижен, $v_\varphi(r = r_0) = 0$, а внешний цилиндр $r = r_1$ вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_1 = v_\varphi(r = r_1)/r_1$. В этом цилиндрическом зазоре $0 \leq \bar{R} \leq 2 \ln(r_1/r_0)$. Для варианта 2 имеем: внешний цилиндр $r = r_0$ неподвижен, $v_\varphi(r = r_0) = 0$, а внутренний цилиндр $r = r_2$ вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_2 = v_\varphi(r = r_2)/r_2$. В этом цилиндрическом зазоре $2 \ln(r_2/r_0) \leq \bar{R} \leq 0$.

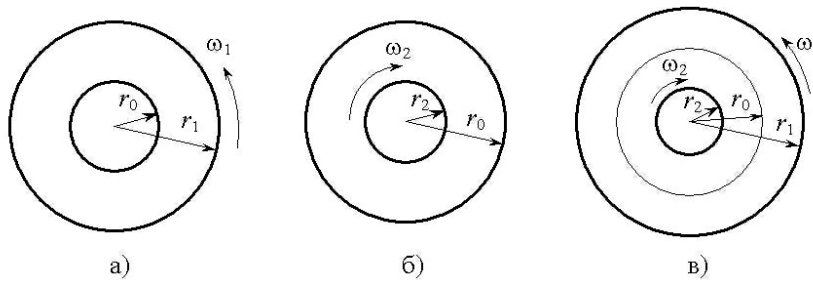


Рис. 1. Схема расположения подвижного и неподвижного цилиндров для трех вариантов течения; части а, б, в соответствуют вариантам 1, 2, 3

Вариант 3 является объединением вариантов 1 и 2: внутренний ($r = r_2$) и внешний ($r = r_1$) цилиндры вращаются вокруг их общей оси; на линии $r = r_0$ жидкость неподвижна. В этом цилиндрическом зазоре $2 \ln(r_2/r_0) \leq \bar{R} \leq 2 \ln(r_1/r_0)$. Ясно, что при $r = r_0$ функция $p = p(r)$ имеет перегиб: $r = r_0, \bar{R} = 0, v = 0, dp/dr = 0, d^2p/dr^2 = 0, d^3p/dr^3 \neq 0$.

Вихрь скорости $\mathbf{w}(\omega_r, \omega_\varphi, \omega_z)$ имеет только одну компоненту

$$\omega_r \equiv 0, \quad \omega_\varphi \equiv 0, \quad \omega_z = [v_\varphi + r(dv_\varphi/dr)]/(2r),$$

где z – координата, отсчитываемая вдоль оси цилиндра. В результате вычислений получаем

$$\bar{\omega} \equiv \omega_z r_0 / v_1 = \left[1 + \bar{p} + (\bar{R}/2) + (\bar{p} + (\bar{R}/2))^2 \right] / (2\bar{r}). \quad (10)$$

Обсудим корреляцию «давление – завихренность». Расчеты показывают, что для варианта 1 (неподвижный внутренний цилиндр) условие $\partial \bar{\omega} / \partial \bar{p} = 0$ не выполняется. Если же неподвижен внешний цилиндр (вариант 2), то условие $\partial \bar{\omega} / \partial \bar{p} = 0$ выполняется при $\bar{p} = -(1 + \bar{R})$. Это значит, что в таком течении завихренность $\bar{\omega} = \bar{\omega}(\bar{R}, \bar{p})$ есть немонотонная функция по отношению к аргументу \bar{p} . Данный вывод справедлив при каждом r^2 из интервала $0 < r^2 < (r_0^2/e)$. Зависимость (9) показывает, что для всех представленных здесь вариантов отсутствуют точки с нулевой завихренностью: $\bar{\omega}(\bar{R}, \bar{p}) \neq 0$. Безразмерные градиент давления и вязкое касательное напряжение вычисляются по формулам

$$\frac{d\bar{p}}{d\bar{r}} = \frac{(\bar{v})^2}{\bar{r}}, \quad \bar{\tau}_{r\varphi} \equiv \frac{\tau_{r\varphi}}{\rho v_1^2} = \frac{\bar{v}}{\bar{r}} \left(2 \frac{d\bar{v}}{d\bar{R}} - \bar{v} \right), \quad \bar{v} = \frac{\mu}{\rho v_1 r_0}, \quad \frac{d\bar{v}}{d\bar{R}} = \frac{1}{1 + \cos \bar{R}}.$$

Величина $1/\bar{v}$ есть число Рейнольдса; при проведении вычислений оно принято равным единице. Изучаемое решение (8) не содержит ограничений на выбор числа Рейнольдса. Результаты расчетов представлены на рис. 2. Обсудим корреляции «завихренность – градиент

давления» и «завихренность – касательное напряжение». Для всех трех вариантов зависимость $\bar{\omega}$ от $d\bar{p}/d\bar{r}$ монотонно возрастающая; в случае двух подвижных цилиндров имеем две монотонные ветви (рис. 2в). В потоке с подвижными, вращающимися в противоположных направлениях стенками наблюдается двузначная зависимость $\bar{\omega} = \bar{\omega}(\bar{\tau}_{r\varphi})$ (рис. 2г). Нижние ветви графиков на рис. 2в, г соответствуют внутренней (по отношению к $r = r_0$) области течения; верхние ветви соответствуют внешней ($r_0 < r < r_1$) области. Темным кружком на рис. 2г отмечена точка ($\bar{r} = 1$), в которой сходятся верхняя и нижняя ветви кривой $\bar{\omega} = \bar{\omega}(\bar{\tau}_{r\varphi})$. Очевидно, что для течения с неподвижным внутренним цилиндром (вариант 1) тоже наблюдается двузначная связь $\bar{\omega} = \bar{\omega}(\bar{\tau}_{r\varphi})$: при одном и том же $\bar{\tau}_{r\varphi}$ завихренность принимает два различных значения. Если же неподвижен внешний цилиндр (вариант 2), то эта связь — однозначная.

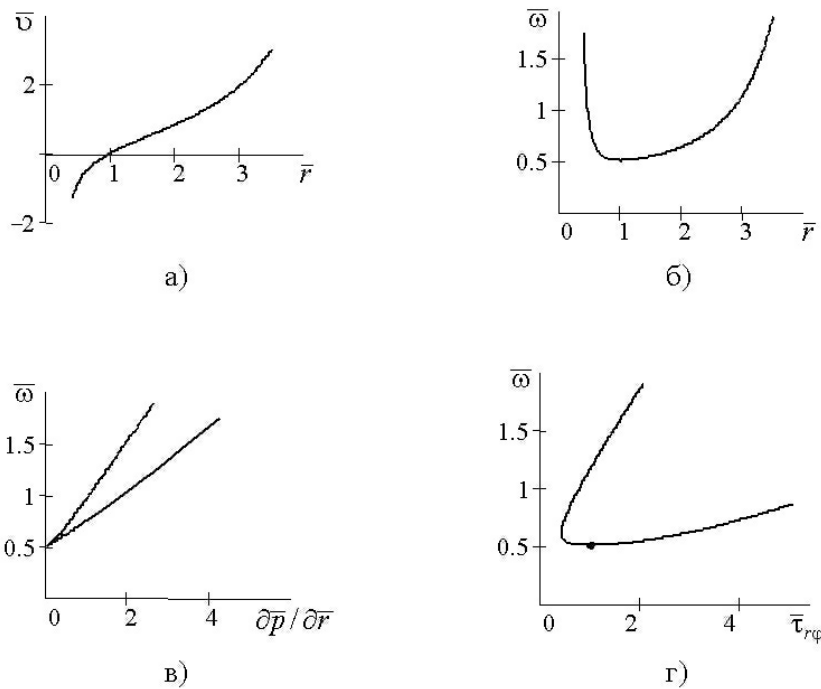


Рис. 2. Изотермическое течение между цилиндрами, вращающимися в противоположных направлениях

Неизотермическое течение. Работаем с формулами (8). Нетрудно видеть, что $\delta > 0$ при $\varepsilon^2 \neq 1$. Если $\varepsilon^2 < 1$, то $\tau > 0$, течение происходит в «горячей» области, $T > T_0$. Если $\varepsilon^2 > 1$, то $\tau < 0$, имеем «холодную» область, $0 < T < T_0$. Конечную связь между скоростью и температурой (первый интеграл) можно представить в следующей форме:

$$(\bar{\tau} - \bar{\tau}_1)^2 + \bar{v}^2 = R_\varepsilon^2(\varepsilon^2) \equiv 4\varepsilon^2/(1 - \varepsilon^2)^2, \bar{\tau}_1 = (1 + \varepsilon^2)/(1 - \varepsilon^2), \bar{\tau}_1^2 - R_\varepsilon^2 = 1. \quad (11)$$

На плоскости $(\bar{\tau}, \bar{v})$ имеем окружность радиуса R_ε с центром в точке $(\bar{\tau}_1, 0)$. В горячей области $\bar{\tau}_1 > 0$, $d(R_\varepsilon^2)/d(\varepsilon^2) > 0$; в холодной области $\bar{\tau}_1 < 0$, $d(R_\varepsilon^2)/d(\varepsilon^2) < 0$. Так же, как в изотермическом случае, имеем три варианта течения (рис. 1). Концентрические окружности $r = \text{const}$ являются изотермами. Это значит, что температуры цилиндрических стенок постоянны и зависят от выбора констант T_0, ε, c_1 . Радиальный тепловой поток $q_r = -\lambda(dT/dr)$ в безразмерном виде записывается следующим образом:

$$\bar{q} = \frac{c_1 r_0 q_r}{\lambda v_1^2} = -\frac{d\bar{\tau}}{d\bar{r}}, \quad \frac{d\bar{\tau}}{d\bar{r}} = \frac{4\varepsilon(1 - \varepsilon^2) \sin(2\alpha)}{\bar{r}\delta^2}.$$

Отсюда следует, что неподвижная стенка ($\bar{v} = 0$) теплоизолирована: $q_r = 0$. Своеобразие поведения теплового потока и источника энергии обсудим на примере варианта 1. Расчеты показывают, что в холодной области происходит объемное выделение энергии $q_v(\varepsilon, r = r_0) > 0$, $q_v(\varepsilon, r = r_1) > 0$; тепловой поток отводится от жидкости через подвижную стенку, $q(r = r_1) > 0$. В горячей области происходит объемный сток энергии $q_v(\varepsilon, r = r_0) < 0$, $q_v(\varepsilon, r = r_1) < 0$; тепловой поток поступает в область течения через подвижную стенку, $q(r = r_1) < 0$. Для варианта 2 в горячей области $q_v(\varepsilon, r = r_0) < 0$, $q_v(\varepsilon, r = r_2) < 0$; тепловой поток поступает в жидкость через подвижную стенку, $q(r = r_2) > 0$. В холодной области $q_v(\varepsilon, r = r_0) > 0$, $q_v(\varepsilon, r = r_2) > 0$; тепловой поток отводится от подвижной стенки, $q(r = r_2) < 0$. Рассмотрим возможность существования линии нулевой завихренности $\omega = 0$:

$$(1 + \varepsilon^2) \sin(2\alpha) + 2\varepsilon \sin(2\alpha) \cos(2\alpha) + 2(1 + \varepsilon^2) \cos(2\alpha) + 4\varepsilon = 0. \quad (12)$$

На неподвижной стенке имеем $\sin(2\alpha) = 0$, $\cos(2\alpha) = \pm 1$, следовательно, в этом случае (12) не выполняется ни при каком $\varepsilon^2 \neq 1$. Таким образом, на неподвижной стенке всегда имеем ненулевую завихренность $\omega \neq 0$. Разрешив (12) относительно ε , находим: $\omega = 0$, если

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{-2 - \sin(2\alpha) \cos(2\alpha) \pm \sin(2\alpha) \sqrt{4 - \sin^2(2\alpha)}}{\sin(2\alpha) + 2 \cos(2\alpha)}.$$

Анализ показывает, что существует подвижная стенка [$\sin(2\alpha_*) \neq 0$], для которой можно указать такое значение $\varepsilon = \varepsilon_*$, т.е. такую температуру $\tau = \tau_*$, что $\omega_* = 0$ на этой стенке. Например, пусть $\sin(2\alpha_*) = \sqrt{2}/2$, $\cos(2\alpha_*) = \sqrt{2}/2$. Тогда $(\varepsilon_*)_{1,2} = (-5 \pm \sqrt{7})/(3\sqrt{2})$. Из соображений непрерывности ясно, что можно получить $\omega = 0$ при значениях ε , взятых из окрестности $\varepsilon = \varepsilon_*$. Данный результат означает, что температура стенки служит управляющим фактором воздействия на завихренность течения.

Приведем здесь (рис. 3, 4, 5) основные итоги численных расчетов в горячей области для вариантов 1 и 3. Для того, чтобы наглядно продемонстрировать тепловые свойства коэффициента сопротивления и объемного источника энергии, трансформируем с помощью (8, 11) исходные выражения (6, 7) к следующему виду, представляющему собой эффективные зависимости $\bar{\zeta}$ и \bar{q}_v от температуры:

$$\bar{\zeta}(\bar{v}^2(\bar{r}), \bar{\tau}(\bar{r}), \bar{r}) \equiv f_{\zeta}(\bar{\tau}), \quad \bar{q}_v(\bar{v}^2(\bar{r}), \bar{\tau}(\bar{r}), \bar{r}) \equiv Q_v(\bar{\tau}).$$

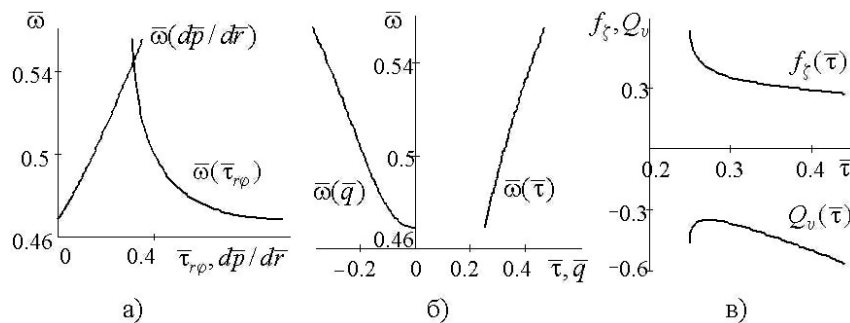


Рис. 3. Неизотермическое течение, соответствующее варианту 1; неподвижен внутренний цилиндр: а, б – функциональные связи завихренности с динамическими и тепловыми параметрами; в – температурные свойства коэффициента сопротивления и объемного источника энергии

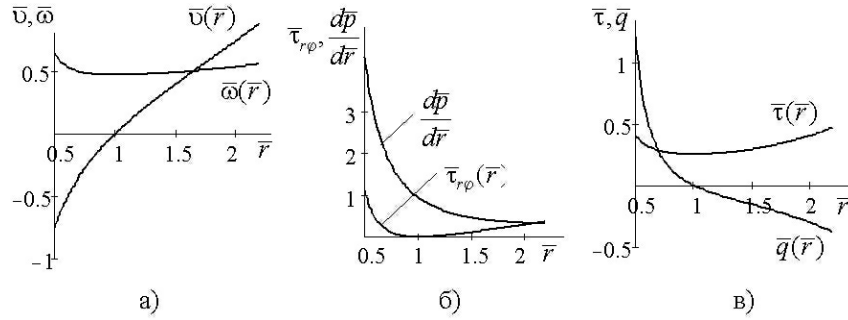


Рис. 4. Неизотермическое течение между цилиндрами, вращающимися в противоположных направлениях: графики зависимостей гидродинамических и тепловых параметров от радиальной координаты

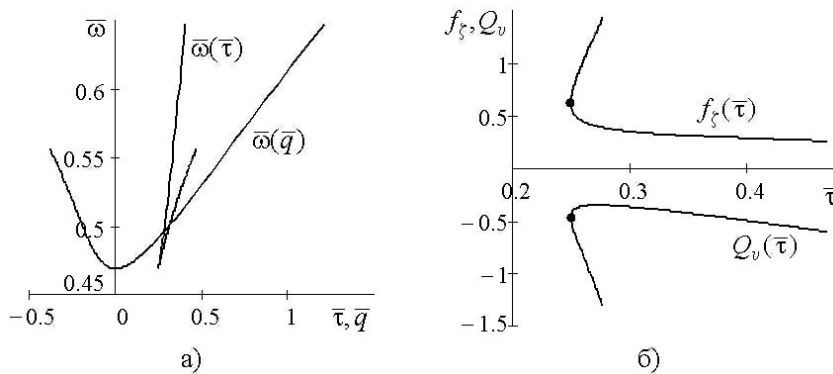


Рис. 5. Неизотермическое течение между цилиндрами, вращающимися в противоположных направлениях: а — тепловые свойства завихренности; б — температурные зависимости коэффициента сопротивления и объемного источника энергии

Обсудим вариант 1 (рис. 3). Из рис. 3а следует, что в данном классе неизотермических течений градиент давления и вязкое напряжение совершенно различным образом воздействуют на завихренность: здесь $d\bar{\omega}/d\bar{\tau}_{r\varphi} < 0$, а рост $d\bar{p}/d\bar{r}$ приводит к возрастанию $\bar{\omega}$. По отношению к температуре $\bar{\tau}$ и модулю теплового потока $|\bar{q}|$ наблюдается монотонный рост завихренности (рис. 3б). Температурная зависимость стока энергии $Q_v(\bar{\tau})$ немонотонная, имеет хорошо выраженный максимум. Вместе с тем $df_\zeta/d\bar{\tau} < 0$, что ассоциируется с термовязкой жидкостью, для которой $d\mu(T)/dT < 0$: это соответствует вязкости l -типа. Отметим здесь, что для вязкости g -типа выполнено неравенство $d\mu(T)/dT > 0$. Эти термины и обозначения (g — gas, l — liquid) применяются в метеорологии при изучении стационарных конвективных ячеек в слое воздуха. Библиография данного вопроса приведена в [3].

Результаты расчета варианта 3 представлены на рис. 4, 5. Графики на рис. 4 служат иллюстрацией аналитической структуры гидродинамического и теплового полей, описываемых решением (8). Напомним, что значение $\bar{r} = 1$ относится к внутренней границе, которая неподвижна и теплоизолирована; на рис. 5б это состояние отмечено темным кружком. Верхняя ветвь кривой $\bar{\omega}(\bar{\tau})$ на рис. 5а характеризует внутреннюю ($r_2 < r < r_0$) область течения, а нижняя ветвь — внешнюю область ($r_0 < r < r_1$). Такое же утверждение относится к верхней и нижней ветвям кривой $f_\zeta(\bar{\tau})$ на рис. 5б. Для линии $Q_v(\bar{\tau})$ на рис. 5б ситуация иная: верхняя/нижняя ветви этой кривой относятся к внешней/внутренней областям. Во внутренней области (вдоль верхней ветви графика функции $f_\zeta(\bar{\tau})$) имеем $df_\zeta/d\bar{\tau} > 0$, что соответствует вязкости g -типа. Во внешней области (вдоль нижней ветви графика функции $f_\zeta(\bar{\tau})$) имеем $df_\zeta/d\bar{\tau} < 0$, что соответствует вязкости l -типа (рис. 3в). Таким образом,

на границе $\bar{r} = 1$ наблюдается переключение режимов $g \leftrightarrow l$ нелинейного сопротивления жидкости.

Заключение. Новое точное аналитическое решение (8) определяет цилиндрическое течение жидкости при воздействии внешней силы трения и объемного источника энергии. Частный случай ($\varepsilon = 1$) этого решения представляет изотермическое движение. Основной результат здесь состоит в том, что при течении в зазоре между неподвижным внутренним и вращающимся внешним цилиндрами наблюдается двузначная зависимость «вязкое касательное напряжение – завихренность». Показано, что в неизотермическом течении существует первый интеграл (11), дающий связь между скоростью и температурой. Получены следующие результаты: 1) обнаружено принципиальное различие между градиентом давления и вязким касательным напряжением по характеру их воздействия на завихренность потока (рис. 3а); 2) установлено, что температура вращающейся стенки может служить управляющим параметром, влияющим на завихренность жидкости; 3) при течении между цилиндрами, вращающимися в противоположных направлениях, наблюдается переключение режимов $g \leftrightarrow l$ нелинейного внешнего сопротивления.

Список литературы

1. Андреев В. К., Гапоненко Ю. А., Гончарова О. Н., Пухначев В. В. Современные математические модели конвекции. М.: Физматлит, 2008. 368 с.
2. Белоцерковский О. М., Опарин А. М., Четкин В. М. Турбулентность: новые подходы. М.: Наука, 2003. 286 с.
3. Гетлинг А. В. Конвекция Рэлея-Бенара. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 248 с.
4. Гледзер Е. Б., Должанский Ф. В., Обухов А. М. Системы гидродинамического типа и их применение. М.: Наука, 1981. 386 с.
5. Должанский Ф. В. О механических прообразах фундаментальных гидродинамических инвариантов и медленных многообразий // Успехи физических наук. 2005. Т. 175, № 12. С. 1257–1288.
6. Дразин Ф. Введение в теорию гидродинамической устойчивости. М.: Физматлит, 2005. 288 с.
7. Картавых А. В., Мильвидский М. Г., Гинкин В. П., Забудько М. А., Науменко О. М. Кластерная модель структуры расплавов в погранслое и ее гидродинамическое описание при моделировании процессов кристаллизации полупроводников в космосе // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. 2004. № 6. С. 91–98.
8. Шабловский О. Н. Тригонометрический профиль скорости сдвигового течения вязкой жидкости // Вестн. Южно-Уральского гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Физика. 2011. Вып. 5. № 32. С. 77–82.
9. Шабловский О. Н. Вихрь скорости и производство энтропии в релаксирующем потоке вязкой жидкости с внутренними источниками // Изв. высш. учеб. заведений и энергетических объединений СНГ. Энергетика. 2011. № 5. С. 55–65.
10. Шабловский О. Н. Нелинейные волновые уравнения и конкуренция источников энергии в двухкомпонентных системах // Фундаментальные физико-математические проблемы и моделирование технико-технологических систем: сб. науч. тр. М.: Янус-К, 2010. Вып. 13. С. 78–89.
11. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 712 с.

References

1. Andreev V.K., Gaponenko Ju.A., Goncharova O.N., Puhnachjov V.V. *Sovremennye matematicheskie modeli konvekcii*. M.: Fizmatlit, 2008. 368 s.
2. Belocerkovskij O.M., Oparin A.M., Chechjotkin V.M. *Turbulentnost': novye podhody*. M.: Nauka, 2003. 286 s.
3. Getling A.V. *Konvekcija Rjeleja-Benara*. M. Jeditorial URSS, 1999. 248 s.
4. Gledzer E.B., Dolzhanskij F.V., Obuhov A.M. *Sistemy gidrodinamicheskogo tipa i ih primenenie*. M.: Nauka, 1981. 386 s.
5. Dolzhanskij F.V. O mehanicheskikh proobrazah fundamental'nyh gidrodinamicheskikh invariantov i medlennyh mnogoobrazij // *Uspehi fizicheskikh nauk*. 2005. T. 175, No 12. S. 1257–1288.
6. Drazin F. *Vvedenie v teoriju gidrodinamicheskoy ustojchivosti*. M.: Fizmatlit. 2005. 288 s.
7. Kartavyh A.V., Mil'vidskij M.G., Ginkin V.P., Zabud'ko M.A., Naumenko O.M. *Klasternaja model' struktury rasplavov v pogransloe i ee gidrodinamicheskoe opisanie pri modelirovanii processov kristallizacii poluprovodnikov v kosmose // Poverhnost'. Rentgenovskie, sinhrotronnye i nejtronnye issledovanija*. 2004. No 6. S. 91–98.
8. Shablovskij O.N. Trigonometriceskij profil' skorosti sdvigovogo techenija vjazkoj zhidkosti // *Vestn. Juzhno-Ural'skogo gos. un-ta. Ser. Matematika. Mehanika. Fizika*. 2011. Vyp, 5. No 32. S. 77–82.
9. Shablovskij O.N. Vihr' skorosti i proizvodstvo jentropii v relaksirujushhem potoke vjazkoj zhidkosti s vnutrennimi istochnikami // *Izv. vyssh. ucheb. zavedenij i jenergeticheskikh ob#edinenij SNG. Jenergetika*. 2011. No 5. S. 55–65.
10. Shablovskij O.N. Nelinejnye volnovye uravnenija i konkurencija istochnikov jenerгии v dvuhkomponentnyh sistemah // *Fundamental'nye fiziko-matematicheskie problemy i modelirovanie tehniko-tehnologicheskikh sistem: sb. nauch. trudov*. M.: Janus-K, 2010. Vyp. 13. S. 78–89.
11. Shlihting G. *Teorija pogrannichnogo sloja*. M.: Nauka, 1974. 712 s.

Библиографическое описание статьи

Шабловский О. Н., Кроль Д. Г., Концевой И. А. Нелинейное сопротивление и завихренность течения жидкости между коаксиальными вращающимися цилиндрами // *Ученые записки Забайкальского государственного университета. Сер. Физика, математика, техника, технология*. 2016. Т. 11, № 4. С. 59–68.

DOI:10.21209/2308-8761-2016-11-4-59-68.

Reference to article

Shablovskiy O. N., Krol' D. G., Kontsevoy I. A. Nonlinear Resistance and Vorticity of the Fluid Flow Between Two Coaxial Rotating Cylinders // *Scholarly Notes Of Transbaikal State University. Series Physics, Mathematics, Engineering, Technology*. 2016. Vol. 11, No 4. P. 59–68.

DOI:10.21209/2308-8761-2016-11-4-59-68.

Статья поступила в редакцию 13.04.2016