

Функциональная модель складского запаса в условиях равномерно-непрерывного пополнения и потребления

Н.И. ИСАЙЧИКОВА¹, С.Ф. КАМОРНИКОВ²

Рассматривается задача нахождения единого аналитического выражения графической модели, описывающей изменения уровня запаса в складской системе при равномерно-непрерывном пополнении и равномерно-непрерывном потреблении запаса. Построенная функциональная модель может быть использована на производственно-технологическом складе для решения проблемы контроля уровня запаса. Она позволяет вычислять величину запаса в каждый момент времени, а также определять моменты времени, в которые значение запаса имеет заданный уровень.

Ключевые слова: графическая модель, функциональная модель, уровень запаса, производственно-технологический склад.

The article deals with the problem of finding a single analytical expression of the graphic model describing changes in the stock level in a warehouse system with regular and steady replenishment and regular-continuous discharge of the stock. The suggested functional model can be used at manufacturing and engineering warehouses to solve the problem of controlling the stock level. It enables to calculate the amount of the stockpile at any time point as well as to determine the time points at which the stockpile value corresponds to the given level.

Keywords: graphic model, functional model, stockpile level, manufacturing and engineering warehouse.

Введение. В логистике (как и во многих других экономических дисциплинах) для наглядности протекания целого ряда процессов широко используются графические модели (в частности, ломаные линии) [1]–[2].

В то же время более информативна для описания исследуемого процесса детерминированная математическая модель, т.е. такое аналитическое представление, которое описывает процесс с позиций полной определенности, однозначно сопоставляя каждому моменту времени (аргументу) некоторое значение исследуемого показателя (функцию) с помощью определенной формулы [3]–[5]. Компактность, лаконичность, возможность вычисления значения функции при произвольном значении аргумента из области определения, возможность применения к данной функции аппарата математического анализа – основные преимущества аналитического способа описания процесса перед графическим.

Конечно, у аналитического способа имеются и определенные недостатки. К ним следует отнести отсутствие наглядности и необходимость выполнения иногда очень громоздких вычислений для нахождения значений функции. Однако в первом случае этот недостаток легко устраняется возможностью построения графика, а во втором случае компенсируется наличием современных компьютерных средств, обладающих большими вычислительными возможностями.

В связи с отмеченным актуальна проблема нахождения единого аналитического выражения (детерминированной математической модели) исследуемого процесса по его известной графической модели.

В работе эта задача рассматривается для графической модели, описывающей изменение уровня запаса в бездефицитной складской системе при равномерно-непрерывном пополнении и равномерно-непрерывном потреблении запаса. Такая система соответствует такому типу производственно-технологического склада незавершенного производства, когда продукция, произведенная одним цехом предприятия, поступает на склад по конвейеру с определенной интенсивностью, а затем равномерно потребляется в производстве некоторым другим цехом предприятия.

Отметим, что исследуемая графическая модель проявляется и в других случаях формирования запасов, когда допущение об одновременном оприходовании на склад поступившей партии продукции (т.е. допущение о мгновенной поставке) не может быть принято [6]. Это относится, в частности, к ситуации с большими объемами поставок (например, при поставках по железной дороге) или при длительных процедурах приемки (например, в соответствии с действующим в Республике Беларусь «Положением о приемке товаров по количеству и каче-

ству» [7] допускается приемка товара по качеству на складе покупателя в сроки не позднее 20 дней после его получения при поступлении товара из другого населенного пункта и в сроки не позднее 10 дней после его получения при поступлении товара из данного населенного пункта).

Формализация графической модели. Предположим, что товар непосредственно с производственной линии непрерывно поступает на склад с постоянной интенсивностью λ единиц в единицу времени.

На склад товар поступает партиями размером Q единиц. При этом каждая новая партия начинает поступать на склад в тот момент, когда уровень запаса упадет до нуля. Тогда графическая модель уровня запаса на складе имеет вид, представленный на рисунке 1.

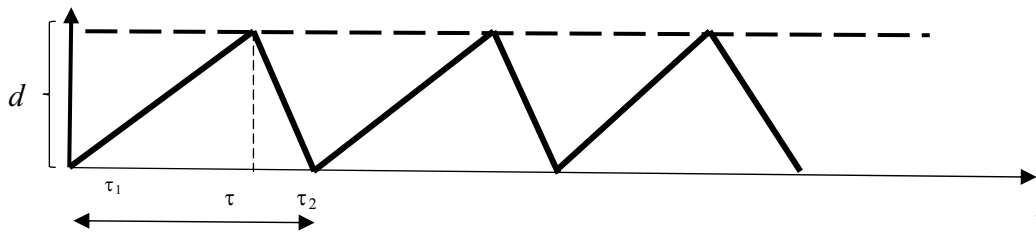


Рисунок 1 – Графическая модель уровня запаса

В такой постановке задачи пополнение склада происходит в каждом цикле за время τ_1 (в течение времени τ_1 запас одновременно и поступает и равномерно расходуется; по сути, τ_1 – время накопления запаса), а потребление – в течение времени $\tau = \tau_1 + \tau_2$. В течение времени τ_2 каждого цикла продукция первого цеха на склад не поступает (это не означает, что первый цех простаивает; просто его продукция в этот период направляется на другой склад, например, на склад готовой продукции для подготовки ее к отправке внешним потребителям).

Вследствие того, что в течение времени τ_1 запас пополняется и расходуется одновременно, абсолютная интенсивность увеличения запасов определяется их разностью $\lambda - \mu$, где μ – интенсивность расходования запасов (понятно, что $\lambda > \mu$ ввиду требования бездефицитности функционирования системы: система может работать без дефицита, если интенсивность поставок λ превосходит интенсивность потребления μ). В таком случае (см., например, [8]) максимальный уровень запаса d возрастает на величину $d = (\lambda - \mu)\tau_1$. Очевидно, $\tau_1 = \frac{Q}{\lambda}$. Величина τ_2 находится из следующих соображений: запас d , накопленный в интервале τ_1 , полностью расходуется за время τ_2 , поэтому $d = \mu\tau_2$; подставив вместо d его значение, будем иметь $\mu\tau_2 = (\lambda - \mu)\frac{Q}{\lambda}$, откуда заключаем, что $\tau_2 = (\lambda - \mu)\frac{Q}{\lambda\mu}$. Следовательно, $\tau = \tau_1 + \tau_2 = \frac{Q}{\lambda} + (\lambda - \mu)\frac{Q}{\lambda\mu} = \frac{Q}{\mu}$.

Случай произвольного размера поставки. Построим функцию, график которой есть «пилообразная» ломаная, представленная на рисунке 1. Рассмотрим сначала случай одного цикла поставки-потребления (рисунок 2).

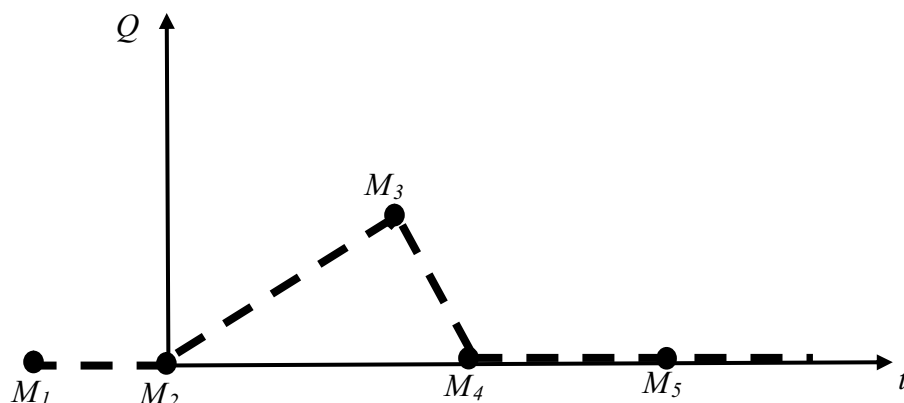


Рисунок 2 – Графическая модель одного цикла поставки-потребления запаса

При этом будем опираться на следующие соображения. До нулевой отметки времени склад пуст (на графике нулевой запас изображается отрезком, соединяющим точки $M_1(-1;0)$ и $M_2(0;0)$). На временном промежутке от 0 до τ_1 склад заполняется до максимального уровня d (на графике пополнение запаса изображается отрезком, соединяющим точки $M_2(0;0)$ и $M_3(\tau_1;d)$). Начиная с момента времени τ_1 в течение времени τ_2 запасы уменьшаются до нулевого уровня (на графике уменьшение запаса изображается отрезком, соединяющим точки $M_3(\tau_1;d)$ и $M_4(\tau_1 + \tau_2;0)$). Далее уровень запаса сохраняется на нулевой отметке (на графике этот уровень запаса изображается отрезком, соединяющим точки $M_4(\tau_1 + \tau_2;0)$ и $M_5(\tau_1 + \tau_2 + 1;0)$).

Для построения функции, график которой на отрезке $[-1; \tau_1 + \tau_2 + 1]$ совпадает с ломаной $M_1M_2M_3M_4M_5$, воспользуемся основной теоремой о непрерывных кусочно-линейных функциях.

Теорема. При любом $n > 2$ для ломаной, соединяющей на плоскости точки $M_1(t_1; y_1)$, $M_2(t_2; y_2), \dots, M_n(t_n; y_n)$, абсциссы которых удовлетворяют условию $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, найдется единственный набор действительных чисел $a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, a$ и b такой, что график функции

$$y = a_1 |t - t_2| + a_2 |t - t_3| + \dots + a_{n-2} |t - t_{n-1}| + at + b \quad (1)$$

совпадает на отрезке $[x_1; x_n]$ с ломаной $M_1M_2 \dots M_n$.

В нашем случае речь идет о нахождении коэффициентов функции

$$y = a_1 |t| + a_2 |t - \tau_1| + a_3 |t - (\tau_1 + \tau_2)| + at + b. \quad (2)$$

Для вычисления их применим метод неопределенных коэффициентов. Из условия прохождения графика функции

$$y = a_1 |t| + a_2 |t - \tau_1| + a_3 |t - (\tau_1 + \tau_2)| + at + b$$

через точки $M_1(-1;0)$, $M_2(0;0)$, $M_3(\tau_1;d)$, $M_4(\tau_1 + \tau_2;0)$, $M_5(\tau_1 + \tau_2 + 1;0)$ получаем систему пяти линейных уравнений с пятью неизвестными a_1, a_2, a_3, a и b :

$$\begin{cases} a_1 + a_2(1 + \tau_1) + a_3(1 + \tau_1 + \tau_2) - a + b = 0 \\ a_2\tau_1 + a_3(\tau_1 + \tau_2) + b = 0 \\ a_1\tau_1 + a_3\tau_2 + a\tau_1 + b = d \\ a_1(\tau_1 + \tau_2) + a_2\tau_2 + a(\tau_1 + \tau_2) + b = 0 \\ a_1(\tau_1 + \tau_2 + 1) + a_2(\tau_2 + 1) + a_3 + a(\tau_1 + \tau_2 + 1) + b = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему (например, методом Гаусса [9]), находим, что $a_1 = \frac{d}{2\tau_1}$,

$a_2 = -\frac{d(\tau_1 + \tau_2)}{2\tau_1\tau_2}$, $a_3 = \frac{d}{2\tau_2}$, $a = 0$, $b = 0$. Поэтому функция f , отражающая уровень запаса на складе в первом цикле поставки-потребления, задается формулой

$$f(t) = \frac{d}{2\tau_1}|t| - \frac{d(\tau_1 + \tau_2)}{2\tau_1\tau_2}|t - \tau_1| + \frac{d}{2\tau_2}|t - \tau_1 - \tau_2|. \quad (3)$$

График уровня запаса во втором цикле поставки-потребления легко получается из графика функции (3) с помощью параллельного переноса вправо вдоль оси Ot на $\tau = \tau_1 + \tau_2$ единиц. Поэтому функция, отражающая уровень запаса на складе во втором цикле поставки-потребления, задается формулой

$$f(t - (\tau_1 + \tau_2)) = \frac{d}{2\tau_1}|t - \tau_1 - \tau_2| - \frac{d(\tau_1 + \tau_2)}{2\tau_1\tau_2}|t - 2\tau_1 - \tau_2| + \frac{d}{2\tau_2}|t - 2\tau_1 - 2\tau_2|. \quad (4)$$

Учитывая, что $f(t) = 0$ для всех $t \in (-\infty; 0] \cup [0; +\infty)$ и $f(t - (\tau_1 + \tau_2)) = 0$ для всех $t \in (-\infty; \tau_1 + \tau_2] \cup [2(\tau_1 + \tau_2); +\infty)$, получаем, что график уровня запаса в двух циклах поставки-потребления совпадает на отрезке $[0; 2(\tau_1 + \tau_2)]$ с графиком функции $f(t) + f(t - (\tau_1 + \tau_2))$, т. е. с графиком функции

$$y = \frac{d}{2\tau_1}|t| - \frac{d(\tau_1 + \tau_2)}{2\tau_1\tau_2}|t - \tau_1| + \frac{d(\tau_1 + \tau_2)}{2\tau_1\tau_2}|t - \tau_1 - \tau_2| - \frac{d(\tau_1 + \tau_2)}{2\tau_1\tau_2}|t - 2\tau_1 - \tau_2| + \frac{d}{2\tau_2}|t - 2\tau_1 - 2\tau_2|. \quad (5)$$

Рассуждая далее аналогичным способом, мы получаем, что график уровня запаса в n циклах поставки-потребления совпадает на отрезке $[0; n(\tau_1 + \tau_2)]$ с графиком функции

$$f(t) + f(t - (\tau_1 + \tau_2)) + f(t - 2(\tau_1 + \tau_2)) + \dots + f(t - (n-1)(\tau_1 + \tau_2)), \quad (6)$$

т. е. функции

$$y = \frac{d}{2\tau_1}|t| - \frac{d(\tau_1 + \tau_2)}{2\tau_1\tau_2} \sum_{k=1}^n |t - k\tau_1 - (k-1)\tau_2| + \frac{d(\tau_1 + \tau_2)}{2\tau_1\tau_2} \sum_{k=1}^{n-1} |t - k\tau_1 - k\tau_2| + \frac{d}{2\tau_2}|t - n\tau_1 - n\tau_2|. \quad (7)$$

Случай оптимальной поставки. Функциональная модель (7) описывает уровень запаса в случае, когда партия поставки при интенсивности λ поступления продукции на склад и интенсивности μ ее расходования имеет произвольный объем Q , не связанный с условием оптимальности издержек. Рассмотрим теперь оптимальную поставку, т.е. поставку, при которой суммарные затраты в единицу времени, связанные с организацией заказов и хранением запасов, являются минимальными. Как известно (см., например, [2,6,8]), объем такой поставки определяется на основе модели экономического размера заказа *EOQ* (*Economic Order Quantity Model*), предложенной Харрисом [10] и Уилсоном [11]:

$$Q_{onm} = \sqrt{\frac{2C_2\mu}{C_1(1-\mu/\lambda)}} = \sqrt{\frac{2C_2\lambda\mu}{C_1(\lambda-\mu)}}, \quad (8)$$

где C_1 – стоимость хранения на складе единицы продукции в единицу времени, а C_2 – стоимость организации заказа (одной партии поставки). Тогда имеем следующие значения для параметров τ_1 , τ_2 и d :

$$\tau_1 = \frac{Q_{onm}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \cdot \sqrt{\frac{2C_2\lambda\mu}{C_1(\lambda-\mu)}} = \sqrt{\frac{2C_2\mu}{C_1\lambda(\lambda-\mu)}}, \quad (9)$$

$$\tau_2 = (\lambda - \mu) \frac{Q_{onm}}{\lambda\mu} = \frac{(\lambda - \mu)}{\lambda\mu} \cdot \sqrt{\frac{2C_2\lambda\mu}{C_1(\lambda-\mu)}} = \sqrt{\frac{2C_2(\lambda - \mu)}{C_1\lambda\mu}}, \quad (10)$$

$$d = (\lambda - \mu)\tau_1 = (\lambda - \mu) \cdot \sqrt{\frac{2C_2\mu}{C_1\lambda(\lambda-\mu)}} = \sqrt{\frac{2C_2(\lambda - \mu)\mu}{C_1\lambda}}. \quad (11)$$

Подставляя теперь значения (9), (10) и (11) в (7), получаем окончательно, что в случае оптимальной партии поставки функция, график которой на отрезке $[0; n(\tau_1 + \tau_2)]$ совпадает с графиком уровня запаса в n циклах поставки-потребления при равномерно-непрерывном пополнении и потреблении запаса, имеет вид:

$$y = \frac{\lambda - \mu}{2} \cdot |t| - \frac{\lambda}{2} \cdot \left(\sum_{k=1}^n |t - k\tau_1 - (k-1)\tau_2| - \sum_{k=1}^{n-1} |t - k\tau_1 - k\tau_2| \right) + \frac{\lambda - \mu}{2} \cdot |t - n\tau_1 - n\tau_2|. \quad (12)$$

Обращает на себя внимание тот факт, что коэффициенты функции (12) не зависят от стоимости хранения на складе единицы продукции в единицу времени C_1 и стоимости организации заказа одной партии C_2 , а зависят только от интенсивности λ поступления продукции на склад и интенсивности μ ее расходования. Впрочем, такой парадокс лишь кажущийся. На самом деле, показатели C_1 и C_2 «спрятаны» в параметрах τ_1 и τ_2 , что следует из (9) и (10). С учетом этих формул, а также того факта, что

$$\tau_1 + \tau_2 = \frac{Q_{opt}}{\mu} = \frac{1}{\mu} \cdot \sqrt{\frac{2C_2\lambda\mu}{C_1(\lambda - \mu)}} = \sqrt{\frac{2C_2\lambda}{C_1(\lambda - \mu)\mu}},$$

функция (12) принимает вид

$$y = \frac{\lambda - \mu}{2} \cdot |t| + \frac{\lambda - \mu}{2} \cdot \left| t - n \cdot \sqrt{\frac{2C_2\lambda}{C_1(\lambda - \mu)\mu}} \right| - \frac{\lambda}{2} \cdot \left(\sum_{k=1}^n \left| t - k \cdot \sqrt{\frac{2C_2\mu}{C_1\lambda(\lambda - \mu)}} - (k-1) \cdot \sqrt{\frac{2C_2(\lambda - \mu)}{C_1\lambda\mu}} \right| - \sum_{k=1}^{n-1} \left| t - k \cdot \sqrt{\frac{2C_2\lambda}{C_1(\lambda - \mu)\mu}} \right| \right)$$

или

$$y = \frac{\lambda - \mu}{2} \cdot \left(\left| t \right| + \left| t - n \cdot \sqrt{\frac{2C_2\lambda}{C_1(\lambda - \mu)\mu}} \right| \right) - \frac{\lambda}{2} \cdot \left(\sum_{k=1}^n \left| t - \sqrt{\frac{2C_2}{C_1\lambda}} \cdot \left(k \cdot \sqrt{\frac{\mu}{\lambda - \mu}} - (k-1) \cdot \sqrt{\frac{(\lambda - \mu)}{\mu}} \right) \right| - \sum_{k=1}^{n-1} \left| t - k \cdot \sqrt{\frac{2C_2\lambda}{C_1(\lambda - \mu)\mu}} \right| \right) \quad (13)$$

Конечно, построенные функциональные модели (12) и (13) несколько громоздки. Однако, как отмечено выше, в условиях современных компьютерных средств, обладающих большими вычислительными возможностями, вычисления по ним уровня запаса в фиксированный момент времени трудностей не вызывает.

Заключение. Организация деятельности по управлению запасами предполагает, в частности, внедрение системы контроля уровня запасов на складе. Удешевление такой системы (за счет отказа от тщательного учета каждого находящегося на складе товара) позволяет значительно сократить расходы по содержанию запасов [12]. На производственно-технологического складах с равномерно-непрерывным пополнением и равномерным потреблением запаса один из вариантов решения проблемы контроля может быть связан с использованием разработанных выше функциональных моделей. В частности, построенная модель позволяет вычислять величину запаса в каждый момент времени t_0 . Для этого достаточно вычислить значение функции (7) в точке t_0 :

$$y(t_0) = \frac{d}{2\tau_1} |t_0| - \frac{d(\tau_1 + \tau_2)}{2\tau_1\tau_2} \sum_{k=1}^n |t_0 - k\tau_1 - (k-1)\tau_2| + \frac{d(\tau_1 + \tau_2)}{2\tau_1\tau_2} \sum_{k=1}^{n-1} |t_0 - k\tau_1 - k\tau_2| + \frac{d}{2\tau_2} |t_0 - n\tau_1 - n\tau_2|.$$

Кроме того, модель (7) позволяет определять моменты времени, в которые значение запаса имеет заданный уровень y_0 . Для этого необходимо решить уравнение

$$\frac{d}{2\tau_1}|t| - \frac{d(\tau_1 + \tau_2)}{2\tau_1\tau_2} \sum_{k=1}^n |t - k\tau_1 - (k-1)\tau_2| + \\ + \frac{d(\tau_1 + \tau_2)}{2\tau_1\tau_2} \sum_{k=1}^{n-1} |t - k\tau_1 - k\tau_2| + \frac{d}{2\tau_2}|t - n\tau_1 - n\tau_2| = y_0.$$

Таким образом, при описанном подходе учет может быть организован на основе моделей (12) и (13), а контроль направлен на поддержание в неизменном состоянии показателей λ (интенсивности поступления продукции) и μ (интенсивности расходования запасов).

Формулы (7), (12) и (13) могут быть использованы также для оценки уровня запаса на перспективу и поэтому в ряде случаев являться основой для «наивного» перспективного планирования.

Отметим еще, что по аналогии с моделью (7), описывающей движение запаса для бездефицитной системы без учета гарантийного запаса и при заданных неизменных интенсивностях пополнения и потребления, могут быть построены детерминированные математические модели уровня запаса в условиях изменяющейся интенсивности пополнения и изменяющегося потребления, учитывающие дефицит или страховой запас.

Модель (12) опирается на предположение, что поставка товара из первого цеха ведется однономенклатурными заказами. Между тем такая практика является довольно редкой; чаще работа осуществляется с многономенклатурными заказами, когда в партиях поставок присутствуют различные наименования товарно-материальных ценностей. В таких случаях совместный анализ моделей типа (12), построенных для отдельных номенклатур, позволяет оптимизировать загрузку склада за счет сдвига циклов поставки-потребления одних моделей относительно других.

Литература

1. Экономико-математические методы и модели / Под общ. ред. А.В. Кузнецова. – Мн. : БГЭУ, 2000. – 412 с.
2. Лукинский, В.С. Модели и методы теории логистики / Под ред. В.С. Лукинского. – СПб. : Питер, 2008. – 448 с.
3. Советов, Б.Я. Моделирование систем / Б.Я. Советов, С.А. Яковлев. – М. : Высшая шк., 2001. – 343 с.
4. Замков, О.О. Математические методы в экономике / О.О. Замков, А.В. Толстопятенко, Ю.Н. Черемных. – М. : Дело и Сервис, 2009. – 368 с.
5. Красс, М.С. Математика для экономистов / М.С. Красс, Б.В. Чупрынов. – СПб. : Питер, 2009. – 464 с.
6. Стерлигова, А.Н. Управление запасами в цепях поставок / А.Н. Стерлигова. – М. : ИНФРА-М, 2014. – 430 с.
7. Об утверждении Положения о приемке товаров по количеству и качеству : Постановление Совета Министров Республики Беларусь от 3 сентября 2008 г. № 1290 // Национальный правовой Интернет-портал Республики Беларусь [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <http://www.pravo.by>. – Дата доступа : 04.01.2017.
8. Костевич, Л.С. Теория игр / Л.С. Костевич, А.А. Лапко. – Мн. : Высшая школа, 2008. – 362 с.
9. Кострикин, А.И. Введение в алгебру / А.И. Кострикин. – М. : Наука, 1977. – 496 с.
10. Harris, F.W. How many parts to make at once / F.W. Harris // *Factory, The Magazine of Management*. – 1913. – № 10. – P. 135–136.
11. Wilson, R.H. A scientific routine for stock control / R.H. Wilson // *Harvard Business Review*. – 1934. – № 13. – P. 116–128.
12. Афонин, А.М. Промышленная логистика / А.М. Афонин, Ю.Н. Царегородцев, А.М. Петрова. – М. : ФОРУМ, 2009. – 302 с.

¹УО ФПБ Международный университет «МИТСО», Гомельский филиал

²Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины