

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования  
«Гомельский государственный технический  
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Сельскохозяйственные машины»

**А. А. Иванов, С. А. Орлов**

## **МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ**

**КУРС ЛЕКЦИЙ**

**по одноименной дисциплине  
для студентов технических специальностей  
дневной и заочной форм обучения**

**Гомель 2011**

УДК 620.1(075.8)  
ББК 30.121я73  
И20

*Рекомендовано научно-методическим советом  
механико-технологического факультета ГГТУ им. П. О. Сухого  
(протокол № 6 от 30.06.2010 г.)*

Рецензент: канд. техн. наук, доц. каф. «Обработка материалов давлением»  
ГГТУ им. П. О. Сухого *Ю. Л. Бобарикин*

**Иванов, А. А.**  
И20      Механика материалов : курс лекций по одной дисциплине для студентов техн. специальностей днев. и заоч. форм обучения / А. А. Иванов, С. А. Орлов. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2011. – 144 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: <http://lib.gstu.local>. – Загл. с титул. экрана.

Курс лекций предназначен для индивидуальной подготовки студентов по дисциплине «Механика материалов».

Для студентов технических специальностей дневной и заочной форм обучения.

УДК 620.1(075.8)  
ББК 30.121я73

© Учреждение образования «Гомельский  
государственный технический университет  
имени П. О. Сухого», 2011

## Тема 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

1. Объект и предмет изучения механики материалов (ММ).
2. Гипотезы сплошности и однородности.
3. Внешние и внутренние факторы.
4. Реальный объект и расчетная схема.
5. Понятие о напряжениях.
6. Линейная упругость.
7. Закон Гука.
8. Принцип неизменности начальных размеров.
9. О распределенных нагрузках.
10. Идея метода сечений.

===== 1 =====

### **Объект и предмет изучения механики материалов (ММ)**

Объектом изучения в теоретической механике является абсолютно твёрдое тело, а в ММ тело – деформируемое.

ММ является составной частью, так называемой, механики деформируемого твёрдого тела. Сюда также входят строительная механика и теория упругости.

*Основными идеями* в этом направлении являются:

1. Концепция деформируемости всех тел.
2. Идея о сплошной среде, т.е. материал считается непрерывным образом «размазанным» по всему объему тела.

Свойство или способность тела не разрушаться длительное время под действием нагрузок называется **прочностью**.

Свойство или способность тела (элементов конструкций, деталей машин) незначительно изменять свои первоначальные форму и размеры при нагружении называется **жесткостью**.

ММ – наука о прочности и жесткости деталей машин и элементов конструкций.

*Объектом изучения* в ММ являются одномерные тела – стержень и стержневые системы.

Под **стержнем** понимается тело, одно из измерений которого (длина) значительно больше двух других (ширины и высоты).

*Предметом изучения* в ММ являются прочность и жесткость стержней и стержневых систем.

Значение ММ огромно, поскольку многие сложные конструкции и узлы могут рассматриваться как стержневые системы.

### Гипотезы сплошности и однородности

Необходимо понять отличие ММ от теоретической механики.

Теоретическая механика изучает абсолютно жесткие (твердые) тела, абсолютно недеформируемые, с тем, чтобы выяснить условия равновесия таких тел и (или) законы их движения как целого.

ММ ставит своей задачей предотвращать разрушение тел, находящихся под нагрузкой. Поэтому методы в ММ связаны с исследованием состояния материала внутри тела.

Рассмотрим стержень, находящийся под действием сил собственного веса (рис. 1.1).

С точки зрения взаимодействия тел между стержнем и опорой возникает реакция (рис. 1.1.а). Но возникает вопрос, как распределяются внутренние усилия по длине стержня?

Очевидно, что человечку в нижнем сечении (рис. 1.1.б) будет труднее, т.к. в этом сечении близком к опоре действует вес всего стержня, а человечку в верхнем сечении будет легко, т.к. на него действует вес небольшого участка стержня.

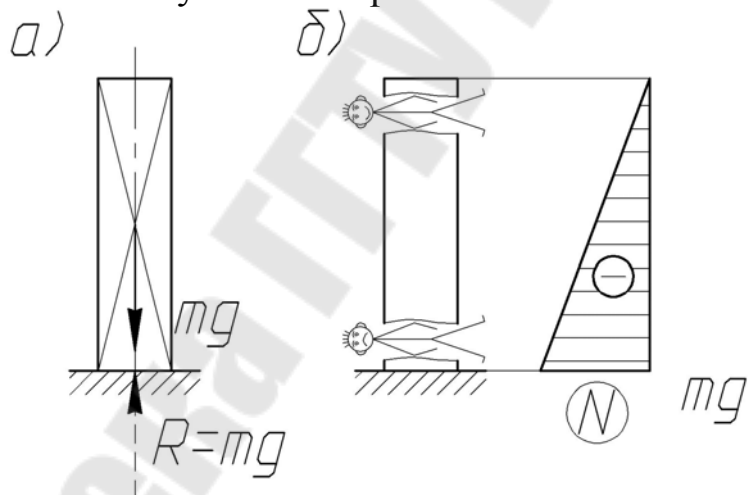


Рис. 1.1. К гипотезе однородности и сплошности

Если обобщить это наблюдение, то можно установить, что в верхнем сечении внутренняя нагруженность стержня нулевая, а в нижнем сечении – максимальная (вес всего стержня).

Этот факт изображают графически в виде эпюры усилий (эпюра продольной силы N).

Строго говоря, вот так запросто соединить прямой линией две точки возможно лишь при следующих допущениях:

1. Материал должен быть однородным, в механическом понимании это означает  $\rho = const$ .

2. Материал сплошным образом заполняет весь объем тела.

Допущение 1 позволяет соединить эти две точки прямой линией, а допущение 2 говорит о том, что график этот непрерывен (функция не имеет разрыва или скачков).

Исторически эти две идеи объединили в одну и назвали гипотезой однородности и сплошности.

Вообще, допущения и гипотезы играют определяющую роль в построении теории ММ. Их всего восемь. Гипотеза однородности и сплошности – первая.

---

### 3

#### **Внешние и внутренние факторы**

Всякое изменение размеров и формы тела будем называть **деформированием**.

Очевидно, деформированию и далее разрушению препятствуют некие силы межмолекулярного и межатомного происхождения, которые в конечном итоге сохраняют тело как целое.

Эти силы – отклик среды на внешнее воздействие.

Если мысленно рассечь тело в нагруженном состоянии, то в этом сечении должны действовать указанные силы. Поскольку тело рассекается, то естественно назвать их *внутренними*, а реакции опор, вес, контактное нагружение извне логично назвать силами *внешними*.

Одной из основных вспомогательных задач в ММ является установление закона изменения внутренних сил.

По характеру приложения внешние силы можно классифицировать на:

1. Линейно-распределенные [Н/м],
2. Поверхностно-распределенные [Н/м<sup>2</sup>],
3. Объемно-распределенные [Н/м<sup>3</sup>]

Сосредоточенных сил в природе не существует, это лишь удобная модель (идеализация).

---

### 4

#### **Реальный объект и расчетная схема**

Талант инженера определяется во многом правильным выбором расчётной схемы (модели). Она должна содержать минимальное

число качеств реального объекта, но по возможности максимально корректно учитывать реальность.

Противоречие здесь состоит в том, что при учете всех факторов отсутствует возможность исследовать задачу и получить решение в силу очевидной неисчерпаемости задачи. Поэтому надо определить так называемые существенные факторы, характеризующие поведение системы. Важно определить (указать), что является существенным в поведении объекта, а что малозначимым.

Пример составления расчетной схемы (рис 1.2).

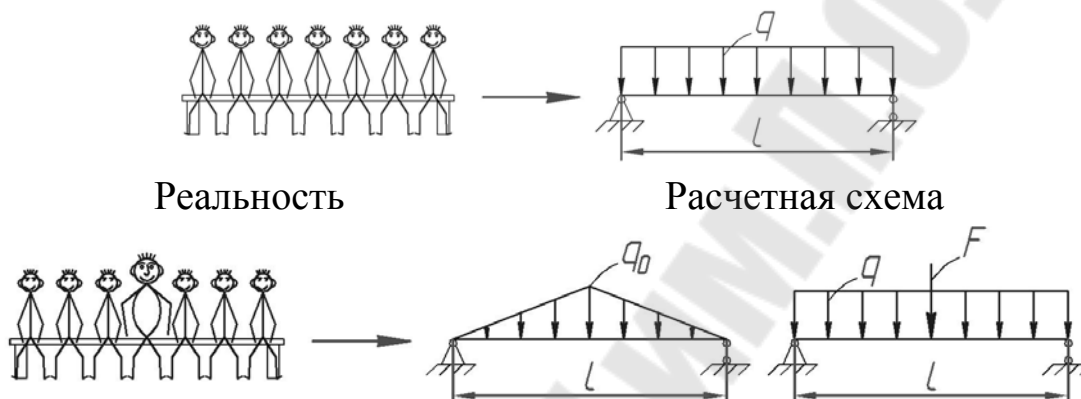


Рис. 1.2. Расчет пролетной части скамьи на прочность

Гораздо более важным является тот факт, что одной и той же расчетной схеме могут быть сопоставлены сотни реальных объектов.

Стержневые системы – огромный класс объектов, применяющихся в машиностроении и строительстве. Поэтому в дальнейшем будем исследовать так называемый стандартный набор схем ММ, не интересуясь реальными конструкциями, отвечающими этим схемам.

===== 5 =====

### Понятие о напряжениях

Любое изменение формы и размеров называется **деформированием**.

Тело удерживается как целое (неразрушается) в процессе деформирования, потому что внутри него действуют *элементарные силы сцепления* между частицами материала.

Рассмотрим стержень, нагруженный силой  $F$ . Чем больше принять значение силы  $F$ , тем более вероятно разрушение стержня.

Склонность к разрушению определяется, очевидно, *мерой внутренней нагруженности*.

Мысленно рассечем стержень (плоскость  $m-m$ ) (рис. 1.3) и будем исследовать равновесие части  $A$  как свободного тела.

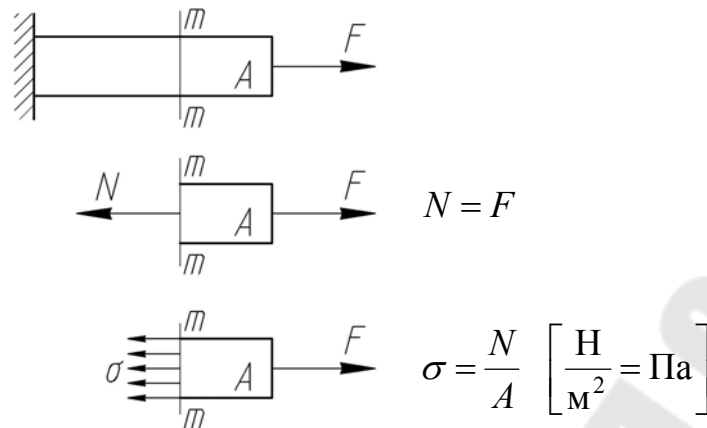


Рис. 1.3. Механические напряжения

С точки зрения статики должна существовать такая сила  $N$ , которая уравнивает силу  $F$ .

С точки зрения физики сила  $N$  – внутренний силовой фактор – равнодействующая элементарных сил сцепления, которые называются **механическими напряжениями**.

Возможны случаи, когда эти элементарные силы распределены не перпендикулярно плоскости сечения, а касательно к ней. В первом случае говорят о *нормальных* напряжениях, во втором – *касательных*.

===== 6 =====

### Линейная упругость

Наблюдения показывают, что перемещения точек тела, вызванные внешними нагрузками, приложенными к этому телу, прямо пропорциональны величинам этих нагрузок. Это справедливо лишь в малом диапазоне изменения нагрузок. Если «сбросить» нагрузку, то материал возвращается в исходные форму и размеры. Такое свойство называется **линейной упругостью**, а пропорциональная зависимость – **законом Гука**.

===== 7 =====

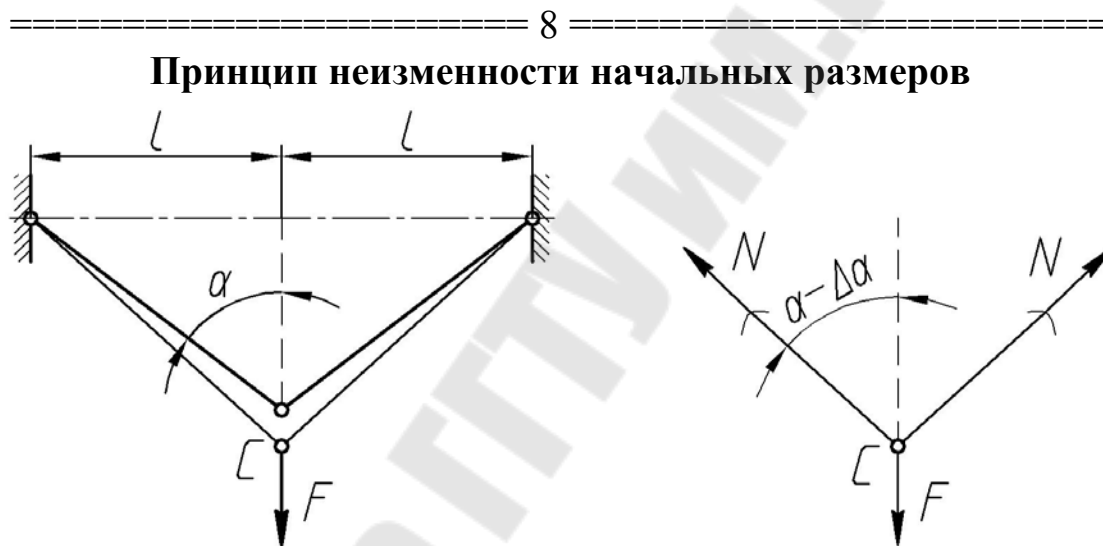
### Закон Гука

Количественно впервые линейную упругость описал *Роберт Гук*.

$$F = k \cdot \Delta x$$

Заметим, что коэффициент  $k$  зависит от размеров испытуемых образцов. Это огромный недостаток.

*Роберт Гук* (1636–1703) – английский ученый, современник Ньютона, член Лондонского Королевского общества. Научные работы Гука охватывают многие области естествознания. Изучая давление воздуха, он разработал теорию капиллярности, усовершенствовал воздушный насос; изучая распространение света, высказал мысль, что «свет представляет собой весьма короткие колебательные движения, совершающиеся в поперечных направлениях к линии распространения»; объяснил явление Ньютоновых колец, высказал идею Закона всемирного тяготения, разработал способы повышения точности хода часов, открыл Закон пропорциональности между силой, приложенной к упругому телу, и его деформацией, явившийся фундаментом, на котором получила развитие механика упругих тел.



*Рис. 1.4.* Расчетная схема

Необходимо определить внутренние усилия в стержнях.

Рассмотрим узел *C* (рис. 1.4).

Строго говоря, при определении *N* следует учесть изменение  $\Delta\alpha$  (в точной постановке). Однако, для того чтобы знать  $\Delta\alpha$  необходимо иметь значение *N*. Это противоречие разрешается путем введения упрощающего рассмотрения:

$\Delta\alpha$  мало настолько, что можно пренебречь изменением формы конструкции в том смысле, что положение внешних нагрузок не меняется – не оказывается влияние на уравнение статики.

Рассмотренное выше допущение о неизменности начальных размеров (гипотеза о малости деформаций) имеет принципиальное



значение в расчетах, без которого во многих случаях задача делается бессмысленной.

===== 9 =====

### **О распределенных нагрузках**

Поскольку в ММ рассматриваются стержни и стержневые системы – тела одномерные (вытянутые в одном направлении), то в дальнейшем придется иметь дело с линейно-распределенными нагрузками  $q$  [Н/м].

===== 10 =====

### **Идея метода сечений**

Идея метода сечений состоит в применении *третьего закона Ньютона* не к двум различным телам, а к двум частям одного и того же тела, полученным мысленным рассечением.

Оказывается, только законы статики и метод сечений позволяют получить все внутренние факторы в стержнях и стержневых системах в классе статически определимых задач.

## **Тема 2. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ ПРЯМОГО СТЕРЖНЯ**

### **§2.1. Элементарная теория деформирования**

1. Растяжение как вид деформирования.
2. Нормальные напряжения.
3. Закон Гука при растяжении, модуль Юнга.
4. Принцип Сен-Венана.
5. Продольные и поперечные деформации.
6. Перемещения точек стержня при растяжении, жесткость при растяжении-сжатии.
7. Потенциальная энергия деформации.
8. Напряжения в наклонных сечениях.

===== 1 =====

### **Растяжение как вид деформирования**

**Растяжением-сжатием** (р-с) – называется вид деформирования, при котором в поперечном сечении возникает один внутренний фактор – продольная сила  $N$ .

### Нормальные напряжения

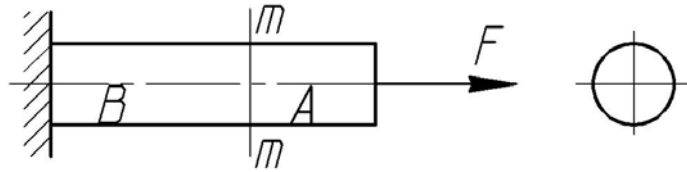


Рис. 2.1. Расчетная схема

Уточним вопрос о напряжениях. Исследование равновесия частей  $A$  и  $B$  приводит к двум схемам (рис. 2.1).

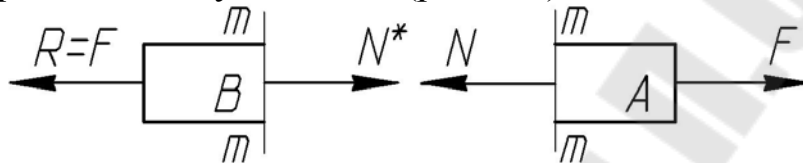


Рис. 2.2. Метод сечений

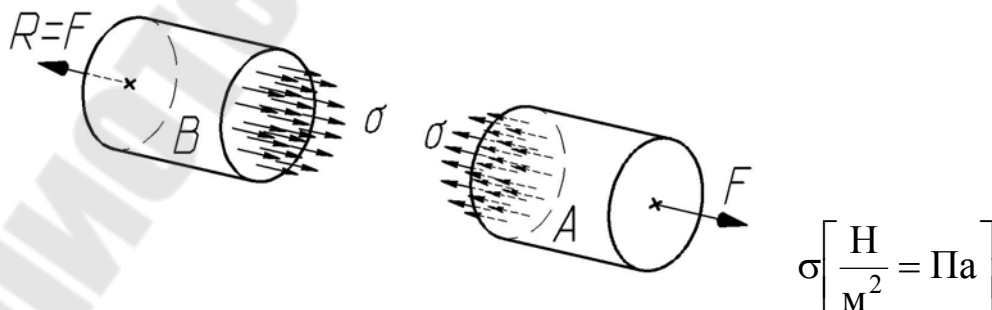
На первой схеме (рис.2.2), исходя из концепции третьего закона Ньютона, сила  $N$  – это сила, с которой часть  $B$  стержня, после мысленного рассечения, действует на часть  $A$ .

$$N = F.$$

Совершенно равнозначное рассмотрение было бы и на второй схеме. Здесь  $N^*$  – сила, с которой часть  $A$  действует на часть  $B$ . В силу третьего закона Ньютона:

$$N = N^*.$$

Но  $N$  с точки зрения природы возникновения равнодействующая элементарных сил сцепления, распределённых по площади поперечного сечения. Эти элементарные силы называют **нормальными напряжениями**, т.к. они перпендикулярны плоскости рассматриваемого сечения.



$$\sigma \left[ \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \text{Па} \right]$$

Рис. 2.3. Нормальные напряжения

В дальнейшем, если не оговорено иное, будем рассматривать стержни постоянного поперечного сечения, которое имеет хотя бы одну ось симметрии. Такой стержень называют *призматическим*.

*Ось стержня* – геометрическое место центров тяжести поперечных сечений стержня.

3

### Закон Гука при растяжении, модуль Юнга

Прошло более 100 лет, прежде чем *закон Гука* принял свой «инженерный» вид. Обязаны мы этому Томасу Юнгу.

Для этого необходимо получить формулировку закона в удельных или относительных единицах.

$F = k \cdot \Delta l$  – запись закона Гука в первоначальном виде (рис. 2.4).

$$\frac{F}{A \cdot l} = \frac{k \cdot \Delta l}{A \cdot l},$$

где  $A$  – площадь поперечного сечения;  
 $l$  – первоначальная длина стержня.

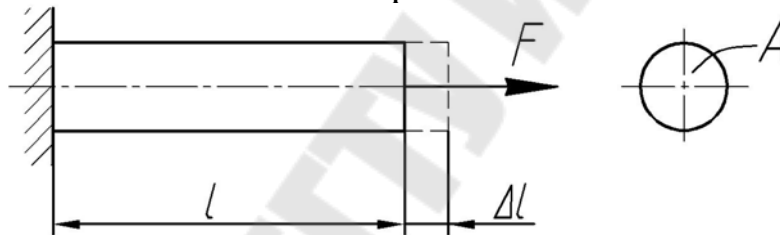


Рис. 2.4. Расчетная схема

Удобно считать нормальные напряжения распределенными равномерно по сечению. Тогда

$$\frac{F}{A} = \sigma, \quad N = F \quad \rightarrow \quad \sigma = \frac{N}{A}$$

Обобщая, получаем

$$\sigma = \frac{k \cdot l}{A} \cdot \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  – относительное удлинение

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}.$$

$$\frac{k \cdot l}{A} = E,$$

где  $E$  – модуль продольной упругости I рода, модуль Юнга.

Для стали  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа, для меди и ее сплавов  $E = 1,2 \cdot 10^5$  МПа, для алюминия и его сплавов  $E = (0,7 \div 0,8) \cdot 10^5$  МПа, для дерева вдоль волокон  $E = (0,08 \div 0,12) \cdot 10^5$  МПа.

Томас Юнг (1773–1829) – английский учёный, член Лондонского Королевского общества. Основной род занятий – медицина, механика материалов – хобби. Ему принадлежат основополагающие работы по теории зрения, звука, открытие интерференции света; является основоположником изучения удара, решения задач при внецентренном р-с прямоугольного бруса; впервые доказал, что продольные деформации всегда сопровождаются изменением поперечных размеров, дал оценку величины молекулы, вычислил величину модуля упругости стали.

Тогда получаем окончательный «инженерный» вид закона Гука

$$\sigma = E\varepsilon$$

Единицы измерения

$$\sigma \left[ \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \text{Па} \right], \left[ \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2} = \text{МПа} \right] \quad E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad [\text{Па}, \text{МПа}].$$

===== 4 =====

### Принцип Сен-Венана

Если поставить эксперименты с брусом из эластичного материала, то можно выявить уточненную качественную картину деформирования.

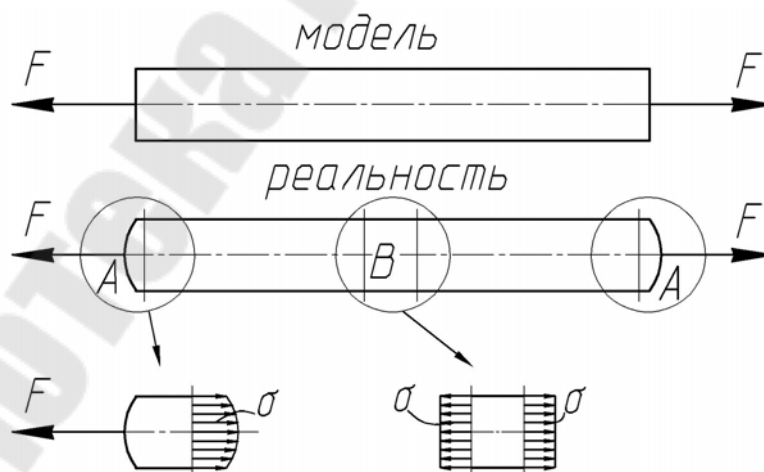


Рис. 2.5. Принцип Сен-Венана

Довольно просто показать, что закон распределения напряжений в области A (рис. 2.5) приложения нагрузки весьма сложен и рассчитать его математически затруднительно.

Французский ученый *Де Сен-Венан Баре* (1797–1886) обобщил наблюдения и установил:

1. Указанный эффект носит общий характер, т.е. проявляется не только в стержнях, но и в пластинах, трехмерных телах, а также, при действии изгибающих, скручивающих нагрузок.
2. Проявление носит местный, локальный характер, а область эффекта имеет размер, сопоставимый с одним из размеров тела.

Напротив, по мере удаления от областей *A* наблюдаем равномерное распределение напряжений (область *B*). Когда в поперечных сечениях некоторой части стержня напряжения постоянны ( $\sigma = const$ ), говорят об *однородном напряженном состоянии*.

Для построения теории ММ (простой и удобной) нам придется не принимать во внимание уточнение *Сен-Венана* и полагать однородное напряженное состояние всюду по длине стержня. Это допущение (гипотеза) известно, как **принцип Сен-Венана**.

===== 5 =====

### Продольные и поперечные деформации

Подобно тому, как были введены в рассмотрение продольные деформации, можно говорить о поперечных деформациях (рис. 2.6).

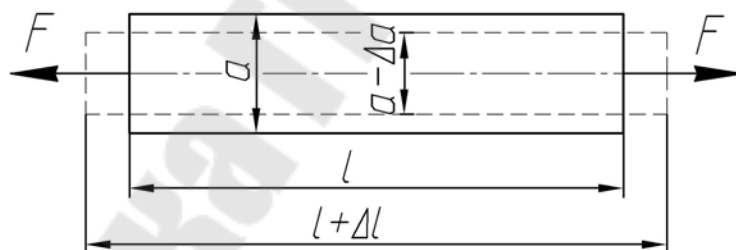


Рис. 2.6. Продольные и поперечные деформации

$$\varepsilon_{\text{прод}} = \frac{\Delta l}{l}, \quad \varepsilon_{\text{попер}} = \frac{\Delta a}{a}.$$

Опыт показывает, что в пределах упругости при простом р-с относительная поперечная деформация пропорциональна относительной продольной деформации

$$\varepsilon_{\text{попер}} = -\mu \varepsilon_{\text{прод}},$$

где  $\mu$  – безразмерный коэффициент пропорциональности, называемый **коэффициентом Пуассона**. Коэффициент Пуассона  $\mu$  характеризует свойства материала и определяется экспериментально. Для

всех металлов  $\mu = 0,25..0,35$  (для стали  $\mu = 0,3$ ), для остальных изотропных материалов коэффициент  $\mu$  не может превышать 0,5.

===== 6 =====

### Перемещения точек стержня при растяжении, жесткость при растяжении-сжатии

Из закона Гука получаем следующее

$$\sigma = E\varepsilon, \quad \sigma = \frac{N}{A}, \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l}, \quad \rightarrow \quad \frac{N}{A} = E \frac{\Delta l}{l},$$

тогда

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{EA},$$

где  $\Delta l$  – абсолютное удлинение в условиях когда  $N = const$ ,  $EA = const$  в пределах длины  $l$ .

Подобно однородному напряженному состоянию, можно говорить о постоянстве деформаций по длине стержня. Иначе, речь идет «о равномерном накоплении удлинений». Однако, такие случаи не часты.

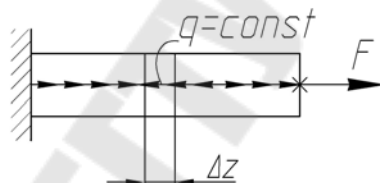


Рис. 2.7. Расчетная схема

Рассматривая картину деформирования с общих позиций, в качестве первоначальной длины следует взять малый отрезок  $dz$  (рис. 2.7).

$dz$  мало настолько, что в пределах этой длины  $q = const$ . Продольная деформация в этом случае будет

$$\varepsilon = \frac{\Delta(dz)}{dz}.$$

Тогда, возвращаясь к закону Гука получаем

$$\frac{N}{A} = E \frac{\Delta(dz)}{dz}, \quad \Delta(dz) = \frac{N \cdot dz}{EA}.$$

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N(z) dz}{EA}.$$

где  $N(z)$  – уравнение продольной силы.

Это универсальная формула для определения удлинений.

Легко заметить, что с увеличением произведения  $EA$  абсолютное удлинение уменьшается. Поэтому эту величину принято называть **жесткостью** стержня при р-с.

Если отталкиваться от перемещения сечения при р-с то определить продольную силу можно формуле

$$N = EA \cdot w',$$

где  $w$  – перемещение сечения.

===== 7 =====

### Потенциальная энергия деформации

При действии нагрузок каждый материал ведет себя подобно пружине. Визуально малые удлинения не воспринимаются.

Вопрос об энергии решается в рамках допущения о том, что вся работа внешних сил полностью переходит в потенциальную энергию деформации

$$U = A.$$

Более того, материал находится в области выполнения *закона Гука* (рис. 2.8).

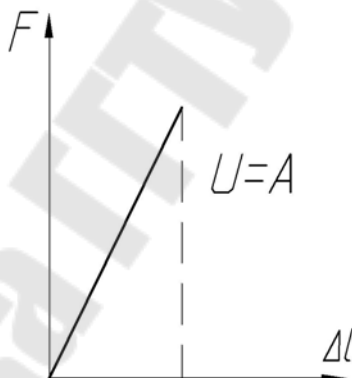


Рис. 2.8. Зависимость удлинения от силы

Работа силы  $F$  в произвольный момент нагружения определяется так

$$A = \frac{1}{2} F \cdot \Delta l,$$

где  $A$  – работа силы  $F$ , затрачиваемая на удлинение  $\Delta l$  стержня.

Учитывая известные соотношения  $N = F$ ,  $\Delta l = \frac{N \cdot l}{EA}$  окончательно для энергии деформации получаем

$$U = \frac{1}{2} \frac{N^2 l}{EA}.$$

Если  $N \neq const$ , то получаем

$$\Delta(dz) = \frac{Ndz}{EA}; \quad dU = \frac{1}{2} F \Delta(dz) \Rightarrow dU = \frac{1}{2} \frac{N^2 dz}{EA};$$

$$U = \int_0^l \frac{N^2(z) dz}{2EA}.$$

8

### Напряжения в наклонных сечениях

Формально, для построения теории и, особенно, для анализа причин разрушений твердых тел, важен вопрос о распределении напряжений по наклонным площадкам (рис. 2.9).

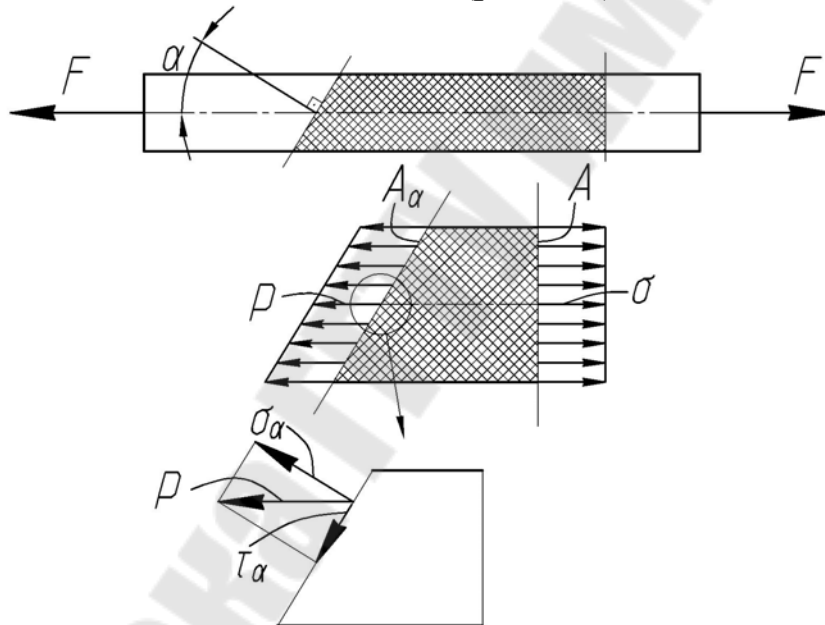


Рис. 2.9. Определение напряжений в наклонных сечениях

Площадь наклонного сечения

$$A_\alpha = \frac{A}{\cos \alpha}.$$

Рассмотрим равновесие

$$p A_\alpha = \sigma A, \quad p \frac{A}{\cos \alpha} = \sigma A, \quad p = \sigma \cos \alpha.$$

Нормальное и касательное напряжения на наклонной площадке, в свою очередь, равны

$$\sigma_\alpha = p \cos \alpha, \quad \sigma_\alpha = \sigma \cos^2 \alpha,$$



$$\tau_{\alpha} = p \sin \alpha, \quad \tau_{\alpha} = \sigma \cos \alpha \sin \alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha, \quad \tau_{\alpha} = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha$$

Можно показать, что

$$\tau_{\alpha} \left( \alpha + \frac{\pi}{2} \right) = -\tau_{\alpha} (\alpha)$$

Это соотношение называется **законом парности касательных напряжений**: на наклонных взаимно перпендикулярных площадках касательные напряжения равны по модулю.

## §2.2. Экспериментальные исследования

1. Диаграмма растяжения пластичной стали.
2. Основные механические характеристики материала: предел пропорциональности; предел текучести (физический и условный); предел прочности.
3. Замечание об истинной диаграмме растяжения.
4. Пластическое и хрупкое состояния материала.
5. Диаграмма сжатия пластичной стали и чугуна.
6. Коэффициент запаса прочности, условие прочности. Допускаемое напряжение.

1

### Диаграмма растяжения пластичной стали

Для формулирования заключений о прочности деталей (конструкций) необходимо иметь количественные характеристики, полученные путем испытаний опытных образцов (рис. 2.10). Ясно, что эксперимент должен не слишком дорог и максимально информативен. Таким опытом является растяжение образцов определенных формы и размеров.

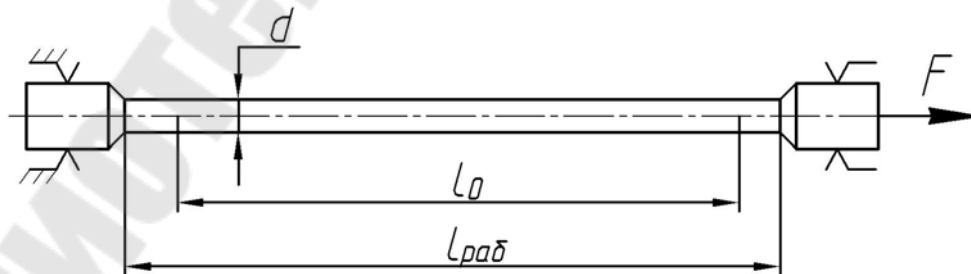


Рис. 2.10. Образец на растяжение

Полученную зависимость  $F \sim \Delta l$  называют **диаграммой растяжения** (рис. 2.11).

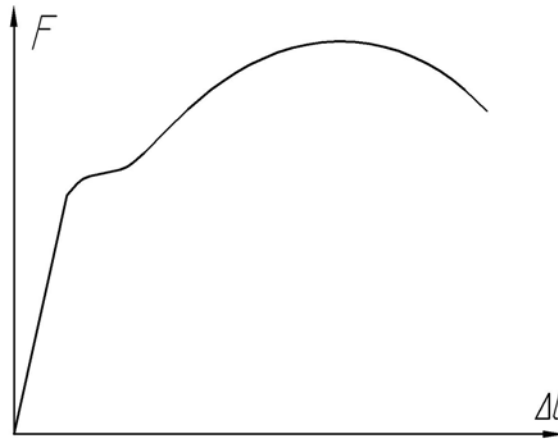


Рис. 2.11. Диаграмма растяжения малоуглеродистой стали

Ввиду очевидной непривлекательности диаграммы  $F \sim \Delta l$ , ее затем перестраивают в координаты  $\sigma \sim \varepsilon$ .

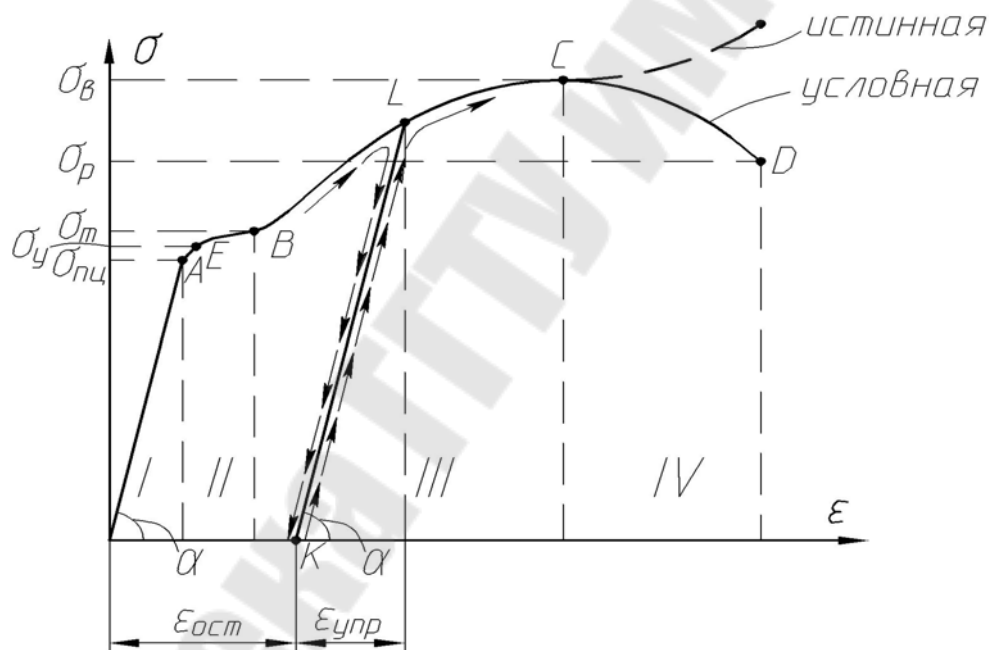


Рис. 2.12. Диаграмма  $\sigma \sim \varepsilon$

Диаграмму  $\sigma \sim \varepsilon$  условно делят на четыре области:

**I – зона упругости.** Здесь материал подчиняется *закону Гука*.

**II – зона общей текучести.** Здесь происходит существенное удлинение образца без заметного увеличения нагрузки. Кривая *AB* называется *площадкой текучести*.

**III – зона упрочнения.** Здесь удлинение образца сопровождается возрастанием нагрузки, но неизмеримо более медленным, чем на упругом участке.

Если остановить процесс нагружения образца в некоторой точке  $L$ , то окажется, что процесс разгрузки пойдет по прямой  $LK$ , параллельной зоне упругости. Если такой, предварительно нагруженный образец повторно нагрузить, то диаграмма опишется кривой  $KLCD$ , и зона упругости будет заканчиваться точкой  $L$ , которая располагается значительно выше точки  $A$ , поэтому участок  $BC$  на диаграмме называется *зоной упрочнения*. Процесс предварительного деформирования называют **наклепом**.

$IV$  – **зона местной текучести** (зона разрушения). Здесь начинает появляться место сужения – шейка, т.е. на некотором участке образец начинает заметно удлиняться.



Рис. 2.13. Шейка

===== 2 =====

**Основные механические характеристики материала: предел пропорциональности; предел текучести (физический и условный); предел прочности**

На диаграмме растяжения отмечают характерные напряжения:

$\sigma_{\text{пц}}$  – **предел пропорциональности** – напряжение, до которого выполняется *закон Гука*;

$\sigma_y$  – **предел упругости** – наибольшее напряжение, до которого материал не получает остаточной деформации;

$\sigma_T$  – **предел текучести** – напряжение, при котором происходит рост деформации без заметного увеличения нагрузки. Для материалов, на диаграммах которых отсутствует *зона текучести* определяется **условный предел текучести**, представляющий собой напряжение при котором остаточная деформация образца составляет  $\varepsilon = 0,2\%$ , в некоторых случаях  $\varepsilon = 0,5\%$  и обозначается  $\sigma_{0,2}$  или  $\sigma_{0,5}$  соответственно;

$\sigma_B$  – **предел прочности** – отношение максимальной силы, которую способен выдержать образец, к его начальной площади поперечного сечения.

===== 3 =====

**Замечание об истинной диаграмме растяжения**

Диаграмму растяжения  $\sigma \sim \varepsilon$  принято называть *условной*. Связано это с тем, что при пересчете напряжений и деформаций по формулам

$$\sigma = \frac{N}{A_0} \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$

применяются фиксированные *первоначальные* значения площади сечения и длины образца. Было бы корректнее использовать текущие или мгновенные значения площади и длины. Так, для шейки требуется в каждый момент наблюдения использовать мгновенную площадь сечения в наиболее узком месте. С учетом этого диаграмма в *зоне местной текучести* меняет свой вид. Такую картину называют **истинной диаграммой состояния**.

===== 4 =====

#### Пластическое и хрупкое состояния материала

Деление материалов на *хрупкие* и *пластичные* связано с характером деформирования: *пластичные* материалы перед разрушением получают большие остаточные деформации, а *хрупкие* – наоборот, разрушаются без заметных деформаций. Такое деление условно, т.к. в некоторых условиях «типично» пластичный материал разрушается как хрупкий. Например, малоуглеродистая сталь в условиях пониженных температур.

===== 5 =====

#### Диаграмма сжатия пластичной стали и чугуна

Диаграммы сжатия стали и чугуна показаны на рисунках 2.14 и 2.15 соответственно.

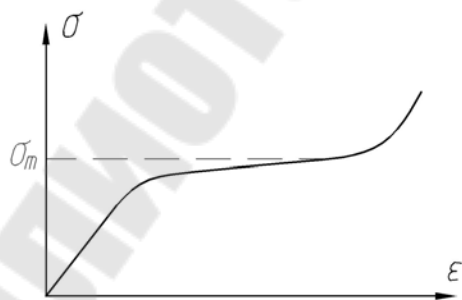


Рис. 2.14. Пластичный материал

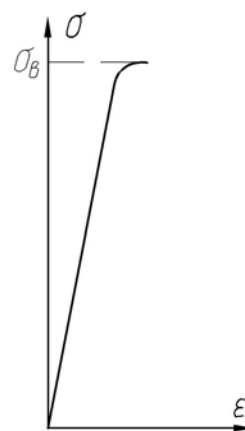


Рис. 2.15. Хрупкий материал

## Коэффициент запаса прочности, условие прочности.

### Допускаемое напряжение

Среди введенных ранее механических характеристик только лишь две являются *легко уловимыми* в эксперименте:

$\sigma_T$  – для пластичного материала;

$\sigma_B$  – для хрупкого материала.

Поэтому, именно эти характеристики принимаются за основу в практических расчетах.

Однако, эксплуатация деталей машин при напряжениях, сопоставимых с указанными характеристиками, как правило, не допустима. Поэтому формально значения  $\sigma_T$  и  $\sigma_B$  снижают, введением безразмерного коэффициента  $n$ . Полученные напряжения будем считать *пороговыми* в ограничении теоретических расчетов.

$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n}$  – допускаемое напряжение для пластичных материалов;

$[\sigma] = \frac{\sigma_B}{n}$  – допускаемое напряжение для хрупких материалов.

Совершенно ясно, что  $n \geq 1$ .

Формально, введенный коэффициент имеет *первостепенное значение* в инженерной практике. На самом деле, назначая  $n$  большим, область эксплуатации конструкции (машины) уменьшается, а ее размеры возрастают. Задача выбора  $n$  – это поиск компромисса между безопасностью эксплуатации и материалоемкостью конструкции. Наиболее остро такая проблема стоит в авиастроении.

По сути, вся история науки о прочности – это история борьбы за уменьшение указанного коэффициента. Сегодня он весьма близок к единице, но для этого потребовались века.

Раньше этот коэффициент был справедливо назван *коэффициентом незнания*, сегодня его называют **коэффициентом запаса прочности**.

Таким образом, все теоретические результаты могут быть ограничены условием общего вида

$$\sigma \leq [\sigma]$$

С учетом специфики растяжения можно уточнить

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma]$$

где  $\sigma$  – максимальное расчетное напряжение в детали.

Из последнего условия следуют возможные практические расчеты:

1. Прямая проверка условия – *проверочный расчет*.
2. Определение размеров сечения – *проектировочный расчет*.
3. Расчет максимальной грузоподъемности.

### §2.3. Статически неопределимые системы

1. Дифференциальное соотношение.
2. Понятие статической неопределимости.
3. Методика раскрытия статической неопределимости.
4. Влияние изменения температуры – температурные напряжения
5. Влияние изменения предварительного деформирования – монтажные напряжения.

===== 1 =====

#### Дифференциальное соотношение

Уточним связь между распределенной нагрузкой общего вида  $q(z)$  и внутренней силой  $N$  (рис. 2.16). Для этого из стержня нагруженного произвольным образом выделим участок малой длины  $dz$ , такой, что в пределах этой длины распределенную нагрузку можно считать постоянной.

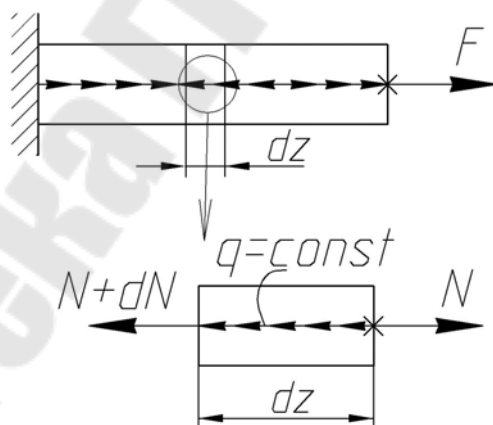


Рис. 2.16. Расчетная схема

Статика дает:

$$\sum F_z = 0; \quad N + dN = q(z)dz + N; \quad q(z) = \frac{dN}{dz} \quad (2.1)$$

Выражение (2.1) является дифференциальным соотношением при растяжении.

Дифференциальное соотношение (2.1) и метод сечений позволяют найти внутренние факторы ( $N$ ) в конструкции любого вида в классе так называемых *статически определимых систем*.

===== 2 =====

### Понятие статической неопределимости

Расчетные схемы, для которых уравнений статики (дифференциальных соотношений) оказывается недостаточно для определения внутренних усилий, называют **статически неопределимыми системами**. При этом вводят в рассмотрение *степень статической неопределимости*: разница между числом неизвестных (внешних и внутренних) и числом возможных независимых уравнений.

===== 3 =====

### Методика раскрытия статической неопределимости

Для схемы, изображенной на рисунке 2.17 необходимо определить реакции в опорах.

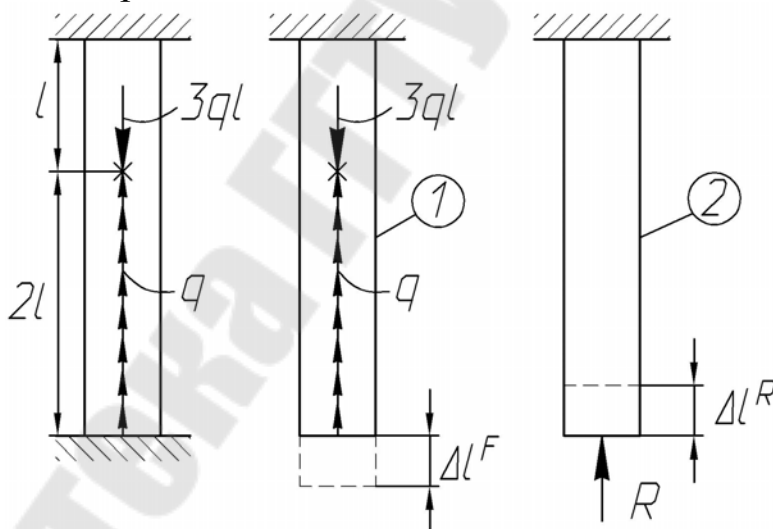


Рис. 2.17. Расчетная схема

Решение

1. Определим степень статической неопределимости.  
2 неизвестных реакции – 1 уравнение статики = 1 раз статически неопределимая система.
2. Для раскрытия статической неопределимости составим одно дополнительное уравнение. Для этого исходную схему разобьем на две.

Схема 1 не имеет нижней заделки. Вследствие этого, под действием внешних сил, стержень получит удлинение  $\Delta l^F$ . В схеме 2 заделку заменяем неизвестной реакцией  $R$ , под действием которой стержень получает укорочение  $\Delta l^R$ .

Очевидно, что для исходной схемы

$$\Delta l^F - \Delta l^R = 0 \quad (2.2)$$

Уравнение (2.2) в ММ принято называть **уравнением совместности деформаций**. Если рассматривается перемещение сечения, то составляется **уравнение совместности перемещений**.

3. Для схемы 1 строим эпюру продольных сил (рис. 2.18). Для этого разбиваем стержень на два участка, для каждого участка записываем уравнения для продольных сил в зависимости от переменной координаты  $z$  и вычисляем их значения.

$$N_I(z) = -qz;$$

$$\text{при } z = 0 \quad N_I = 0,$$

$$\text{при } z = 2l \quad N_I = -2ql;$$

$$N_{II} = -q \cdot 2l + 3ql = ql.$$

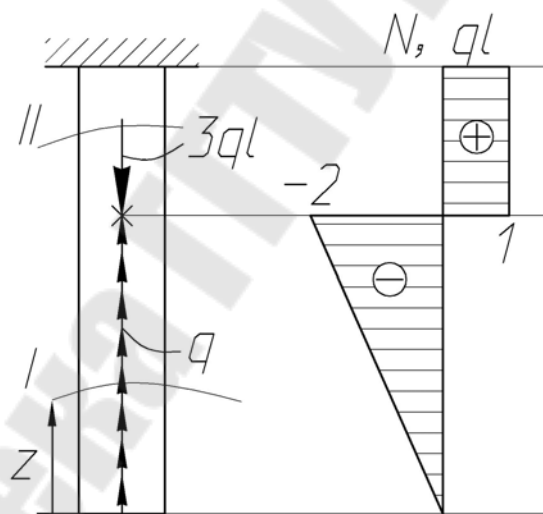


Рис. 2.18. Эпюра продольных сил

4. Для схемы 1 определяем удлинение  $\Delta l^F$

$$\Delta l^F = \Delta l_I^F + \Delta l_{II}^F;$$

$$\Delta l_I^F = \int_0^{2l} \frac{N_I(z) dz}{EA} = \int_0^{2l} \frac{-qz dz}{EA} = \frac{1}{EA} \left. -\frac{qz^2}{2} \right|_0^{2l} = -\frac{2ql^2}{EA};$$

$$\Delta l_{II}^F = \frac{N_{II} l}{EA} = \frac{ql \cdot l}{EA} = \frac{ql^2}{EA};$$



$$\Delta l^F = -\frac{2ql^2}{EA} + \frac{ql^2}{EA} = -\frac{ql^2}{EA}$$

5. Для схемы 2 определяем укорочение  $\Delta l^R$

$$\Delta l^R = \frac{R \cdot 3l}{EA}$$

6. Подставляем полученные значения в уравнение 2.2 и раскрываем статическую неопределимость.

$$-\frac{ql^2}{EA} - \frac{R \cdot 3l}{EA} = 0;$$

$$R = -\frac{1}{3}ql.$$

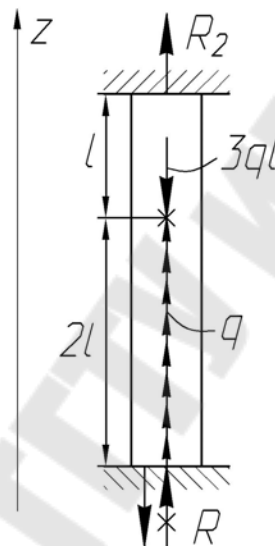


Рис. 2.19. Определение реакции

Знак минус говорит о том, что реакция направляется в обратную сторону (вниз) (рис. 2.19).

7. Определим реакцию в верхней заделке. Для этого составим статическое уравнение.

$$\sum F_z = 0; \quad -R + q \cdot 2l - 3ql + R_2 = 0;$$

$$R_2 = R + 3ql - 2ql = \frac{1}{3}ql + \frac{9}{3}ql - \frac{6}{3}ql = \frac{4}{3}ql.$$

Реакция  $R_2$  направлена вверх.

Заметим, что принцип суперпозиций (последовательного рассмотрения отдельных задач) использованный нами правомерен лишь для тех случаев, когда выполняется закон Гука.

===== 4 =====

## Влияние изменения температуры – температурные напряжения

Другими примерами статической неопределимости могут быть задача о равномерном нагреве свободного от нагрузки стержня, и задача о так называемых монтажных напряжениях.

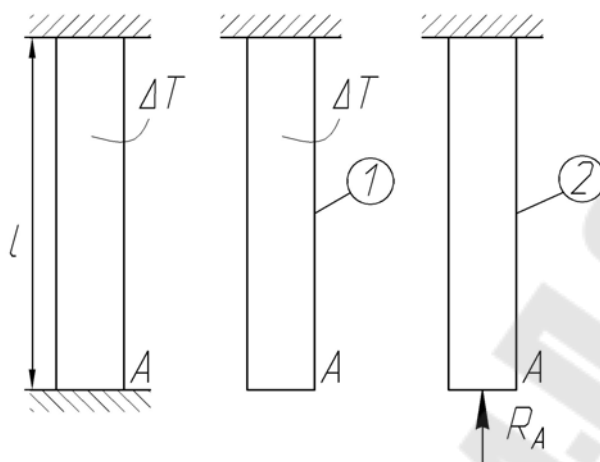


Рис. 2.20. Расчетная схема

Решать задачу о равномерном нагреве свободного от нагрузки стержня (рис. 2.20) будем следующим образом.

1. Рассмотрим равномерно нагретый стержень, закрепленный с одной стороны (схема 1).

Перемещение сечения  $A$  в схеме 1 будет

$$w_A^T = \alpha \cdot \Delta T \cdot l,$$

где  $\alpha$  - коэффициент линейного расширения материала стержня.

2. Рассмотрим нагруженный силой  $R_A$  стержень, закрепленный с той же стороны (схема 2).

Перемещение сечения  $A$  в схеме 2 будет

$$w_A^{R_A} = \int_0^l \frac{N(z) dz}{EA} = \frac{N \cdot l}{EA} = \frac{R_A \cdot l}{EA}$$

3. Запишем уравнение совместности перемещений.

$$w_A^T - w_A^{R_A} = 0$$

4. Раскроем статическую неопределимость.

$$\alpha \cdot \Delta T \cdot l = \frac{R_A \cdot l}{EA}$$

$$R_A = \frac{\alpha \cdot \Delta T \cdot l \cdot EA}{l} = \alpha \cdot \Delta T \cdot EA.$$

5. Определим так называемые температурные напряжения в стержне.

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{R_A}{A} = \frac{\alpha \cdot \Delta T \cdot EA}{A} = \alpha \cdot \Delta T \cdot E$$

6. Покажем температурные деформации.

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{\alpha \cdot \Delta T \cdot E}{E} = \alpha \cdot \Delta T.$$

5

### Влияние изменения предварительного деформирования – монтажные напряжения

При нарушении технологии монтажных работ, а также в случае неправильных размеров элементов конструкции после сборки ее в элементах возникают, так называемые монтажные напряжения.

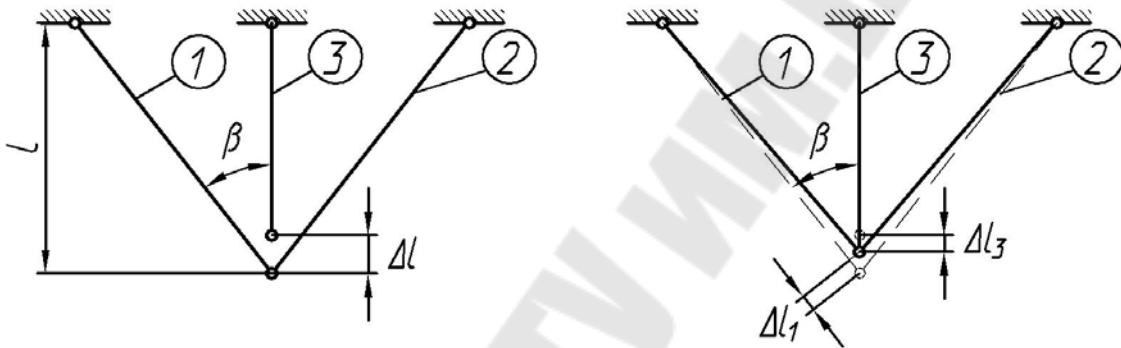


Рис. 2.21. Расчетная схема

Понятно, что при сборке боковые стержни 1 и 2 следует сжать, а центральный стержень 3 – растянуть (рис. 2.21).

Рассмотрим эту задачу в три условных этапа:

1. Статическая сторона задачи (рис. 2.22).

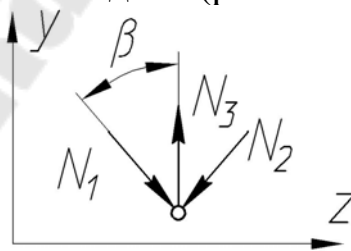


Рис. 2.22. Усилия в стержнях

Для системы сходящихся сил в плоскости можно составить два уравнения:

$$\sum F_{iz} = 0; \quad N_1 \sin \beta - N_2 \sin \beta = 0 \quad N_1 = N_2; \quad (2.3)$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad N_3 - N_1 \cos \beta - N_2 \cos \beta = 0 \quad N_3 - 2N_1 \cos \beta = 0; \\ N_3 = 2N_1 \cos \beta \quad (2.4)$$

2. Геометрическая сторона задачи.

При совмещении шарниров стержней величина  $\Delta l$  разложится на  $\frac{\Delta l_1}{\cos \beta}$  и  $\Delta l_3$

$$\Delta l = \frac{\Delta l_1}{\cos \beta} + \Delta l_3. \quad (2.5)$$

Стержни 1 и 2 имеют длину  $\frac{l}{\cos \beta}$ , а стержень 3 –  $l$ .

3. Физическая сторона задачи.

Удлинения стержней будет

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \frac{l}{\cos \beta}}{EA} = \frac{N_1 l}{EA \cos \beta}, \quad (2.6)$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 l}{EA}. \quad (2.7)$$

Подставим (2.6) и (2.7) в (2.5)

$$\Delta l = \frac{N_1 l}{EA \cos^2 \beta} + \frac{N_3 l}{EA} = \frac{N_1 l + N_3 l \cos^2 \beta}{EA \cos^2 \beta}$$

С учетом (2.4)

$$\Delta l = \frac{N_1 l + 2N_1 l \cos^3 \beta}{EA \cos^2 \beta}.$$

Выразим  $N_1$

$$N_1 = \frac{\Delta l \cdot EA \cos^2 \beta}{l(1 + 2 \cos^3 \beta)}.$$

Тогда усилие в стержне 3

$$N_3 = \frac{2\Delta l \cdot EA \cos^3 \beta}{l(1 + 2 \cos^3 \beta)}.$$

Для окончательного формирования инженерного заключения следует рассмотреть напряжения в стержнях и использовать условие прочности

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A}, \quad \sigma_3 = \frac{N_3}{A}.$$

Это так называемые **монтажные напряжения**, которые следует суммировать с эксплуатационными напряжениями, возникающим при действии внешних сил.

### Тема 3. ЧИСТЫЙ СДВИГ-СРЕЗ

1. Основные, базовые типы деформирования – растяжение и сдвиг.
2. Чистый сдвиг как вид деформирования.
3. Касательные напряжения.
4. Закон Гука при сдвиге, модуль сдвига.
5. Потенциальная энергия деформации.
6. Коэффициент запаса при сдвиге, условие прочности. Практические расчеты на срез.

===== 1 =====

#### Основные, базовые типы деформирования – растяжение и сдвиг

В упрощенной теории ММ можно выделить лишь два основных базовых вида деформирования: *растяжение* и *сдвиг*. Первый отвечает за изменение размеров тела, второй – за изменение формы.

===== 2 =====

#### Чистый сдвиг как вид деформирования

**Чистый сдвиг** – это такой вид деформирования, при котором в поперечных сечениях возникает лишь один внутренний фактор: поперечная сила  $Q$ . Но такое положение возможно только на уровне элементарной плоской области (рамки), поскольку появление поперечных сил  $Q$  в сечениях стержня всегда сопровождается изгибом (рис. 3.1).

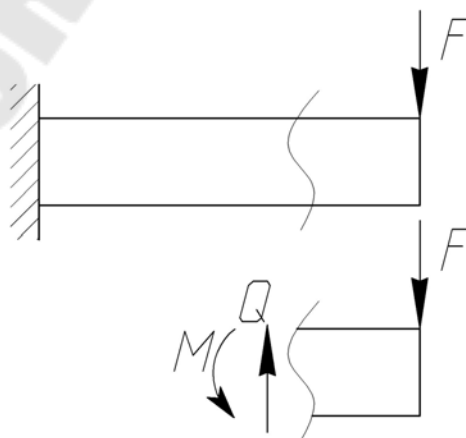


Рис. 3.1. Расчетная схема

Чистый сдвиг возможен лишь на уровне касательных напряжений.

Формально, чистый сдвиг может быть реализован в схеме стержня при бесконечно близком расположении поперечных сил (рис. 3.2).

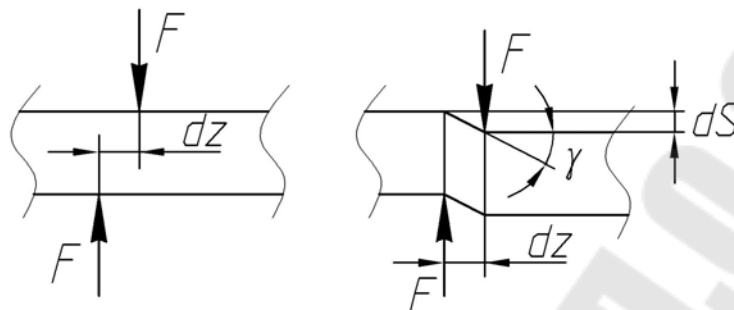


Рис. 3.2. Чистый сдвиг

В результате сдвига одно поперечное сечение относительно другого сдвигается на величину  $dS$ , которая называется **абсолютной величиной сдвига**.

Отношение между абсолютной величиной сдвига  $dS$  к расстоянию между сдвигающими силами  $dz$  называется **относительной деформацией сдвига** или **углом сдвига**  $\gamma$ .

$$\frac{dS}{dz} = \operatorname{tg} \gamma,$$

т.к. при малых  $\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma$ , то

$$\frac{dS}{dz} = \gamma \quad (3.1)$$

Инженерная сторона этого вида деформации заключается в расчетах болтовых и заклепочных соединений на срез.

===== 3 =====

### Касательные напряжения

Для определения напряжений при сдвиге применим метод сечений. В сечении между силами  $F$  действует только поперечная сила  $Q$ , которая является равнодействующей касательных напряжений.

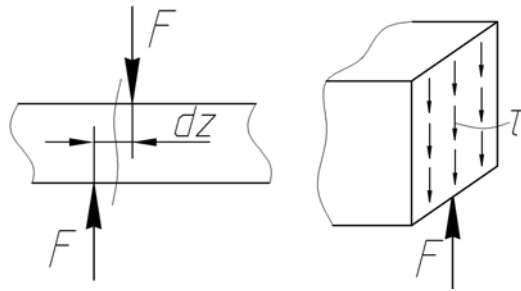


Рис. 3.3. Касательные напряжения

Воспользуемся интегральной зависимостью

$$Q = \int \tau dA \quad (3.2)$$

Однако, закон распределения касательных напряжений сложен. Поэтому соотношение (3.2) часто записывают так

$$Q = \tau_{\text{ср}} A,$$

где  $\tau_{\text{ср}}$  – некоторое усредненное значение касательного напряжения.

$$\tau = \frac{Q}{A}. \quad (3.3)$$

===== 4 =====

### Закон Гука при сдвиге, модуль сдвига

Подобно растяжению опытным путем было установлено, что касательные напряжения в пределах упругих деформаций прямо пропорциональны относительной деформации сдвига (**закон Гука при сдвиге**)

$$\tau = G\gamma, \quad (3.4)$$

где  $G$  – модуль упругости II рода, модуль сдвига, Па.

Объединяя (3.1) и (3.3) в (3.4) получим абсолютную величину сдвига

$$\frac{Q}{A} = G \frac{dS}{dz}, \quad dS = \frac{Q dz}{GA},$$

$$S = \int_0^l \frac{Q dz}{GA} \quad (3.5)$$

Формула (3.5) является приближенной в силу усреднения  $\tau$ .

С увеличением знаменателя  $GA$  абсолютный сдвиг уменьшается. Величина  $GA$  называется **жесткостью при сдвиге**.

===== 5 =====

## Потенциальная энергия деформации

Аналогично рассуждениям в отношении работы внешних сил при растяжении, энергия деформации, равная

$$dU = \frac{1}{2} F dS,$$

учитывая известные соотношения при сдвиге

$$F = Q, \quad dS = \frac{Q dz}{GA},$$

получим

$$dU = \frac{1}{2} Q \frac{Q dz}{GA} = \frac{Q^2 dz}{2GA}$$
$$dU = \frac{Q^2 dz}{2GA} \quad (3.6)$$

$$U = \int_l \frac{Q^2 dz}{2GA} \quad (3.7)$$

Выражение (3.6) – энергия деформации, накопленная участком стержня элементарной длины  $dz$ .

Выражение (3.7) – энергия деформации, накопленная всей длиной стержня.

===== 6 =====

## Коэффициент запаса при сдвиге, условие прочности.

### Практические расчеты на срез

Подобно растяжению, были реализованы эксперименты, которые позволяют определять зависимость углов сдвига и касательных напряжений. Эти диаграммы вполне аналогичны по виду соответствующим диаграммам растяжения, следовательно, расчетные методики имеют те же принципы

$$[\tau] = \frac{\tau_T}{n} \quad \text{для типично-пластичных материалов}$$

$$[\tau] = \frac{\tau_B}{n} \quad \text{для материалов с хрупким разрушением}$$

где  $[\tau]$  – допускаемые напряжения сдвига;

$n \geq 1$  – коэффициент запаса для сдвига.

Условие прочности при сдвиге имеет вид:

$$\tau = \frac{Q}{A} \leq [\tau] \quad (3.8)$$



Условие (3.8) используется в практических расчетах болтовых и заклепочных соединений на срез.

Из условия прочности можно выделить три типа расчетов:

1. Проверочный;
2. Проектировочный;
3. Определение максимальной грузоподъемности.

Для расчета заклепочного соединения на срез

$$\tau_{\text{ср}} = \frac{Q}{A} = \frac{F}{n \frac{\pi d^2}{4}} \leq [\tau],$$

где  $n$  – число заклепок;  
 $d$  – диаметр заклепки.

#### **Тема 4. КРУЧЕНИЕ ПРЯМОГО СТЕРЖНЯ (ВАЛА) КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ**

1. Кручение как вид деформирования – разновидность сдвига.
2. Закон Гука при кручении.
3. Касательные напряжения, полярный момент инерции сечения.
4. Потенциальная энергия деформации.
5. Условие прочности и жесткости при кручении.
6. Понятие об эпюрах крутящих моментов.
7. Кручение стержня некруглого поперечного сечения.
8. Дифференциальное соотношение.
9. Статически неопределимые задачи кручения валов.

===== 1 =====

#### **Кручение как вид деформирования – разновидность сдвига**

**Кручением** называется вид деформирования, при котором в поперечном сечении стержня (вала) возникает лишь один внутренний силовой фактор – крутящий момент. На микроуровне кручение можно рассматривать как частный случай сдвига. Убедимся в этом, рассмотрим деформирование участка длины  $dz$ .

Для определенности левое сечение будем считать закрепленным жестко.

Здесь так же будем основываться на предположение о малых деформациях. Кроме этого в теоретических выводах считается, что

поперечные сечения вала при кручении поворачиваются друг относительно друга, как жесткие диски. В этом и состоит суть кручения.

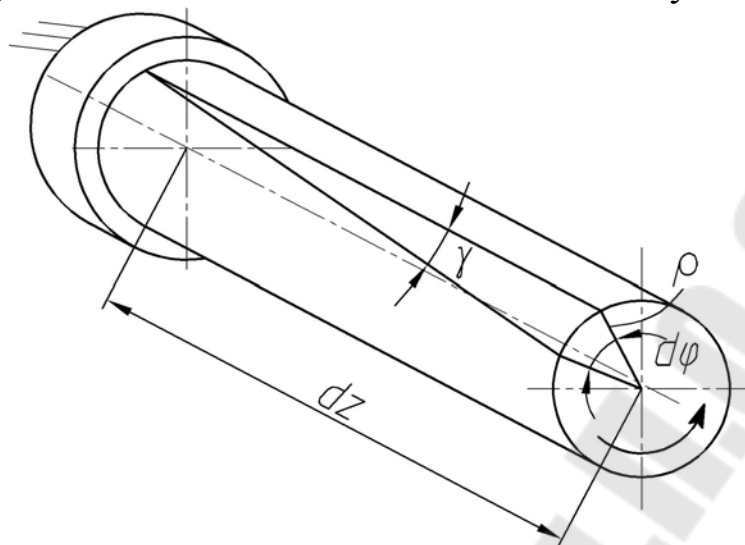


Рис. 4.1. Кручение круглого стержня

Посмотрим теорию кручения стержня круглого поперечного сечения. Из рисунка 4.1 видно

$$\gamma \cdot dz = \rho \cdot d\varphi, \quad \gamma = \rho \frac{d\varphi}{dz}, \quad \gamma = \rho\theta,$$

где  $\varphi$  – полярный угол закручивания;

$$\theta = \frac{d\varphi}{dz} \text{ – относительный угол закручивания.}$$

Заметим, если величина  $\gamma \cdot dz$  – малая, то и величина угла  $d\varphi$  обязана быть того же порядка малости.

===== 2 =====

### Закон Гука при кручении

Таким образом, закон Гука при сдвиге может быть переписан для кручения так

$$\tau = G\gamma = G\rho\theta$$

$$\tau = G\rho\theta \quad \text{– закон Гука при кручении.}$$

===== 3 =====

### Касательные напряжения, полярный момент инерции сечения

Напомним, что связь напряжений и внутренних факторов в случае растяжения и сдвига была весьма простой:

$$\sigma = \frac{N}{A}, \quad \tau = \frac{Q}{A}.$$

В кручении же требуется более детальное исследование. Действие касательных напряжений  $\tau$  должно в совокупности приводить к внутреннему крутящему моменту  $M_{кр}$ .

Рассмотрим схему (рис. 4.2)

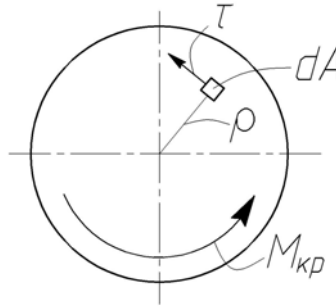


Рис. 4.2. К определению крутящего момента

$$\begin{aligned} dM_{кр} &= \tau \cdot dA \cdot \rho, \\ dM_{кр} &= G\rho\theta \cdot dA \cdot \rho, \\ dM_{кр} &= G\rho^2\theta \cdot dA \\ M_{кр} &= G\theta \int_A \rho^2 \cdot dA \end{aligned} \quad (4.1)$$

Величины типа  $\int_A \rho^2 \cdot dA$  весьма часто встречаются в ММ. Их изучение составляет отдельный раздел «Геометрия площадей». Величина  $\int_A \rho^2 \cdot dA$  в формуле (4.1) называется **полярным моментом инерции сечения**  $I_p$ .

Тогда получим

$$\begin{aligned} M_{кр} &= G\theta \cdot I_p, & M_{кр}\rho &= G\theta\rho \cdot I_p, & M_{кр}\rho &= \tau \cdot I_p \\ \tau &= \frac{M_{кр}}{I_p} \rho \end{aligned} \quad (4.2)$$

Выражение (4.2) является искомой *связью между напряжением и внутренним фактором при кручении*. Получается, что чем больше площадка удалена от центра, тем больше касательные напряжения.

С другой стороны:

$$\theta = \frac{d\varphi}{dz}, \quad M_{кр} = G \frac{d\varphi}{dz} \cdot I_p, \quad d\varphi = \frac{M_{кр} dz}{GI_p},$$

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_{кр} dz}{GI_p} \quad (4.3)$$

Выражение (4.3) является формулой для определения *полного угла закручивания*.

Произведение  $GI_p$  в формуле (4.3) называется **жесткостью при кручении**.

Относительный угол закручивания из (4.1) будет

$$\theta = \frac{M_{кр}}{GI_p}$$

===== 4 =====

### **Потенциальная энергия деформации**

Рассуждая аналогично растяжению в отношении работы можно вывести *потенциальную энергию деформации при кручении*

$$dU = \frac{1}{2} M_{кр} d\varphi = \frac{1}{2} M_{кр} \frac{M_{кр} dz}{GI_p} = \frac{M_{кр}^2 dz}{2GI_p}$$

$$U = \int_0^l \frac{M_{кр}^2 dz}{2GI_p}$$

===== 5 =====

### **Условие прочности и жесткости при кручении**

Практическая сторона вопроса связана с расчетом валов в многочисленных редукторах и передачах.

Условие прочности при кручении формулируется из общей концептуальной зависимости  $\tau \leq [\tau]$

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{I_p} \rho \leq [\tau].$$

Часто в условие прочности вместо полярного момента инерции вводят коэффициент

$$W_p = \frac{I_p}{\rho},$$

который принято называть **полярный момент сопротивления сечения** кручению. Тогда условие прочности при кручении примет вид

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_p} \leq [\tau]$$

Найдем полярный момент инерции круглого сечения из определения этой величины (рис. 4.3).

$$I_p = \int_A \rho^2 dA$$

$dA = 2\pi\rho \cdot d\rho$  – площадь кольца;

$$I_p = \int_0^{D/2} \rho^2 \cdot 2\pi\rho \cdot d\rho = \int_0^{D/2} 2\pi\rho^3 d\rho = \frac{2\pi\rho^4}{4} \Big|_0^{D/2} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{D}{2}\right)^4 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{D^4}{16} = \frac{\pi D^4}{32}$$

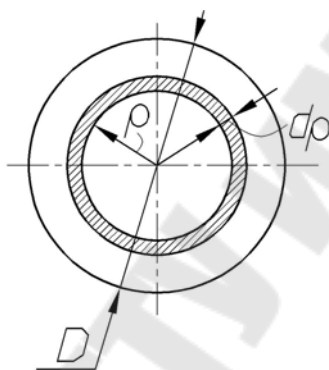


Рис. 4.3. К определению полярного момента инерции

Как любой интеграл полярный момент инерции обладает свойством аддитивности (интеграл суммы равен сумме интегралов), поэтому для сложных сечений при расчете моментов инерций следует использовать это свойство. Полярный момент сопротивления же напротив, аддитивностью не обладает и в числитель условия прочности должно закладываться его итоговое значение.

Важное значение на практике имеет ограничение перемещений, особенно в динамических расчетах. Тогда формулируется **условие жесткости** для относительного угла закручивания.

$$\theta = \frac{M_{\text{кр}}}{GI_p} \leq [\theta].$$

Значение  $[\theta]$  выбирают путем анализа экспериментального опыта и учитывают особенности условий работы.

При расчете стержня на кручение решают три основные задачи с построением эпюр:

1. Используя метод сечений, строят эпюру крутящих моментов  $M_{кр}$ ;
2. По эпюре крутящих моментов определяют напряжения в сечениях стержня;
3. Определяют перемещения сечений стержня (углы закручивания  $\varphi$ ).

При построении эпюр для крутящего момента, независимо от формы сечения, принято следующее правило знаков: *если наблюдатель смотрит на поперечное сечение со стороны внешней нормали (оси) и видит крутящий момент  $M_{кр}$  направленным против часовой стрелки, то момент считается положительным.*

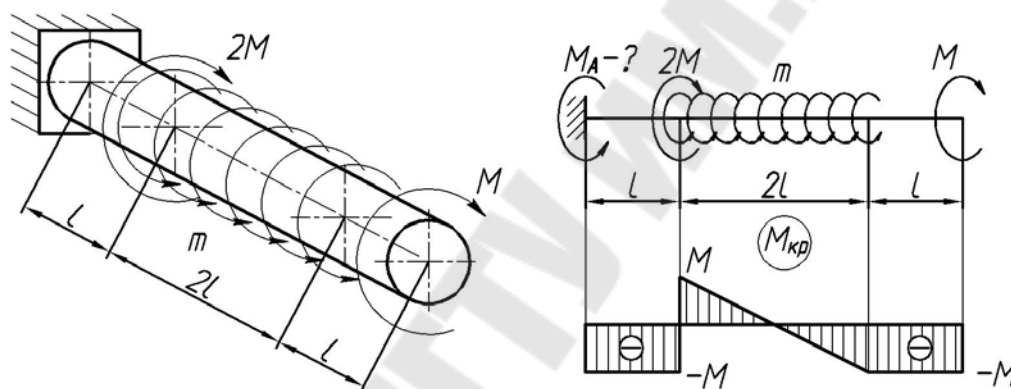


Рис. 4.4. Построение эпюры крутящего момента

7

### Кручение стержня некруглого поперечного сечения

В рамках ММ не удастся найти решение задачи о кручении стержней с некруглым сечением. Ситуация осложняется еще и тем, что если при кручении круглых сечений сами поперечные сечения поворачиваются как жесткие диски, то при кручении прямоугольных сечений сами поперечные сечения превращаются в 3-D поверхности. Это явление называется **диплонацией**.

Решение подобных задач осуществляется методами теории упругости, а ММ адаптирует эти результаты для проведения обычных инженерных расчетов. При этом формулы в основном сохраняются.

На рисунке 4.5 показана полученная методами теории упругости эпюра касательных напряжений для бруса прямоугольного сечения. В

углах, как видно, напряжения равны нулю, а наибольшие напряжения возникают по серединам больших сторон в точках  $A$ .

$$\tau_A = \tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_{\text{к}}}; \quad \tau_B = \eta \tau_A = \eta \tau_{\max}; \quad W_{\text{к}} = \alpha \cdot h \cdot b^2; \quad I_{\text{к}} = \beta \cdot h \cdot b^3.$$

где  $h$  и  $b$  – размеры прямоугольного сечения

$\alpha$ ,  $\beta$  и  $\eta$  – коэффициенты, зависящие от отношения сторон  $\frac{b}{h}$ .

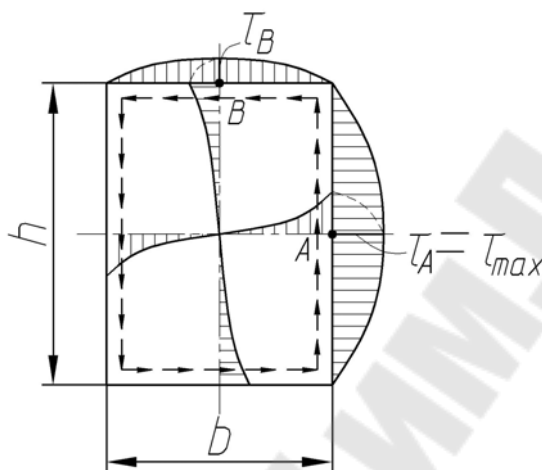


Рис. 4.5. Эпюра касательных напряжений

Значения этих коэффициентов приведены в справочниках.

8

### Дифференциальное соотношение

Получим дифференциальное соотношение между внешним распределенным крутящим моментом и внутренним (рис. 4.6). Для этого рассмотрим часть стержня длиной  $dz$ .

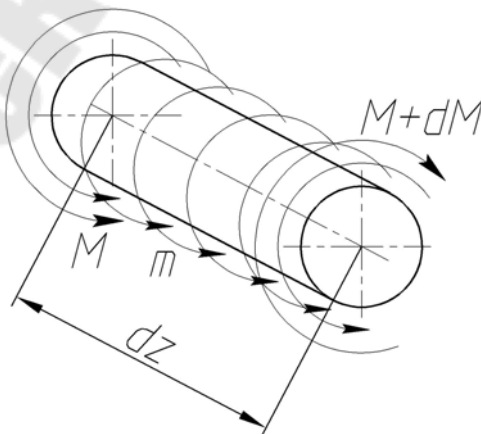


Рис. 4.6. Расчетная схема

Из условия равновесия получаем

$$M + mdz = M + dM,$$

$$mdz = dM,$$

$$m = \frac{dM}{dz},$$

где  $m$  – внешний распределенный момент,  $\left[ \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{м}} \right]$ ;

$M$  – внутренний силовой фактор, возникающий в мысленно выделенном сечении – внутренний крутящий момент.

===== 9 =====

### Статически неопределимые задачи кручения валов

В целом, понятие статической неопределимости при кручении сохраняет свою форму, т.к. оно универсально и безотносительно по отношению к типам деформирования. К примеру, в статически неопределимых задачах на кручение следует также составлять дополнительное *уравнение совместности перемещений* для отражения факта отсутствия угловых перемещений в задней точке вала (в заделке).

## Тема 5. ГЕОМЕТРИЯ ПЛОЩАДЕЙ

1. Статические моменты площади сечения.
2. Определение центра тяжести сечения, пример расчета
3. Осевые моменты инерции сечений.
4. Моменты инерции простейших сечений.
5. Зависимость между моментами инерции для параллельных осей.
6. Зависимость между моментами инерции при повороте осей.
7. Главные оси и главные моменты инерции сечений.

===== 1 =====

### Статические моменты площади сечения

Этот раздел не имеет прямого отношения к ММ в том смысле, что не рассматривает процессы деформирования, однако, на характер деформирования значительное влияние оказывают геометрические характеристики сечений. Так, в растяжении-сжатии в качестве геометрической характеристики служит площадь сечения  $A$  [ $\text{м}^2$ ], в кручении – полярный момент инерции  $I_p$  [ $\text{м}^4$ ], в изгибе – осевой момент инерции  $I_x$  [ $\text{м}^4$ ]. Дальнейшие исследования будут касаться только



геометрических вопросов. Этот раздел часто называют геометрией масс (в широком смысле).

Возьмем некоторое поперечное сечение стержня, выделим в нем элемент площади  $dA$  и свяжем его с координатами  $x$  и  $y$  (рис. 5.1).

**Статическим моментом сечения** относительно оси  $X$  ( $Y$ ) называется величина вида

$$S_X = \int_A y dA, \quad S_Y = \int_A x dA.$$

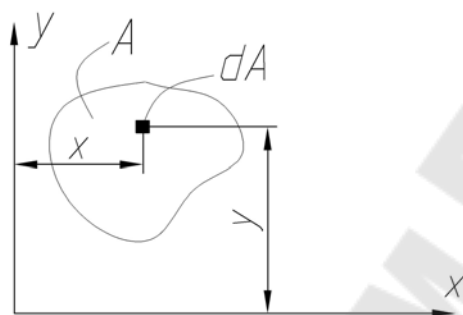


Рис. 5.1. К определению статического момента

Рассмотрим, как изменятся статические моменты при параллельном переносе осей (рис. 5.2).

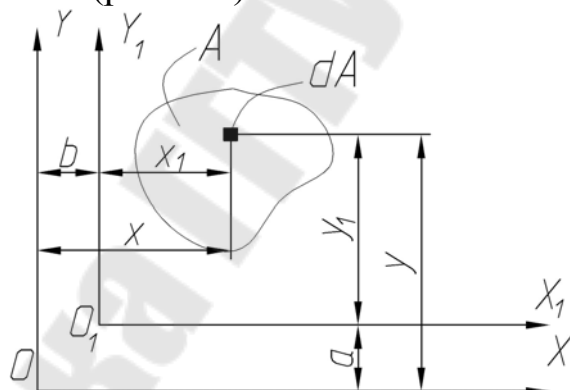


Рис. 5.2. К определению статического момента при параллельном переносе осей

$XOY$  – старая система координат;

$X_1O_1Y_1$  – новая система координат.

$$y_1 = y - a;$$

$$x_1 = x - b.$$

$$S_{X_1} = \int_A y_1 dA = \int_A (y - a) dA = S_X - aA,$$

$$S_{Y_1} = \int_A x_1 dA = \int_A (x - b) dA = S_Y - bA$$

$$\begin{aligned} S_{X_1} &= S_X - aA \\ S_{Y_1} &= S_Y - bA \end{aligned} \quad (5.1)$$

Выражения 5.1 помогают определить статические моменты сечения при параллельном переносе осей.

===== 2 =====

### Определение центра тяжести сечения, пример расчета

С формальной точки зрения можно подобрать такие размеры  $a$  и  $b$ , при которых статические моменты будут равны нулю

$$S_X = 0, \quad S_Y = 0.$$

Ось, относительно которой статический момент инерции равен нулю, называется **центральной**.

Эти особенные значения размеров  $a$  и  $b$  называют **координатами центра тяжести** сечения

$$y_c = \frac{S_X}{A}, \quad x_c = \frac{S_Y}{A}.$$

Более распространенным является общее определение центра тяжести

$$y_c = \frac{\sum y_i dA_i}{\sum dA_i}, \quad x_c = \frac{\sum x_i dA_i}{\sum dA_i}.$$

Интуитивно ясно, что центр тяжести лежит на вертикальной оси симметрии, однако, его положение на этой оси неизвестно

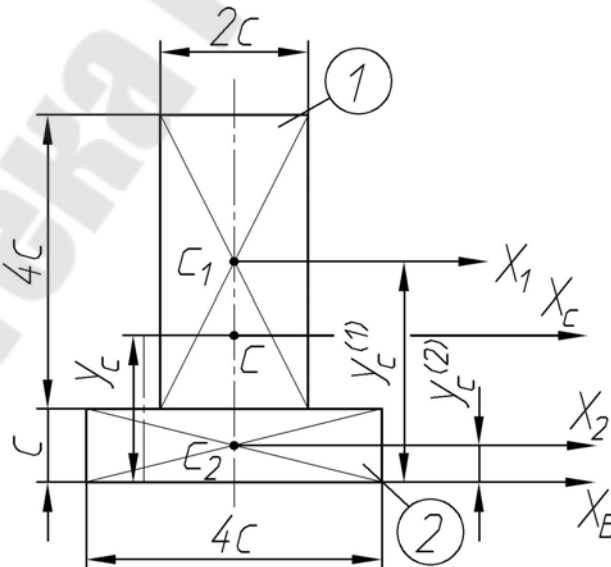


Рис. 5.3. Определение центра тяжести сечение

В силу свойства суммирования интеграла статический момент сечения можно разложить на два

$$S_X = S_X^{(1)} + S_X^{(2)}.$$

Выберем вспомогательную ось  $X_B$  в произвольном месте, тогда

$$\begin{aligned} S_{X_B}^{(1)} &= y_c^{(1)} A^{(1)}, & S_{X_B}^{(2)} &= y_c^{(2)} A^{(2)}, \\ y_c^{(1)} &= 3c, \quad A^{(1)} = 4c \cdot 2c = 8c^2; & y_c^{(2)} &= \frac{1}{2}c, \quad A^{(2)} = c \cdot 4c = 4c^2; \\ S_{X_B}^{(1)} &= 3c \cdot 8c^2 = 24c^3 & S_{X_B}^{(2)} &= \frac{1}{2}c \cdot 4c^2 = 2c^3 \end{aligned}$$

Переходя на уровень всего сечения, получаем координаты центра тяжести

$$\begin{aligned} y_c &= \frac{S_{X_B}}{A}, \\ S_{X_B} &= S_{X_B}^{(1)} + S_{X_B}^{(2)} = 24c^3 + 2c^3 = 26c^3, \\ A &= A^{(1)} + A^{(2)} = 8c^2 + 4c^2 = 12c^2; \\ y_c &= \frac{26c^3}{12c^2} = 2c. \end{aligned}$$

Ось  $X_C$ , проходящая через центр тяжести, составляет центральную систему координат.

===== 3 =====

### Осевые моменты инерции сечений

**Осевыми моментами инерции сечения** относительно осей  $X$  и  $Y$  называются величины типа

$$I_X = \int_A y^2 dA, \quad I_Y = \int_A x^2 dA.$$

Заметим, что  $I_X$  и  $I_Y$  всегда положительны, в отличие от  $S_X$  и  $S_Y$ , которые могут быть и отрицательными.

Интеграл вида  $I_{XY} = \int_A xy dA$  называется **центробежным моментом инерции**.

На практике имеют значения лишь осевые моменты инерции, взятые относительно осей центральной системы координат. Более того, эти оси должны располагаться так, чтобы из пары значений  $I_X$ ,  $I_Y$  одно было минимально, а другое максимально. В подобных случаях говорят о **главных центральных моментах инерции**.

Под словом *главный* следует понимать наличие максимума или минимума в значениях  $I_X$  и  $I_Y$ .

Несложно доказать, что оси симметрии сечения всегда будут являться главными центральными.

4

### Моменты инерции простейших сечений

Определим моменты инерции простейших фигур.

#### Прямоугольник.

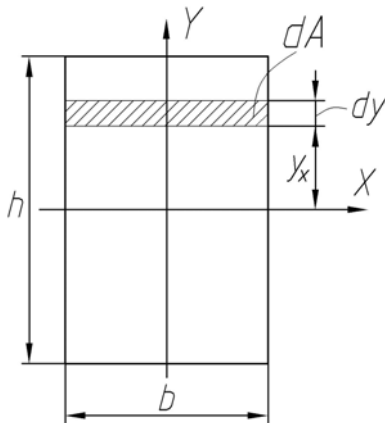


Рис. 5.4. Прямоугольное сечение

$$I_X = \int_A y^2 dA, \quad dA = bdy,$$

$$I_X = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 b dy = \frac{y^3}{3} b \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{\left(\frac{h}{2}\right)^3 - \left(-\frac{h}{2}\right)^3}{3} b =$$

$$= \frac{2h^3}{3} b = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_X = \frac{bh^3}{12}, \quad I_Y = \frac{b^3h}{12}.$$

#### Круг.

Осевой момент инерции круга определим через полярный момент инерции.

Для круга

$$I_X = I_Y = \frac{I_p}{2}.$$

Для этого выделим элементарную площадку в виде кольца толщиной  $d\rho$ . Тогда площадь этого кольца

$$dA = 2\pi\rho d\rho.$$

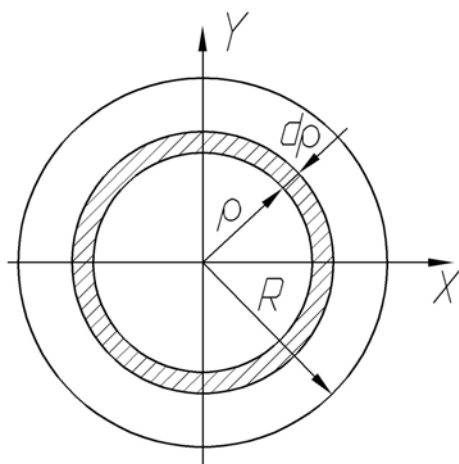


Рис. 5.5. Круглое сечение

$$\begin{aligned}
 I_p &= \int_A \rho^2 dA = 2\pi \int_0^R \rho^3 d\rho = 2\pi \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^R = \\
 &= \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32} \\
 I_X &= I_Y = \frac{I_p}{2} = \frac{\pi D^4}{64}
 \end{aligned}$$

### Треугольник.

Проблема определения момента инерции состоит в том, что малая площадь  $dA$  зависит от текущей величины  $y$ .

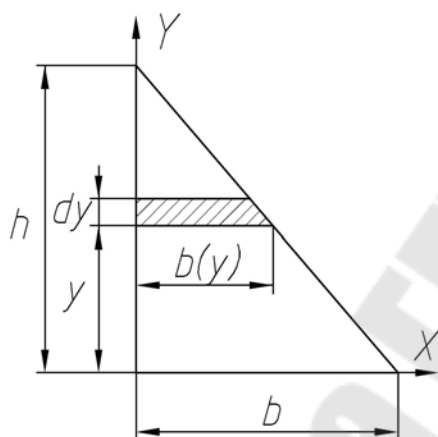


Рис. 5.6. Треугольное сечение

$$\begin{aligned}
 I_X &= \int_A y^2 dA; \\
 dA &= b(y) dy;
 \end{aligned}$$

Из подобия треугольников получаем

$$\frac{b}{h} = \frac{b(y)}{h-y}, \quad b(y) = b \left( 1 - \frac{y}{h} \right).$$

$$\begin{aligned}
 I_X &= b \int_0^h \left( y^2 - \frac{y^3}{h} \right) dy = b \left( \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4h} \right) \Big|_0^h = \\
 &= b \left( \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4h} \right) = \frac{bh^3}{12}
 \end{aligned}$$

$I_X = \frac{bh^3}{12}$  – осевой момент инерции треугольника относительно основания.

Также можно получить центробежный момент инерции

$$I_{XY} = \frac{b^2 h^2}{24}$$

---

### Зависимость между моментами инерции для параллельных осей

Определим осевые моменты инерции при параллельном переносе осей (рис. 5.7).

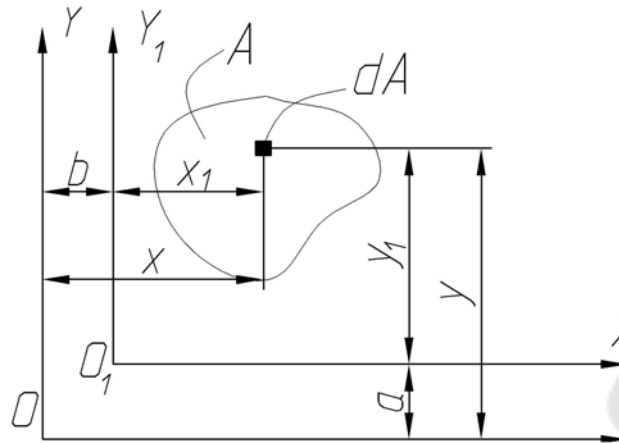


Рис. 5.7. Параллельный перенос осей

$XOY$  – старая система координат;

$X_1O_1Y_1$  – новая система координат.

$$y_1 = y - a;$$

$$x_1 = x - b.$$

$$I_{X_1} = \int_A y_1^2 dA = \int_A (y - a)^2 dA = \int_A (y^2 - 2ya + a^2) dA = I_Y - 2aS_Y + a^2 A,$$

$$I_{Y_1} = \int_A x_1^2 dA = \int_A (x - b)^2 dA = \int_A (x^2 - 2xb + b^2) dA = I_X - 2bS_X + b^2 A$$

Если оси  $X$  и  $Y$  являются центральными, то статические моменты относительно этих осей равны

$$S_X = 0, \quad S_Y = 0.$$

Тогда окончательно получаем

$$I_{X_1} = I_Y + a^2 A$$

$$I_{Y_1} = I_X + b^2 A$$

Также можно получить выражение для центробежного момента инерции

$$I_{X_1Y_1} = I_{XY} + abA$$

6

**Зависимость между моментами инерции при повороте осей**

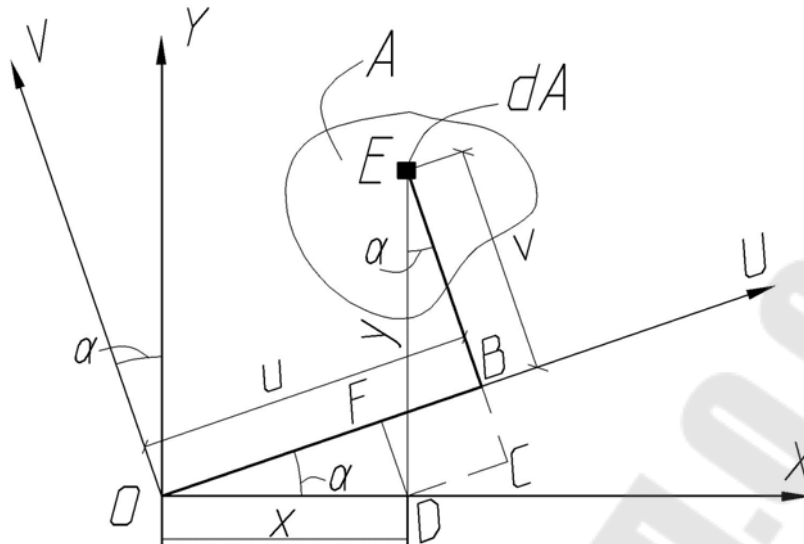


Рис. 5.8. Поворот осей

Имеем две системы координат, причем  $UOV$  повернута относительно  $XOY$  на угол  $\alpha$  (рис. 5.8). Необходимо определить моменты инерции относительно новых осей.

Выразим координаты  $u$  и  $v$  через  $x$  и  $y$ .

$$u = OF + FB = x \cos \alpha + y \sin \alpha,$$

$$v = EC - BC = y \cos \alpha - x \sin \alpha.$$

Тогда осевые и центробежный моменты инерции будут равны

$$\begin{aligned} I_U &= \int_A v^2 dA = \int_A (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 dA = \\ &= \int_A (y^2 \cos^2 \alpha - 2yx \cos \alpha \sin \alpha + x^2 \sin^2 \alpha) dA = \end{aligned}$$

$$= I_X \cos^2 \alpha + I_Y \sin^2 \alpha - I_{XY} \sin 2\alpha$$

$$I_V = \int_A u^2 dA = \int_A (x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 dA =$$

$$= \int_A (x^2 \cos^2 \alpha + 2xy \cos \alpha \sin \alpha + y^2 \sin^2 \alpha) dA =$$

$$= I_Y \cos^2 \alpha + I_X \sin^2 \alpha + I_{XY} \sin 2\alpha$$

$$I_{UV} = \int_A uv dA = \int_A (y \cos \alpha - x \sin \alpha)(x \cos \alpha + y \sin \alpha) dA = \dots =$$

$$= \frac{I_X + I_Y}{2} \sin 2\alpha - I_{XY} \cos 2\alpha$$

$$I_U = I_X \cos^2 \alpha + I_Y \sin^2 \alpha - I_{XY} \sin 2\alpha$$

$$I_V = I_x \sin^2 \alpha + I_Y \cos^2 \alpha + I_{XY} \sin 2\alpha$$

$$I_{UV} = \frac{I_X + I_Y}{2} \sin 2\alpha - I_{XY} \cos 2\alpha$$

Сумма моментов от поворота осей не зависит и является величиной постоянной

$$I_X + I_Y = I_U + I_V = \text{const}$$

===== 7 =====

### Главные оси и главные моменты инерции сечений

С изменением угла  $\alpha$  каждая из величин осевых моментов меняется, а их сумма остается неизменной. Следовательно, существует такое  $\alpha$ , при котором один из моментов достигает своего максимального значения, в то время как другой момент инерции принимает минимальное значение. Этот угол определяет положение главных осей

$$\text{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{XY}}{I_X - I_Y}$$

Оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, а осевые моменты принимают экстремальные значения, называются **главными осями**. Если к тому же они являются центральными (статический момент равен нулю), то они называются **главными центральными осями инерции**.

Осевые моменты инерции относительно главных осей называют **главными моментами инерции**.

$$I_{\max}^{\min} = \frac{I_X + I_Y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_X - I_Y)^2 + 4I_{XY}^2}$$

## Тема 6. ИЗГИБ ПРЯМОГО СТЕРЖНЯ

### §6.1. Чистый изгиб

1. Изгиб как вид деформирования, чистый и поперечный изгиб.
2. Изгиб как композиция растяжения-сжатия.
3. Закон Гука при чистом изгибе.
4. Нормальные напряжения чистого изгиба.
5. Потенциальная энергия деформации чистого изгиба.
6. Условие прочности по нормальным напряжениям.

===== 1 =====

**Изгиб как вид деформирования, чистый и поперечный изгиб**



Вид нагружения, при котором в поперечных сечениях балки действует изгибающий момент  $M_x$ , называется **изгибом**.

Если изгибающий момент  $M_x$  в сечении является единственным силовым фактором, а поперечные  $Q$  и нормальные  $N$  силы отсутствуют, изгиб называется **чистым** (рис.6.1). Большей частью, однако, в поперечных сечениях стержня наряду с изгибающими моментами  $M_x$  возникают также и поперечные силы  $Q$ . В таком случае изгиб называют **поперечным** (рис. 6.2).

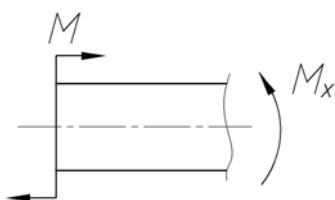


Рис. 6.1. Чистый изгиб

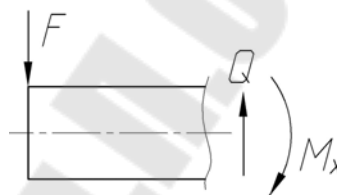


Рис. 6.2. Поперечный изгиб

Стержень, работающий в основном на изгиб, часто называют **балкой**.

2

### Изгиб как композиция растяжения-сжатия

Рассмотрим чистый изгиб прямого стержня (рис. 6.3). Если на его боковую поверхность нанести сетку в виде продольных и поперечных линий, то при изгибе можно заметить следующее.

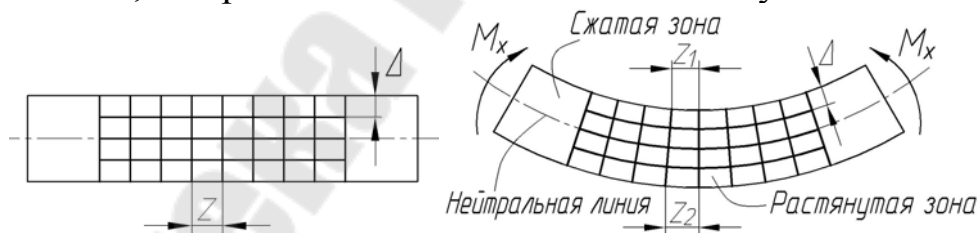


Рис. 6.3. Чистый изгиб прямого стержня

1. Продольные линии искривляются по дуге окружности.
2. Поперечные линии остаются прямыми и только поворачиваются относительно друг друга. Это значит, что поперечные сечения остаются плоскими и после деформации (*гипотеза плоских сечений*).

Тот факт, наблюдаемый экспериментально, что плоские до процесса деформирования поперечные сечения остаются в процессе деформирования плоскими, а также нормальными к оси бруса, называют **допущением плоских сечений Бернулли**.

3. Верхние волокна укорачиваются ( $z_1 < z$ ), а нижние удлиняются ( $z_2 > z$ ). Между ними располагается *нейтральный слой*, который не изменяет свою длину. Линия пересечения нейтрального слоя с поперечными сечениями называется **нейтральной линией** или **нейтральной осью**.
4. Расстояние между продольными линиями  $\Delta$  не изменяется. Это говорит о том, что продольные волокна не давят друг на друга и не стремятся оторваться друг от друга, а значит, каждое волокно испытывает простое *сжатие* (сверху) или *растяжение* (снизу).

===== 3 =====

### Закон Гука при чистом изгибе

Поскольку чистый изгиб представляет собой совокупность растяжения и сжатия, то закон Гука при чистом изгибе должен быть получен некоторым расширением того же закона при растяжении. Как обычно в подобных случаях, сосредоточим внимание на деформировании очень малой части балки длиной  $dz$  (рис. 6.5), причем, не нарушая общности рассуждения, левое сечение будем считать закрепленным жестко.

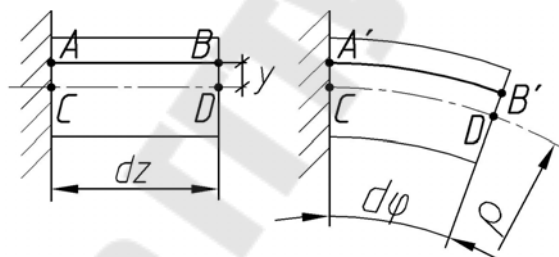


Рис. 6.4. К закону Гука при чистом изгибе прямого стержня

Вопрос о деформации решается исключительно геометрически.

Произвольно взятый отрезок  $AB = dz$  получит приращение длины  $A'B' - AB$ . В силу допущения Бернулли

$$A'B' = (\rho + y)d\varphi, \quad AB = CD = \rho d\varphi,$$

$$A'B' - AB = (\rho + y)d\varphi - \rho d\varphi = yd\varphi.$$

где  $y$  – расстояние от отрезка  $AB$  до нейтральной линии  $CD$ .

Относительное удлинение отрезка  $AB$

$$\varepsilon = \frac{A'B' - AB}{dz},$$

т.к.

$$dz = AB = \rho d\varphi, \tag{6.1}$$

то

$$\varepsilon = \frac{y d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{y}{\rho}.$$

Возвращаясь к закону Гука при растяжении, получим **закон Гука при чистом изгибе**

$$\begin{aligned}\sigma &= E\varepsilon = E \frac{y}{\rho}, \\ \sigma &= E \frac{y}{\rho}\end{aligned}\quad (6.2)$$

===== 4 =====

### Нормальные напряжения чистого изгиба

Как известно, при чистом изгибе в поперечном сечении действует только изгибающий момент  $M_X$ . Его можно записать через нормальные напряжения  $\sigma$  (рис. 6.5).

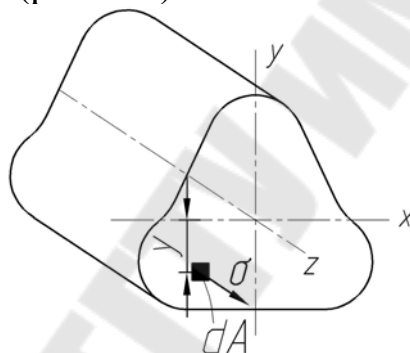


Рис. 6.5. Нормальные напряжения при чистом изгибе

$$dM_X = \sigma \cdot dA \cdot y, \quad (6.3)$$

где  $\sigma \cdot dA$  – продольная сила, определяющая момент  $M_X$ .

Однако через уравнение (6.3) напряжения  $\sigma$  определить нельзя, т.к. неизвестен характер их распределения. Поэтому заменим напряжения  $\sigma$  выражением (6.2)

$$\begin{aligned}dM_X &= E \frac{y}{\rho} \cdot dA \cdot y, \\ M_X &= \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA,\end{aligned}$$

где  $\int_A y^2 dA$  – осевой момент инерции  $I_X$ .

$$M_X = \frac{E}{\rho} I_X. \quad (6.4)$$

Перепишем (6.4) и помножим на относительную деформацию  $\varepsilon$

$$M_X \rho = EI_X \varepsilon,$$

$$M_X \rho \varepsilon = E \varepsilon I_X,$$

где  $\rho \varepsilon = y$ ,  $E \varepsilon = \sigma$ .

$$M_X y = \sigma I_X,$$

$$\sigma = \frac{M_X}{I_X} y \quad (6.5)$$

Распределение напряжений в сечении, определяемых по формуле (6.5), демонстрирует рисунок 6.6.

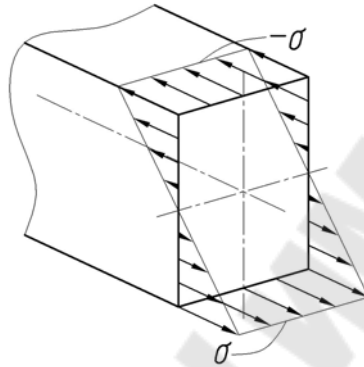


Рис. 6.6. Эпюра нормальных напряжений

5

### Потенциальная энергия деформации чистого изгиба.

Вопрос об энергии деформации прямо связан с перемещением при изгибе.

Энергия упругих деформаций бруса при изгибе определяется работой момента  $M_X$  на взаимном угловом перемещении  $d\varphi$  двух сечений

$$dU = \frac{1}{2} M_X d\varphi.$$

Из (6.1) можно выразить  $d\varphi$ ,

$$d\varphi = \frac{dz}{\rho} = \frac{M_X dz}{EI_X},$$

где  $\frac{1}{\rho} = \frac{M_X}{EI_X}$  — следует из выражения (6.4).

Тогда

$$dU = \frac{1}{2} M_X \frac{M_X dz}{EI_X} = \frac{M_X^2 dz}{2EI_X}$$

$$U = \int_0^l \frac{M_X^2 dz}{2EI_X} \quad (6.6)$$

(6.6) это формула для определения потенциальной энергии изгиба.

===== 6 =====

### Условие прочности по нормальным напряжениям

Максимальное напряжение при изгибе возникает в точках, наиболее удаленных от нейтральной линии. Поэтому условие прочности при изгибе имеет вид

$$\sigma_{\max} = \frac{M_X}{I_X} y_{\max} \leq [\sigma] \quad (6.7)$$

Отношение  $\frac{I_X}{y_{\max}} = W_X$  называется **моментом сопротивления** сечения при изгибе. Поэтому условие (6.7) приобретает вид

$$\sigma_{\max} = \frac{M_X}{W_X} \leq [\sigma] \quad (6.8)$$

Условие (6.8) является основным при расчете балки на прочность при изгибе.

Для снижений напряжений изгиба надо стремиться к тому, чтобы  $W_X$  был максимален. Это достигается, как можно большим удалением площади сечения от центральной оси. Так были получены профили, ставшие стандартными (швеллер, двутавр).

### §6.2. Поперечный изгиб. Деформация изгиба

1. Распространение выводов чистого изгиба на поперечный изгиб.
2. Дифференциальные соотношения при изгибе.
3. Касательные напряжения при поперечном изгибе – формула Д. И. Журавского, ограничения.
4. Распределение касательных напряжений в стандартных профилях: прямоугольник, круг.
5. Проверка прочности по касательным напряжениям.
6. Дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня и его интегрирование, изгибная жесткость.

### Распространение выводов чистого изгиба на поперечный изгиб

При поперечном изгибе в поперечных сечениях балки возникают нормальные  $\sigma$  и касательные  $\tau$  напряжения.

Возникновение касательных напряжений  $\tau$  сопровождается появлением угловых деформаций  $\gamma$  (рис. 6.7), поэтому кроме основных деформаций, свойственных чистому изгибу, каждая элементарная площадка  $dA$  получает некоторые дополнительные угловые смещения, обусловленные сдвигом.

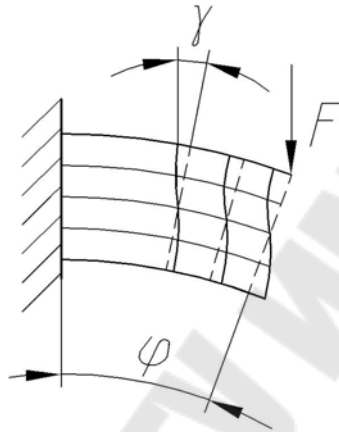


Рис. 6.7. Поперечный изгиб прямого стержня

Касательные напряжения  $\tau$  распределены по сечению неравномерно, поэтому неравномерно будут распределены и угловые смещения. Нарушается гипотеза плоских сечений.

Если по длине стержня  $Q = const$ , то соотношение (6.5) чистого изгиба

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y$$

остается справедливым. При  $Q \neq const$  формулы чистого изгиба для напряжений  $\sigma$  дают погрешность порядка  $h/l$  (где  $h$  – высота поперечного сечения;  $l$  – длина балки). Но так как на практике величина  $h/l$  мала, то указанная погрешность соответственно будет незначительной. Тем более что угловые смещения сдвига  $\gamma$  существенно меньше, чем угловые перемещения кривизны  $\varphi$ .

Таким образом, при поперечном изгибе вполне приемлемо использовать формулы для чистого изгиба.

### Дифференциальные соотношения при изгибе

Из дифференциальных уравнений практическую пользу можно извлечь при решении задач. Рассмотрим произвольную балку (рис. 6.8).

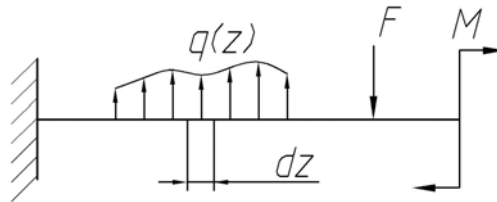


Рис. 6.8. Расчетная схема

Исследуем равновесие малого участка  $dz$  с общих позиций (рис. 6.9).

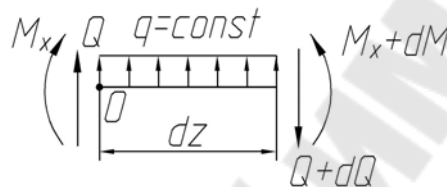


Рис. 6.9. Равновесие малого участка  $dz$

Малые добавки  $dQ$  и  $dM$  связаны причинно с малым расстоянием  $dz$  от исходной точки  $O$ .  $q = const$  в силу малости  $dz$ .

$$\sum F_i = 0; \quad Q + qdz - (Q + dQ) = 0;$$

$$q = \frac{dQ}{dz} \tag{6.9}$$

Равновесие моментов дает

$$\sum M_{xi} = 0; \quad M_x + dM - (Q + dQ)dz + qdz \frac{dz}{2} - M_x = 0;$$

$$dM - Qdz - dQdz + q \frac{dz^2}{2} = 0.$$

В силу высшего порядка малости третьим и четвертым слагаемым пренебрегаем.

$$Q = \frac{dM}{dz} \tag{6.10}$$

Объединяя (6.9) и (6.10), получим

$$q = \frac{d^2 M}{dz^2} \tag{6.11}$$

Выражения (6.9), (6.10) и (6.11) являются дифференциальными соотношениями при изгибе.

3

### Касательные напряжения при поперечном изгибе – формула Д. И. Журавского, ограничения

Построим приближенную теорию расчета касательных напряжений в поперечном сечении (рис. 6.10). Основным ее допущением является предположение о равномерном распределении касательных напряжений. Как и прежде, для этого следует рассмотреть характер деформирования некоторой малой части стержня при совместном действии поперечных сил и изгибающих моментов. При этом считается, что  $Q = const$ .

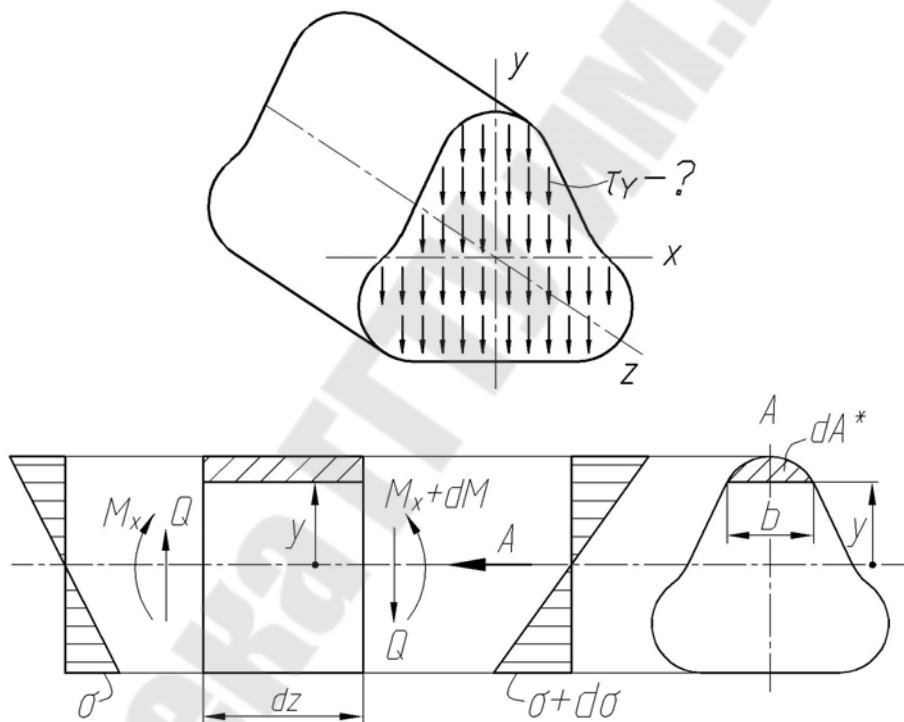


Рис. 6.10. Напряжения при поперечном изгибе

Искомые касательные напряжения  $\tau_y$  в поперечном сечении проще всего искать не прямым образом, а через касательные напряжения в продольном сечении (рис. 6.11). По закону парности касательных напряжений – они равны  $\tau_y = \tau$ .



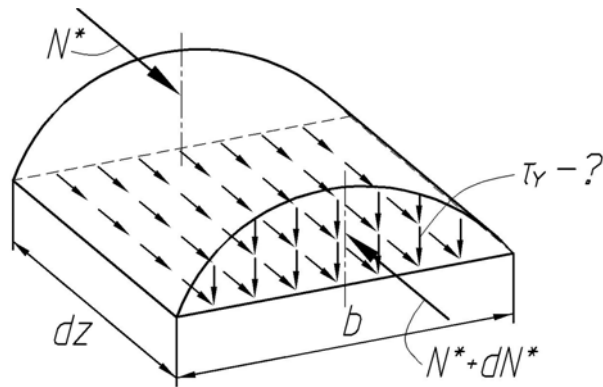


Рис. 6.11. К выводу формулы Журавского

Из условия равновесия статики

$$\sum F_{zi} = 0; \quad N^* + \tau \cdot b dz - (N^* + dN^*) = 0; \\ \tau \cdot b dz = dN^* . \quad (6.12)$$

Продольная сила  $N^*$  равна

$$N^* = \int_{A^*} \sigma \cdot dA = \int_{A^*} \frac{M_X}{I_X} y dA = \frac{M_X}{I_X} \int_{A^*} y dA = \frac{M_X}{I_X} S_X^* . \\ N^* = \frac{M_X}{I_X} S_X^* ,$$

где  $S_X^*$  – статический момент так называемой отсеченной площади  $dA^*$ .

Таким же образом можно получить

$$dN^* = dM_X \frac{S_X^*}{I_X} .$$

Возвращаясь к (6.12), получаем

$$\tau = \frac{dN^*}{b dz} = \frac{dM_X}{b dz} \frac{S_X^*}{I_X} .$$

Так как поперечная сила  $Q$  равна

$$Q = \frac{dM_X}{dz} ,$$

то

$$dM_X = Q dz ,$$

тогда окончательно получаем

$$\tau = \frac{Q \cdot S_X^*}{b \cdot I_X} . \quad (6.13)$$

Выражение (6.13) носит название **формула Д.И.Журавского** для определения касательных напряжений.

(6.13) имеет приблизительный характер из-за предположения о равномерности распределения касательных напряжений по текущей ширине  $b$ .

===== 4 =====

### Распределение касательных напряжений в стандартных профилях: прямоугольник, круг

#### 1. Прямоугольное сечение (рис. 6.12)

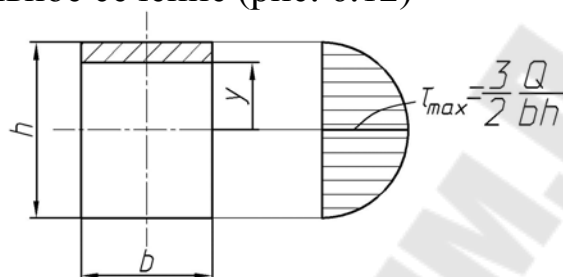


Рис. 6.12. Эпюра касательных напряжений

Определим касательное напряжение в произвольном сечении по формуле Журавского. Чтобы его определить, необходимо определить статический момент «отсекаемой» до этого сечения части.

$$S_X^* = \int_y^{\left(\frac{h}{2}\right)} y b dy = \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{h}{2} - y \right) + y \right] \cdot \left[ \left( \frac{h}{2} - y \right) b \right] = \left( \frac{h}{4} - \frac{y}{2} + y \right) \left( \frac{h}{2} - y \right) b =$$

$$= \left( \frac{h}{4} + \frac{y}{2} \right) \left( \frac{h}{2} - y \right) b = \left( \frac{h^2}{8} - \frac{hy}{4} + \frac{yh}{4} - \frac{y^2}{2} \right) b = \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) \frac{b}{2}$$

Осейвой момент инерции для прямоугольного сечения равен

$$I_X = \frac{bh^3}{12}$$

$$\tau_Y = \frac{Q \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) \frac{b}{2}}{b \frac{bh^3}{12}} = \frac{6Q}{bh^3} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

$$\tau_Y = \frac{6Q}{bh^3} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

Из формулы Журавского легко понять, что максимальное касательное напряжение  $\tau_{\max}$  будет возникать на горизонтальной оси сечения (при максимальном статическом моменте «отсеченной» части сечения). Чтобы его определить, необходимо подставить в полученную формулу  $y = 0$ .

$$\tau_{\max} = \frac{6Q}{bh^3} \left( \frac{h^2}{4} - 0 \right) = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh}.$$

## 2. Круглое сечение (рис. 6.13)

Вычислим величину касательных напряжений по линии  $pp$ , отстоящей на расстоянии  $y$  от горизонтальной оси, для чего необходимо определить статический момент площади круглого сегмента, ограниченного линией  $pp$ , относительно горизонтальной оси.

Выделим на расстоянии  $y_1$  элементарную площадку  $dA$ , равную

$$dA = 2\sqrt{R^2 - y_1^2} dy_1,$$

где  $2\sqrt{R^2 - y_1^2}$  — длина площадки.

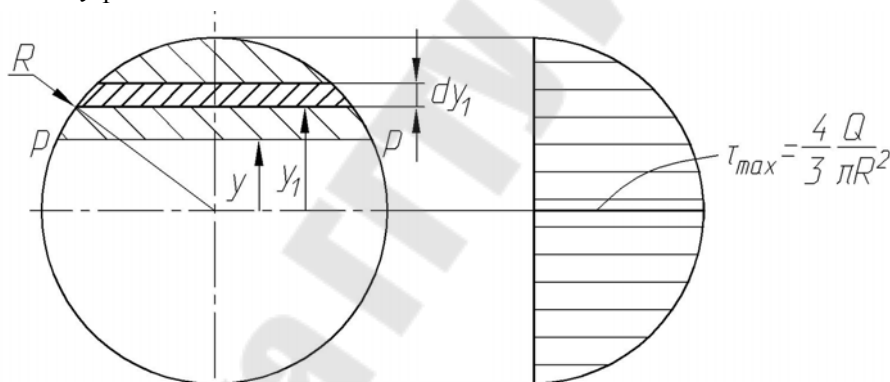


Рис. 6.13. Эпюра касательных напряжений

Статический момент круглого сегмента будет

$$S^* = \int_y^R 2\sqrt{R^2 - y_1^2} \cdot y_1^2 dy_1 = \frac{2}{3} (R^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Подставляя значение  $S^*$ , длину хорды  $pp$  и осевой момент инерции

$$I_X = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi R^4}{4}$$

в формулу Журавского (6.13), получим

$$\tau = \frac{4Q}{3\pi R^4} (R^2 - y^2).$$

Максимальное касательное напряжение тогда

$$\tau = \frac{4}{3} \frac{Q}{\pi R^2}.$$

===== 5 =====

### Проверка прочности по касательным напряжениям

Расчет на прочность по касательным напряжениям является дополнительным к основной оценке по нормальным напряжениям.

Условие прочности по касательным напряжениям при изгибе будет

$$\tau = \frac{Q \cdot S_X^*}{b \cdot I_X} \leq [\tau].$$

===== 6 =====

### Дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня и его интегрирование, изгибная жесткость

Угол изгиба  $\varphi$  связан с радиусом кривизны нейтрального слоя  $\rho$  (рис. 6.14).

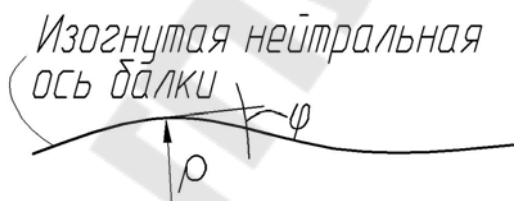


Рис. 6.14. Нейтральная линия при изгибе

Из курса математики известно

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}},$$

где  $\rho$  – радиус кривизны для кривой, заданной уравнением  $y(z)$ .

Принимая во внимание малость деформации (прогибы в реальных задачах изгиба весьма малы) приведенное соотношение упрощается до

$$\frac{1}{\rho} = y''. \quad (6.14)$$

Выражение (6.14) позволяет связать внутреннее усилие  $M_X$  и перемещение  $y$ , вызванное этим усилием, следующим образом: выражение (6.3) с учетом (6.14) будет

$$M_X = EI_X \cdot y'' \quad (6.15)$$

(6.15) это дифференциальное уравнение деформации балки.

Если учесть, что угол изгиба связан с прогибом, то (6.15) примет вид

$$M_X = EI_X \cdot \varphi'. \quad (6.16)$$

Замечательно то, что все известные нам типы деформирования подчиняются одним и тем же законам.

Перемещение при растяжении

$$N = EA \cdot w',$$

где  $w$  – перемещение сечения относительно первоначального положения.

$$\frac{dw}{dz} = \frac{N}{EA}, \quad w = \int_0^l \frac{N dz}{EA}.$$

Аналогично для чистого изгиба получим

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dz} &= \frac{M_X}{EI_X}, \\ d\varphi &= \frac{M_X dz}{EI_X}, \\ \varphi &= \int_0^l \frac{M_X dz}{EI_X}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

где  $EI_X$  – жесткость балки при изгибе.

Выражение (6.17) позволяет определять угол изгиба.

Уравнение (6.15) можно представить и в других формах

$$\begin{aligned} q &= \frac{dQ}{dz} = \frac{d^2 M}{dz^2} \\ Q &= [EI_X \cdot y'''] \\ q &= [EI_X \cdot y'''']. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Если жесткость на изгиб величина постоянная, то (6.18) получаем в виде:

$$EI_X = Const$$

$$\begin{aligned}
 EI_X \cdot y'' &= M_X \\
 EI_X \cdot y''' &= Q \\
 EI_X \cdot y^{IV} &= q
 \end{aligned}
 \tag{6.19}$$

Применяя любое из уравнений (6.19) совместно с граничными условиями задачи для перемещений, а также граничными условиями для нагрузок, возможно, рассчитать прогиб любой точки балки.

## **Тема 7. ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ МАТЕРИАЛА В ТОЧКЕ ТЕЛА**

1. Основная идея теории напряженного состояния – общий случай нагружения элементарного объема.
2. Понятие о тензоре напряжений.
3. Равновесие элементарного параллелепипеда, закон парности касательных напряжений.
4. Напряжения на площадках общего положения.
5. Главные площадки и главные напряжения.
6. Кубическое уравнение для определения главных напряжений.
7. Инварианты тензора напряжений.
8. Типы напряженных состояний: линейное, плоское, объемное.
9. Исследование плоского напряженного состояния.
10. Диаграмма напряженного состояния
11. Графический анализ плоского напряженного состояния

===== 1 =====

### **Основная идея теории напряженного состояния – общий случай нагружения элементарного объема**

Под действием внешних силовых факторов (сил и моментов) материал находится в напряженном состоянии. Два французских ученых Огюст Коши (1789 – 1857) и Луи Мари Анри Навье (1785 – 1836) предложили универсальный способ исследования этого состояния, несвязанный с привычными типами деформирования: растяжение, кручение, изгиб.

Основная идея их подхода состоит в том, чтобы из нагруженного внешними факторами тела, заключенного в пространстве мысленно вырезать точку. Однако для математического описания точку до-

говорились представить параллелепипедом элементарных (бесконечно малых) размеров.

Отвлекаясь от конкретных инженерных задач, в этом случае удастся построить общую теорию напряженного состояния (рис. 7.1).

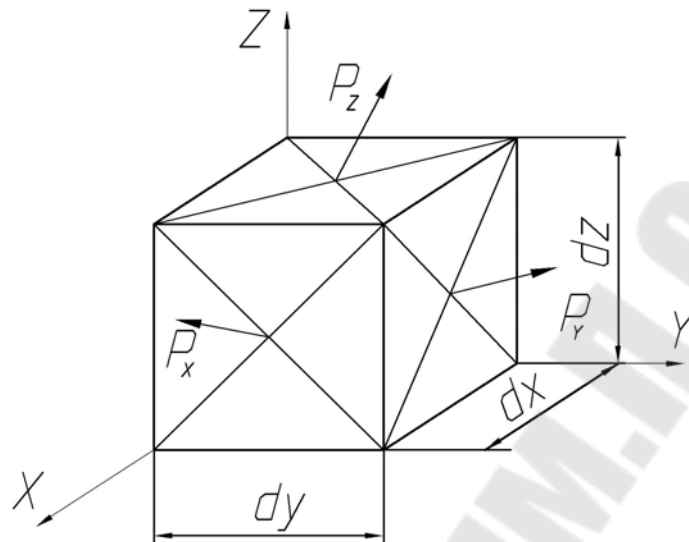


Рис. 7.1. Элементарный параллелепипед

$P_x, P_y, P_z$  – полные напряжения, действующие на площадки.

2

### Понятие о тензоре напряжений

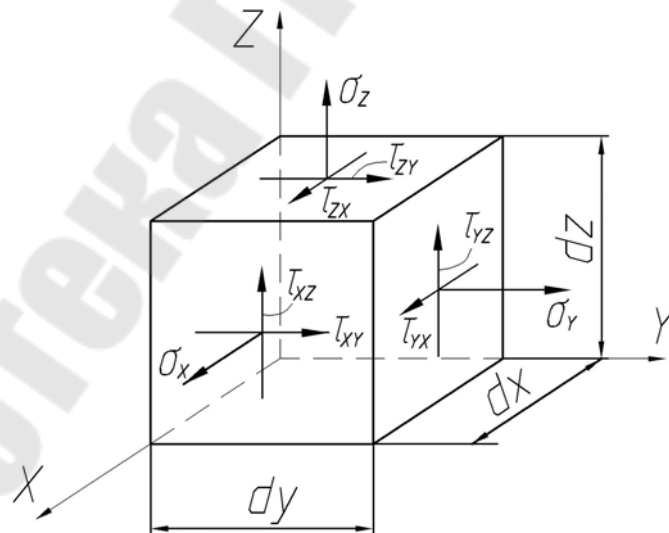


Рис. 7.2. Тензор напряжений

Полное напряжение  $P$ , возникающее на площадке, может быть разложено на три составляющие: на одно нормальное напряжение  $\sigma$  и два касательных напряжения  $\tau$ . Нормальное напряжение обозначает-

ся с индексом, соответствующим осям  $X, Y, Z$  ( $\sigma_X, \sigma_Y, \sigma_Z$ ). Касательное напряжение обозначается с двумя индексами: первый соответствует оси перпендикулярной к площадке, а второй – оси, вдоль которой направлен вектор  $\tau$  ( $\tau_{XY}, \tau_{XZ}, \tau_{YX}, \tau_{YZ}, \tau_{ZX}, \tau_{ZY}$ ) (рис. 7.2).

Напряженное состояние в точке полностью определяется девятью компонентами напряжений, совокупность которых носит название **тензор напряжений**:

$$T_{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_X & \tau_{YX} & \tau_{ZX} \\ \tau_{XY} & \sigma_Y & \tau_{ZY} \\ \tau_{XZ} & \tau_{YZ} & \sigma_Z \end{vmatrix}$$

Есть одна важная особенность, заключающаяся в том, что объект  $T_{\sigma}$  – не матрица. Дело в том, что физические величины  $\sigma_X, \tau_{XY}, \tau_{XZ}$  и т.д. – не просто абстрактные числа как в матрице, а компоненты (проекции) векторов полных напряжений, действующих на трех гранях элементарного объема.

### ===== 3 =====

#### **Равновесие элементарного параллелепипеда, закон парности касательных напряжений**

**Правило знаков:** нормальное напряжение считается положительным, если оно направлено от площадки, т.е. растягивает; касательное напряжение считается положительным, если оно вращает свою площадку по часовой стрелке.

Т.к. тело, из которого выделен элементарный объем, находится в равновесии, то законы равновесия требуют, чтобы на трех оставшихся невидимых гранях малого объема действовали такие же напряжения, но противоположного направления. Здесь речь идет об уравнениях типа

$$\sum F_{Xi} = 0; \quad \sum F_{Yi} = 0; \quad \sum F_{Zi} = 0.$$

Уравнения равновесия моментов позволяют установить общее положение, известное как **закон парности касательных напряжений**.

$$\sum M_{Xi} = 0; \quad -\tau_{ZY} dx dy \cdot dz + \tau_{YZ} dy dz \cdot dx = 0; \quad \tau_{ZY} = \tau_{YZ}.$$

Аналогично дадут другие уравнения равновесия.

$$\begin{aligned} \tau_{ZY} &= \tau_{YZ} \\ \tau_{XY} &= \tau_{YX} \end{aligned} \tag{7.1}$$



$$\tau_{ZX} = \tau_{XZ}$$

Выражения (7.1) является **законом парности касательных напряжений**: Касательные напряжения на двух взаимно перпендикулярных площадках равны между собой и направлены навстречу друг другу.

===== 4 =====

### Напряжения на площадках общего положения

Абстрагируясь от инженерных проблем можно выделить следующее важное положение:

Напряженное состояние в теле известно тогда, когда известны все напряжения во всех точках и по всем возможным направлениям.

Оказывается, что при известных значениях напряжений в данном малом объеме со случайно выбранной ориентацией осей, можно установить все напряжения в этом же объеме, но для площадки наклоненной под произвольными углами (площадки общего положения).

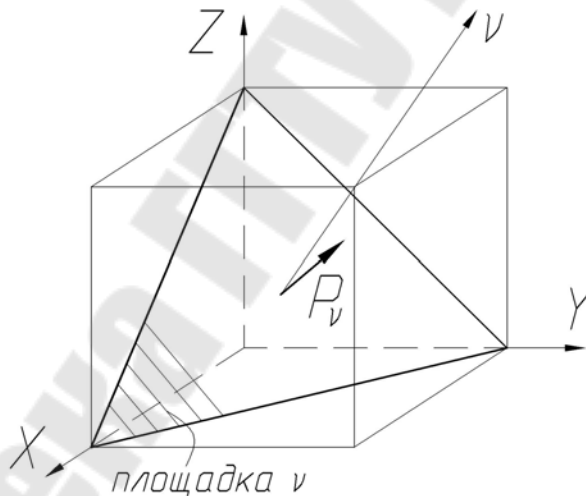


Рис. 7.3. Площадка общего положения

Пусть элементарный объем будет ограничен площадкой  $v$ . Такая фигура называется *тетраэдр*.

К этой площадке проведена нормаль  $v$ .

$P_v$  – полное напряжение, действующее на площадке  $v$ .

Пусть направляющие косинусы между нормальными  $X, Y, Z$  и  $v$  имеют значения  $l, m, n$  (рис. 7.4).

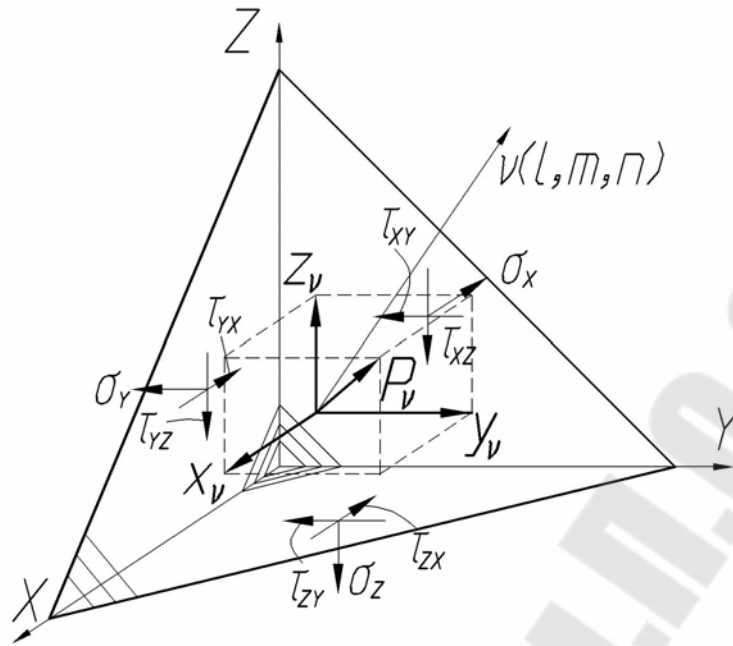


Рис. 7.4. Тетраэдр

$$\begin{aligned}
 \cos(\mathbf{v}\vec{X}) &= l \\
 \cos(\mathbf{v}\vec{Y}) &= m \\
 \cos(\mathbf{v}\vec{Z}) &= n
 \end{aligned}
 \tag{7.2}$$

(7.2) это направляющие косинусы площадки  $v$ .

Определим площади площадок  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  через площадь площадки  $v$ .

$$A_X = A_v l, \quad A_Y = A_v m, \quad A_Z = A_v n.$$

Полное напряжение  $P_v$  раскладывается на проекции

$$\begin{aligned}
 P_v &= \sqrt{x_v^2 + y_v^2 + z_v^2} \\
 x_v &= P_v l, \quad y_v = P_v m, \quad z_v = P_v n.
 \end{aligned}$$

Составляющие полного напряжения находятся из условия равновесия тетраэдра

$$\begin{aligned}
 \sum F_{Xi} &= 0; & x_v A_v - \sigma_X A_v l - \tau_{YX} A_v m - \tau_{ZX} A_v n &= 0 \\
 \sum F_{Yi} &= 0; & y_v A_v - \sigma_Y A_v m - \tau_{XY} A_v l - \tau_{ZY} A_v n &= 0 \\
 \sum F_{Zi} &= 0; & z_v A_v - \sigma_Z A_v n - \tau_{XZ} A_v l - \tau_{YZ} A_v m &= 0 \\
 x_v &= \sigma_X l + \tau_{YX} m + \tau_{ZX} n \\
 y_v &= \tau_{XY} l + \sigma_Y m + \tau_{ZY} n \\
 z_v &= \tau_{XZ} l + \tau_{YZ} m + \sigma_Z n
 \end{aligned}
 \tag{7.3}$$

Важность выражений (7.3) заключается в том, что можно найти напряжения, действующие на любой наклонной площадке, зная лишь ее ориентацию.

===== 5 =====

### Главные площадки и главные напряжения

В одной и том же точке нагруженного тела существует ориентация (положение) элементарного объема при которой касательные напряжения обнуляются.

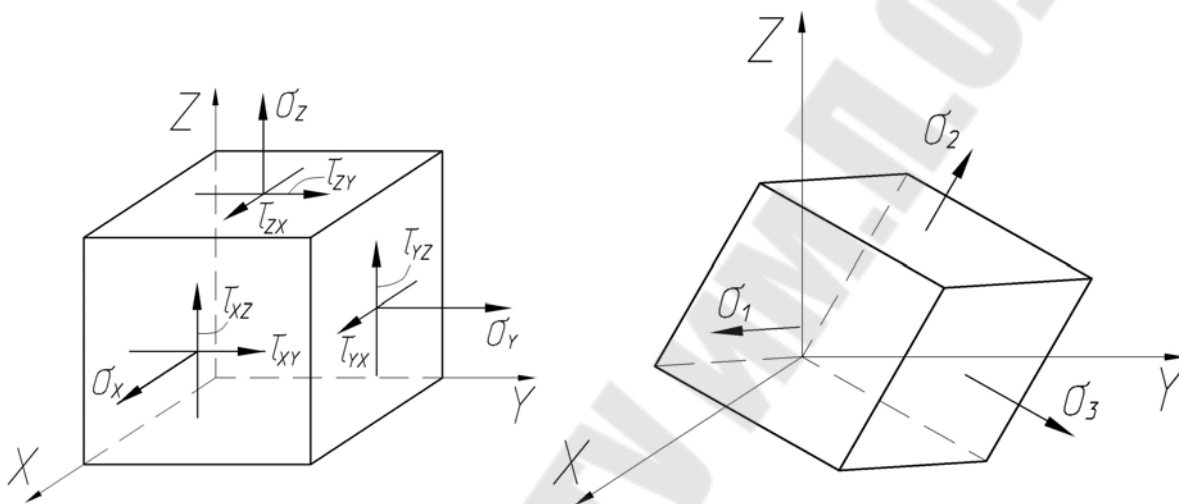


Рис. 7.5. Главные площадки и главные напряжения

Иными словами, поворачивая малый объем можно найти такое его положение, при котором все касательные напряжения равны нулю (рис. 7.5).

Площадки, на которых касательные напряжения равны нулю называются **главными площадками**

Нормальные напряжения, действующие на главных площадках принято называть **главными напряжениями**.

===== 6 =====

### Кубическое уравнение для определения главных напряжений

Рассмотрим тетраэдр, на площадку которого действует напряжение  $\sigma_{\text{гл}}$  (рис. 7.6).

Направляющие косинусы будут  $l_0, m_0, n_0$ .

Проекции напряжения  $\sigma_{\text{гл}}$  запишутся в виде

$$x_0 = \sigma_{\text{гл}} l_0, \quad y_0 = \sigma_{\text{гл}} m_0, \quad z_0 = \sigma_{\text{гл}} n_0.$$

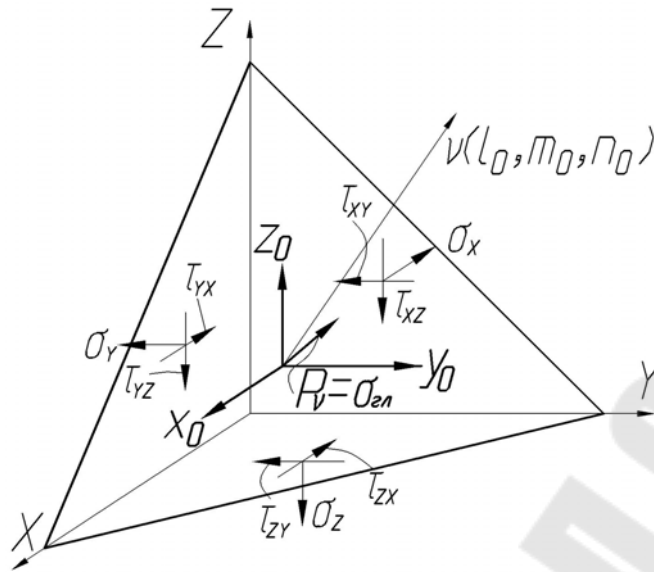


Рис. 7.6. Площадка общего положения

Из выражений (7.3) получим запись этих проекций

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{гл}} l_0 &= \sigma_X l_0 + \tau_{YX} m_0 + \tau_{ZX} n_0 \\ \sigma_{\text{гл}} m_0 &= \tau_{XY} l_0 + \sigma_Y m_0 + \tau_{ZY} n_0 \\ \sigma_{\text{гл}} n_0 &= \tau_{XZ} l_0 + \tau_{YZ} m_0 + \sigma_Z n_0\end{aligned}$$

Из полученных выражений составим систему однородных уравнений

$$\left. \begin{aligned}(\sigma_X - \sigma_{\text{гл}}) l_0 + \tau_{YX} m_0 + \tau_{ZX} n_0 &= 0 \\ (\sigma_Y - \sigma_{\text{гл}}) m_0 + \tau_{XY} l_0 + \tau_{ZY} n_0 &= 0 \\ (\sigma_Z - \sigma_{\text{гл}}) n_0 + \tau_{XZ} l_0 + \tau_{YZ} m_0 &= 0\end{aligned}\right\} \quad (7.4)$$

(7.4) это система однородных уравнений направляющих косинусов. Направляющие косинусы взаимосвязаны. Так как они ортогональны, то сумма их квадратов равна единице

$$l_0^2 + m_0^2 + n_0^2 = 1.$$

Направляющие косинусы также не равны нулю. Поэтому должен равняться нулю определитель, полученный из уравнений 7.4

$$\begin{vmatrix} \sigma_X - \sigma_{\text{гл}} & \tau_{YX} & \tau_{ZX} \\ \tau_{XY} & \sigma_Y - \sigma_{\text{гл}} & \tau_{ZY} \\ \tau_{XZ} & \tau_{YZ} & \sigma_Z - \sigma_{\text{гл}} \end{vmatrix} = 0$$

Определитель раскрывается методом Крамера, в результате чего получается кубическое уравнение

$$\sigma_{\text{гл}}^3 - I_1 \sigma_{\text{гл}}^2 + I_2 \sigma_{\text{гл}} - I_3 = 0, \quad (7.5)$$

где  $I_1, I_2, I_3$  – коэффициенты кубического уравнения.

Каждому нагруженному малому объему соответствует реальная физическая задача, поэтому, даже без строгого математического доказательства, можно указать на тот факт, что это уравнение имеет три корня ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ), которые являются действительными числами. Это главные напряжения и они подчиняются правилу  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ .

Главные напряжения важны в общей оценке прочности, как отдельного стержня, так и трехмерно нагруженного тела.

===== 7 =====

### Инварианты тензора напряжений

Коэффициенты из кубического уравнения (7.5) определяются по следующим выражениям:

$$I_1 = \sigma_X + \sigma_Y + \sigma_Z,$$

$$I_2 = \sigma_X \sigma_Y + \sigma_Y \sigma_Z + \sigma_X \sigma_Z - \tau_{XY}^2 - \tau_{YZ}^2 - \tau_{XZ}^2,$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_X & \tau_{YX} & \tau_{ZX} \\ \tau_{XY} & \sigma_Y & \tau_{ZY} \\ \tau_{XZ} & \tau_{YZ} & \sigma_Z \end{vmatrix},$$

$$I_3 = \sigma_X \sigma_Y \sigma_Z + 2\tau_{XY} \tau_{YZ} \tau_{ZX} - \sigma_X \tau_{YZ}^2 - \sigma_Y \tau_{ZX}^2 - \sigma_Z \tau_{XY}^2.$$

Эти коэффициенты называются инвариантами преобразования системы координат, т.е. это величины, которые не изменяются при преобразовании системы координат. Например, длина любого отрезка в любой системе координат величина постоянная, в то время, как точки начала и конца его зависят от выбранной системы координат.

===== 8 =====

### Типы напряженных состояний

Если все три главных напряжения отличаются от нуля, то такое напряженное состояние называется **объемным** или **трехосным**.

Если одно из главных напряжений равно нулю, то напряженное состояние называется **плоским** или **двухосным**.

Если два главных напряжения равны нулю, то напряженное состояние называется **линейным** или **одноосным**.

===== 9 =====

### Исследование плоского напряженного состояния

Плоское напряженное состояние возникает в точке, если все напряжения на одной из координатных осей равны нулю (рис. 7.7).

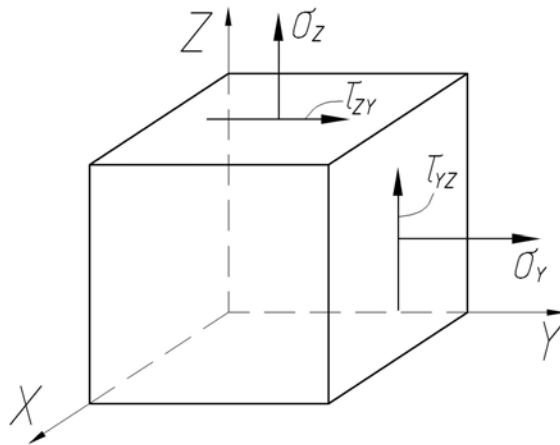


Рис. 7.7. Плоское напряженное состояние

$$\sigma_x = \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0.$$

В этом случае схему нагружения малого объема можно представить плоской (рис. 7.8).

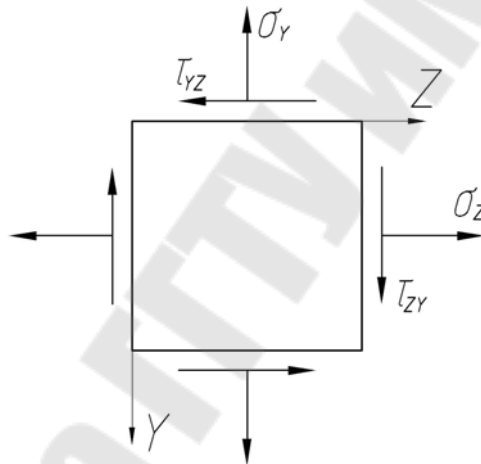


Рис. 7.8. Плоское напряженное состояние

Эта плоская область по-прежнему является точкой.

Кубическое уравнение (7.5) принимает вид квадратного

$$\sigma_{\text{гл}}^2 - I_1 \sigma_{\text{гл}} + I_2 = 0 \quad (7.6)$$

Инварианты для уравнения (7.6) принимают вид

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_y + \sigma_z, \\ I_2 &= \sigma_y \sigma_z - \tau_{yz}^2, \\ I_3 &= 0. \end{aligned}$$

Решая квадратное уравнение (7.6), получим два действительных корня, которые будут главными напряжениями. Но так как главных напряжений три, то для плоского состояния одно из них всегда будет равно нулю.

$$\sigma_{\text{гл}} = \frac{I_1 \pm \sqrt{I_1^2 - 4I_2}}{2} = \frac{\sigma_Y + \sigma_Z}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_Y^2 + 2\sigma_Y\sigma_Z + \sigma_Z^2 - 4\sigma_Y\sigma_Z + 4\tau_{YZ}^2}$$

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{\sigma_Y + \sigma_Z}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_Y - \sigma_Z)^2 + 4\tau_{YZ}^2}$$

$$\sigma_{\text{min}} = \frac{\sigma_Y + \sigma_Z}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_Y - \sigma_Z)^2 + 4\tau_{YZ}^2}$$
(7.7)

Индексы выбираются по правилу  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ . Например, получены корни  $\sigma_{\text{max}} = 30$ ,  $\sigma_{\text{min}} = -10$ , тогда  $\sigma_1 = 30$ ,  $\sigma_2 = 0$ ,  $\sigma_3 = -10$ .

Однако, зная значения главных напряжений, мы не можем установить ориентацию главной площадки по отношению к тем, которые заданы.

Эту задачу можно решить, если исследовать напряжения на площадке общего положения (.

Составим уравнения равновесия сил в проекциях на ось  $v$ .

$$\sum F_{v_i} = 0$$

$$\sigma_{\alpha} A - \sigma_Z A_Z \cos \alpha - \tau_{ZY} A_Z \sin \alpha - \sigma_Y A_Y \sin \alpha - \tau_{YZ} A_Y \cos \alpha = 0$$

$$A_Z = A \cos \alpha; \quad A_Y = A \sin \alpha.$$

$$\sigma_{\alpha} A = \sigma_Z A \cos^2 \alpha + \tau_{ZY} A \cos \alpha \sin \alpha + \sigma_Y A \sin^2 \alpha + \tau_{YZ} A \sin \alpha \cos \alpha$$

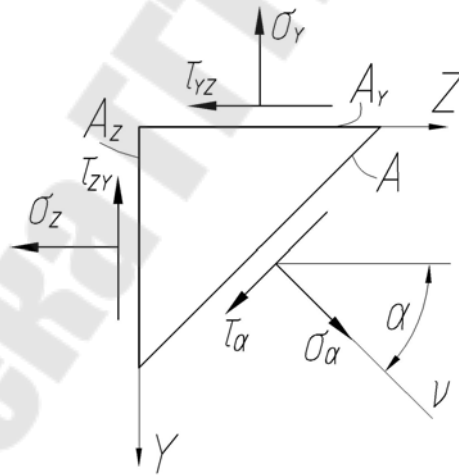


Рис. 7.9. Напряжения на площадке  $\alpha$

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_Z \cos^2 \alpha + \sigma_Y \sin^2 \alpha + \tau_{YZ} \sin 2\alpha$$
(7.8)

Аналогично, составив уравнение равновесия, получим  $\tau_{\alpha}$ .

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_Z - \sigma_Y}{2} \sin 2\alpha - \tau_{ZY} \cos 2\alpha$$
(7.9)

Вычисляя значения  $\sigma_{\alpha}$  и  $\tau_{\alpha}$  необходимо использовать следующее правило знаков: нормальные напряжения считаются положитель-

ными, если они действуют от площадки, касательные напряжения считаются положительными, если они стремятся повернуть свою площадку по часовой стрелке.

Так как на главной площадке касательное напряжение равно нулю  $\tau_\alpha = 0$ , то из формулы 7.9 можно определить ее ориентацию

$$\frac{\sigma_Z - \sigma_Y}{2} \sin 2\alpha - \tau_{ZY} \cos 2\alpha = 0; \quad \frac{\sigma_Z - \sigma_Y}{2} \sin 2\alpha = \tau_{ZY} \cos 2\alpha;$$

$$\frac{\sigma_Z - \sigma_Y}{2} \operatorname{tg} 2\alpha = \tau_{ZY};$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_{ZY}}{\sigma_Z - \sigma_Y}.$$

Угол  $\alpha_0$  – то угол, на который отклоняется главная площадка от заданной.

===== 10 =====

### Диаграмма напряженного состояния

Рассмотрим объемное напряженное состояние, представленное главными напряжениями  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  (рис. 7.10).

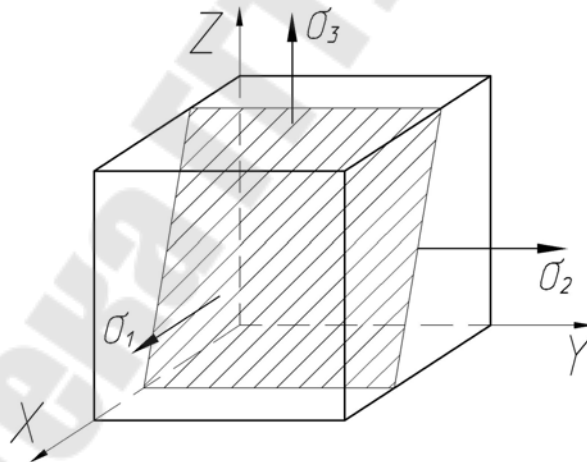


Рис. 7.10. Объемное напряженное состояние

Возвращаясь к формулам (7.8), (7.9) для определения напряжений на площадке общего положения, взятой из семейства площадок параллельной одной из главных осей имеем

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_3 \sin^2 \alpha; \quad \tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\alpha.$$

Принимая во внимания тригонометрические соотношения



$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha); \quad \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha),$$

получим

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\alpha \quad (7.10)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\alpha. \quad (7.11)$$

Уравнение (7.10) перегруппируем и обе части уравнений (7.10) и (7.11) возведем в квадрат

$$\left[ \sigma_\alpha - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right]^2 = \left[ \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right]^2 \cos^2 4\alpha$$

$$\tau_\alpha^2 = \left[ \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right]^2 \sin^2 4\alpha.$$

Сложив левые и правые части, получим

$$\left[ \sigma_\alpha - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right]^2 + \tau_\alpha^2 = \left[ \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right]^2 \quad (7.12)$$

Уравнение (7.12) является уравнением окружности в системе координат  $\sigma$ ,  $\tau$ , заданное в параметрическом виде. Роль параметра играет угол  $\alpha$ . Центр этой окружности находится на оси  $\sigma$  на расстоянии  $\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$ . Радиус равен полуразности главных напряжений.

Полученный круг называется **кругом Мора** или **круговой диаграммой напряженного состояния** (рис. 7.11).

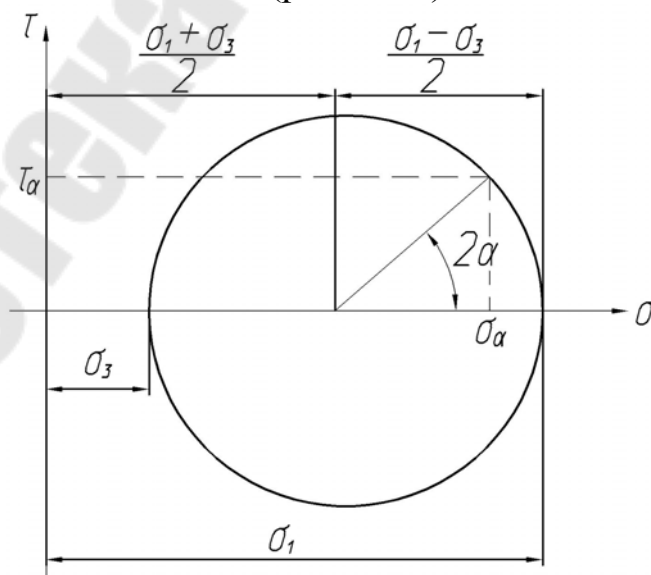


Рис. 7.11. Круг Мора

Полученный круг построен для семейства площадок, параллельных вектору  $\sigma_2$ . Аналогично можно построить круги Мора для семейств площадок, параллельных векторам  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ . Таким образом может быть построено три круга Мора (рис. 7.12). Поскольку знак  $\tau$  не оговаривается, ограничиваются построением только верхней половины круга.

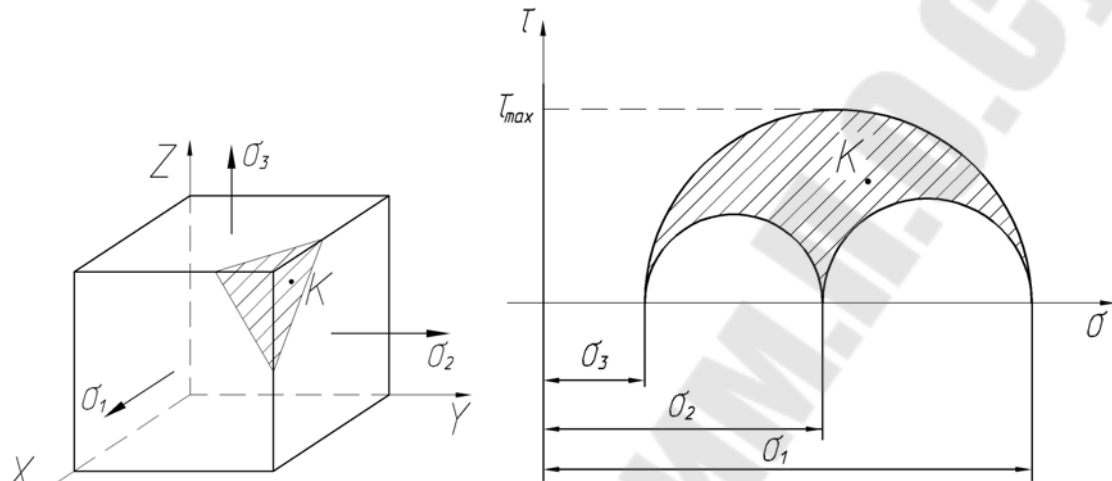


Рис. 7.12. Круги Мора для объемного напряженного состояния

Каждой точке любой окружности соответствует определенная секущая площадка в соответствующем семействе. Но для площадки общего положения соответствует точка  $K$  на плоскости  $(\sigma, \tau)$ , лежащая внутри заштрихованной области, образованной тремя совмещенными кругами Мора, построенными для площадок, параллельных главным осям и проходящих через данную точку  $K$ .

Поскольку ни одна из точек не выходит за пределы заштрихованной области, то наибольшее касательное напряжение равно радиусу наибольшего круга

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

===== 11 =====

### Графический анализ плоского напряженного состояния

Круговая диаграмма может быть построена и для плоского напряженного состояния, заданного исходными напряжениями  $\sigma_Z, \sigma_Y, \tau_{ZY}$  (рис. 7.13).

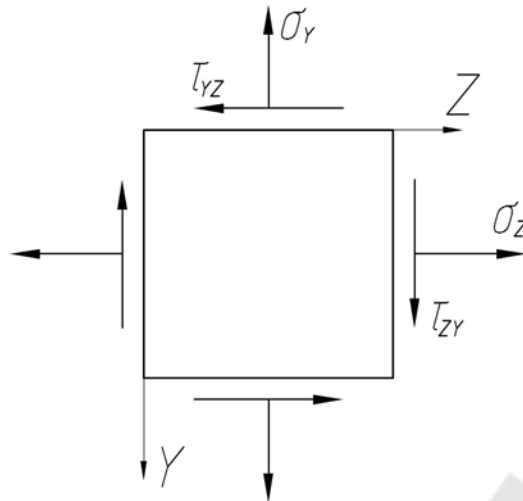


Рис. 7.13. Расчетная схема

Порядок геометрического анализа следующий.

1. Вычерчивается прямоугольная система координат  $\sigma$  и  $\tau$ .
2. Наносится точки с координатами  $(\sigma_Z, \tau_{ZY})$  и  $(\sigma_Y, \tau_{YZ})$ . Эти точки соответствуют своим площадкам.
3. Полученные точки соединяются прямой линией и отмечается пересечение этой линии с осью  $\sigma$  – центр круга Мора.
4. Пересечение круга Мора с осью  $\sigma$  дает значения главных напряжений.
5. Пересечение исходных площадок с кругом Мора дает полюс, из которого можно определить положение любой неизвестной площадки.

На круге Мора можно также определить значения напряжений на площадках под заданным углом  $\alpha$   $\sigma_\alpha$  и  $\tau_\alpha$ .

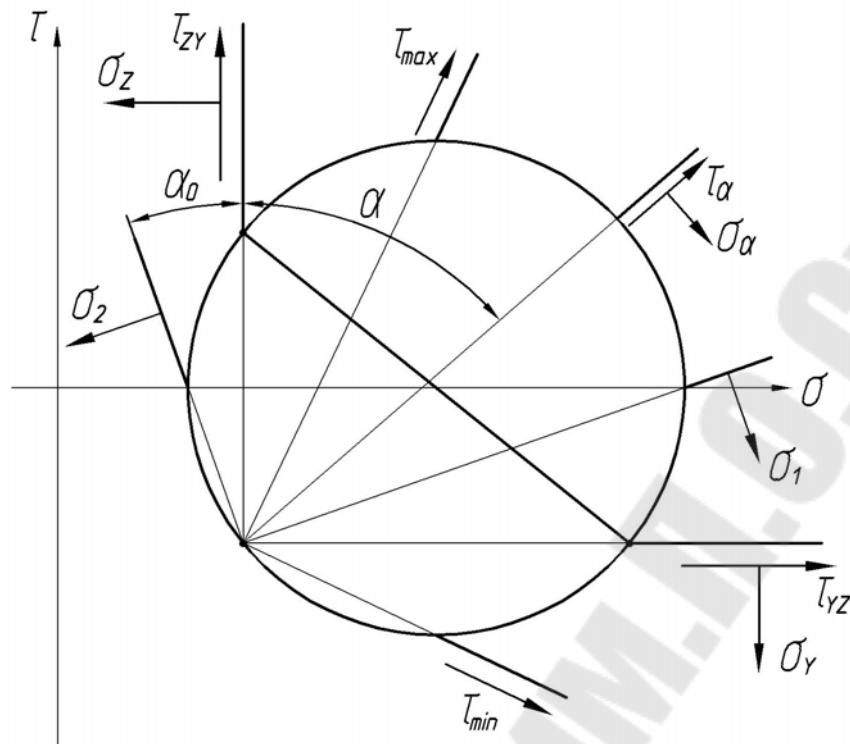


Рис. 7.14. Круг Мора

Из круга Мора можно определить экстремальные значения касательных напряжений

$$\tau_{\max/\min} = \pm \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}.$$

Следует заметить, что площадки, по которым действуют экстремальные касательные напряжения, повернуты относительно главных площадок на  $45^\circ$ .

## Тема 8. ТЕОРИЯ ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ В ТОЧКЕ

1. Деформация как изменение длин и углов в упрощенной теории малых деформаций. Тензор деформаций.
2. Аналогия между основными зависимостями напряженного и деформированного состояний.
3. Уравнение обобщенного закона Гука для изотропного тела.
4. Объемная деформация, закон Гука для объемного деформирования.

5. Удельная потенциальная энергия деформации, ее составляющие: энергия изменения объема и формы.

===== 1 =====

### Деформация как изменение длин и углов в упрощенной теории малых деформаций. Тензор деформаций

Известно, что под действием внешних сил тело изменяет свои первоначальные размеры и форму. Эти изменения характеризуются деформациями, т.е. перемещением отдельных точек тела. Для исследования деформированного состояния исследуем элемент  $ABCD$ , который после деформирования тела перешел в состояние  $A'B'C'D'$  (рис. 8.1).

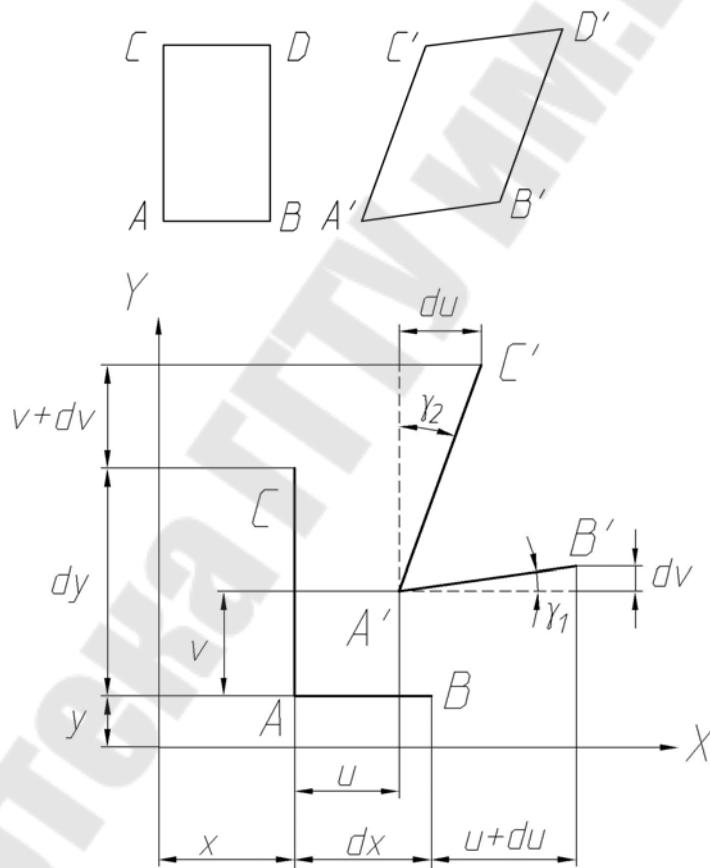


Рис. 8.1. Деформация элемента  $ABCD$

Пусть до деформации длина элемента  $AB$  была равна  $dx$ , а  $AC$  –  $dy$ , угол между ними равен  $90^\circ$  и ориентированы они в направлении осей  $OX$  и  $OY$ . Пусть после деформации точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  заняли положения  $A'$ ,  $B'$  и  $C'$ . Перемещение точки  $A$  в направлении оси  $X$  равно  $u$ , оси  $Y$  –  $v$ , а перемещения точек  $B$  и  $C$  соответственно:

$$B: \quad u' = u + du, \quad v' = v + dv,$$

$$C: \quad u'' = u + du, \quad v'' = v + dv.$$

Тогда линейные деформации элементов  $AB$  и  $BC$  определяются в виде:

$$\varepsilon_X = \frac{u' - u}{dx} = \frac{du}{dx}, \quad \varepsilon_Y = \frac{v' - v}{dy} = \frac{dv}{dy}.$$

Так как  $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx$ ,  $dv = \frac{\partial v}{\partial y} dy$ , то

$$\varepsilon_X = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_Y = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Здесь используется допущение о том, что линейные деформации по различным направлениям и угловые деформации по различным плоскостям не влияют друг на друга.

Рассматривая аналогично объем, получим

$$\varepsilon_X = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_Y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_Z = \frac{\partial w}{\partial z}.$$

$w$  – перемещение точки  $A$  вдоль оси  $Z$ .

Угловые деформации, т.е. изменение углов  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  равны

$$\operatorname{tg}\gamma_1 = \frac{dv}{dx}, \quad \operatorname{tg}\gamma_2 = \frac{du}{dy}.$$

Так как углы очень малы, то

$$\gamma_1 = \frac{dv}{dx} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_2 = \frac{du}{dy} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy}{dy} = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Угол сдвига между элементами  $AB$  и  $AC$  будет

$$\gamma_{XY} = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Таким образом, для трехмерного объема получаем

$$\gamma_{XY} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \gamma_{YZ} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{ZX} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Совокупность деформаций, возникающих по различным осям и в различных плоскостях, проходящих через данную точку, носит название **деформированного состояния**.

Деформированное состояние определяется шестью компонентами тензора деформации.

$$T_{\partial} = \begin{vmatrix} \varepsilon_X & \varepsilon_{XY} & \varepsilon_{XZ} \\ \varepsilon_{YX} & \varepsilon_Y & \varepsilon_{YZ} \\ \varepsilon_{ZX} & \varepsilon_{ZY} & \varepsilon_Z \end{vmatrix},$$

$$\varepsilon_{XY} = \frac{1}{2} \gamma_{XY} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

$$\varepsilon_{YZ} = \frac{1}{2} \gamma_{YZ} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right),$$

$$\varepsilon_{ZX} = \frac{1}{2} \gamma_{ZX} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

===== 2 =====

### Аналогия между основными зависимостями напряженного и деформированного состояний

Оказывается, что тензор деформации обладает аналогичными свойствами для тензора напряжений. Здесь также вводятся понятия **главные оси** и **главные деформации**. Главные оси напряжений и деформаций совпадают.

Главные деформации определяются из кубического уравнения

$$\varepsilon^3 - I_1 \varepsilon^2 + I_2 \varepsilon - I_3 = 0,$$

где  $I_i$  – инварианты деформированного состояния, являются постоянными величинами.

$$I_1 = \varepsilon_X + \varepsilon_Y + \varepsilon_Z;$$

$$I_2 = \varepsilon_X \varepsilon_Y + \varepsilon_Y \varepsilon_Z + \varepsilon_X \varepsilon_Z - \varepsilon_{XY}^2 - \varepsilon_{YZ}^2 - \varepsilon_{XZ}^2;$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \varepsilon_X & \varepsilon_{XY} & \varepsilon_{XZ} \\ \varepsilon_{YX} & \varepsilon_Y & \varepsilon_{YZ} \\ \varepsilon_{ZX} & \varepsilon_{ZY} & \varepsilon_Z \end{vmatrix}.$$

Как видно,  $I_3$  является тензором деформации.

===== 3 =====

### Уравнение обобщенного закона Гука для изотропного тела

Закон Гука при растяжении имеет вид

$$\sigma = E\varepsilon$$

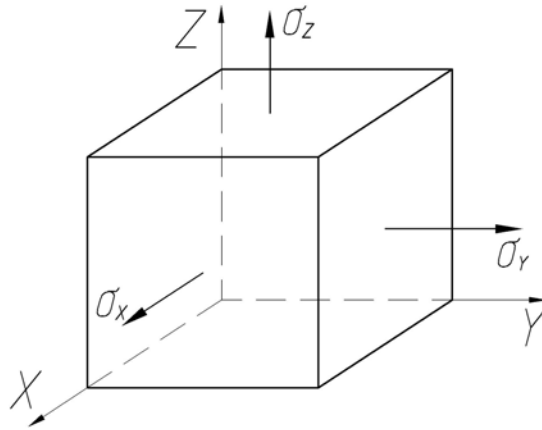


Рис. 8.2. Напряженное состояние

Однако в случае трех ненулевых напряжений следует учитывать и поперечные напряжения вдоль каждой оси (рис. 8.2)

$$\varepsilon_X^{\sigma_X} = \frac{\sigma_X}{E}, \quad \varepsilon_X^{\sigma_Y} = -\mu \frac{\sigma_Y}{E}, \quad \varepsilon_X^{\sigma_Z} = -\mu \frac{\sigma_Z}{E}.$$

Экспериментально установлено, что продольные и поперечные деформации, вызванные усилием в одном направлении, связаны **коэффициентом Пуассона**  $\mu$ .

$$\varepsilon_{\text{попер}} = -\mu \varepsilon_{\text{прод}}.$$

$$\varepsilon_X = \frac{1}{E} [\sigma_X - \mu(\sigma_Y + \sigma_Z)]$$

$$\varepsilon_Y = \frac{1}{E} [\sigma_Y - \mu(\sigma_X + \sigma_Z)]$$

$$\varepsilon_Z = \frac{1}{E} [\sigma_Z - \mu(\sigma_X + \sigma_Y)].$$

Полученные выражения относительных деформаций носят название **обобщенного закона Гука**.

В направлении главных осей, получим

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)]$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)].$$



## Объемная деформация, закон Гука для объемного деформирования

Наряду с линейной и угловой деформациями рассматривают также и объемную деформацию, т.е. относительное изменение объема.

До деформации параллелепипед имел объем

$$dV = dx \cdot dy \cdot dz .$$

После деформирования он изменился

$$dV' = dx(1 + \varepsilon_X) \cdot dy(1 + \varepsilon_Y) \cdot dz(1 + \varepsilon_Z) .$$

Тогда изменение объема будет

$$\Delta(dV) = dV' - dV = dx \cdot dy \cdot dz(\varepsilon_X + \varepsilon_Y + \varepsilon_Z) .$$

Перейдя к относительному изменению объема, получим

$$\theta = \frac{\Delta(dV)}{dV} = \varepsilon_X + \varepsilon_Y + \varepsilon_Z .$$

Величина  $\theta$  является одним из инвариантов деформированного состояния.

===== 5 =====

## Удельная потенциальная энергия деформации, ее составляющие: энергия изменения объема и формы

Потенциальная энергия, накопленная в элементарном объеме, определяется суммой работ сил, распределенных по поверхности этого объема:

$$U_0 = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 + \sigma_1\sigma_2)] .$$

Потенциальная энергия во всем объеме деформированного тела будет

$$U = \int_V U_0 dV .$$

Внутренняя потенциальная энергия складывается из **энергии изменения формы**

$$U_{0\phi} = \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

и **энергии изменения объема**

$$U_{0\sigma} = \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 .$$

## Тема 9. КРИТЕРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ. ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ В ТОЧКЕ

1. Постановка проблемы.
2. Базовые понятия и обобщения: коэффициент запаса, равноопасные состояния, эквивалентное напряжение.
3. Эволюция развития теорий прочности.
4. Теория максимальных касательных напряжений Треска-Сен-Венана (третья теория прочности).
5. Энергетическая теория Хубера-Мизеса (четвертая теория прочности).
6. Экспериментальные обобщения Мора.
7. Эквивалентные напряжения для изгиба с кручением. Пример расчета

===== 1 =====

### Постановка проблемы

Если прочностные оценки для простых типов деформирования (растяжение-сжатие, сдвиг, кручение, изгиб) очевидны и сводятся к проверке условий типа  $\sigma \leq [\sigma]$ ,  $\tau \leq [\tau]$ , то совершенно непонятно, как поступать в сложных случаях, когда балка, или даже трехмерное тело испытывает одновременное действие нескольких видов деформации.

Когда в сечении балки возникает более одного внутреннего фактора, то такой тип деформирования называется **сложным сопротивлением**. Исключение составляет поперечный изгиб.

В общем случае сложного сопротивления следует ожидать появление всех шести независимых компонентов тензора напряжений. Причем, если даже привести эти компоненты к главным напряжения  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ , то все равно не понятно как формировать прочностной расчет. К примеру, возникает вопрос, какие напряжения являются определяющими: нормальные или касательные.

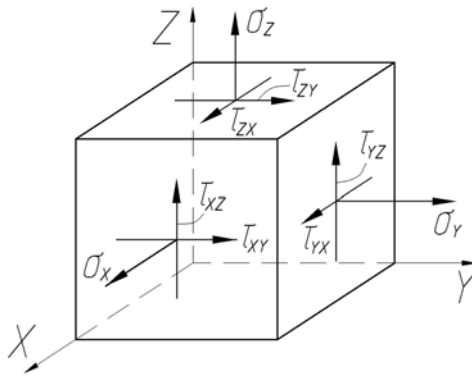


Рис. 9.1. Напряженное состояние

Идеально следовало бы провести ряд экспериментов и выяснить, какая комбинация напряжений, а, следовательно, и внешних нагрузок, является наиболее опасной для данного материала. Однако техническая возможность реализации сложных видов нагрузки и дороговизна подобных опытов практически исключает такой подход как массовый.

===== 2 =====

**Базовые понятия и обобщения: коэффициент запаса, равноопасные состояния, эквивалентное напряжение**

Введем некоторые базовые понятия, которые помогут внести ясность.

*Коэффициентом запаса* в широком смысле будем называть число, показывающее во сколько раз нужно пропорционально увеличить все компоненты тензора напряжений в точке, чтобы состояние материала изменилось: материал перешел бы из упругого состояния в пластическое.

Тогда *равноопасными состояниями* можно назвать состояния, у которых коэффициенты запаса равны.

Очень удачным решением проблемы сложного сопротивления явилась следующая концепция: поскольку простейший вид деформации – растяжение – изучен детально, то некоторому эквиваленту сложного практического случая сопоставляют соответствующий эквивалентный случай простого растяжения.

Критерием такой эквивалентности является равенство коэффициентов запаса, т.е. сравниваемые состояния равноопасны.

Иначе, **эквивалентным напряжением** называется напряжение, которое необходимо создать в растянутом образце, чтобы его состоя-

ние было равноопасным по отношению к исследуемому сложному случаю.

===== 3 =====

### Эволюция развития теорий прочности

Существует два подхода к описанию эквивалентного напряжения:

1 Принятие некоторой правдоподобной гипотезы о том, что является определяющим при смене механических состояний.

2 Феноменологический подход Мора, основанный на естественном обобщении экспериментальных данных, принципиально отличен от первого.

Концепция эквивалентности к растяжению не идеальна, т.к. материал, находящийся в состоянии  $A$  может деформироваться пластически, в то время как эквивалентный случай  $B$  соответствует уже случившемуся хрупкому разрушению. В этих случаях состояния  $A$  и  $B$  не сопоставимы.

В соответствии с этим были разработаны четыре так называемых теории прочности или гипотезы предельного состояния.

**Первая теория прочности** (теория наибольших нормальных напряжений) основана на предположении, что разрушение материала происходит в результате отрыва и поэтому опасное состояние возникает, когда наибольшее растягивающее напряжение достигает предельного значения.

$$\sigma_{\text{эКВ}} = \sigma_1 \leq [\sigma]_{\text{р}}, \quad \sigma_{\text{эКВ}} = \sigma_3 \leq [\sigma]_{\text{сж}},$$

где  $[\sigma]_{\text{р}}$  и  $[\sigma]_{\text{сж}}$  – допускаемые напряжения при простом растяжении и сжатии соответственно.

**Вторая теория прочности** (теория наибольших относительных удлинений) предполагает, что опасное состояние наступает, когда наибольшее относительное удлинение достигает предельного значения.

$$\varepsilon_{\text{эКВ}} = \varepsilon_1 \leq [\varepsilon],$$

где  $[\varepsilon]$  – допускаемое относительное удлинение, устанавливаемое при простом растяжении образцов из данного материала;

$\varepsilon$  – наибольшая главная деформация.

Наибольшее же применение получили две других теории прочности.

===== 4 =====

### **Теория максимальных касательных напряжений Треска-Сен-Венана (третья теория прочности)**

**Третья теория прочности** (теория максимальных касательных напряжений) основана на предположении, что пластические деформации возникают в материале по причине касательных напряжений сдвига. Основанием для этого предположения послужили опыты, свидетельствующие о том, что во время пластического течения образца происходят сдвиги в кристаллических решетках металла. А поэтому опасное состояние наступает, когда наибольшее касательное напряжение достигает предельного значения.

Как было получено в теории напряженного состояния

$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$  – сложное сопротивление или общий случай нагружения;

$\tau = \frac{1}{2}\sigma \sin 2\alpha$  – простое растяжение.

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma}{2}.$$

Эквивалентное напряжение растяжения определим приравняв указанные соотношения.

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{\text{ЭКВ}}}{2} &= \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3), \\ \sigma_{\text{ЭКВ}} &= \sigma_1 - \sigma_3. \end{aligned} \quad (9.1)$$

Иначе говоря, опасным состоянием по этой теории является такое состояние, при котором разность  $(\sigma_1 - \sigma_3)$  максимальна.

Результаты хорошо согласуются с опытом. Однако, есть одна практическая несостоятельность. Она связана с тем, что в процессе нагружения могут меняться внешние нагрузки и их комбинации, так что сложно определить какое напряжение является  $\sigma_1$ , а какое  $\sigma_3$ .

Эта теория наиболее применима.

===== 5 =====

## Энергетическая теория Хубера-Мизеса (четвертая теория прочности)

**Четвертая теория прочности** (энергетическая теория) основана на предположении, что опасное состояние в материале возникает тогда, когда энергия деформации малого объема достигает некоторого порогового значения, причем, в расчет берется не вся энергия деформации, а лишь та ее часть, которая отвечает за формоизменение (сдвиг). Дело в том, что опыты по равномерному всестороннему сжатию показали, что при самых огромных возможных нагрузках пластического течения материала не наступает.

$$U_{\phi} \leq [U]_{\phi},$$

где  $U_{\phi}$  – потенциальная энергия изменения формы.

$$U_{\phi} = \frac{1+\mu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3) \leq \frac{1+\mu}{3E} [\sigma]^2;$$
$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3} \leq [\sigma] \quad (9.2)$$

Достоинством энергетической теории является, то, что она учитывает все три главных напряжения. Она, как и третья теория, объясняет высокую прочность материалов при всестороннем равномерном сжатии, но не может объяснить разрушение при всестороннем растяжении.

===== 6 =====

### Экспериментальные обобщения Мора

Немецкий физик Отто Мор предложил свою концепцию перехода из упругого состояния в пластичное, которая не содержит никаких критериальных гипотез, а полностью основывается на обобщении результатов экспериментов. Его подход универсален и единственным допущением является пренебрежение промежуточным напряжением  $\sigma_2$ .

Наглядное представление его подход имеет для плоского напряженного состояния (в координатах  $\sigma$ ,  $\tau$ ).

Идея этого подхода заключается в следующем: каждый случай внешнего нагружения описывается кругом Мора, причем, совершенно ясно, что если пропорционально увеличить компоненты тензора напряжений, то исходный круг, увеличиваясь в размерах, достигнет некоторого предельного состояния, соответствующего, скажем, переходу в пластичное состояние или разрушение.

Можно показать это на рисунке 9.2. Будем считать, что материал сопротивляется сжатию лучше, чем растяжению.

Наиболее простыми испытаниями являются испытания на растяжение  $A$  и сжатие  $B$ .

Можно получить еще один круг  $C$  путем испытания тонкостенной трубы на кручение (материал будет находиться в состоянии чистого сдвига).

Для растяжения (круг  $A$ ):  $\sigma_1 = \sigma_{\text{тр}}$ ,  $\sigma_3 = 0$ .

Для сжатия (круг  $B$ ):  $\sigma_1 = 0$ ,  $\sigma_3 = \sigma_{\text{тсж}}$ .

Для сдвига (круг  $C$ ):  $|\sigma_1| = |\sigma_3|$ .

Для определения огибающей очень важно знать положение точки  $D$ . Нормальное напряжение в этой точке представляет собой напряжение отрыва при всестороннем растяжении.

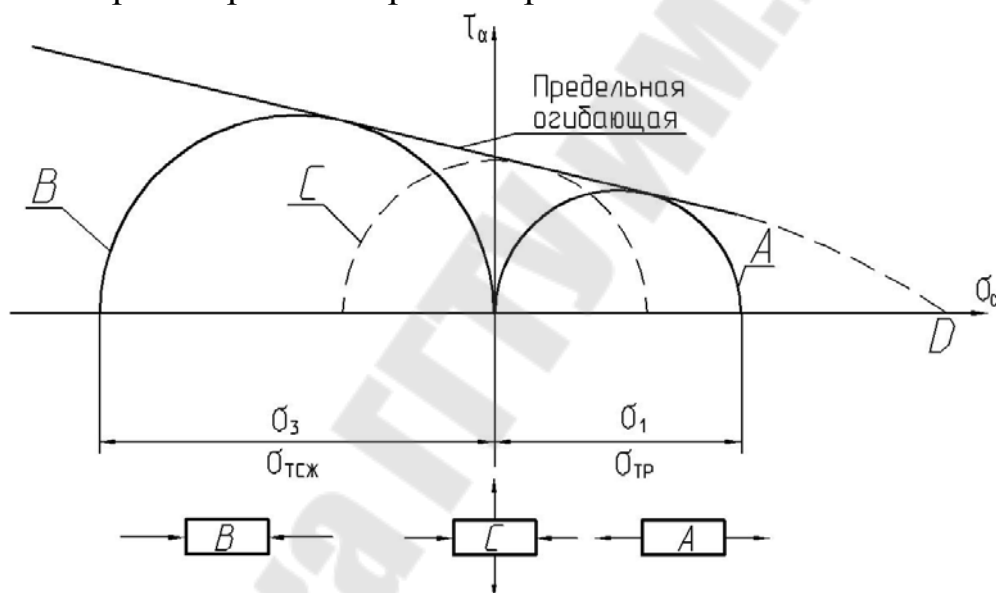


Рис. 9.2. Экспериментальное обобщение Мора

Таким образом, идея состоит в том, чтобы для каждого материала, путем проведения экспериментов, получить так называемую *предельную огибающую*, исчерпывающим образом описывающую механические свойства материала.

Опуская геометрическое построение и расчеты, указанный подход (теория Мора) дает следующее

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - k\sigma_3, \quad (9.3)$$

где  $k = \frac{\sigma_{\text{тр}}}{\sigma_{\text{тсж}}}$ ;

$\sigma_{\text{тр}}$  – предел текучести при растяжении;

$\sigma_{\text{тсж}}$  – предел текучести при сжатии.

7

### Эквивалентные напряжения для изгиба с кручением. Пример расчета

Широко распространенной задачей является изгиб с кручением (растяжение с кручением). С точки зрения теории – это плоское напряженное состояние, с точки зрения практики – расчет валов зубчатых передач и т.д.

Рассмотрим элементарный объем  $dV$ , на который действуют нормальное напряжение изгиба (растяжения)  $\sigma$  и касательное напряжение кручения  $\tau$ .

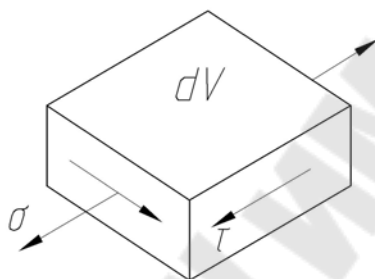


Рис. 9.3. Элементарный объем при изгибе с кручением

Анализ плоского напряженного состояния дает:

$$\sigma_{\max}^{\min} = \frac{\sigma_Z + \sigma_Y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_Z - \sigma_Y)^2 + 4\tau_{ZY}^2}$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2};$$

$$\sigma_2 = 0;$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}.$$
(9.4)

По третьей теории прочности (9.1) получил

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \left( \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \right) - \left( \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \right) =$$

$$= \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} - \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} = 2\sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} = \sqrt{4\left(\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2\right)}$$



$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad (9.5)$$

Напряжения при изгибе и кручении соответственно равны

$$\sigma = \frac{M_X}{W_X} + \frac{M_Y}{W_Y}, \quad \tau = \frac{M_K}{W_P}. \quad (9.6)$$

Подставив (9.6) в (9.5), получим условие прочности по третьей теории прочности

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \frac{\sqrt{M_X^2 + M_Y^2 + M_K^2}}{W_X} \leq [\sigma]$$

Аналогично выражению (9.5) можно получить значение эквивалентного напряжения по четвертой теории прочности

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

## Тема 10. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

1. Косой изгиб.
2. Напряжения и нейтральная линия при косом изгибе.
3. Внецентренное растяжение-сжатие.
4. Напряжения и нейтральная линия при внецентренном растяжении-сжатии.

===== 1 =====

### Косой изгиб

**Косым изгибом** называется такой вид сложного деформирования, при котором плоскость действия внутреннего (как следствие внешнего) изгибающего момента не совпадает с одной из главных плоскостей инерции сечения (рис. 10.1).

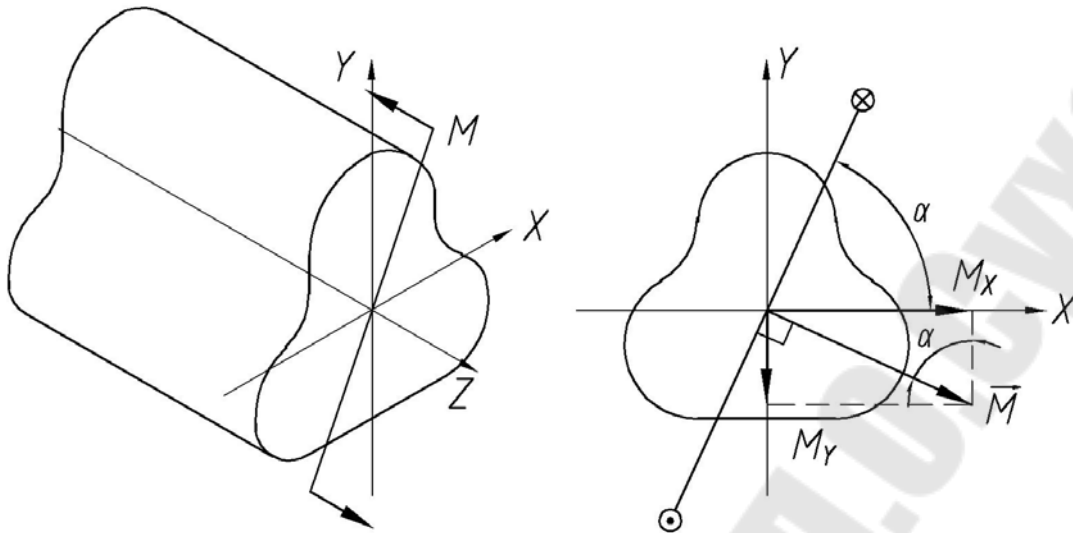


Рис. 10.1. Косой изгиб

Очевидно, что при рассмотрении косоугольного изгиба необходимо внешнюю нагрузку разложить на главные оси, т.е.

$$M_x = M \sin \alpha; \quad M_y = M \cos \alpha \quad (10.1)$$

После разложения на составляющие, косоугольный изгиб рассматривается как два плоских изгиба.

===== 2 =====

### Напряжения и нейтральная линия при косоугольном изгибе

Нормальные напряжения при косоугольном изгибе вычисляются по формуле

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x \quad (10.2)$$

С учетом (10.1) получим

$$\sigma = M \frac{\sin \alpha}{I_x} y + M \frac{\cos \alpha}{I_y} x \quad (10.3)$$

Уравнение (10.3) описывает плоскость, точки которой являются концевыми точками векторов напряжений в сечении. Само же сечение делится на две области: растянутую и сжатую. Границей этих областей служит нейтральная линия.

**Нейтральная линия** это место точек, где деформация равна нулю.

Уравнение нейтральной (нулевой) линии найдем следующим образом:

$$\sigma = 0, \quad M \frac{\sin \alpha}{I_X} y_N + M \frac{\cos \alpha}{I_Y} x_N = 0,$$

где  $x_N, y_N$  – координаты точек нейтральной линии.

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha}{I_X} y_N + \frac{\cos \alpha}{I_Y} x_N &= 0; \\ y_N &= -\frac{\cos \alpha}{I_Y} \frac{I_X}{\sin \alpha} x_N = -\frac{I_X}{I_Y} \operatorname{ctg} \alpha \cdot x_N. \\ y_N &= -\frac{I_X}{I_Y} x_N \cdot \operatorname{ctg} \alpha \end{aligned} \quad (10.4)$$

Выражение (10.4) является уравнением нейтральной линии при косом изгибе.

Из него следует:

1 Нейтральная линия проходит через центр тяжести (при  $x_N = 0, y_N = 0$ ).

2 Нейтральная линия не перпендикулярна следу плоскости результирующего момента  $M$ .

В самом деле: условие перпендикулярности двух прямых  $k_1 k_2 = -1$ , (где  $k_1, k_2$  – угловые коэффициенты этих прямых) не выполняется в общем случае

$$k_1 = \operatorname{tg} \alpha, \quad k_2 = -\frac{I_X}{I_Y} \cdot \operatorname{ctg} \alpha.$$

Лишь в том частном случае, когда для сечения  $I_X = I_Y$  (круг, квадрат) нейтральная линия перпендикулярна следу внешнего изгибающего момента.

Покажем условно нулевую линию для рассматриваемого примера.

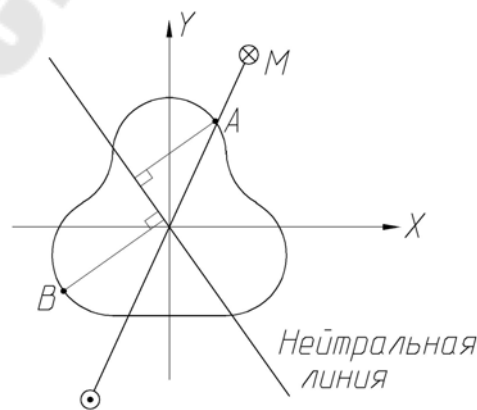


Рис. 10.2. Нейтральная линия при косом изгибе

Экстремальные напряжения будут наблюдаться в точках, наиболее удаленных от нулевой линии. Их положения легко устанавливаются геометрически, опуская нормали к нейтральной линии. На рисунке экстремальным напряжениям соответствуют точки  $A$  и  $B$ .

Для таких сложных задач характерен принцип наложения или суперпозиции. Поэтому в данном случае не только сложное напряжение можно рассматривать как совокупность простых составляющих, но и перемещение (деформация) от сложной внешней нагрузки определяется как сумма перемещений (деформаций), определенных от каждого силового фактора в отдельности.

===== 3 =====

### Внецентренное растяжение-сжатие

**Внецентренным растяжением-сжатием** называется такой сложный случай деформирования, при котором внешняя сила, приложенная к сечению, не проходит через центр тяжести сечения и, в принятых осях, точка ее приложения имеет координаты  $x_0$ ,  $y_0$ , отличные от нуля. В результате внецентренного растяжения-сжатия в сечении возникают изгибающий момент  $M_x$ ,  $M_y$  и продольная сила  $N$ .

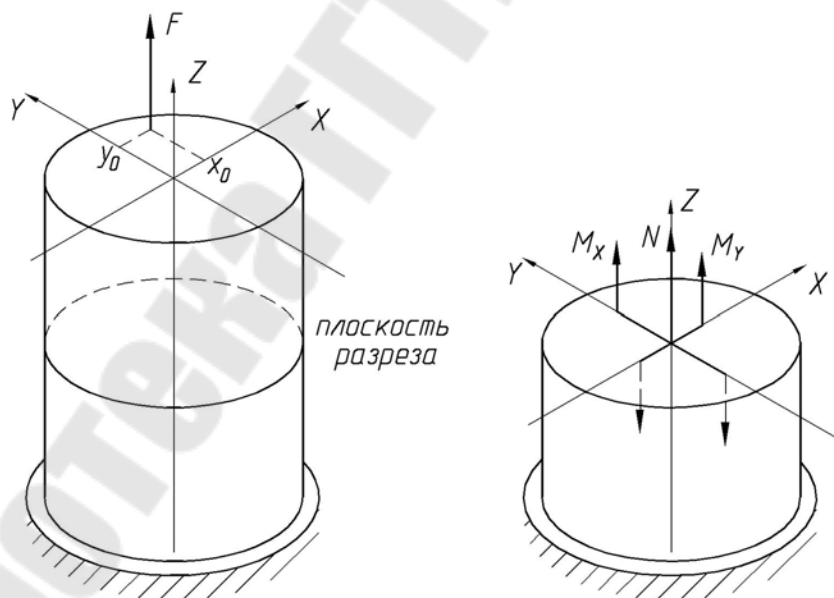


Рис. 10.3. Внецентренное растяжение-сжатие

$$N = F; \quad M_x = Fx_0; \quad M_y = Fy_0.$$

===== 4 =====

## Напряжения и нейтральная линия при внецентренном растяжении-сжатии

Известно, что напряжения от каждого фактора в отдельности будут:

$$\sigma = \frac{N}{A}, \quad \sigma = \frac{M_X}{I_X} y, \quad \sigma = \frac{M_Y}{I_Y} x.$$

Складывая их вместе получим нормальные напряжения при внецентренном растяжении-сжатии

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_X}{I_X} y + \frac{M_Y}{I_Y} x$$

Подставляя значения внутренних факторов, получим

$$\sigma = \frac{F}{A} + \frac{Fy_0}{I_X} y + \frac{Fx_0}{I_Y} x.$$

Тогда уравнение нейтральной линии при внецентренном растяжении-сжатии будет при  $\sigma = 0$

$$\frac{1}{A} + \frac{y_0}{I_X} y_N + \frac{x_0}{I_Y} x_N = 0,$$

где  $x_N, y_N$  – координаты точек, принадлежащих нейтральной линии.

Из уравнения следует:

1. Нейтральная линия не проходит через центр тяжести.
2. Если координаты точки приложения внешней силы  $x_0, y_0$  равны нулю, то нейтральная линия находится в бесконечности, напряжения распределены равномерно по сечению.

Т.о., нейтральная линия при внецентренном растяжении-сжатии может, как пересекать сечение, так и находится за пределами его. В первом случае возникают и растягивающие и сжимающие напряжения, во втором – напряжения во всех точках сечения будут одного знака.

### Тема 11. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ

1. Уточнение потенциальной энергии деформации сдвига.
2. Потенциальная энергия деформации бруса в общем случае сложного сопротивления.
3. Энергия деформации и дополнительная энергия.
4. Первая теорема Кастилиано.

5. Теорема Кротти-Энгессера. Вторая теорема Кастилиано. Пример расчета.
6. Интеграл Мора, метод единичной нагрузки. Пример расчета.
7. Теорема взаимности работ Бетти-Рэля. Пример расчета.
8. Определение перемещений в статически неопределимых системах с помощью интеграла Мора (метод единичной нагрузки).
9. Понятие о методах жесткостей и податливостей, сил и перемещений.
10. Основная идея метода податливостей. Пример расчета

===== 1 =====

### Уточнение потенциальной энергии деформации сдвига

Потенциальная энергия сдвига, заключенная в единице объема имеет вид

$$U_0 = \frac{\tau_y^2}{2G}.$$

Выделим из бруса произвольного сечения малый объем площадью  $dA$  и длиной  $dz$  (рис. 11.1). Энергия, заключенная в этом объеме, равна  $U_0 \cdot dA \cdot dz$ .

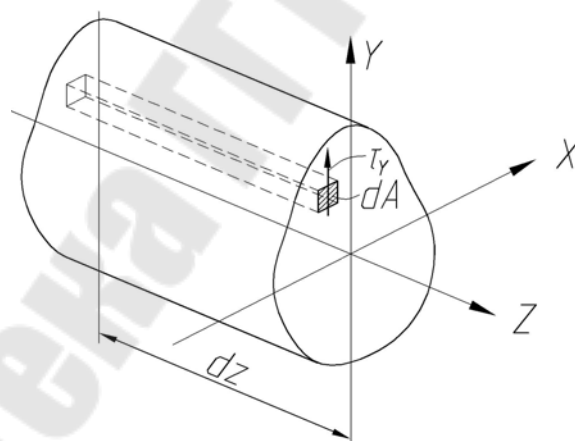


Рис. 11.1. К уточнению потенциальной энергии

Выделим часть энергии, приходящуюся на всю площадь поперечного сечения, для этого проинтегрируем по площади

$$dU_0 = \int_A \frac{\tau_y^2}{2G} dA \cdot dz.$$

Используя формулу Журавского, заменим касательные напряжения поперечной силой.

$$dU_0 = \frac{dz}{2G} \int_A \frac{Q_Y^2 S_X^{*2}}{b^2 I_X^2} dA = \frac{Q_Y^2 dz}{2GI_X^2} \int_A \frac{S_X^{*2}}{b^2} dA = \frac{Q_Y^2 dz}{2GA} \frac{A}{I_X^2} \int_A \frac{S_X^{*2}}{b^2} dA$$

Обозначим

$$\frac{A}{I_X^2} \int_A \frac{S_X^{*2}}{b^2} dA = k_Y.$$

Тогда

$$dU_0(Q_Y) = k_Y \frac{Q_Y^2 dz}{2GA}.$$

Аналогично получим

$$dU_0(Q_X) = k_X \frac{Q_X^2 dz}{2GA}.$$

Коэффициенты  $k_X$  и  $k_Y$  представляют собой безразмерные величины, зависящие от геометрической формы сечения, и называются *коэффициентами формы при сдвиге*.

Расчеты приводят к тому, что для прямоугольного сечения с размерами  $b$  и  $h$  коэффициенты равны  $k_X = k_Y = \frac{6}{5}$ .

Для сплошного круглого сечения  $k_X = k_Y = \frac{10}{9}$ .

---

## 2

---

### Потенциальная энергия деформации бруса в общем случае сложного сопротивления

Обобщая известные сведения, энергия деформации бруса длины  $l$  в общем случае деформирования сложным сопротивлением имеет вид

$$U = \int_l \frac{M_{кр}^2 dz}{2GI_p} + \int_l \frac{M_X^2 dz}{2EI_X} + \int_l \frac{M_Y^2 dz}{2EI_Y} + \int_l \frac{N^2 dz}{2EA} + \int_l \frac{k_X Q_X^2 dz}{2GA} + \int_l \frac{k_Y Q_Y^2 dz}{2GA}, \quad (11.1)$$

где  $U = \int_l \frac{M_{кр}^2 dz}{2GI_p}$  – потенциальная энергия кручения;

$U = \int_l \frac{M_X^2 dz}{2EI_X} + \int_l \frac{M_Y^2 dz}{2EI_Y}$  – потенциальная энергия изгиба;

$$U = \int_l \frac{N^2 dz}{2EA} \text{ – потенциальная энергия растяжения-сжатия;}$$

$$U = \int_l \frac{k_X Q_X^2 dz}{2GA} + \int_l \frac{k_Y Q_Y^2 dz}{2GA} \text{ – потенциальная энергия сдвига.}$$

В выражении (11.1) не всегда все слагаемые являются равноценными. Для подавляющего большинства практических систем, элементы которых работают на изгиб и кручение, три последних слагаемых оказываются существенно меньшими первых трех. Иначе говоря, энергия растяжения и сдвига, как правило, оказывается существенно меньше энергии изгиба и кручения. Поэтому этими слагаемыми в данных задачах пренебрегают.

Однако возможны такие случаи, в которых рассматриваемые слагаемые оказываются величинами одного порядка (например, при внецентренном растяжении для стержня, нагруженного силой, приложенной с небольшим плечом от центра тяжести, энергия растяжения и энергия изгиба будут равнозначными величинами).

3

### Энергия деформации и дополнительная энергия

Рассмотрим с общефизических позиций процесс деформирования. Нас будет интересовать вопрос об энергии.

Предположим, что процесс деформирования представлен диаграммой показанной на рисунке 11.2.

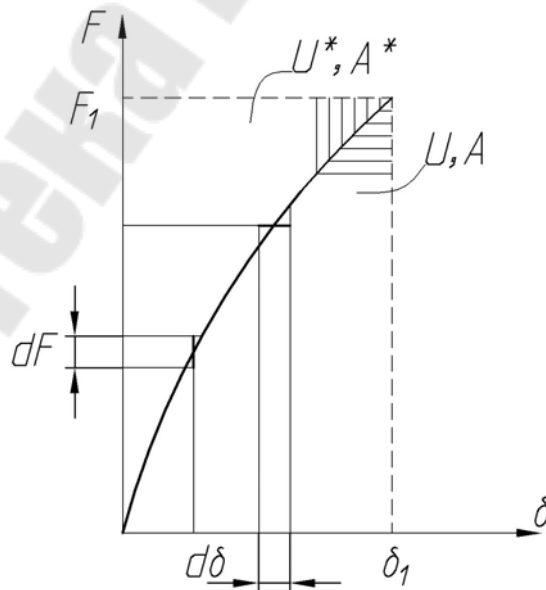


Рис. 11.2. Зависимость деформации от нагрузки



Энергия деформации равна

$$U = \int F \cdot d\delta.$$

В отсутствии потерь она может быть возвращена в виде работы  $A$  полностью.

$$U = A.$$

Формально может быть рассмотрена и аналогичная площадь, для которой энергию можно определить как

$$U^* = \int \delta \cdot dF.$$

Аналогично  $U^* = A^*$ .

Подобную величину  $U^*$  называют *дополнительной энергией*. Все рассуждения могут быть проведены для диаграммы  $\sigma \sim \varepsilon$  (рис. 11.3).

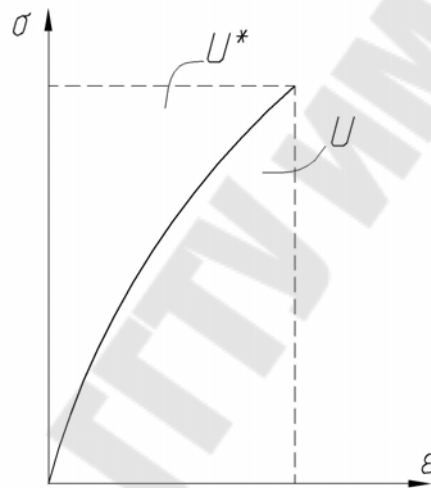


Рис. 11.3. Диаграмма  $\sigma \sim \varepsilon$

По диаграмме  $F \sim \delta$  видно, что

$$U^* + U = F_1 \cdot \delta_1.$$

Полученное выражение может быть применимо для любого типа конструкции вне зависимости от того, на какие виды деформирования она работает.

В случае линейного поведения площади равны

$$U = U^* = \frac{1}{2} F_1 \cdot \delta_1.$$

В роли  $F$  и  $\delta$  могут выступать  $M$  и  $\varphi$ .

Двойственность представления энергии деформации и дополнительной энергии служит основанием для исключительно мощных

конструкций (стержневых систем). Этот метод универсален в том смысле, что применим как к линейному, так и нелинейному поведению конструкции.

В широком смысле под нелинейностью следует понимать отсутствие прямой пропорциональной зависимости между внешними нагрузками (в обобщенном смысле) и вызываемыми ими перемещениями.

Причинами нелинейности являются два фактора:

- 1) материал не подчиняется закону Гука изначально (физическая нелинейность);
- 2) особенности геометрии деформированной конструкции (геометрическая нелинейность).

Однако, вне зависимости от того линейная конструкция или нелинейная, всегда будем предполагать, что материал ведет себя упруго.

===== 4 =====

### **Первая теорема Кастилиано**

Внешняя сила  $F$  может быть представлена функцией от перемещений, которые она вызывает. Принимая во внимание также выражение полного дифференциала, получаем

$$dU = F \cdot d\delta; \quad dU = \frac{\partial U}{\partial \delta} d\delta; \quad F \cdot d\delta = \frac{\partial U}{\partial \delta} d\delta. \\ F = \frac{\partial U}{\partial \delta}. \quad (11.2)$$

Выражение (11.2) является **первой теоремой Кастилиано**: *частная производная от энергии деформации по произведенному перемещению равна соответствующей этому перемещению силе.*

Эта теорема лежит в основе метода исследования поведения конструкций, который называется **метод перемещений** или **жесткостей**.

===== 5 =====

### **Теорема Кротти-Энгессера. Вторая теорема Кастилиано.**

#### **Пример расчета**

Аналогичные рассуждения можно провести в отношении дополнительных энергий. В итоге получаем

$$dU^* = \delta \cdot dF; \quad dU^* = \frac{\partial U^*}{\partial F} dF; \quad \delta \cdot dF = \frac{\partial U^*}{\partial F} dF.$$

$$\delta = \frac{\partial U^*}{\partial F}. \quad (11.3)$$

Выражение (11.3) является **теоремой Кротти-Энгессера**: частная производная от дополнительной энергии  $U^*$ , являющейся функцией от нагрузки, по некоторой нагрузке  $F$ , равна соответствующему этой нагрузке перемещению  $\delta$ .

Эта теорема лежит в основе метода исследования конструкций, который называется **метод сил** или **податливости**. Конструкция в общем случае нелинейная или линейная соответственно.

Будем теперь считать, что конструкция ведет себя линейно. Заметим, что принцип суперпозиций применим только к линейным конструкциям.

Тогда  $U = U^*$ , следовательно

$$\delta = \frac{\partial U^*}{\partial F} = \frac{\partial U}{\partial F} \quad (11.4)$$

Выражение (11.4) является **второй теоремой Кастилиано**: Если энергия деформации линейно деформируемой конструкции представлена функцией нагрузок, то частная производная от этой энергии по некоторой нагрузке  $F$ , равна соответствующему перемещению.

Можно отметить, что использование данных теорем выходит далеко за рамки механики материалов. Здесь же мы будем обсуждать предположение второй теоремы Кастилиано.

Рассмотрим пример (рис. 11.4).

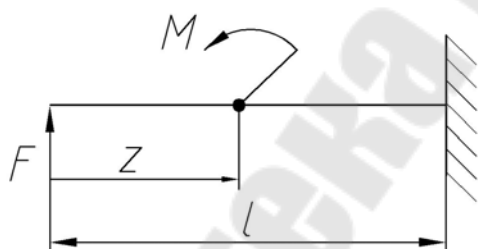


Рис. 11.4. Расчетная схема

1. Метод прямого интегрирования

$$EI_x y'' = M; \quad M = Fz;$$

$$EI_x y'' = Fz; \quad EI_x y' = F \frac{z^2}{2} + C_1;$$

$$EI_x y = F \frac{z^3}{6} + C_1 z + C_2.$$

Константы определяются граничными условиями

$z = l, \quad y = 0$  – перемещения в заделке отсутствуют;

$z = l; \quad y' = 0$  – угол поворота стержня в заделке равен нулю.

Опуская преобразования, имеем

$$C_1 = -\frac{Fl^2}{2}; \quad C_2 = \frac{Fl^3}{3}.$$

С учетом найденных констант получим

$$y = \frac{F}{EI_X} \left[ \frac{z^3}{6} - \frac{l^2}{2}z + \frac{l^3}{3} \right].$$

Таким образом, прогиб в точке приложения силы (при  $z = 0$ ) будет

$$y(z = 0) = \frac{Fl^3}{3EI_X}.$$

## 2. Вторая теорема Кастилиано

Потенциальная энергия изгиба равна

$$U = \int_0^l \frac{M_X^2 dz}{2EI_X} = \int_0^l \frac{F^2 z^2 dz}{2EI_X} = \frac{F^2 z^3}{6EI_X} \Big|_0^l = \frac{F^2 l^3}{6EI_X}.$$

Тогда прогиб по второй теореме Кастилиано будет

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{2Fl^3}{6EI_X} = \frac{Fl^3}{3EI_X}.$$

$$y(z = 0) = \delta.$$

===== 6 =====

## Интеграл Мора, метод единичной нагрузки. Пример расчета

По второй теореме Кастилиано имеем

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial F}.$$

Энергия деформации изгиба будет

$$U = \int \frac{M^2 dz}{2EI}.$$

**Примечание.** Приведенные рассуждения носят общий характер и не зависят от конкретного вида деформирования.

Подставим значение энергии в теорему

$$\delta = \frac{\partial}{\partial F} \int \frac{M^2 dz}{2EI}.$$

Математика разрешает менять порядок дифференцирования и интегрирования, более того, очевидно что

$$\partial M^2 = 2M \cdot \partial M.$$

Тогда имеем

$$\delta = \int \frac{\partial M^2 dz}{\partial F 2EI} = \int \frac{2M \cdot \partial M dz}{\partial F 2EI} = \int \frac{\partial M}{\partial F} \frac{M dz}{EI}$$

Частная производная

$$\frac{\partial M}{\partial F} = \bar{M}$$

имеет следующий смысл: *внутренний момент в системе, вызванный единичной силой.*

$$\delta = \int \frac{\bar{M} \cdot M}{EI} dz \quad (11.5)$$

Выражения вида (11.5) носят название **интеграл Мора**.

Таким образом, прикладывая единичную нагрузку (силу или момент) с помощью интеграла Мора можно определить перемещения (линейные или угловые соответственно) произвольной точки конструкции.

Пример. Вычислим перемещение в середине балки для рассмотренной ранее задачи (рис. 11.5).

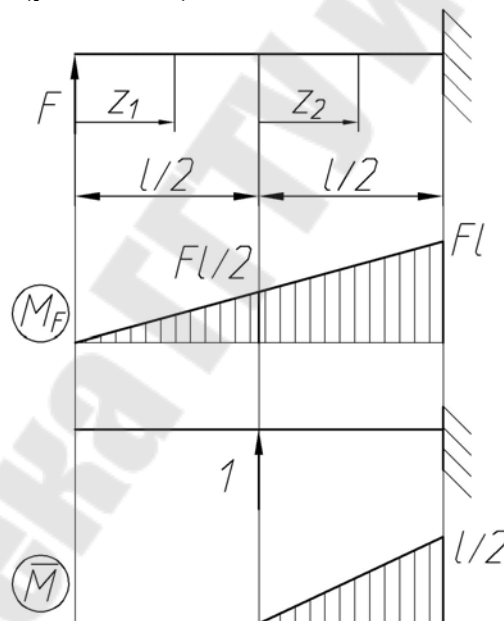


Рис. 11.5. Расчетная схема, грузовая и единичная эпюры

1. Метод прямого интегрирования

$$y = \frac{F}{EI_X} \left[ \frac{z^3}{6} - \frac{l^2}{2} z + \frac{l^3}{3} \right];$$

$$y \left( z = \frac{l}{2} \right) = \frac{F}{EI_X} \left[ \frac{l^3}{48} - \frac{l^2}{2} \frac{l}{2} + \frac{l^3}{3} \right] = \frac{F}{EI_X} \left[ \frac{l^3}{48} - \frac{12l^2}{48} + \frac{16l^3}{48} \right] = \frac{5}{48} \frac{Fl^3}{EI_X}$$

2. Интеграл Мора

$$\delta = \int \frac{\bar{M} \cdot M_F}{EI} dz,$$

где  $M_F$  – эпюра от внешней нагрузки (грузовая эпюра);

$\bar{M}$  – эпюра от единичной нагрузки (единичная эпюра).

По участкам для грузовой и единичной эпюры имеем следующие функции моментов

$$\begin{aligned} M_F^I &= Fz_1; & \bar{M}^I &= 0; \\ M_F^{II} &= \frac{Fl}{2} + Fz_2; & \bar{M}^{II} &= 1 \cdot z_2. \end{aligned}$$

Тогда искомое перемещение

$$\begin{aligned} \delta &= \int_0^{l/2} \frac{\bar{M}^I \cdot M_F^I}{EI} dz + \int_0^{l/2} \frac{\bar{M}^{II} \cdot M_F^{II}}{EI} dz = \int_0^{l/2} \frac{0 \cdot Fz_1}{EI} dz + \int_0^{l/2} \frac{1 \cdot z_2 \cdot \left(\frac{Fl}{2} + Fz_2\right)}{EI} dz = \\ &= \frac{1}{EI} \int_0^{l/2} \left(\frac{Fl}{2} z_2 + Fz_2^2\right) dz = \frac{1}{EI} \left(\frac{Fl}{2} \frac{z_2^2}{2} + \frac{Fz_2^3}{3}\right) \Big|_0^{l/2} = \frac{1}{EI} \left(\frac{Fl}{2} \frac{l^2}{8} + \frac{Fl^3}{24}\right) = \frac{5}{48} \frac{Fl^3}{EI} \end{aligned}$$

Итак, удобным упрощением вычисления перемещения, является использование интеграла Мора. В этом случае, как показано на примере, к точке определения перемещения прикладывается единичная нагрузка (сила или момент, которые равны единице). Определяются функции грузовых и единичных параметров, и проводится вычисление по интегралу Мора. Этот прием (техника) называется **метод единичной нагрузки**.

Однако вычисление интегралов Мора представляет затруднение. Существует несколько способов вычисления интеграла Мора, один из которых разработал и предложил А.Н.Верещагин, будучи студентом Московского института инженеров транспорта в 1925 г. Этот способ получил название **способ перемножения эпюр**.

### Теорема взаимности работ Бетти-Рэлея. Пример расчета

Теорема взаимности работ Бетти-Рэлея значительно упрощает вычисление перемещений (рис. 11.6).

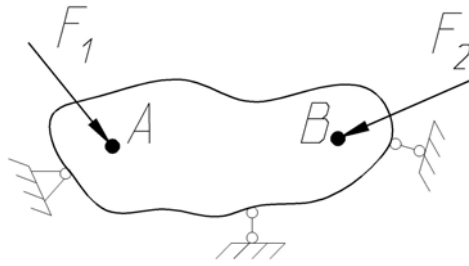


Рис. 11.6. К теореме взаимности работ

Рассмотрим линейно-упругое тело, нагруженное силой  $F_1$  в точке  $A$  и силой  $F_2$  в точке  $B$ .

Определим работу, которую совершают силы  $F_1$  и  $F_2$  при так называемом прямом и обратном порядке приложения этих сил.

Особое внимание обратим на последовательное приложение сил.

1) Прямой порядок приложения сил. На ненагруженное тело начинает действовать сила  $F_1$ . Далее, не устранив действие силы  $F_1$ , будем прикладывать силу  $F_2$ . Обратимся к работе этих сил на перемещениях точек  $A$  и  $B$ .

$$A = \frac{1}{2} F_1 \delta_{A1} + \frac{1}{2} F_2 \delta_{B2} + F_1 \delta_{A2}$$

где  $\delta_{A1}$  – перемещение точки  $A$  в направлении силы  $F_1$  от действия силы  $F_1$ ;

$\delta_{B2}$  – перемещение точки  $B$  в направлении силы  $F_2$  от действия силы  $F_2$ ;

$\delta_{A2}$  – перемещение точки  $A$  в направлении силы  $F_1$  от действия силы  $F_2$ .

2) Обратный порядок приложения сил. Рассуждая совершенно аналогично, имеет работу, равную

$$A = \frac{1}{2} F_2 \delta_{B2} + \frac{1}{2} F_1 \delta_{A1} + F_2 \delta_{B1}.$$

Основываясь на методе наложения заключаем, что полученные соотношения равны. Тогда получим

$$F_1 \delta_{A2} = F_2 \delta_{B1}. \quad (11.6)$$

Выражение (11.6) является **теоремой взаимности работ**: работа первой силы на перемещение точки ее приложения под действием второй силы равна работе второй силы на перемещение точки ее приложения под действием первой силы.

В частном случае, когда  $F_1 = F_2$  получим

$$\delta_{A2} = \delta_{B1}. \quad (11.7)$$

Выражение (11.7) является **теоремой взаимности перемещений**: *перемещение точки  $A$  под действием силы, приложенной в точке  $B$ , равно перемещению точки  $B$  под действием той же силы, но приложенной в точке  $A$ .*

Сказанное может быть показано на примере балки, нагруженной силой  $F$  поочередно в точках  $A$  и  $B$  (рис. 11.7). Здесь  $\delta_{A2} = \delta_{B1}$ .

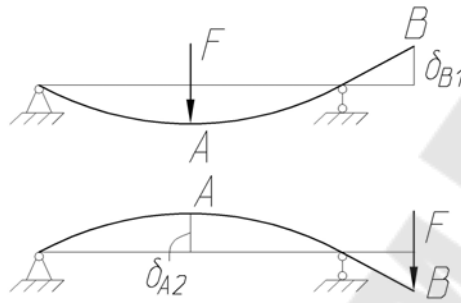


Рис. 11.7. Балка, нагруженная силой  $F$

8

### Определение перемещений в статически неопределимых системах с помощью интеграла Мора (метод единичной нагрузки)

Обобщая все вышеизложенное можно сделать вывод, что перемещение любой точки конструкции (как линейное, так и угловое) определяют шесть факторов. Это перемещение может быть представлено с помощью интеграла Мора

$$\begin{aligned} \delta = & \int_l \frac{\bar{M}_{\text{кр}1} M_{\text{кр}F} dz}{GI_p} + \int_l \frac{\bar{M}_{X1} M_{FX} dz}{EI_X} + \int_l \frac{\bar{M}_{Y1} M_{FY} dz}{EI_Y} + \\ & + \int_l \frac{\bar{N}_1 N_F dz}{EA} + \int_l \frac{k_X \bar{Q}_{X1} Q_X dz}{GA} + \int_l \frac{k_Y \bar{Q}_{Y1} Q_Y dz}{GA} \end{aligned} \quad (11.8)$$

Статически неопределимые задачи, как известно, решаются путем составления дополнительных уравнений деформаций. Эти деформации можно вычислять с помощью интеграла Мора.

В большинстве практических задачах применяется лишь отдельные слагаемые выражения (11.8). Так, если рассматриваются конструкции, работающие на изгиб, то оставляются слагаемые, зависящие от изгибающих моментов, а если задача к тому же плоская, то в интеграле Мора может остаться лишь одно слагаемое.



## Понятие о методах жесткостей и податливостей сил и перемещений

Обобщая всю теорию этой темы, заключаем, что основой для определения перемещений и сил по методу податливости или сил является вторая теорема Кастилиано, а по методу жесткостей или перемещений – первая теорема Кастилиано.

### Основная идея метода податливостей. Пример расчета

Данный метод предназначен для решения статически неопределимых задач. Метод податливости это метод сил для общего случая нелинейных конструкций.

Идея метода проста и состоит в применении принципа наложения. Можно сказать иначе, метод основывается на законе Гука, т.е. пропорциональной зависимости между перемещением и нагрузкой.

Рассмотрим статически неопределимую раму (рис. 11.8).

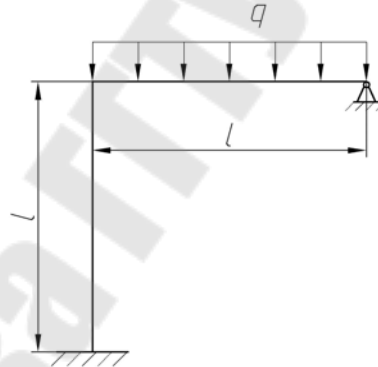


Рис. 11.8. Расчетная схема

В данном случае мы имеем дважды статически неопределимую систему, это значит, что любые две связи (реакции) оказываются «лишними».

Если заменить опору, создающую «лишние» связи, неизвестными силами  $X_1$  и  $X_2$  получим систему, которая называется **эквивалентной** (рис. 11.9).

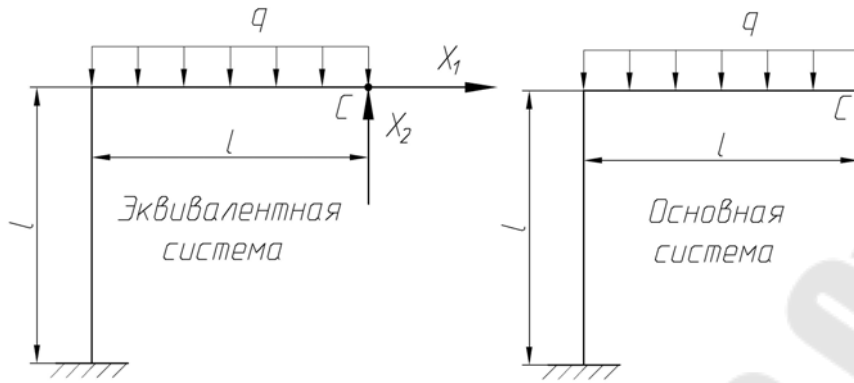


Рис. 11.9. Эквивалентная и основная системы

Формально освободим систему от двух «лишних» связей. Эта система становится статически определимой и называется **основной** (рис. 11.9).

При решении данной задачи определению подлежат неизвестные силы  $X_1$  и  $X_2$  в эквивалентной системе. Их вычисление раскрывает статическую неопределимость.

Очевидно, что для эквивалентной системы перемещение точки  $C$  должно равняться нулю.

$$\begin{cases} \Delta_C^{\text{гор}} = 0 \\ \Delta_C^{\text{вер}} = 0 \end{cases}$$

Систему уравнений можно уточнить до вида

$$\begin{cases} \Delta_{CX_1}^{\text{гор}} + \Delta_{CX_2}^{\text{гор}} + \Delta_{CF}^{\text{гор}} = 0 \\ \Delta_{CX_1}^{\text{вер}} + \Delta_{CX_2}^{\text{вер}} + \Delta_{CF}^{\text{вер}} = 0 \end{cases}, \quad (11.9)$$

где горизонтальное и вертикальное перемещение точки  $C$  рассматривается как наложение отдельных перемещений от неизвестных сил  $X_1$  и  $X_2$ , а также от внешних нагрузок.

Обратимся к закону Гука

$$F = k \cdot \Delta S; \quad \Delta S = \frac{1}{k} F.$$

Заменим

$$\frac{1}{k} = \delta, \quad k = \left[ \frac{\text{Н}}{\text{м}} \right], \quad \delta = \left[ \frac{\text{м}}{\text{Н}} \right].$$

Тогда

$$\Delta S = \delta \cdot F,$$

где  $\delta$  – перемещение, вызванное силой равной 1Н (перемещение от единичной силы).

Таким образом, закон Гука можно обратить, выражая через перемещение. Представляя уравнения (11.9) через обратную запись закона Гука, получим **систему канонических уравнений** метода сил для исследуемой задачи. Причем, число уравнений равно количеству неизвестных (степени статической неопределимости).

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} = 0 \end{cases} \quad (11.10)$$

где  $\delta_{11}$  – перемещение точки  $C$  в направлении силы  $X_1$  (горизонтально), вызванное единичной нагрузкой, приложенной в этом же направлении;

$\delta_{12}$  – перемещение точки  $C$  в направлении силы  $X_1$  (горизонтально), вызванное единичной нагрузкой, приложенной в направлении силы  $X_2$  (вертикально);

$\Delta_{1F}$  – перемещение точки  $C$  в направлении силы  $X_1$  (горизонтально), вызванное внешней нагрузкой в отсутствии сил  $X_1$  и  $X_2$  (для основной системы);

$\delta_{21}$  – перемещение точки  $C$  в направлении силы  $X_2$  (вертикально), вызванное единичной нагрузкой, приложенной в направлении силы  $X_1$  (горизонтально);

$\delta_{22}$  – перемещение точки  $C$  в направлении силы  $X_2$  (вертикально), вызванное единичной нагрузкой, приложенной в этом же направлении;

$\Delta_{2F}$  – перемещение точки  $C$  в направлении силы  $X_2$  (вертикально), вызванное внешней нагрузкой в отсутствии сил  $X_1$  и  $X_2$  (для основной системы);

По теореме взаимности перемещений

$$\delta_{12} = \delta_{21}.$$

Таким образом, для решения системы (11.10) необходимо определить все коэффициенты уравнений.

Техника вычисления коэффициентов (читай перемещений) связана с интегралами Мора (11.5).

$$\delta_{11} = \int \frac{\bar{M}_1 \cdot \bar{M}_1}{EI} dz; \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \int \frac{\bar{M}_1 \cdot \bar{M}_2}{EI} dz; \quad \delta_{22} = \int \frac{\bar{M}_2 \cdot \bar{M}_2}{EI} dz;$$

$$\Delta_{1F} = \int \frac{\bar{M}_1 \cdot M_F}{EI} dz; \quad \Delta_{2F} = \int \frac{\bar{M}_2 \cdot M_F}{EI} dz.$$

Для вычисления указанных интегралов Мора необходимо построить единичные и грузовую эпюры (рис. 11.10).

Грузовая эпюра строится для основной системы.

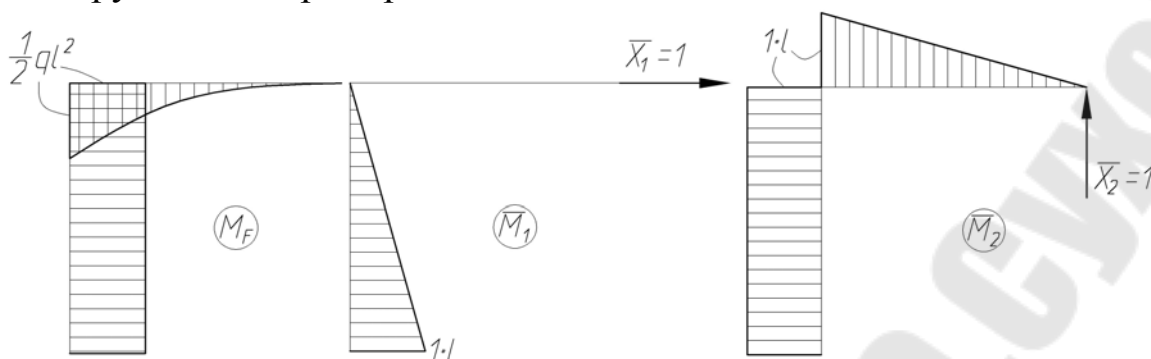


Рис. 11.10. Грузовая и единичные эпюры

Как видно из записанных интегралов Мора, чтобы определить  $\delta_{11}$  необходимо эпюру  $\bar{M}_1$  перемножить саму на себя, для определения  $\delta_{12}$  – перемножить эпюры  $\bar{M}_1$  и  $\bar{M}_2$ , и т.д.

Опуская технику расчетов, запишем результат

$$\delta_{11} = \frac{1}{3} \frac{l^3}{EI}; \quad \delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{1}{2} \frac{l^3}{EI}; \quad \delta_{22} = \frac{4}{3} \frac{l^3}{EI};$$

$$\Delta_{1F} = \frac{1}{4} \frac{ql^4}{EI}; \quad \Delta_{2F} = -\frac{5}{8} \frac{ql^4}{EI}.$$

Тогда система уравнений (11.10) примет вид

$$\begin{cases} \frac{1}{3} X_1 - \frac{1}{2} X_2 + \frac{1}{4} ql = 0 \\ -\frac{1}{2} X_1 + \frac{4}{3} X_2 - \frac{5}{8} ql = 0 \end{cases}$$

Решая ее, получим  $X_1 = -\frac{3}{28} ql$ ,  $X_2 = \frac{3}{7} ql$ .

Знак при  $X_1$  указывает на то, что первоначально выбранное направление этой силы оказалось ошибочным. С определением  $X_1$  и  $X_2$  происходит раскрытие статической неопределимости. Зная эти реакции можно получить все необходимые сведения о работе конструкции привычными методами.

## Тема 12. УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

1. Постановка проблемы.
2. Задача Эйлера.
3. Зависимость критической силы от условий закрепления стержня.

4. Понятие о потере устойчивости, при напряжениях, превышающих предел пропорциональности.
5. Зависимость критического напряжения от гибкости стержня.
6. Замечания о практических расчетах на устойчивость, условие устойчивости стержня.

===== 1 =====

### Постановка проблемы

Под **устойчивостью** понимается свойство системы сохранять свое состояние при внешних воздействиях.

Подбор сечений для продольно сжатых стержней часто представляет собой решающую часть общего расчета конструкций, поскольку разрушение такого стержня часто вызывает катастрофу.

Если длина продольно сжатого стержня значительно больше его ширины, то он может перестать выполнять свои функции вследствие *потери устойчивости*, т.е. из-за изгибания и появления боковых прогибов, что происходит раньше, чем конструкция выйдет из строя непосредственно из-за сжатия.

Потеря устойчивости может быть либо упругой, либо неупругой, в зависимости от гибкости стержня.

===== 2 =====

### Задача Эйлера

Рассмотрим шарнирно закрепленный стержень (рис. 12.1).

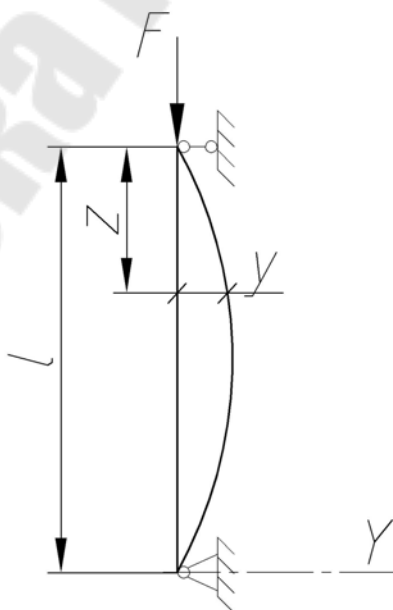


Рис. 12.1. Расчетная схема

Уравнение линии прогибов в принятой системе координат следующее

$$EIy'' = M = -Fy \quad (12.1)$$

Здесь укажем два обстоятельства:

- 1) условимся считать положительным тот момент, который увеличивает кривизну. На рисунке же момент от силы  $F$  в алгебраическом смысле кривизну уменьшает;
- 2) т.к. изгиб стержня будет всегда происходить в плоскости с минимальной жесткостью, то в последующих расчетах значение момента инерции  $I$  берется минимальным.

Пусть

$$k^2 = \frac{F}{EI}, \quad (12.2)$$

тогда уравнение (12.1) принимает вид

$$y'' + k^2 y = 0$$

откуда

$$y = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz. \quad (12.3)$$

Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  должны быть выбраны так, чтобы были удовлетворены граничные условия: при  $z = 0$  –  $y = 0$  и при  $z = l$  –  $y = 0$ . Из первого условия вытекает, что  $C_2 = 0$ , а из второго

$$C_1 \sin kl = 0. \quad (12.4)$$

Выражение 12.4 имеет два возможных решения: либо  $C_1 = 0$ , либо же  $\sin kl = 0$ .

В первом случае получается, что при  $C_1 = C_2 = 0$  перемещения  $y$  по (12.3) равны нулю, и стержень, следовательно, имеет прямолинейную форму. Этот случай нас не интересует.

Во втором случае

$$kl = \pi n,$$

где  $n$  – произвольное целое число.

Учитывая выражение (12.2), получаем

$$F = \frac{\pi^2 n^2 EI}{l^2}.$$

Это означает, что для того, чтобы стержень сохранял криволинейную форму, необходимо, чтобы сила  $F$  принимала определенное значение. Наименьшая сила  $F$ , отличная от нуля, будет при  $n = 1$ ,

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}. \quad (12.5)$$

Эта сила носит название *первой критической* или *эйлеровой силы*.

Если  $F < F_{кр}$ , то возможна только прямолинейная (первоначальная) форма равновесия, которая является устойчивой.

При  $n = 1$  имеем  $kl = \pi$  и уравнение упругой линии (12.3) примет вид

$$y = C_1 \sin \frac{\pi z}{l}.$$

Стержень изгибается по полуволне синусоиды с максимальным прогибом  $C_1$ .

При любом целочисленном значении  $n$

$$y = C_1 \sin \frac{\pi n z}{l},$$

и упругая линия стержня изображается кривой в виде  $n$  полуволн.

В полученном решении использовано предположение о малости прогибов и линейно упругом поведении материала. Если же прогибы не являются малыми, то необходимо использовать точную запись дифференциального уравнения кривизны (12.1).

$$EI \frac{1}{\rho} = \frac{EI y'''}{[1 + y'^2]^{\frac{3}{2}}} = -Fy.$$

При  $F > F_{кр}$  перемещения будут расти так быстро, что пренебрегать величиной  $y'^2$  в знаменателе нельзя.

===== 3 =====

### **Зависимость критической силы от условий закрепления стержня**

Полученное решение Эйлера справедливо для шарнирного закрепления концов стержня. Аналогично необходимо рассматривать и другие случаи закрепления. Анализ этих решений, однако, показывает, что эти случаи представляют собой некую композицию в виде набора (части) синусоидальных кривых.

Рассмотрим пять стержней (рис. 12.2).

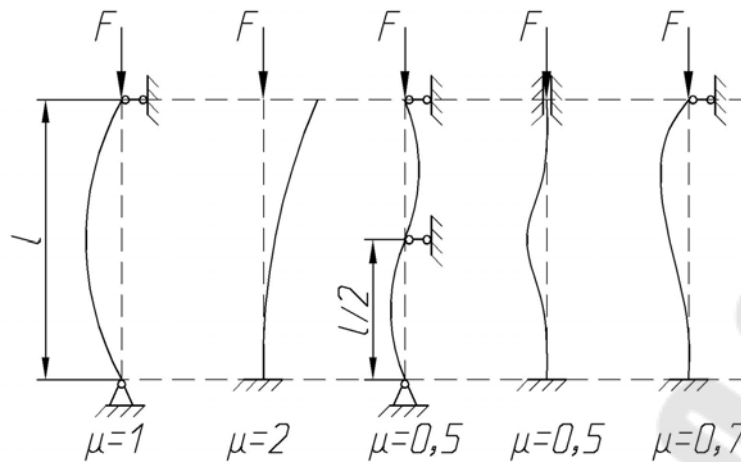


Рис. 12.2. Зависимость коэффициента  $\mu$  от условий закрепления

Исследования показали, что значения критической силы Эйлера во всех этих случаях могут быть обобщенно выражены так:

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu \cdot l)^2},$$

где  $\mu$  – коэффициент приведения длины стержня.

Зная значение этой силы для шарнирного закрепления (формула 12.5) можно заключить, что в этом случае  $\mu = 1$ . Для остальных схем коэффициент  $\mu$  показывает во сколько раз необходимо увеличить длину шарнирно закрепленного стержня, чтобы критическая сила для него равнялась критической силе стержня длиной  $l$  в рассматриваемых условиях закрепления.

#### ===== 4 =====

### Понятие о потере устойчивости, при напряжениях, превышающих предел пропорциональности

Необходимо отметить, что вся рассмотренная теория относится к упругому поведению материала и малым перемещениям. В инженерной практике возникла очень серьезная проблема, заключающаяся в том, что решение Эйлера не соответствует реальности при пластичном поведении материала. Принципиальное значение здесь имеет тот факт, что модуль Юнга  $E$  не является постоянной величиной при напряжениях, превышающих предел пропорциональности, и должен вычисляться по известной зависимости

$$E = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}.$$



### Зависимость критического напряжения от гибкости стержня

Критическое напряжение будет

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu \cdot l)^2 A}.$$

Введем радиус инерции

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}}, \quad i^2 = \frac{I}{A}.$$

$$I = i^2 A.$$

Тогда

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{A} \frac{i^2 A}{(\mu \cdot l)^2}$$

В последнем выражении формально выделим коэффициент  $\lambda$ , тогда

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \tag{12.6}$$

Выражение (12.6) описывает *напряжение Эйлера*.

Коэффициент  $\lambda$ , зависящий от длины стержня, условий его закрепления и минимального радиуса инерции, принято называть **гибкостью** стержня. Он отвечает за геометрию.

Так как формула Эйлера справедлива, пока критическое напряжение не превышает предела пропорциональности  $\sigma_{кр} \leq \sigma_{пц}$ , можно найти предельную гибкость, ниже которой пользоваться формулой Эйлера нельзя

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{пц}.$$

Откуда

$$\lambda_{пред} \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}}. \tag{12.7}$$

Подстановка в выражение (12.7) реальных значений модуля Юнга  $E$  и предела пропорциональности  $\sigma_{пц}$  для стали дает  $\lambda_{пред} = 100$ . Значит, только для задач, в которых гибкость превышает  $\lambda_{пред}$ , возможно применение теории Эйлера. В связи с этим представляется важная зависимость  $\sigma_{кр}(\lambda)$  (рис. 12.3), для которой совершен-

но ясно, что напряжение в материале не может превышать значения предела текучести.

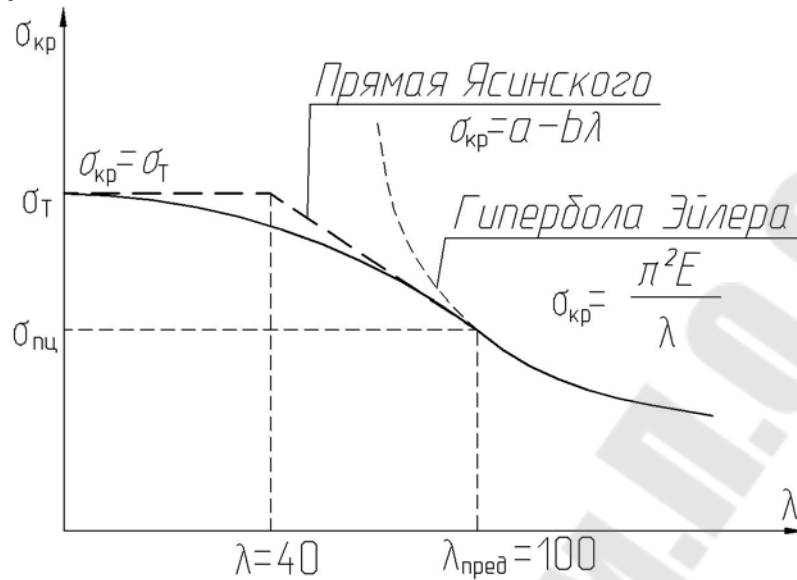


Рис. 12.3. Зависимость критического напряжения от гибкости

Американским стандартом устанавливаются кривые, которые соединяют точку предела текучести  $\sigma_T$  и гиперболу Эйлера. Эти кривые являются полиномами второй степени, т.е. квадратичными парабололами.

В отечественной же практике профессор Ясинский Ф.С. собрал и обработал обширный опытный материал по продольному изгибу стержней и составил таблицы критических напряжений для стержней разной гибкости.

Опыты показали, что короткие стержни с малой гибкостью ( $0 < \lambda < 40$ ) не теряют устойчивости, а разрушаются от простого сжатия. В этом случае считают, что  $\sigma_{кр} = \sigma_T$ .

Для стержней средней гибкости ( $40 < \lambda < 100$ ) Ясинским предложена эмпирическая зависимость

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda,$$

где  $a$  и  $b$  — коэффициенты, зависящие от материала.

Так, для стали Ст.3  $a = 310$  МПа,  $b = 1,14$  МПа.

Таким образом, график состоит из трех частей: гиперболы Эйлера для стержней большой гибкости; наклонной прямой Ясинского для стержней средней гибкости и горизонтальной либо слабонаклонной прямой для стержней малой гибкости.

## Замечания о практических расчетах на устойчивость, условие устойчивости стержня

Потеря устойчивости происходит в условиях деформации сжатия стержня, поэтому условие устойчивости формулируется подобно условию прочности при сжатии. Заметим, что потеря устойчивости – пример геометрической нелинейности. Этот факт приводит к тому, что в условии устойчивости оказываются неизвестными два параметра: площадь  $A$  и коэффициент уменьшения допускаемого напряжения  $\varphi$ .

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq \varphi[\sigma] \quad (12.8)$$

Выражение (12.8) является условием устойчивости. Унифицированный характер условия (12.8) проявляется в том, что в правой части содержится обычное допускаемое напряжение при растяжении-сжатии. Известно, что потеря устойчивости часто происходит при напряжениях, значительно меньших, чем допускаемые напряжения растяжения-сжатия. Следовательно, условие (12.8) должно быть более «жестким» и коэффициент  $\varphi$  обязан быть меньше единицы ( $\varphi < 1$ ). Заметим также, что  $\varphi$  – величина переменная и на практике пользуются таблицами соответствия  $\varphi \sim \lambda$  для конструкционных материалов.

При проведении практических расчетов задаются какой-либо одной из двух величин ( $A, \varphi$ ), проводят вычисления и при необходимости уточняют расчет. Оптимальным конечным вариантом проектирования считается такой, при котором левая и правая части условия устойчивости отличаются не более чем на 5% в ту или иную сторону.

Ясно, что расчет ведется по наибольшей гибкости.

При решении задачи часто используют метод последовательного приближения, при котором в первом приближении задаются  $\varphi_1 = 0,5$ , определяют по цепочке: площадь, осевые моменты инерции, минимальный радиус инерции, гибкость. По таблице  $\varphi \sim \lambda$  устанавливается фактическое значение  $\varphi'_1$ .

$$\varphi_1 = 0,5 \rightarrow A \rightarrow I_X, I_Y \rightarrow i_X, i_Y \rightarrow i_{\min} \rightarrow \lambda \rightarrow \varphi'_1.$$

При большом отличии  $\varphi_1$  и  $\varphi'_1$  выполняется второе приближение

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1'}{2},$$

и цепочка расчетов повторяется. При необходимости выполняется третье приближение.

### **Тема 13. ВВЕДЕНИЕ В ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ**

1. Постановка проблемы, понятие о целевой функции.
2. Классический метод решения задачи оптимизации.
3. Примеры решения задач: стержни равной прочности при растяжении и изгибе, конструкции минимального веса.

===== 1 =====

#### **Постановка проблемы, понятие о целевой функции**

В практических расчетах важно не только правильно подобрать размеры конструкции, но, и в некотором конкретном смысле, стремиться к тому, чтобы она была идеальной. Например, при заданной грузоподъемности конструкция обладала бы минимальным весом.

Общий алгоритм расчета имеет составляющие:

1. Прежде всего, необходимо получить функцию, например, вес конструкции или ее потенциальную энергию деформации, выраженные через геометрические характеристики, свойства материала, размеры и т.д.

Такую функцию называют **целевой**.

2. Далее следует минимизация или максимизация целевой функции. Это означает поиск значений варьируемых параметров, при которых целевая функция принимает экстремальное значение.

Весьма часто кроме указанного прямого поиска значений варьируемых переменных следует учитывать множество условных и безусловных ограничений.

3. Полученное решение следует проанализировать на предмет корректности и единственности.

Разработано множество численных методов решений таких задач. Они приведены в прикладной математике и реализованы в виде алгоритмов и компьютерных программ. Решение задачи мультипараметрической оптимизации требует огромных размеров оперативной памяти.

### Классический метод решения задачи оптимизации

Классический метод решения задач связан с прямым поиском минимальных функций многих переменных. Достигается это решением системы уравнений частных производных.

Пусть заданная целевая функция  $f$  от варьируемых параметров  $a_i$  такая  $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$  тогда решение определяется системой уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial a_1} = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial f}{\partial a_n} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{matrix}$$

Как правило, в механике не требуется глубокого анализа решения на предмет корректности и единственности, так как существует общее доказательство по исследуемому вопросу.

### Примеры решения задач: стержни равной прочности при растяжении и изгибе, конструкции минимального веса

Рассмотрим ряд практически важных задач, связанных с оптимальным проектированием.

**Задача 1.** Имеется сжатая колонна (труба) (рис. 13.1). Кроме сил собственного веса на верхнее сечение действует также сила  $F$ . Площадь верхнего сечения  $A_0$ . Длина колонны  $l$ . Требуется найти форму колонны (трубы), чтобы все сечения были равнопрочные по отношению к верхнему сечению. Удельный вес материала колонны  $\gamma$ .

*Решение.* Рассматривая элемент бруса  $dz$ , видим, что сжимающая сила в верхнем поперечном сечении меньше таковой в сечении ниже на величину веса участка  $dz$ . Но так как напряжение в обоих сечениях одно и то же и равно  $\sigma_0$ , то разница  $dA$  в площади поперечного сечения должна быть такой, чтобы компенсировать разницу в сжимающей силе. Следовательно,

$$\sigma_0 dA = \gamma \cdot A(z) dz,$$

где  $\sigma_0 = \frac{F}{A_0} = const;$

$\gamma \cdot A(z)dz$  – вес элемента  $dz$ .

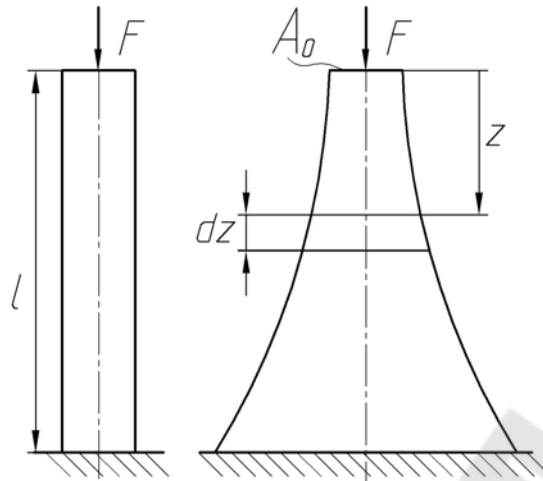


Рис. 13.1. Расчетная схема

Разделив полученное уравнение на  $A(z)\sigma_0$  (внутреннее усилие) и, проинтегрировав, получим

$$\int \frac{\sigma_0 dA}{A(z)\sigma_0} = \int \frac{\gamma \cdot A(z)dz}{A(z)\sigma_0}; \quad \int \frac{dA}{A(z)} = \int \frac{\gamma \cdot dz}{\sigma_0}; \quad \ln A(z) = \frac{\gamma \cdot z}{\sigma_0} + C_1;$$

$$A(z) = Ce^{\frac{\gamma \cdot z}{\sigma_0}},$$

где  $e$  – основание натуральных логарифмов;

$$C = e^{C_1}$$

При  $z = 0$  это уравнение дает площадь поперечного сечения наверху колонны.

$$A(z = 0) = C_0$$

Но так как площадь наверху колонны можно выразить через прикладываемую силу  $A_0 = \frac{F}{\sigma_0}$ , следовательно  $C_0 = \frac{F}{\sigma_0}$ , поэтому

$$A(z) = \frac{F}{\sigma_0} e^{\frac{\gamma \cdot z}{\sigma_0}}.$$

Данное выражение можно представить через площадь верхнего сечения колонны

$$A(z) = A_0 e^{\frac{\gamma \cdot z \cdot A_0}{F}}.$$

На практике принимают компромиссное решение между точным результатом теории и возможностями имеющихся технологий. В условиях данной задачи компромисс может быть в изготовлении колец

колоны (частей трубы), площадь которых меняется как у конуса, но итоговый результат близок к теоретическому.

**Задача 2.** Каковы сечения стержней 1 и 2 при фиксированном вылете  $l$  (рис. 13.2). Стержни конструкции должны быть равнопрочными, а угол  $\alpha$  должен обеспечивать минимальный вес.

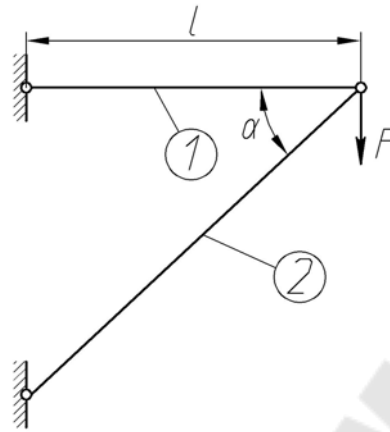


Рис. 13.2. Расчетная схема

*Решение.* Внутренние усилия в стержнях определим рассмотрев узел с приложенной силой  $F$  (рис. 13.3).

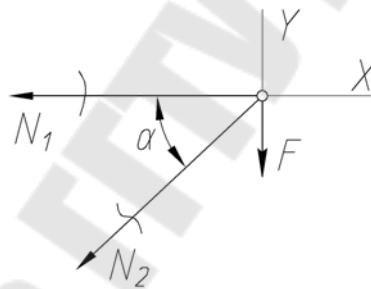


Рис. 13.3. К условиям равновесия

$$\sum F_X = 0; \quad N_1 = N_2 \cos \alpha \quad (13.1)$$

$$\sum F_Y = 0; \quad F = N_2 \sin \alpha \quad (13.2)$$

$$N_2 = \frac{F}{\sin \alpha}; \quad N_1 = \frac{F}{\sin \alpha} \cos \alpha; \quad N_1 = \frac{F}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Равнопрочность стержней означает, что напряжения в стержнях одинаково и постоянно.

$$\sigma_0 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{N_2}{A_2} = \operatorname{const}$$

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{F}{\operatorname{tg} \alpha \cdot A_1} \quad A_1 = \frac{F}{\sigma_0 \operatorname{tg} \alpha}$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{F}{\sin \alpha \cdot A_2} \quad A_2 = \frac{F}{\sigma_0 \sin \alpha}.$$

Вес конструкции в условиях постоянной плотности материала пропорционален ее объему, поэтому найдем функцию объема

$$V = l_1 \cdot A_1 + l_2 \cdot A_2;$$

$$l_1 = l, \quad l_2 = \frac{l}{\cos \alpha};$$

$$V = l \cdot \frac{F}{\sigma_0 \operatorname{tg} \alpha} + \frac{l}{\cos \alpha} \cdot \frac{F}{\sigma_0 \sin \alpha} = \frac{lF}{\sigma_0} \left[ \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{1}{\cos \alpha \cdot \sin \alpha} \right].$$

Минимизируя функцию объема конструкции, получим минимальный угол

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} = 0, \quad \alpha_{\min} = 55^\circ.$$

**Задача 3.** Дана консольная балка, нагруженная силой  $F$ , поперечное сечение – прямоугольник со сторонами  $b$  и  $h$  (рис. 13.4). Найти закон изменения ширины сечения  $b(z)$ , такой, при котором сечения балки равнопрочные (напряжения в каждом сечении одинаковы и равны  $\sigma_0$ ).

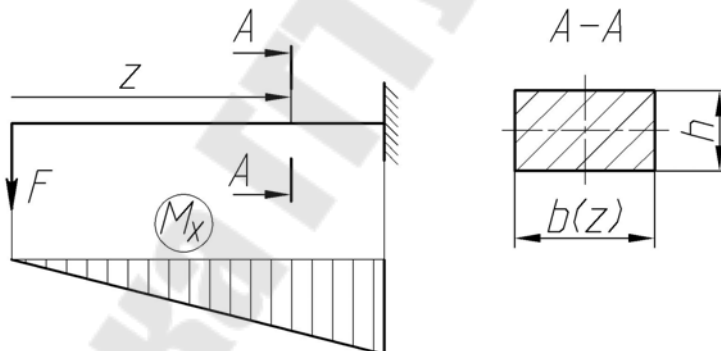


Рис. 13.4 Расчетная схема

Осейвой момент сопротивления изгибу

$$W_X = \frac{b(z)h^2}{6};$$

$$\sigma = \frac{M_X}{W_X} = \frac{6Fz}{b(z)h^2} = \sigma_0;$$

$$b(z) = \frac{6Fz}{\sigma_0 h^2}.$$



Технологичность предусматривает в конечном сечении не нулевую ее площадь, а значит и ширину  $b$ . Поэтому окончательно имеем:  
 $z = 0;$                      $b = b_0$

$$b(z) = \frac{6F}{\sigma_0 h^2} \cdot z + b_0.$$

Результаты проведенного анализа имеют важное практическое значение в вопросе устройства рессоры, расчетная схема которой представлена на рисунке 13.5. Заметим, что речь идет о равнопрочности сечений по нормальным напряжениям.

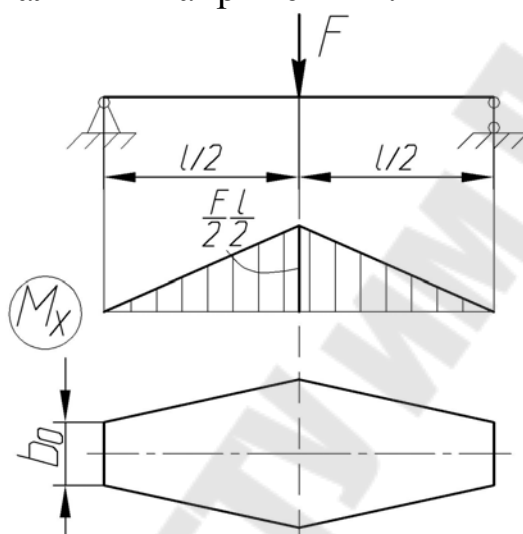


Рис. 13.5. Расчетная схема

Можно также получить результат относительно касательных напряжений

$$\tau_{\max} = \frac{3Q}{2bh} \quad b(z) = \frac{3Q}{2h\tau_0}$$

Результат решения задачи не изменится, если форму равнопрочной балки выполнить более технологичной: полученная форма разрезается на полосы (листы) и укладывается в комплект. Единственным условием соответствия схем является отсутствие трения между листами.

Можно изменить условие задачи так, чтобы подбирать переменную высоту  $h(z)$ , при постоянной ширине

$$h(z) = \sqrt{\frac{6F \cdot z}{\sigma_0 \cdot b}}.$$

Форма сечения в этом случае такая, как показана на рисунке 13.6 (парабола).

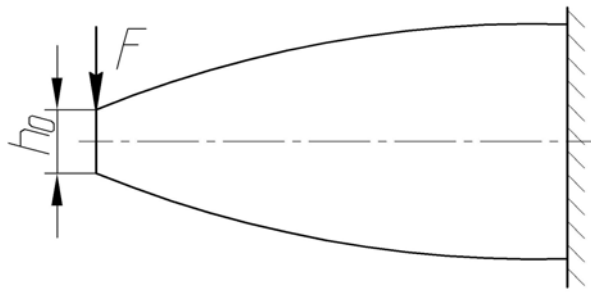


Рис. 13.6. Форма стержня

## Тема 14. ПРОЧНОСТЬ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКИ МЕНЯЮЩИХСЯ НАПРЯЖЕНИЯХ

1. Постановка проблемы, непригодность теории статических расчетов к задачам о переменном воздействии.
2. Характеристики циклов.
3. Экспериментальный подход, кривая усталости и предел выносливости.
4. Диаграмма предельных амплитуд.
5. Влияние различных факторов на прочность при циклическом нагружении. Коэффициент запаса при циклическом нагружении и его определение.

1

### Постановка проблемы, непригодность теории статических расчетов к задачам о переменном воздействии

Многие детали машин при работе испытывают напряжения, циклически изменяющиеся во времени. Например, такие напряжения испытывают детали кривошипно-шатунного механизма двигателей внутреннего сгорания, валы трансмиссий, лопатки турбин, рельсы и оси железнодорожных вагонов, пролетные строения мостов и др.

Под действием переменных нагрузок элементы конструкций разрушаются при значительно меньших напряжениях, чем под действием статических нагрузок. Как правило, разрушение деталей происходит без видных остаточных деформаций даже в тех случаях, когда они изготовлены из пластических материалов.

Поэтому возникает проблема расчета таких систем, так как прочностные расчеты статических систем для них непригодны.

Рассмотрим распространенную схему оси транспортного средства (вагона) (рис. 14.1). Ось, вращаясь вместе с колесами, испытывает циклически изменяющиеся напряжения, хотя внешние силы сохра-

няют свою величину. Происходит это в результате того, что частицы вращающейся оси оказываются попеременно то в растянутой, то в сжатой зонах.

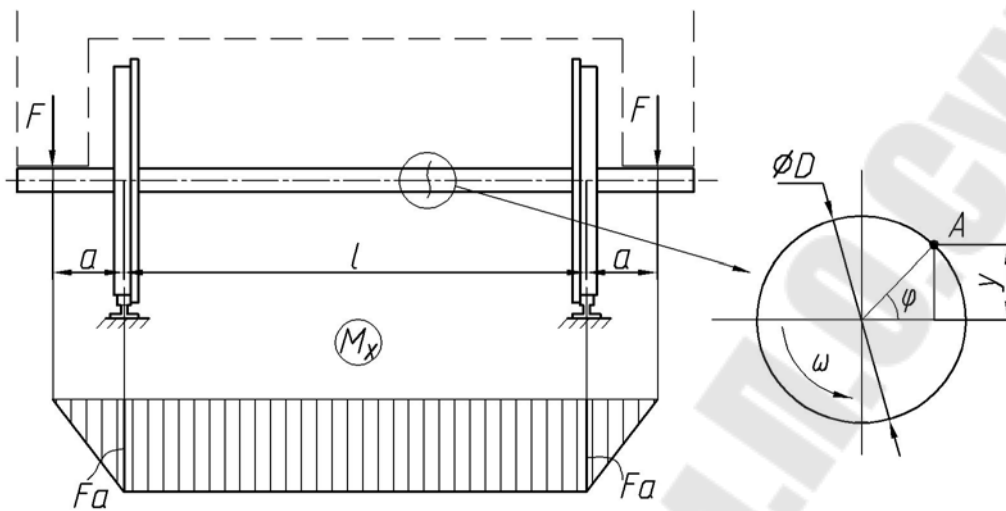


Рис. 14.1. Схема оси транспортного средства

В точке  $A$  поперечного сечения напряжение будет

$$\sigma_A = \frac{M_X}{I_X} y_A.$$

Расстояние  $y$  от точки  $A$  до нейтральной оси меняется во времени

$$y = \frac{D}{2} \sin \omega t,$$

где  $\omega$  – угловая скорость вращения колеса. Следовательно

$$\sigma(t) = \frac{FaD}{I_X} \frac{D}{2} \sin \omega t.$$

Таким образом, нормальное напряжение в сечениях оси меняется по синусоиде с амплитудой

$$\sigma_a = \frac{FaD}{2I_X}.$$

Опыт показывает, что при переменных напряжениях после некоторого числа циклов может наступить разрушение детали, т.е. материал как бы «устает» от действия таких напряжений. Поэтому процесс разрушения материалов при действии переменных напряжений называется *усталостью*, а способность материалов сопротивляться разрушению при их действии – *выносливостью*.

### Характеристики циклов

Напряжения в элементах конструкций могут изменяться во времени закономерно или хаотически (рис. 14.2).

Совокупность всех значений напряжений за время одного периода называется *циклом напряжений*.

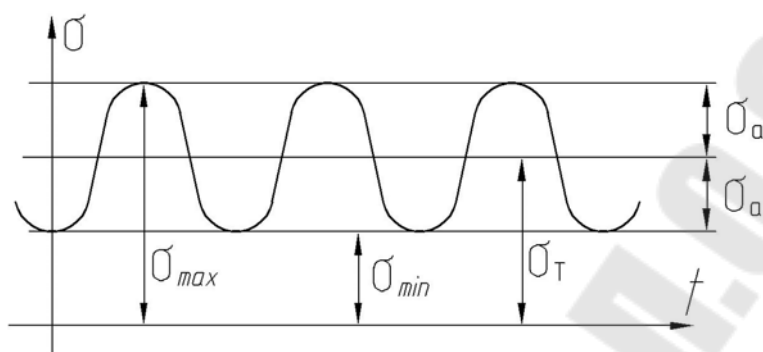


Рис. 14.2. Диаграмма изменения напряжения от времени

Любой цикл может быть представлен как результат наложения постоянного напряжения  $\sigma_T$  на напряжение, меняющееся по симметричному циклу с амплитудой  $\sigma_a$ .

$$\sigma_T = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} \quad \sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}.$$

Эксперименты показывают, что на процесс разрушения определяющее влияние оказывают наибольшие и наименьшие напряжения цикла, а не закон изменения напряжений  $\sigma(t)$ .

Отношение наибольшего и наименьшего напряжений называется *коэффициентом асимметрии цикла*.

$$\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}} = R.$$

В случае, когда  $\sigma_{\max} = -\sigma_{\min}$   $R = -1$  и цикл называется симметричным.

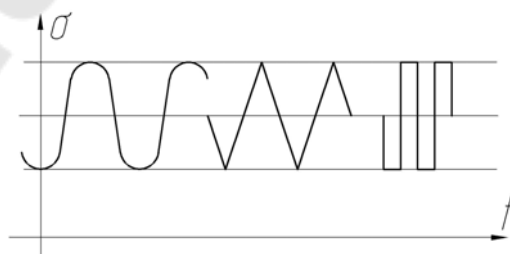


Рис. 14.3. Подобные циклы

Циклы, для которых коэффициенты симметрии  $R$  одинаковы, называются *подобными*. Следовательно, циклы, показанные на рисунке 14.3, являются равнозначными.

### Экспериментальный подход, кривая усталости и предел выносливости

Утвердились два подхода к исследованию усталости:

1. Построение теории, основанной на статистике отказов деталей машин и вероятности событий (теория вероятности). Для получения правдоподобных данных должны анализироваться огромные количества событий.

2. Экспериментально-эмперический подход. Обобщаются результаты экспериментов с тем, чтобы получить удобные для инженерной практики эмпирические соотношения. Однако, такие эксперименты очень дороги и трудоемки.

Эксперименты проводят в основном по симметричному циклу, варьируя при этом нагрузкой и отслеживая число циклов до разрушения.

Полученные в результате испытаний диаграммы называются *кривыми усталости* (рис. 14.4).

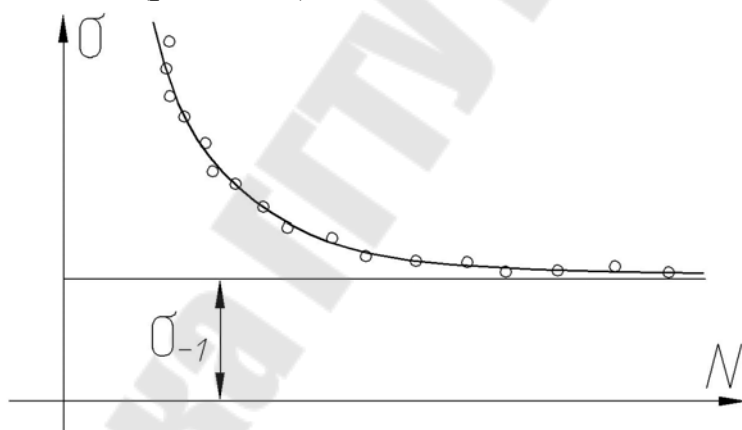


Рис. 14.4. Кривая усталости

Опыт показывает, что если во время испытания при нормальной температуре стальной образец не разрушается до  $10^7$  циклов (54 часа при 3000 об/мин), то он не разрушится и при более длительном испытании. Поэтому такое количество циклов принимают в качестве пороговой или определяющей величины, при достижении которой испытания останавливаются, и называют *базой испытаний*.

Наибольшее значение максимального напряжения цикла, при котором образец не разрушается при достижении базы испытания, называется *пределом усталости* или *пределом выносливости*.

Предел выносливости обозначается через  $\sigma_R$ , где индекс  $R$  соответствует коэффициенту асимметрии цикла. Так, для симметричного цикла обозначение предела выносливости принимает вид  $\sigma_{-1}$ , для пульсационного  $\sigma_0$  и т.д.

Практика показывает, что расходы, связанные с ремонтом машин и устройств весьма значительны. Идеальным вариантом следует считать такой, при котором сложная машина полностью выходила бы из строя с разрушением большинства ее отдельных составляющих. В связи с этим удобно рассматривать так называемый ограниченный предел выносливости  $\sigma_{RN}$ , где  $N$  – заданное число циклов, меньшее базового.

Также для испытаний на усталость характерен большой разброс экспериментальных точек. Поэтому был сделан ряд попыток связать эмпирическими формулами предел выносливости с известными механическими характеристиками материалов. Укажем некоторые из них:

$\sigma_{-1} = (0,4..0,5)\sigma_{вр}$  – углеродистые и легированные стали;

$\sigma_{-1} = 400 + \frac{1}{6}\sigma_{вр}$  – высокопрочные стали;

$\sigma_{-1} = (0,25..0,5)\sigma_{вр}$  – цветные металлы;

$\tau_{-1} = 0,56\sigma_{-1}$  – традиционные стали;

$\tau_{-1} = 0,8\sigma_{-1}$  – хрупкие материалы.

Указанные соотношения и все им подобные следует, однако, применять с большой осторожностью, поскольку они получены только для определенных материалов и в определенных условиях испытаний (при изгибе, при кручении)

===== 4 =====

#### Диаграмма предельных амплитуд

Огромное число деталей работает в условиях несимметричных циклов, поэтому указанной кривой усталости недостаточно. Образцы в условиях несимметричных циклов испытывают обычно не на изгиб, а на растяжение, сжатие или кручение. Целью экспериментов является получение диаграммы предельных амплитуд (рис. 14.5).

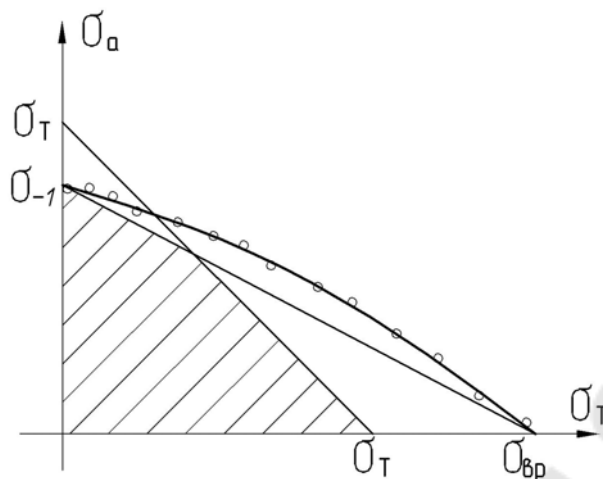


Рис. 14.5. Диаграмма предельных амплитуд

В результате серии испытаний устанавливается предельное значение  $\sigma_a$ , соответствующее некоторому напряжению  $\sigma_m$ . Полученный результат изображается точкой в системе координат  $\sigma_m, \sigma_a$ . Продолжая такие испытания дальше, получаем множество точек, через которые проводится предельная кривая, характеризующая прочностные свойства материала в условиях несимметричных циклов.

Заштрихованная область является зоной безопасных циклов по усталости и текучести.

===== 5 =====

**Влияние различных факторов на прочность при циклическом нагружении. Коэффициент запаса при циклическом нагружении и его определение**

Практика показывает, что наличие кривой усталости и диаграммы предельных амплитуд не достаточно для описания конкретных деталей машин. К примеру, при статических нагружениях поведение любых деталей определяется механическими характеристиками  $E, \sigma_T, G, \mu$ .

Существенную роль играет геометрия реальных деталей, шероховатость поверхности и др. Поэтому в окончательных расчетах эти, так называемые концентрации напряжений, подлежат учету.

*Концентрацией напряжений* называется явление увеличения напряжений по сравнению с номинальными в местах изменения формы детали или сечения.

Влияние концентрации напряжений на сопротивление усталости оценивается эффективными коэффициентами концентрации  $k_\sigma$  и  $k_\tau$ ,

определенных при действии в поперечном сечении детали только нормальных или только касательных напряжений.

В условиях симметричного цикла

$$k_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma'_{-1}} \geq 1, \quad k_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\tau'_{-1}} \geq 1,$$

где  $\sigma_{-1}$  и  $\tau_{-1}$  – пределы выносливости, определенные на образце;  
 $\sigma'_{-1}$  и  $\tau'_{-1}$  – пределы выносливости, определенные на детали с источником концентрации.

Эффективные коэффициенты для различных источников концентрации определяются экспериментально. Результаты эксперимента даются в форме графиков и таблиц.

Источниками концентрации могут быть:

- отверстие в вале или полосе;
- переход от одного диаметра к другому;
- выточки в вале;
- шпоночная канавка;
- шлицы;
- резьба.

## **Тема 15. ДИНАМИЧЕСКОЕ НАГРУЖЕНИЕ. УДАР**

1. Понятие о динамическом воздействии.
2. Приближенная теория удара, основные положения.
3. Влияние массы стержня на напряжения при ударе.

===== 1 =====

### **Понятие о динамическом воздействии**

**Динамическим** называется такой вид нагружения, при котором приложенные к элементам конструкции внешние нагрузки значительно изменяются за малые промежутки времени. При действии динамической нагрузки движение тела совершается с ускорением или происходит резкое изменение скоростей соприкоснувшихся тел. При ускоренном движении тела на него будут действовать силы инерции, которые должны учитываться в расчете.

Расчеты при динамической нагрузке, вызывающей движение тела с ускорением, ведутся на основе принципа Д'Аламбера. Согласно этому принципу всякое движущееся тело в любой момент времени можно рассматривать как находящееся в состоянии равновесия под действием внешних сил и сил инерции. Сила инерции равна произве-



дению массы тела на ускорение и направлена в сторону, противоположную ускорению.

То есть, если известны силы инерции, то внутренние усилия определяются обычным способом – методом сечений.

## ===== 2 =====

### **Приближенная теория удара, основные положения**

**Ударом** называется такая разновидность динамического нагружения, при которой обмен энергией между соударяемыми телами происходит за весьма малый промежуток времени ( $\Delta t \rightarrow 0$ ). Время удара измеряется в тысячных, а иногда миллионных долях секунды, а сила удара достигает большой величины.

За очень малый промежуток времени скорость ударяющегося тела становится равной нулю. В этот момент напряжения и деформации в системе достигают наибольших значений.

Система, подвергающаяся удару, может испытывать различные деформации: сжатие, растяжение, изгиб, кручение, изгиб с кручением и др. Поэтому различают продольный, поперечный и скручивающий удары.

Точное решение задачи о напряжениях и деформациях при ударе затруднительно, потому что неизвестен закон изменения скорости при соударении тел, и, следовательно, действующих при ударе нагрузок, неизвестны силы сопротивления при ударе, чрезвычайно сложен закон распределения скорости деформации в системе, воспринимающей удар.

В практике применяют упрощенные методы расчета, основанные на следующих допущениях:

1. Деформации стержня от ударяющего груза распространяются по всей длине стержня, они подчиняются закону Гука и подобны деформациям, возникающим от статического приложения того же груза. Поэтому связь между динамическими силами и перемещениями остается такой же, как и при статической нагрузке.

2. Опорные устройства, как правило, полагают абсолютно жесткими.

3. Ударяющее тело является абсолютно жестким и при ударе не отскакивает от системы.

Изучение напряжений и деформаций при ударе основано на использовании закона сохранения энергии. При этом полагается, что

кинетическая энергия падающего груза численно равна потенциальной энергии деформации упругой системы

$$T = U_{\delta}. \quad (15.1)$$

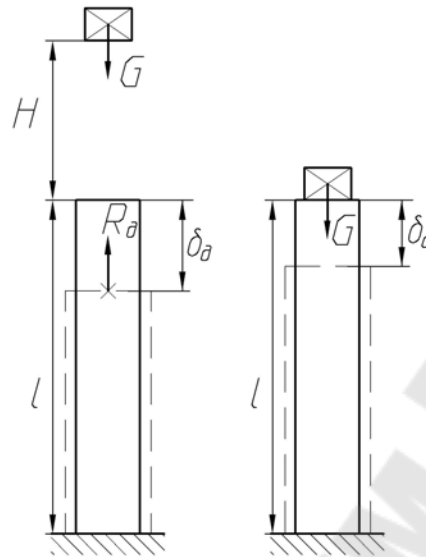


Рис. 15.1. Расчетная схема

Груз весом  $G$  падает с высоты  $H$  и ударяется о стержень (рис. 15.1), вызывая его сжатие на величину  $\delta_d$ , которая больше деформации стержня при статическом воздействии того же груза.

Кинетическая энергия падающего груза будет измеряться произведенной работой, и равна

$$T = G(H + \delta_d). \quad (15.2)$$

Потенциальная энергия при статической деформации имеет вид

$$U_c = \frac{1}{2} G \delta_c. \quad (15.3)$$

Статическая деформация  $\delta_c$  может быть вычислена по закону Гука в общем виде

$$G = k \delta_c \quad \delta_c = \frac{G}{k} \quad k = \frac{G}{\delta_c}.$$

где  $k$  – коэффициент пропорциональности.

При простом растяжении или сжатии деформация определяется по формуле

$$\delta_c = \frac{Gl}{EA},$$

откуда  $\frac{G}{k} = \frac{Gl}{EA}$  и  $k = \frac{EA}{l}$ .

Таким образом, формула (15.3) может быть переписана так:

$$U_c = \frac{1}{2} k \delta_c^2. \quad (15.4)$$

Реакция  $R_d$  системы на действие упавшего груза  $G$  является следствием развития деформации  $\delta_d$ . Если деформация не выходит за зону упругости, то реакция с ней связана законом Гука:

$$R_d = k \delta_d \quad \delta_d = \frac{R_d}{k}.$$

Тогда потенциальная энергия  $U_d$  может быть определена аналогично  $U_c$ :

$$U_d = \frac{1}{2} R_d \delta_d = \frac{1}{2} k \delta_d^2 = \frac{1}{2} \frac{G}{\delta_c} \delta_d^2.$$

Подставляя полученные выражения энергий в (15.1), получим:

$$G(H + \delta_d) = \frac{1}{2} \frac{G}{\delta_c} \delta_d^2. \quad (15.5)$$

Выражение (15.5) можно представить в виде квадратного уравнения

$$\delta_d^2 - 2\delta_c \delta_d - 2H\delta_c = 0.$$

Решая его относительно  $\delta_d$ , получим

$$\delta_d = \delta_c \pm \sqrt{\delta_c^2 + 2H\delta_c}$$

или, удерживая перед корнем для определения наибольшей величины деформации системы в направлении удара знак плюс, получаем

$$\delta_d = \delta_c \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_c}} \right) = K_d \delta_c,$$

где  $K_d$  – динамический коэффициент.

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_c}}. \quad (15.6)$$

Так как напряжения и усилия по закону Гука пропорциональны деформации, то

$$\begin{aligned} \sigma_d &= K_d \sigma_c; \\ R_d &= K_d F_c, \end{aligned}$$

где  $\sigma_c$ ,  $F_c$  – статическое напряжение и усилие соответственно.

Как видно из формулы (15.6) динамический коэффициент зависит от статической деформации  $\delta_c = \frac{Gl}{EA}$ . Следовательно, напряжения при ударе зависят не только от площади поперечного сечения стержня, но и от длины стержня и жесткости материала. Чем больше длина  $l$ , тем меньшими будут напряжения при ударе, а с увеличением модуля упругости  $E$  напряжения увеличиваются.

Рассмотрим частные случаи.

1. При мгновенном приложении нагрузки, когда  $H = 0$ ,  $K_D = 2$ , а следовательно, напряжения и перемещения в два раза больше, чем при статическом приложении.

2. Если высота падения груза  $H$  велика, то единицей под корнем в выражении (15.6) можно пренебречь

$$K_D = 1 + \sqrt{\frac{2H}{\delta_c}}.$$

3. При очень больших величинах  $\frac{2H}{\delta_c}$  можно пренебречь и единицей перед корнем

$$K_D = \sqrt{\frac{2H}{\delta_c}}.$$

Если известна скорость падения груза, то динамический коэффициент может быть выражен через скорость.

При свободном падении

$$\frac{mv^2}{2} = mgH \quad v^2 = 2gH \quad 2H = \frac{v^2}{g}$$

$$K_D = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g\delta_c}}.$$

Кроме того

$$\frac{2H}{\delta_c} = \frac{GH}{\frac{1}{2}G\delta_c} = \frac{T_0}{U_c},$$

где  $T_0 = GH$  – энергия ударяющего тела к моменту начала удара.

В связи с этим, выражение для динамического коэффициента может быть представлено и в таком виде:

$$K_{\text{д}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{T_0}{U_c}} \quad (15.7)$$

===== 3 =====

### Влияние массы стержня на напряжения при ударе

Исследуем, как отразится на величине расчетных напряжений при ударе учет массы ударяемого тела. В качестве примера рассмотрим случай удара при изгибе (рис. 15.2).

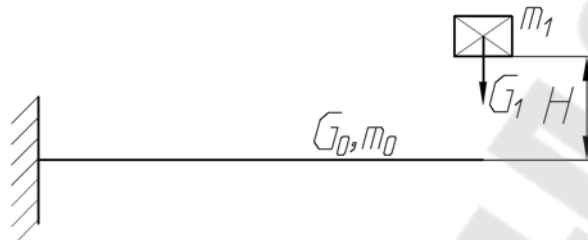


Рис. 15.2. Расчетная схема

Груз весом  $G_1$  с массой  $m_1$ , падая на балку, в начальный момент удара имеет скорость

$$v_1 = \sqrt{2gH},$$

балка в этот момент имеет скорость  $v_0 = 0$  (неподвижна). В результате соударения за короткий промежуток времени все элементы балки приобретут некоторую (притом разную) скорость, а груз  $G_1$  соответственно замедлит свое движение. В месте удара скорости груза и соприкасающихся с ним волокон балки будут одинаковы и равны  $v_{\text{ср}}$ , которую можно определить по теореме Карно о потере кинетической энергии при абсолютном неупругом ударе (кинетическая энергия, потерянная системой при ударе, равна той кинетической энергии, которую имела бы система, если бы её точки двигались с потерянными скоростями).

$$v_{\text{ср}} = \frac{m_1 v_1}{m_1 + \alpha m_0} = \frac{G_1 v_1}{G + \alpha G_0} \quad (15.8)$$

где  $G_1, m_1$  – вес и масса груза;

$G_0, m_0$  – вес и масса балки;

$\alpha$  – некоторый коэффициент приведения массы (меньший единицы), который приходится вводить вследствие того, что не все части ударяемого тела (в данном случае балки) после соударения дви-

жуются с одинаковой скоростью  $v_{\text{ср}}$ . В случае растяжения или сжатия

$$\alpha = \frac{1}{3}, \text{ при изгибе балки } \alpha = \frac{17}{35} \approx \frac{1}{2}.$$

Из (15.8) видно, что

$$v_{\text{ср}} < v_1 = \sqrt{2gH},$$

чем больше будет масса ударяемого тела (балки)  $m_0$ , тем меньше будет  $v_{\text{ср}}$  по сравнению с  $v_1$ .

Кинетическая энергия, остающаяся в системе груз-балка после соударения равна

$$T_1 = \frac{m_1 v_{\text{ср}}^2}{2} + \frac{\alpha m_0 v_{\text{ср}}^2}{2},$$

с учетом (15.8)

$$T_1 = \frac{1}{2} (m_1 + \alpha m_0) \frac{m_1^2 v_1^2}{(m_1 + \alpha m_0)^2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} \frac{m_1}{m_1 + \alpha m_0} = T_0 \frac{1}{1 + \alpha \frac{m_0}{m_1}},$$

$$T_1 = \frac{T_0}{1 + \alpha \frac{m_0}{m_1}},$$

т.е. она в  $1 + \alpha \frac{m_0}{m_1}$  раз меньше кинетической энергии груза при ударе

по балке без учета массы. Таким образом, при учете массы ударяемого тела динамический коэффициент должен быть вычислен не по ранее полученным формулам, а по формуле (15.9)

$$K_{\text{д}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{T_0}{U_{\text{с}} \left(1 + \alpha \frac{m_0}{m_1}\right)}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{\text{с}} \left(1 + \alpha \frac{m_0}{m_1}\right)}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{v_1^2}{g \delta_{\text{с}} \left(1 + \alpha \frac{m_0}{m_1}\right)}}$$

Таким образом, учет массы ударяемого тела снижает величину расчетных напряжений при ударе.

## Тема 16. МЕТОДЫ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ

### §16.1. Метод конечных разностей

1. Персональные компьютеры и расчеты на прочность.
2. Основная идея метода конечных разностей: замена дифференциального уравнения системой уравнений в разностях.

## **Персональные компьютеры и расчеты на прочность**

Основу современных систем проектирования составляют численные методы решения задач механики. Все основные численные алгоритмы реализованы в виде программного обеспечения с богатым интерфейсом.

Современные системы проектирования принято классифицировать по признаку функциональности:

- САД-системы – геометрическое моделирование;
- САЕ-системы – расчеты на прочность.

По отношению к изучаемому предмету, можно отметить САЕ-системы. Их вычислительное ядро основано на методе конечных элементов (МКЭ) – универсальный физический прием для расчета сложных, не имеющих аналитического решения задач.

Опыт последних столетий показывает, что не существует аналитического выражения, которое описывало бы деформирование трехмерного тела под действием сложной нагрузки. Вероятность того, что будет найдено такое единое физическое уравнение, крайне мала. Указанная проблема решается следующим образом:

1) так как элементарная теория деформирования одномерных тел получила хорошие экспериментальные подтверждения, то именно такие решения и следует принять за основу;

2) трехмерное тело следует представить композицией из одномерных структур, «склеить» их математически и на основе точных простейших элементов получить решение для 3D тела.

Указанная концепция реализована с помощью метода конечных элементов. Этот метод имеет богатую историю развития и концептуально основывается на подходе Релея-Ритца.

Можно заметить также, что современные системы проектирования работают по принципу «черного ящика»: они имеют очень удобный визуальный интерфейс и мощные численные алгоритмы, качество вычислений по которым доведено до стандарта ISO.

## **Основная идея метода конечных разностей: замена дифференциального уравнения системой уравнений в разностях**

Метод конечных разностей основан на замене точного выражения для производной

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (16.1)$$

ее приближенным значением

$$y' \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (16.2)$$

Работа с соотношением (16.2) предполагает табличное задание функции и производной.

Отвлечемся от механики и подробно исследуем механизм такой замены (рис. 16.1).

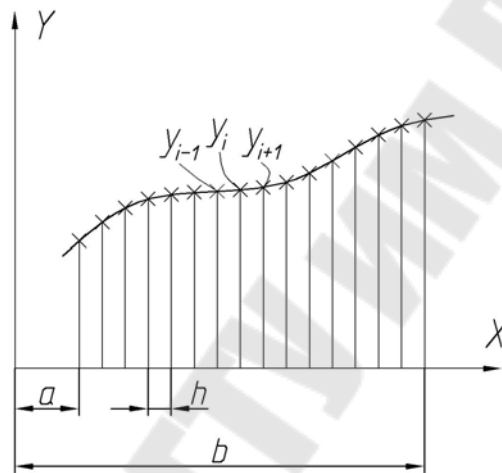


Рис. 16.1. Разбиение функции

$$\Delta x = h = \frac{b - a}{n},$$

где  $n$  – число разбиений.

Тогда приближенная производная может быть выражена одним из способов

- 1)  $y' = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$
- 2)  $y' = \frac{y_i - y_{i-1}}{h}$
- 3)  $y' = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$

Особенностью такого подхода является необходимость знания дополнительной крайней точки слева или справа. Эта задача легко решается приближением функции влево или вправо (интерполяция, аппроксимация).



Обратимся к элементарной теории деформирования

$$\begin{aligned} EA w' &= N; \\ GAS' &= Q; \\ GI_p \phi'_X &= M_{кр}; \\ EI_X \phi' &= M_X. \end{aligned}$$

В качестве примера выберем растяжение. Если правая часть известна

$$q = \frac{dN}{dz}, \quad N = \int q dz,$$

то деформация определяется непосредственно через внутренние усилия.

Если же правая часть неизвестна, то, продифференцировав левую и правую части уравнения, приходим к виду через внешние усилия.

$$(EA w')' = q.$$

Далее строится численное решение, в любом случае которого правая часть считается известной.

Тогда для  $n+1$  неизвестных значений искомой функции  $y(z)$  получаем систему уравнений вида

$$\begin{aligned} EA y' &= N \\ \left\{ \begin{aligned} E_1 A_1 (y_2 - y_1) &= \frac{b-a}{n} N_1 \\ E_2 A_2 (y_3 - y_2) &= \frac{b-a}{n} N_2 \\ \dots & \\ E_7 A_7 (y_8 - y_7) &= \frac{b-a}{n} N_7 \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

До сих пор проблема рассматривалась с общих позиций, но в конкретной задаче следует учесть граничные условия (рис. 16.2).

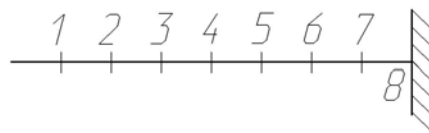


Рис. 16.2. Разбиение стержня на участки

$$y_8 = 0.$$

Система уравнений становится замкнутой.

Рассмотренная задача является весьма актуальной в инженерной практике, поскольку

$$w = \int \frac{Ndz}{EA}$$

при переменной жесткости на растяжение может не выражаться в элементарных функциях.

Очевидно, что чем больше число разбиений  $n$  используется, тем точнее следует ожидать результат.

## §16.2. Метод Рэлея-Ритца

1. Энергетический подход Рэлея-Ритца.
2. Пример расчета.

===== 1 =====

### Энергетический подход Рэлея-Ритца

В каждом дифференциальном уравнении разыскивается искомая функция средствами математического анализа. Что делать, если единой такой функции деформирования трехмерного тела, либо нет вообще, либо способ ее нахождения не ясен и сложен?

Английский ученый лорд Рэлей (Джон Уильям Стретт) и швейцарский физик и математик Вальтер Ритц предложили подход, заключающийся в применении такой функции с самого начала решения.

Например, есть балка, нагруженная распределенной нагрузкой (рис. 16.3). Однако по каким-то причинам найти точное аналитическое решение не удастся, или его поиск весьма затруднителен.

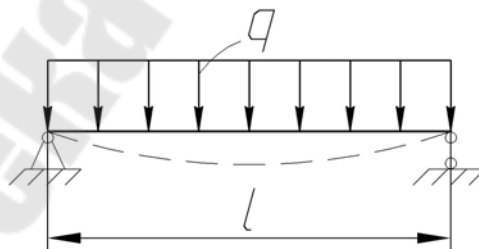


Рис. 16.3. Расчетная схема

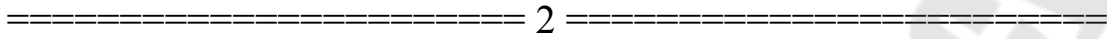
Исходя из общей картины деформирования, можно выбрать примерный вид такой функции. Такие функции принято называть *функциями формы*.

В выбранном аналитическом выражении содержатся неизвестные коэффициенты, подлежащие определению. Они то и становятся искомыми задачи.

В подходе Рэлея-Ритца из общезначимых соотношений полагается, что эти коэффициенты имеют такие значения, при которых си-

стема стремится принять устойчивое состояние. Конечно, указанные коэффициенты должны также обеспечивать и корректность граничных условий.

Решение же задачи относительно перемещений получается путем минимизации полной (потенциальной) энергии деформации всей системы.



### Пример расчета

Рассмотрим пример с двухопорной балкой более подробно (рис. 16.4).

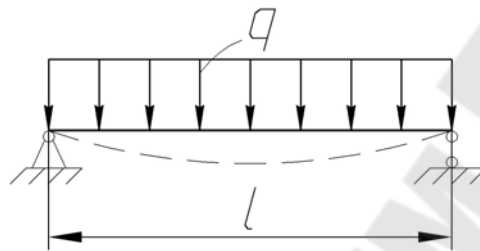


Рис. 16.4. Расчетная схема

#### 1. Выбор функции формы.

Одним из вариантов может служить принятие функции формы в виде

$$w = \delta \sin \frac{\pi z}{l}.$$

при  $z = 0$   $w = 0$ ;

при  $z = l$   $w = 0$ .

#### 2. Составление выражения для потенциальной энергии всей системы.

Опуская сложный вопрос формирования такой энергии, скажем лишь, что она вычисляется по формуле

$$\Pi = U - A,$$

где  $U$  – энергия деформации системы;

$A$  – работа внешних сил.

Энергия деформации системы

$$U = \int \frac{M_x^2 dz}{2EI_x}, \quad EI_x w'' = M_x, \quad U = \frac{EI_x}{2} \int (w'')^2 dz, \quad EI_x = const.$$

Определим производные функции формы

$$w' = \delta \frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi z}{l}, \quad w'' = -\delta \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi z}{l}.$$

Тогда

$$U = \frac{EI_X}{2} \int_0^l \frac{\delta^2 \pi^4}{l^4} \sin^2 \frac{\pi z}{l} dz;$$

$$U = \frac{EI_X \pi^4 \delta^2}{4l^3}.$$

Работа внешних сил

$$A = \int_0^l q(z)w(z)dz; \quad q(z) = q_0 = const.$$

$$A = q_0 \int_0^l \delta \sin \frac{\pi z}{l} dz = q_0 \delta \left[ -\cos \frac{\pi z}{l} \frac{l}{\pi} \right]_0^l = \frac{2q_0 \delta \cdot l}{\pi};$$

$$A = \frac{2q_0 \delta \cdot l}{\pi}.$$

Потенциальная энергия всей системы

$$\Pi = \frac{EI_X \pi^4 \delta^2}{4l^3} - \frac{2q_0 \delta \cdot l}{\pi}.$$

3. Минимизация энергии и поиск неизвестного коэффициента  $\delta$ .

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \delta} = 0; \quad \frac{EI_X \pi^4}{2l^3} \delta = \frac{2q_0 \cdot l}{\pi};$$

$$\delta = \frac{4q_0 \cdot l^4}{\pi^5 EI_X}. \quad (16.3)$$

Выражение (16.3) является приближенным решением рассматриваемой задачи по методу Релея-Ритца.

Показательным будет привести точное решение для  $\delta$ . Известными методами можно получить результат

$$\delta = \frac{5q_0 \cdot l^4}{384EI_X}.$$

$$\frac{4}{\pi^5} = 0,01307; \quad \frac{5}{384} = 0,01302.$$

Известно, что точный прогиб описывается полиномом четвертой степени. Оказывается, что из синусоиды можно также сделать полином четвертой степени путем минимизации энергии системы.

### §16.3. Метод конечных элементов

Метод конечных элементов – не столько самостоятельный прием, сколько композиция из подхода Рэлея-Ритца.

Согласно этому методу трехмерное тело представляется совокупностью (каркасом) одномерных структур (стерженьков). Для каждой такой одномерной структуры выбирается функция формы. Причем, каким бы сложным не был характер деформирования трехмерного тела, функция формы для отдельного стерженька может быть весьма простой, например, полиномом второй степени. Также следует обеспечить огромное число разбиений  $n$ , что повысит точность решения.

В качестве основных неизвестных принимаются смещения в узловых точках, сопрягающих отдельные конечные элементы.

Отдельные функции формы для расположенных рядом структур должны быть связаны граничными условиями. Например, перемещение в конце десятого элемента равно перемещению в начале одиннадцатого элемента.

Учитывая характер внешнего воздействия и условия закрепления, приходят к системе уравнений вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Pi}{\partial K_1} = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial \Pi}{\partial K_n} = 0 \end{array} \right. ,$$

где  $K_1, \dots, K_n$  – коэффициенты в функциях формы.

Найденные значения этих коэффициентов определяют перемещения в сложном теле.

Для получения разрешающей системы уравнений относительно неизвестных смещений узлов можно использовать начало возможных перемещений: необходимое и достаточное условие равновесия состоит в том, что сумма работ активных приложенных сил для каждого возможного перемещения системы должна быть равна нулю.

$$\iiint_V \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dV - \iiint_V \{\delta w\}^T \{F\} dV - \iint_A \{\delta w\}^T \{p\} dA = 0$$

где  $\{F\}$ ,  $\{p\}$  – векторы объемной и поверхностной нагрузки;

$\{\delta \varepsilon\}$ ,  $\{\delta u\}$  – вариации (малые отклонения) векторов деформаций и смещений;

$T$  – верхний индекс, означающий транспонирование (замена строк в матрице на столбцы).

Или: первое слагаемое представляет собой энергию деформации под действием внутренних усилий (напряжений), второе слагаемое – работа внешних объемных усилий, третье слагаемое – работа внешних поверхностных усилий.

**Пример.** Статически неопределимая ферма (рис. 16.5).

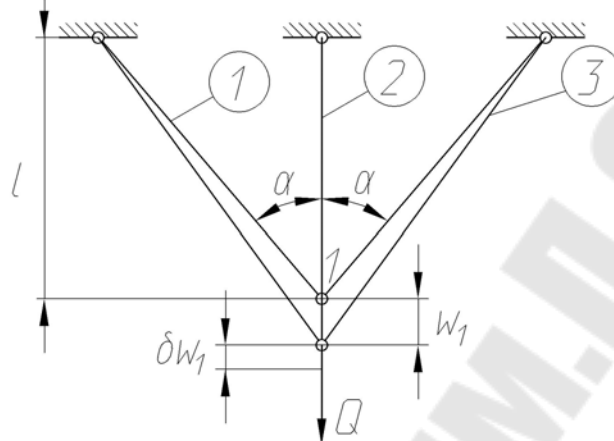


Рис. 16.5. Статически неопределимая ферма

Считаем конечными элементами стержни; узлами элементов являются шарниры. Отличным от нуля будет узловое перемещение  $w_1$ .

Деформация в элементе 2 равна

$$\varepsilon_2 = \frac{w_1}{l}.$$

Деформация в элементах 1 и 3 равна

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = \frac{w_1 \cos \alpha}{l} = \frac{w_1 \cos^2 \alpha}{l \cos \alpha}.$$

Напряжения в элементах определим через закон Гука

$$\sigma_1 = \sigma_3 = E \varepsilon_1 = E \frac{w_1 \cos^2 \alpha}{l}, \quad \sigma_2 = E \frac{w_1}{l}.$$

Начало возможных перемещений запишем без учета работы от объемных усилий (поскольку они отсутствуют)

$$\sum_{n=1}^3 \iiint_V \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dV - \iint_A \{\delta w\}^T \{p\} dA = 0. \quad (16.4)$$

В данном выражении интеграл по объему тела рассматривается как сумма интегралов по объему каждого элемента. Так как

$$\delta \varepsilon_1 = \delta \varepsilon_3 = \frac{\cos^2 \alpha}{l} \delta w_1, \quad \delta \varepsilon_2 = \frac{\delta w_1}{l},$$

то

$$\sum_{n=1}^3 \iiint_{V_n} \{\delta \varepsilon_n\}^T \{\sigma_n\} dV = 2 \frac{\cos^2 \alpha}{l} \delta w_1 \frac{E \cos^2 \alpha}{l} w_1 \frac{l}{\cos \alpha} A + \frac{1}{l} \delta w_1 \frac{E}{l} w_1 l A,$$

где  $A$  – площадь сечения стержней.

По физическому смыслу

$$\iint_A \{\delta w\}^T \{p\} dA = \delta w_1 Q$$

представляет возможную работу внешних сил при вариации смещения узла 1.

В соответствии с выражением (16.4)

$$\delta w_1 \left( \frac{EA}{l} (1 + 2 \cos^3 \alpha) w_1 - Q \right) = 0 \text{ или } \delta w_1 (K_{11} w_1 - Q) = 0,$$

$$K_{11} = \frac{EA}{l} (1 + 2 \cos^3 \alpha),$$

Так как  $\delta w_1 \neq 0$ , то получаем

$$w_1 = \frac{Q}{K_{11}} = \frac{Ql}{EA} \frac{1}{1 + 2 \cos^3 \alpha}.$$

Усилия в стержнях будут равны

$$N_1 = N_3 = \sigma_1 A = \frac{E \cos^2 \alpha}{l} \frac{Ql}{EA} \frac{1}{1 + 2 \cos^3 \alpha} A = Q \frac{\cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha},$$

$$N_2 = \sigma_2 A = \frac{E}{l} \frac{Ql}{EA} \frac{1}{1 + 2 \cos^3 \alpha} A = Q \frac{1}{1 + 2 \cos^3 \alpha}.$$

По физическому смыслу  $K_{11}$  представляет усилие, которое следует приложить в узле 1 для единичного смещения узла ( $w_1 = 1$ ). Величина  $K_{11}$  называется коэффициентом жесткости.

## СОДЕРЖАНИЕ

Тема 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ.....	3
Тема 2. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ ПРЯМОГО СТЕРЖНЯ.....	9
§2.1. Элементарная теория деформирования.....	9
§2.2. Экспериментальные исследования.....	17
§2.3. Статически неопределимые системы.....	22
Тема 3. ЧИСТЫЙ СДВИГ-СРЕЗ.....	30
Тема 4. КРУЧЕНИЕ ПРЯМОГО СТЕРЖНЯ (ВАЛА) КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ.....	34
Тема 5. ГЕОМЕТРИЯ ПЛОЩАДЕЙ.....	41
Тема 6. ИЗГИБ ПРЯМОГО СТЕРЖНЯ.....	48
§6.1. Чистый изгиб.....	48
§6.2. Поперечный изгиб. Деформация изгиба.....	53
Тема 7. ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ МАТЕРИАЛА В ТОЧКЕ ТЕЛА.....	62
Тема 8. ТЕОРИЯ ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ В ТОЧКЕ.....	76
Тема 9. КРИТЕРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ. ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ В ТОЧКЕ.....	82
Тема 10. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ.....	89
Тема 11. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ.....	93
Тема 12. УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ.....	108
Тема 13. ВВЕДЕНИЕ В ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ.....	116
Тема 14. ПРОЧНОСТЬ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКИ МЕНЯЮЩИХСЯ НАПРЯЖЕНИЯХ.....	122
Тема 15. ДИНАМИЧЕСКОЕ НАГРУЖЕНИЕ. УДАР.....	128
Тема 16. МЕТОДЫ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ.....	134
§16.1. Метод конечных разностей.....	134
§16.2. Метод Рэлея-Ритца.....	138
§16.3. Метод конечных элементов.....	140



**Иванов Алексей Александрович**  
**Орлов Сергей Алексеевич**

## **МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ**

**КУРС ЛЕКЦИЙ**  
**по одноименной дисциплине**  
**для студентов технических специальностей**  
**дневной и заочной форм обучения**

Подписано к размещению в электронную библиотеку  
ГГТУ им. П. О. Сухого в качестве электронного  
учебно-методического документа 27.01.11.

Рег. № 56Е.

E-mail: [ic@gstu.by](mailto:ic@gstu.by)

<http://www.gstu.by>