



Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Промышленная теплоэнергетика и экология»

А. В. Овсянник, М. Н. Новиков, А. В. Шаповалов

ТЕПЛОМАССОБМЕН

КУРС ЛЕКЦИЙ

для студентов специальностей

**1-43 01 05 «Промышленная теплоэнергетика» дневной
и заочной форм обучения и 1-43 01 07 «Техническая
эксплуатация энергооборудования организаций»
дневной формы обучения**

Гомель 2010

УДК 536.24(075.8)
ББК 31.31я73
О-34

*Рекомендовано научно-методическим советом
энергетического факультета ГГТУ им. П. О. Сухого
(протокол № 5 от 15.06.2009 г.)*

Рецензент: доц. каф. «Физика» ГГТУ им. П. О. Сухого *А. И. Кравченко*

- Овсянник, А. В.**
О-34 Теплообмен : курс лекций для студентов специальностей 1-43 01 05 «Промышленная теплоэнергетика» днев. и заоч. форм обучения и 1-43 01 07 «Техническая эксплуатация энергооборудования организаций» днев. формы обучения / А. В. Овсянник, М. Н. Новиков, А. В. Шаповалов. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2010. – 212 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: <http://lib.gstu.local>. – Загл. с титул. экрана.

Рассмотрены теплопроводность, конвективный теплообмен, теплообмен излучением, тепловые расчеты теплообменных устройств, а также тепло- и массообмен при фазовых превращениях.

Для студентов специальностей 1-43 01 05 «Промышленная теплоэнергетика» дневной и заочной форм обучения и 1-43 01 07 «Техническая эксплуатация энергооборудования организаций» дневной формы обучения.

УДК 536.24(075.8)
ББК 31.31я73

© Учреждение образования «Гомельский
государственный технический университет
имени П. О. Сухого», 2010

ВВЕДЕНИЕ

Теплопередача или теплообмен – учение о самопроизвольных необратимых процессах распространения теплоты в пространстве. Под процессом распространения теплоты понимается обмен внутренней энергией между отдельными элементами, областями рассматриваемой среды. Перенос теплоты осуществляется тремя основными способами: теплопроводностью, конвекцией и тепловым излучением.

Теплопроводность представляет собой молекулярный перенос теплоты в телах (или между ними), обусловленный переменной температурой в рассматриваемом пространстве.

Конвекция возможна только в текучей среде. Под конвекцией теплоты понимают процесс ее переноса при перемещении объемов жидкости или газа (текучей среды) в пространстве из области с одной температурой в область с другой. При этом перенос теплоты неразрывно связан с переносом самой среды.

Тепловое излучение – процесс распространения теплоты с помощью электромагнитных волн, обусловленный только температурой и оптическими свойствами излучающего тела; при этом внутренняя энергия тела (среды) переходит в энергию излучения. Процесс превращения внутренней энергии вещества в энергию излучения, переноса излучения и его поглощения веществом называется теплообменом излучением. В природе и технике элементарные процессы распространения теплоты – теплопроводность, конвекция и тепловое излучение – очень часто происходят совместно.

Конвекция теплоты всегда сопровождается теплопроводностью. Совместный процесс переноса теплоты конвекцией и теплопроводностью называется конвективным теплообменом.

В инженерных расчетах часто определяют конвективный теплообмен между потоками жидкости или газа и поверхностью твердого тела; этот процесс конвективного теплообмена называют конвективной теплоотдачей или теплоотдачей.

Процессы теплопроводности и конвективного теплообмена могут сопровождаться теплообменом излучением. Теплообмен, обусловленный совместным переносом теплоты излучением и теплопроводностью, называют радиационно-кондуктивным теплообменом. Если перенос теплоты осуществляется дополнительно и конвекцией, то

такой процесс называют радиационно-конвективным теплообменом. Иногда радиационно-кондуктивный и радиационно-конвективный перенос теплоты называют сложным теплообменом.

В технике и в быту часто происходят процессы теплообмена между различными жидкостями, разделенными твердой стенкой. Процесс дачи теплоты от горячей жидкости к холодной через разделяющую их стенку называется теплопередачей. Теплопередача осуществляется различными элементарными процессами теплопереноса. Парогенерирующие трубы котельного агрегата, например, получают теплоту от продуктов сгорания топлива в результате радиационно-конвективного теплообмена. Через слой наружного загрязнения, металлическую стенку и слой накипи теплота передается теплопроводностью. От внутренней поверхности трубы к омывающей ее жидкости теплота переносится конвективным теплообменом (теплоотдачей).

Процессы теплообмена могут происходить в различных средах: чистых веществах и разных смесях, при изменении и без изменения агрегатного состояния рабочих сред и т. д. В зависимости от этого теплообмен протекает по-особому и описывается различными уравнениями.

Многие процессы переноса теплоты сопровождаются переносом вещества. Например, при испарении воды в воздух, помимо теплообмена, имеет место и перенос образовавшегося пара в паровоздушной смеси. В общем случае перенос пара осуществляется как молекулярным, так и конвективным путем. Совместный молекулярный и конвективный перенос массы называют конвективным массообменом. При наличии массообмена процесс теплообмена усложняется. Теплота дополнительно может переноситься вместе с массой диффундирующих веществ.

В общем случае перенос теплоты в смеси различных веществ может вызываться неоднородным распределением других физических величин, помимо температуры. Например, разность концентрации компонентов смеси приводит к дополнительному молекулярному переносу теплоты (диффузионный термоэффект). Обычно перенос теплоты, обусловленный подобными эффектами, сравнительно невелик и, как правило, им можно пренебречь.

При теоретическом исследовании теплообмена приходится вводить некоторые модельные представления о среде, в которой происходят изучаемые процессы. Рассматриваемые газы, жидкости и твер-

дые тела в книге в подавляющем большинстве случаев считаются сплошной средой, т. е. средой, при рассмотрении которой допустимо пренебречь ее дискретным строением.

Различают однородные и неоднородные сплошные среды. В первых физические свойства в различных точках одинаковы при одинаковых температуре и давлении, в неоднородных средах – различны. Различают также изотропные и анизотропные сплошные среды. В любой точке изотропной среды физические свойства ее не зависят от выбранного направления, наоборот, в анизотропной среде некоторые свойства в данной точке могут быть функцией направления. Наиболее изучен и часто встречается на практике теплообмен в изотропных средах.

Сплошная среда может быть однофазной и многофазной. В однофазной среде, состоящей из чистого вещества или из смеси веществ, свойства изменяются в пространстве непрерывно. В многофазной среде, состоящей из ряда однофазных частей, на границах раздела свойства изменяются скачками. Теплообмен в однофазных и многофазных системах протекает по-разному.

Изучение как простых, так и более сложных процессов переноса теплоты в различных средах и является задачей курса теплопередачи.

Часть первая

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ

Глава первая

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ УЧЕНИЯ О ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

1.1. Методы изучения физических явлений

На основании представлений современной физики явления природы вообще и теплопроводности в частности возможно описать и исследовать на основе феноменологического и статистического методов.

Метод описания процесса, игнорирующий микроскопическую структуру вещества, рассматривающий его как сплошную среду (континуум), называется феноменологическим.

Феноменологический метод исследования дает возможность установить некоторые общие соотношения между параметрами, характеризующими рассматриваемое явление в целом. Феноменологические законы носят весьма общий характер, а роль конкретной физической среды учитывается коэффициентами, определяемыми непосредственно из опыта.

Теплопроводность в чистом виде большей частью имеет место лишь в твердых телах.

Другой путь изучения физических явлений основан на изучении внутренней структуры вещества. Среда рассматривается как некоторая физическая система, состоящая из большого числа молекул, ионов или электронов с заданными свойствами и законами взаимодействия. Получение макроскопических характеристик по заданным микроскопическим свойствам среды составляет основную задачу такого метода, называемого статистическим.

Как первый, так и второй метод обладает своими достоинствами и недостатками.

Феноменологический метод позволяет сразу установить общие связи между параметрами, характеризующими процесс, и использовать экспериментальные данные, точность которых предопределяет и

точность самого метода. В этом достоинства использования феноменологического подхода при изучении явления.

Однако сам факт проведения опытов для выявления характеристики физической среды является одновременно и недостатком метода, так как этим ограничиваются пределы применения феноменологических законов. Кроме того, современный эксперимент очень сложен и зачастую является дорогостоящим.

Статистический метод позволяет получить феноменологические соотношения на основании заданных свойств микроскопической структуры среды без дополнительного проведения эксперимента – в этом его достоинство. Недостатком статистического метода является его сложность, в силу чего получить конечные расчетные соотношения возможно лишь для простейших физических моделей вещества.

Кроме того, для реализации метода требуется знание ряда параметров, определение которых является предметом исследования специальных разделов физики.

В основу исследования процессов теплопроводности положен феноменологический метод. Аналитическая теория теплопроводности игнорирует молекулярное строение вещества и рассматривает вещество как сплошную среду. Такой подход правомерен, если размеры объектов исследования достаточно велики по сравнению с расстояниями эффективного межмолекулярного взаимодействия.

1.2. Температурное поле

Явление теплопроводности представляет собой процесс распространения тепловой энергии при непосредственном соприкосновении отдельных частиц тела или отдельных тел, имеющих различные температуры. Теплопроводность обусловлена движением микрочастиц вещества.

При этом в газах перенос энергии осуществляется путем диффузии молекул и атомов, а в жидкостях и твердых телах-диэлектриках – путем упругих волн. В металлах перенос энергии в основном осуществляется путем диффузии свободных электронов, а роль упругих колебаний кристаллической решетки здесь второстепенна.

Следует указать, что в жидкостях и газах чистая теплопроводность может быть реализована при выполнении условий, исключающих перенос тепла конвекцией.

Всякое физическое явление в общем случае сопровождается изменением в пространстве и времени существенных для данного явле-

ния физических величин. Процесс теплопроводности, как и другие виды теплообмена, может иметь место только при условии, что в различных точках тела (или системы тел) температура неодинакова. В общем случае процесс передачи теплоты теплопроводностью в твердом теле сопровождается изменением температуры как в пространстве, так и во времени.

Аналитическое исследование теплопроводности сводится к изучению пространственно-временного изменения температуры, т. е. к нахождению уравнения:

$$t = f(x, y, z). \quad (1.1)$$

Уравнение (1.1) представляет математическое выражение температурного поля. Таким образом, температурное поле есть совокупность значений температуры во всех точках изучаемого пространства для каждого момента времени.

Различают стационарное и нестационарное температурные поля. Уравнение (1.1) является записью наиболее общего вида температурного поля, когда температура изменяется с течением времени и от одной точки к другой. Такое поле отвечает неустановившемуся тепловому режиму теплопроводности и носит название нестационарного температурного поля.

Если тепловой режим является установившимся, то температура в каждой точке поля с течением времени остается неизменной, такое температурное поле называется стационарным. В этом случае температура является функцией только координат:

$$t = f_1(x, y, z); \quad \frac{dt}{d\tau} = 0. \quad (1.2)$$

Температурное поле, соответствующее уравнениям (1.1) и (1.2), является пространственным, так как температура является функцией трёх координат. Если температура есть функция двух координат, то поле называется двумерным и его зависимость имеет вид:

$$t = f_2(x, y, \tau); \quad \frac{dt}{dz} = 0. \quad (1.3)$$

Если температура есть функция одной координаты, то поле называется одномерным:

$$t = f_3(x, \tau); \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial z} = 0. \quad (1.4)$$

Наиболее простой вид имеет уравнение одномерного стационарного поля:

$$t = f_4(x); \frac{\partial t}{\partial \tau} = 0, \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial z} = 0 \quad (1.5)$$

1.3. Температурный градиент

Если соединить точки тела, имеющие одинаковую температуру, получим поверхность равных температур, называемую и з о т е р м и ч е с к о й . Итак, изотермической поверхностью называется геометрическое место точек в температурном поле; имеющих одинаковую температуру.

Так как одна и та же точка тела не может одновременно иметь различные температуры, то изотермические поверхности не пересекаются. Они либо оканчиваются на поверхности тела, либо целиком располагаются внутри самого тела.

Пересечение изотермических поверхностей плоскостью дает на этой плоскости семейство изотерм. Они обладают теми же свойствами, что и изотермические поверхности, т. е. не пересекаются, не обрываются внутри тела, оканчиваются на поверхности, либо целиком располагаются внутри самого тела.

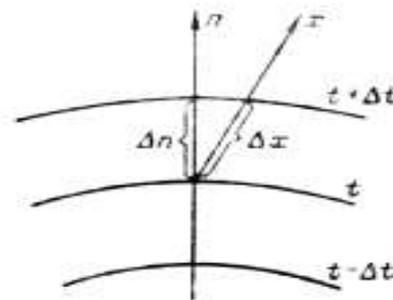


Рис. 1.1. Изотермы

На рис. 1.1. приведены изотермы, температуры которых отличаются на Δt .

Температура в теле изменяется только в направлениях, пересекающих изотермические поверхности. При этом наибольший перепад температуры на единицу длины происходит в направлении нормали к изотермической поверхности. Возрастание температуры в направлении нормали к изотермической поверхности характеризуется градиентом температуры.

Градиент температуры есть вектор, направленный по нормали к изотермической поверхности в сторону возрастания температуры и

численно равный производной от температуры по этому направлению, т. е.

$$\text{grad}t = \vec{n}_0 \frac{\partial t}{\partial n}, \quad (1.6)$$

где n_0 – единичный вектор, нормальный к изотермической поверхности и направленный в сторону возрастания температуры;
 $\partial t / \partial n$ – производная температура по нормали n .

Скалярная величина температурного градиента $\partial t / \partial n$ не одинакова для различных точек изотермической поверхности. Она больше там, где расстояние Δn между изотермическими поверхностями меньше.

Скалярную величину температурного градиента $\partial t / \partial n$ мы будем также называть температурным градиентом.

Величина $\partial t / \partial n$ в направлении убывания температуры отрицательна.

Проекции вектора $\text{grad}t$ на координатные оси Ox , Oy , Oz будут равны:

$$\left. \begin{aligned} (\text{grad}t)_x &= \frac{\partial t}{\partial n} \cos(n, x) = \frac{\partial t}{\partial x}; \\ ; (\text{grad}t)_y &= \frac{\partial t}{\partial n} \cos(n, y) = \frac{\partial t}{\partial y}; \\ (\text{grad}t)_z &= \frac{\partial t}{\partial n} \cos(n, z) = \frac{\partial t}{\partial z} \end{aligned} \right\} . \quad (1.7)$$

1.4. Тепловой поток. Закон Фурье

Необходимым условием распространения теплоты является неравномерность распределения температуры в рассматриваемой среде. Таким образом, для передачи теплоты теплопроводностью необходимо неравенство нулю температурного градиента в различных точках тела.

Согласно гипотезе Фурье количество теплоты dQ_τ , Дж, проходящее через элемент изотермической поверхности dF за промежуток времени $d\tau$, пропорционально температурному градиенту $\partial t / \partial n$:

$$dQ_{\tau} = -\lambda \frac{\partial t}{\partial n} dF d\tau. \quad (1.8)$$

Опытным путем установлено, что коэффициент пропорциональности в уравнении (1.8) есть физический параметр вещества. Он характеризует способность вещества проводить теплоту и называется коэффициентом теплопроводности.

Количество теплоты, проходящее в единицу времени через единицу поверхности $q = dQ_{\tau} / (dE dt)$, Вт/м² называется плотностью теплового потока.

Плотность теплового потока есть вектор, определяемый соотношения

$$\vec{q} = -\vec{n}_0 \lambda \frac{\partial t}{\partial n}. \quad (1.9)$$

Вектор плотности теплового потока \vec{q} направлен по нормали к изотермической поверхности. Его положительное направление совпадает с направлением убывания температуры, так как теплота всегда передается от более горячих частей тела к холодным. Таким образом, векторы \vec{q} и $grad t$ лежат на одной прямой, но направлены в противоположные стороны. Это и объясняет наличие знака «минус» в правых частях уравнений (1.9) и (1.8).

Линии, касательные к которым совпадают с направлением вектора \vec{q} , называются линиями теплового потока. Линии теплового потока ортогональны к изотермическим поверхностям (рис. 1.2.).

Скалярная величина вектора плотности теплового потока q , Вт/м².

$$q = -\lambda \frac{\partial t}{\partial n}. \quad (1.10)$$

Многочисленные опыты подтвердили справедливость гипотезы Фурье. Поэтому уравнение (1.8), так же как и уравнение (1.9), является математической записью основного закона теплопроводности, который формируется следующим образом: плотность теплового потока пропорциональна градиенту температуры.

Количество теплоты, приходящееся в единицу времени через изотермическую поверхность F , называется тепловым потоком. Если градиент температуры для различных точек изотермической поверхности различен, то количество теплоты, которое пройдет через всю изотермическую поверхность в единицу времени, найдется как:

$$Q = \int_F q dF = - \int_F \lambda \frac{\partial t}{\partial n} dF, \quad (1.11)$$

где dF – элемент изотермической поверхности.

Q – измеряется в ваттах.

1.5. Зависимость коэффициента теплопроводности веществ от параметров состояния

а) Коэффициент теплопроводности газов

Согласно кинетической теории перенос теплоты теплопроводностью в газах при обычных давлениях и температурах определяется переносом кинетической энергии молекулярного движения в результате хаотического движения и столкновения отдельных молекул газа. При этом коэффициент теплопроводности определяется соотношением

$$\lambda = \bar{w} \bar{l} c_v \rho / 3, \quad (1.12)$$

где \bar{w} – средняя скорость перемещения молекул газа;

\bar{l} – средняя длина свободного пробега молекул газа между соударениями;

c_v – теплоемкость газа при постоянном объеме;

ρ – плотность газа.

С увеличением давления в равной мере увеличивается ρ , уменьшается длина пробега \bar{l} и произведение $\bar{l}\rho$ сохраняется постоянным. Поэтому коэффициент теплопроводности заметно не меняется с изменением давления. Исключение составляют очень малые (меньше $2,66 \cdot 10^3$ Па) и очень большие ($2 \cdot 10^8$ Па) давления.

Средняя скорость перемещения молекул газа зависит от температуры:

$$\bar{w} = \sqrt{\frac{3R_{\mu}T}{\mu}}, \quad (1.13)$$

где R_{μ} – универсальная газовая постоянная, равная 8314,2 Дж/(кмоль·К);

μ – молекулярная масса газа;

T – температура, К.

Теплоемкость газов возрастает с повышением температуры. Сказанным объясняется тот факт, что коэффициент теплопроводности для газов с повышением температуры возрастает.

Коэффициент теплопроводности λ газов лежит в пределах от 0,006 до 0,6 Вт/(м·К).

Коэффициенты теплопроводности водяного пара и других реальных газов, существенно отличающихся от идеальных, сильно зависят также от давления. Для газовых смесей коэффициент теплопроводности не может быть определен по закону аддитивности, его нужно определять опытным путем.

б) Коэффициент теплопроводности жидкостей

Механизм распространения теплоты в капельных жидкостях можно представить как перенос энергии путем нестройных упругих колебаний. На основании этой теории была получена формула для коэффициента теплопроводности следующего вида:

$$\lambda = A \frac{c_p \rho^{4/3}}{\mu^{1/3}}, \quad (1.14)$$

где c_p – теплоемкость жидкости при постоянном давлении;

ρ – объемная плотность жидкости;

μ – относительная молекулярная масса.

Коэффициент A , пропорциональный скорости распространения упругих волн в жидкости, не зависит от природы жидкости, но зависит от температуры, при этом $A c_p = const$.

Так как плотность ρ жидкости с повышением температуры убывает, то из уравнения (1.14) следует, что для жидкостей с постоянной молекулярной массой (неассоциированные и слабо ассоциированные жидкости) с повышением температуры коэффициент тепло-

проводности должен уменьшаться. Для жидкостей сильно ассоциированных (вода, спирты и т. д.) в формулу (1.14) нужно ввести коэффициент ассоциации, учитывающий изменение молекулярной массы. Коэффициент ассоциации также зависит от температуры, и поэтому при различных температурах он может влиять на коэффициент теплопроводности по-разному. Опыты подтверждают, что для большинства жидкостей с повышением температуры коэффициент теплопроводности λ убывает, исключение составляют вода и глицерин. Коэффициент теплопроводности капельных жидкостей лежит примерно в пределах от 0,07 до 0,7 Вт/(м·К).

При повышении давления коэффициенты теплопроводности жидкостей возрастают.

в) Коэффициент теплопроводности твердых тел

Металлы и сплавы. В металлах основным передатчиком теплоты являются свободные электроны, которые можно уподобить идеальному одноатомному газу. Передача теплоты при помощи колебательных движений атомов или в виде упругих звуковых волн не исключается, так как ее доля незначительна по сравнению с переносом энергии электронным газом. Вследствие движения свободных электронов происходит выравнивание температуры во всех точках нагревающегося или охлаждающегося металла. Свободные электроны движутся как из областей, более нагретых, в области, менее нагретые, так и в обратном направлении. В первом случае они отдают энергию атомам, во втором отбирают. Так как в металлах носителем тепловой и электрической энергии являются электроны, то коэффициенты тепло- и электропроводности пропорциональны друг другу. При повышении температуры вследствие усиления тепловых неоднородностей рассеивание электронов увеличивается. Это влечет за собой уменьшение коэффициентов тепло- и электропроводности чистых металлов.

При наличии разного рода примесей коэффициент теплопроводности металлов резко убывает. Последнее можно объяснить увеличением структурных неоднородностей, которые приводят к рассеиванию электронов. Так, например, для чистой меди $\lambda = 396$ Вт/(м·К), для той же меди со следами мышьяка $\lambda = 142$ Вт/(м·К).

В отличие от чистых металлов коэффициенты теплопроводности сплавов при повышении температуры увеличиваются.

Твердые тела - диэлектрики (неметаллы). В диэлектриках с повышением температуры коэффициент теплопроводности обычно

увеличивается. Как правило, для материалов с большей объемной плотностью коэффициент теплопроводности имеет более высокое значение. Он зависит от структуры материала его пористости и влажности.

Многие строительные и теплоизоляционные материалы имеют пористое строение (кирпич, бетон, асбест, шлак и др.), и применение закона Фурье к таким телам является в известной мере условным. Наличие пор в материале не позволяет рассматривать такие тела, как сплошную среду.

Условным является также коэффициент теплопроводности пористого материала. Эта величина имеет смысл коэффициента теплопроводности некоторого однородного тела, через которое при одинаковой форме, размерах и температурах на границах проходит то же количество тепла, что и через данное пористое тело.

Коэффициент теплопроводности порошкообразных и пористых тел сильно зависит от их объемной плотности. Например, при возрастании плотности ρ от 400 до 800 кг/м³ коэффициент теплопроводности асбеста увеличивается от 0,105 до 0,248 Вт/(м·К). Такое влияние плотности ρ на коэффициент теплопроводности объясняется тем, что теплопроводность λ заполняющего поры воздуха значительно меньше, чем твердых компонентов пористого материала.

Эффективный коэффициент теплопроводности пористых материалов сильно зависит также от влажности. Для влажного материала коэффициент теплопроводности значительно больше, чем для сухого и воды в отдельности. Например, для сухого кирпича $\lambda = 0,35$, для воды $\lambda = 0,6$, а для влажного кирпича, $\lambda \approx 1$ Вт/(м·К). Этот эффект может быть объяснен конвективным переносом теплоты, возникающая благодаря капиллярному движению воды внутри пористого материала и частично тем, что абсорбционно связанная влага имеет другие характеристики по сравнению со свободной водой.

Увеличение коэффициента теплопроводности зернистых материалов с изменением температуры можно объяснить тем, что с повышением температуры возрастает теплопроводность среды, заполняющей промежутки между зернами, а также увеличивается теплопередача излучением зернистого массива.

Коэффициенты теплопроводности строительных и теплоизоляционных материалов имеют значения, лежащие примерно в пределах от 0,023 до 2,9 Вт/(м·К).

Материалы с низким значением коэффициента теплопроводности

сти [меньше 0,25 Вт/(м·К)], обычно применяемые для тепловой изоляции, называются теплоизоляционными.

1.6. Дифференциальное уравнение теплопроводности.

Изучение любого физического явления сводится к установлению зависимости между величинами, характеризующими это явление. Для сложных физических процессов, в которых определяющие величины могут существенно изменяться в пространстве и времени, установить зависимость между этими величинами очень трудно. В этих случаях на помощь приходит метод математической физики, который исходит из того, что ограничивается промежуток времени и из всего пространства рассматривается лишь элементарный объем. Это позволяет в пределах элементарного объема и выбранного малого отрезка времени пренебречь изменением некоторых величин, характеризующих процесс, и существенно упростить зависимость.

Выбранные таким образом элементарный объем dv и элементарный промежуток времени dt , в пределах которых рассматривается изучаемый процесс, с математической точки зрения являются величинами бесконечно малыми, а с физической точки зрения – величинами еще достаточно большими, чтобы в их пределах можно было игнорировать дискретное строение среды и рассматривать ее как континуум (сплошную). Полученная таким образом зависимость является общим дифференциальным уравнением рассматриваемого процесса. Интегрируя дифференциальные уравнения, можно получить аналитическую зависимость между величинами для всей области интегрирования и всего рассматриваемого промежутка времени.

При решении задач, связанных с нахождением температурного поля, необходимо иметь дифференциальное уравнение теплопроводности.

Для облегчения вывода этого дифференциального уравнения сделаем следующие допущения:

- тело однородно и изотропно;
- физические параметры постоянны;
- деформация рассматриваемого объема, связанная с изменением температуры, является очень малой величиной по сравнению с самим объемом;

внутренние источники теплоты в теле, которые в общем случае могут быть заданы как $q_v = f(x, y, z, \tau)$, распределены равномерно.

В основу вывода дифференциального уравнения теплопроводности положен закон сохранения энергии, который в рассматриваемом случае может быть сформулирован следующим образом: количество теплоты, введенное в элементарный объем извне за время dt вследствие теплопроводности, а также от внутренних источников, равно изменению внутренней энергии или энтальпии вещества (в зависимости от рассмотрения изохорического или изобарического процесса), содержащегося в элементарном объеме:

$$dQ_1 + dQ_2 = dQ, \quad (1.15)$$

где dQ_1 – количество теплоты, Дж, введенное в элементарный объем путем теплопроводности за время dt .

dQ_2 – количество теплоты, которое за время dt выделилось в элементарном объеме dv за счет внутренних источников;

dQ – изменение внутренней энергии или энтальпии вещества, содержащегося в элементарном объеме dv за время dt .

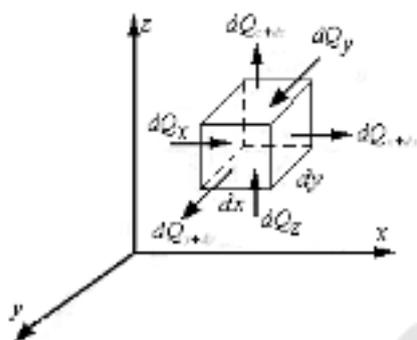


Рис.1.2. К выводу дифференциального уравнения теплопроводности

Для нахождения составляющих уравнения (1.15) выделим в теле элементарный параллелепипед со сторонами dx, dy, dz (рис. 1.2.). Параллелепипед расположен так, чтобы его грани были параллельны соответствующим координатным плоскостям.

Количество теплоты, которое подводится к граням элементарного объема за время dt в направлении осей Ox, Oy, Oz обозначим соответственно

dQ_x, dQ_y, dQ_z .

Количество теплоты, которое будет отводиться через противоположные грани в тех же направлениях, обозначим соответственно $dQ_{x+dx}, dQ_{y+dy}, dQ_{z+dz}$. Количество теплоты, подведенное к грани $dy dz$ в направлении оси Ox за время dt , составляет $dQ_x = q_x dy dz dt$, где q_x – проекция плотности теплового потока на направление нормали к указанной грани. Количество теплоты, отведенное через противоположную грань элементарного параллелепипеда в направлении оси Ox , запишется как

$$dQ_{x+dx} = q_{x+dx} dydzd\tau. \quad (1.16)$$

Разница количеств теплоты, подведенного к элементарному параллелепипеду и отведенного от него за время $d\tau$ в направлении оси Ox , представляет собой количество теплоты

$$dQ_{x1} = dQ_x - dQ_{x+dx} \text{ или } dQ_{x1} = q_x dydzd\tau - q_{x+dx} dydzd\tau. \quad (1.17)$$

Функция q_{x+dx} является непрерывной в рассматриваемом интервале dx и может быть разложена в ряд Тейлора:

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx + \frac{\partial^2 q_x}{\partial x^2} \frac{dx^2}{2!} + \dots \quad (1.18)$$

Если ограничиться двумя первыми членами ряда, то уравнение (а) запишется в виде

$$dQ_{x1} = -\frac{\partial q_x}{\partial x} dx dydzd\tau. \quad (1.19)$$

Аналогичным образом можно найти количество теплоты, подводимое к элементарному объему и в направлениях двух других координатных осей Oy и Oz .

Количество теплоты dQ , подведенное теплопроводностью к рассматриваемому объему, будет равно:

$$dQ_1 = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) dx dydzd\tau. \quad (1.20)$$

Определим вторую составляющую уравнения (1.15). Обозначим количество теплоты, выделяемое внутренними источниками в единице объема среды в единицу времени и называемое мощностью внутренних источников теплоты, через q_v , Вт/м³. Тогда

$$dQ_2 = q_v dv d\tau. \quad (1.21)$$

Третья составляющая в уравнении (1.15) найдется в зависимости от характера термодинамического процесса изменения системы.

В случае рассмотрения изохорического процесса вся теплота, подведенная к элементарному объему, уйдет на изменения внутренней энергии вещества, заключенного в этом объеме, т. е. $dQ = dU$.

Если рассматривать внутреннюю энергию единицы объема $u = u(t, v)$, тогда dU найдется как

$$dU = C_v \frac{\partial t}{\partial \tau} dv d\tau = c_v \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} dv d\tau, \quad (1.22)$$

где C_v – изохорная теплоемкость единицы объема, Дж/(м³·К);
 c_v – изохорная теплоемкость единицы массы, Дж/(кг·К);
 ρ – плотность вещества, кг/м³.

Подставляя полученные выражения (1.20), (1.21) и (1.22) в уравнение (1.15), получим:

$$c_v \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} = - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) + q_v. \quad (1.23)$$

Или

$$c_v \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} = -\operatorname{div} \vec{q} + q_v. \quad (1.23)$$

Выражение (1.23) является дифференциальным уравнением энергии для изохорического процесса переноса теплоты.

При рассмотрении изобарического процесса вся теплота, подведенная к объему, уйдет на изменения энтальпии вещества, заключенного в этом объеме, и уравнение (1.23) запишется следующим образом:

$$dQ_1 + dQ_2 = dI. \quad (1.24)$$

Если рассматривать энтальпию единицы объема, как $i = i(t, p)$ то можно показать, что

$$dI = C_p \frac{\partial t}{\partial \tau} dv d\tau = c_p \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} dv d\tau = \rho \frac{\partial i}{\partial \tau} dv d\tau, \quad (1.25)$$

где C_p – изобарная теплоемкость единицы объема, Дж/(м³·К);
 c_p – изобарная теплоемкость единицы массы, Дж/(кг·К).

Если полученные выражения (1.20), (1.21) и (1.23) подставить в уравнение (1.24), получим:

$$\rho \frac{\partial i}{\partial \tau} = - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) + q_v \quad (1.26)$$

Или

$$\rho \frac{\partial i}{\partial \tau} = - \operatorname{div} \vec{q} + q_v. \quad (1.26')$$

Соотношение (1.26) является дифференциальным уравнением энергии в самом общем виде для изобарического процесса переноса теплоты. Уравнение (1.26) будет широко использоваться и в других разделах курса при рассмотрении конкретных видов переноса теплоты.

В твердых телах перенос теплоты осуществляется по закону Фурье $q = -\lambda \partial t / \partial x$ числовое значение разности c_p и c_v мало и можно принять $c_p = c_v = c$.

Напомним, что проекции вектора плотности теплового потока на координатные оси Ox , Oy , Oz определяются выражениями:

$$q_x = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x}; \quad q_y = -\lambda \frac{\partial t}{\partial y}; \quad q_z = -\lambda \frac{\partial t}{\partial z}.$$

Подставляя полученные выражения проекций вектора плотности теплового потока в уравнение (1-23) и опуская индекс при c , получим:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{1}{c\rho} \left[\frac{\partial t}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial t}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial y} \right) + \frac{\partial t}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial z} \right) \right] + \frac{q_v}{c\rho}, \quad (1.27)$$

Или

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{1}{c\rho} \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} t) + \frac{q_v}{c\rho}. \quad (1.27')$$

Выражение (1.27), так же как и в (1.27'), называется дифференциальным уравнением теплопроводности. Оно устанавливает связь между временным и пространственным изменением температуры в любой точке тела, в котором происходит процесс теплопроводности.

Наиболее общее дифференциальное уравнение теплопроводности в частных производных имеет ту же форму, что и (1-26), но с пе-

ременными теплофизическими характеристиками λ , c и ρ , которые можно обозначить как $\lambda(x, y, z, t)$, $c(x, y, z, t)$ и $\rho(x, y, z, t)$. Такая запись включает как пространственно-временную, так и температурную зависимость. Уравнение (1.27) описывает большое количество задач теплопроводности, представляющих практический интерес. Так, если принять теплофизические характеристики постоянными, что предполагалось при выводе уравнения, то (1.27) принимает вид:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{c\rho} \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) + \frac{q_v}{c\rho}. \quad (1.28)$$

В уравнении (1.28) можно обозначить

$$\frac{\lambda}{c\rho} = a \quad (1.29)$$

И

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = \nabla^2 t, \quad (1.30)$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

Выражение оператора Лапласа в декартовой системе координат.

Выражение $\nabla^2 t$ в цилиндрической системе координат имеет вид:

$$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}, \quad (1.31)$$

где r – радиус-вектор;

φ – полярный угол;

z – аппликата.

Выражение $\nabla^2 t$ в сферических координатах имеет вид:

$$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial \kappa^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{\partial t}{\partial \mu} \right] + \frac{1}{r^2 (1 - \mu^2)} + \frac{\partial^2 t}{\partial \psi^2}, \quad (1.32)$$

где r – радиус-вектор;

$\mu = \cos \theta$; θ и ψ – соответственно полярное расстояние и долготы.

С учетом сказанного в общем виде уравнение (1.28) запишется следующим образом:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \nabla^2 t + \frac{q_v}{c\rho}. \quad (1.33)$$

Коэффициент пропорциональности a , $\text{м}^2/\text{с}$, в уравнении (1.33) называется коэффициентом температуропроводности и является физическим параметром вещества. Он существен для нестационарных тепловых процессов и характеризует скорость изменения температуры. Если коэффициент теплопроводности характеризует способность тел проводить теплоту, то коэффициент температуропроводности является мерой теплоинерционных свойств тела. Из уравнения (1.33) следует, что изменение температуры во времени $\partial t / \partial \tau$ для любой точки пространства пропорционально величине a . Иначе говоря, скорость изменения температуры в любой точке тела будет тем больше, чем больше коэффициент температуропроводности a . Поэтому при прочих равных условиях выравнивание температур во всех точках пространства будет происходить быстрее в том теле, которое обладает большим коэффициентом температуропроводности. Коэффициент температуропроводности зависит от природы вещества. Например, жидкости и газы обладают большой тепловой инерционностью и, следовательно, малым коэффициентом температуропроводности. Металлы обладают малой тепловой инерционностью, так как они имеют большой коэффициент температуропроводности. Далее, если система тел не содержит внутренних источников тепла ($q = 0$), тогда выражение (1.33) принимает форму уравнения Фурье:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \nabla^2 t \quad (1.34)$$

Если имеются внутренние источники теплоты, но температурное поле соответствует стационарному состоянию, т. е. $t = t(x, y, z)$,

то дифференциальное уравнение теплопроводности превращается в уравнение Пуассона:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} + \frac{q_v}{\lambda} = 0. \quad (1.35)$$

Наконец, для стационарной теплопроводности и отсутствия внутренних источников теплоты выражение (1.33) принимает вид уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0 \quad (1.36)$$

Нахождение частных решений этих уравнений в частных производных и некоторых других является основным содержанием теории теплопроводности.

1.7. Условия однозначности для процессов теплопроводности

Так как дифференциальное уравнение теплопроводности выведено на основе общих законов физики, то оно описывает явление теплопроводности в самом общем виде. Поэтому можно сказать, что полученное дифференциальное уравнение описывает целый класс явлений теплопроводности. Чтобы из бесчисленного количества выделить конкретно рассматриваемый процесс и дать его полное математическое описание, к дифференциальному уравнению необходимо присоединить математическое описание всех частных особенностей рассматриваемого процесса. Эти частные особенности, которые совместно с дифференциальным уравнением дают полное математическое описание конкретного процесса теплопроводности, называются условиями однозначности или краевыми условиями.

Условия однозначности включают в себя:

геометрические условия, характеризующие форму и размеры тела, в которых протекает процесс;

физические условия, характеризующие физические свойства среды и тела;

временные (начальные) условия, характеризующие распределение температур в изучаемом теле в начальный момент времени;

граничные условия, характеризующие взаимодействие рассмат-

риваемого тела с окружающей средой.

Геометрическими условиями задаются форма и линейные размеры тела, в котором протекает процесс.

Физическими условиями задаются физические параметры тела λ , c , ρ и др. и может быть задан закон распределения внутренних источников теплоты.

Начальные условия необходимы при рассмотрении нестационарных процессов и состоят в задании закона распределения температуры внутри тела в начальный момент времени. В общем случае начальное условие аналитически может быть записано следующим образом:

при $\tau = 0$

$$t = f(x, y, z). \quad (1.37)$$

В случае равномерного распределения температуры в теле начальное условие упрощается:

при $\tau = 0$

$$t = t_0 = const \quad (1.38)$$

Граничные условия могут быть заданы несколькими способами.

а) Граничные условия первого рода. При этом задается распределение температуры на поверхности тела для каждого момента времени:

$$t_c = f(x, y, z, \tau), \quad (1.39)$$

где t_c – температура на поверхности тела;

x, y, z – координаты поверхности тела.

В частном случае, когда температура на поверхности является постоянной на протяжении всего времени протекания процессов теплообмена, уравнение (1.39) упрощается и принимает вид:

$$t_c = const.$$

б) Граничные условия второго рода. При этом задаются значения теплового потока для каждой точки поверхности тела и любого момента времени.

Аналитически это можно представить следующим образом:

$$q_n = f(x, y, z, \tau), \quad (1.40)$$

где q_n – плотность теплового потока на поверхности тела;

x, y, z – как и в случае (1-34) – координаты на поверхности тела.

В простейшем случае плотность теплового потока по поверхности и во времени остается постоянной:

$$q_n = q_c = \text{const} \quad (1.41)$$

Такой случай теплообмена имеет место, например, при нагревании различных металлических изделий в высокотемпературных печах.

в) Г р а н и ч н ы е у с л о в и я т р е т ь е г о р о д а . При этом задаются температура окружающей среды $t_{жс}$ и закон теплообмена между поверхностью тела и окружающей средой. Граничное условие третьего рода характеризует закон теплообмена между поверхностью и окружающей средой в процессе охлаждения и нагревания тела. Для описания процесса теплообмена между поверхностью тела и средой используется закон Ньютона–Рихмана.

Процесс теплообмена между поверхностью тела и средой относится к очень сложным процессам и зависит от большого количества параметров. Подробно эти вопросы будут рассмотрены во второй и третьей частях учебника.

Согласно закону Ньютона–Рихмана количество теплоты, отдаваемое единицей поверхности тела в единицу времени, пропорционально разности температур поверхности тела t_c и окружающей среды $t_{жс}$ ($t_c > t_{жс}$):

$$q = \alpha(t_c - t_{жс}). \quad (1.42)$$

где α – коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом теплоотдачи, Вт/(м²·К).

Коэффициент теплоотдачи характеризует интенсивность теплообмена между поверхностью тела и окружающей средой. Численно он равен количеству теплоты, отдаваемому (или воспринимаемому) единицей поверхности в единицу времени при разности температур между поверхностью тела и окружающей средой, равной одному градусу.

Согласно закону сохранения энергии количество теплоты, которое отводится с единицы поверхности в единицу времени вследствие теплоотдачи [уравнение (1.42)], должно равняться теплоте, подводимой к единице поверхности в единицу времени вследствие теплопроводности из внутренних объемов тела, т. е.

$$\alpha(t_c - t_{жс}) = -\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_c \quad (1.43)$$

где n – нормаль к поверхности тела; индекс «с» указывает на то, что температура и градиент относятся к поверхности тела (при $n = 0$).

Окончательно граничное условие третьего рода можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_c = -\frac{\alpha}{\lambda} (t_c - t_{жс}). \quad (1.44)$$

Уравнение (1.44) по существу является частным выражением закона сохранения энергии для поверхности тела.

Коэффициент теплоотдачи зависит от большого числа факторов. Однако во многих случаях коэффициент теплоотдачи можно считать неизменным, поэтому мы будем в дальнейшем при решении задач теплопроводности принимать величину α постоянной.

г) Граничные условия четвертого рода характеризует условия теплообмена системы тел или тела с окружающей средой по закону теплопроводности.

Глава вторая

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ПРИ СТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ

2.1. Передача теплоты через плоскую стенку ($q_v = 0$)

При установившемся, или стационарном, тепловом режиме температура тела во времени остается постоянной, т. е. $\partial t / \partial \tau = 0$.

При этом дифференциальное уравнение теплопроводности будет иметь вид:

$$a \nabla^2 t + \frac{q_v}{c\rho} = 0 \quad (2.1)$$

Или

$$\nabla^2 t + \frac{q_v}{\lambda} = 0. \quad (2.1')$$

Если внутренние источники теплоты отсутствуют ($q_v = 0$), то уравнение (2.1) упростится и примет вид:

$$\nabla^2 t = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0 \quad (2.2)$$

В настоящей главе рассматривается теплопроводность в телах простейшей геометрической формы. При этом случаи, когда внутренние источники теплоты отсутствуют ($q_v = 0$) и когда они имеются ($q_v \neq 0$) рассматриваются отдельно. Первым объектом рассмотрения является передача теплоты через плоскую стенку при $q_v = 0$.

а) Граничные условия первого рода

Рассмотрим однородную и изотропную стенку толщиной δ с постоянным коэффициентом теплопроводности λ . На наружных поверхностях стенки поддерживают постоянными температуры t_{c1} и t_{c2} .

При заданных условиях температура будет изменяться только в направлении, перпендикуляр-

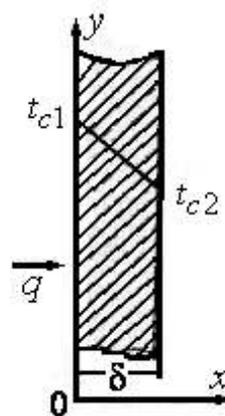


Рис. 2.1. Однородная плоская стенка

ном плоскости стенки. Если ось Ox направить, как показано на рис. 2.1., то температура в направлении осей Oy и Oz будет оставаться постоянной:

$$\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial z} = 0.$$

В связи с этим температура будет функцией только одной координаты x и дифференциальное уравнение теплопроводности для рассматриваемого случая запишется в виде

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = 0. \quad (2.3)$$

Граничные условия в рассматриваемой задаче зададим следующим образом:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } x = 0 \quad t = t_{c1} \\ \text{при } x = \delta \quad t = t_{c2} \end{array} \right\}. \quad (2.4)$$

Уравнение (2.3) и условия (2.4) дают полную математическую формулировку рассматриваемой задачи.

В результате решения поставленной задачи должно быть найдено распределение температуры в плоской стенке, т. е. $t = f(x)$, и получена формула для определения количества теплоты, проходящего в единицу времени через стенку.

Закон распределения температур по толщине стенки найдется в результате двойного интегрирования уравнения (2-3).

Первое интегрирование дает:

$$\frac{dt}{dx} = C_1. \quad (2.5)$$

После второго интегрирования получим:

$$t = C_1 x + C_2. \quad (2.6)$$

Из уравнения (2.6) следует, что при постоянном коэффициенте теплопроводности температура в стенке изменяется по линейному закону.

Постоянные C_1 и C_2 в уравнении (2.6) определяются из граничных условий:

$$\text{при } x = 0 \quad t = t_{c1} \text{ и } C_2 = t_{c1};$$

при $x = \delta$ $t = t_{c2}$ и $C_1 = -\frac{t_{c1} - t_{c2}}{\delta}$.

Подставляя значения постоянных C_1 и C_2 в уравнение (2.6), получаем закон распределения температуры в рассматриваемой плоской стенке:

$$t = t_{c1} - \frac{t_{c1} - t_{c2}}{\delta} x. \quad (2.7)$$

Для определения количества теплоты, проходящего через единицу поверхности стенки в единицу времени в направлении оси Ox , воспользуемся законом Фурье, согласно которому $q = -\lambda \partial t / \partial x$. Учитывая, что $\partial t / \partial x = C_1 = (t_{c1} - t_{c2}) / \delta$, после подстановки значения $\partial t / \partial x$ в выражение закона Фурье получим:

$$q = \frac{\lambda}{\delta} (t_{c1} - t_{c2}). \quad (2.8)$$

Из уравнения (2.8) следует, что количество теплоты, проходящее через единицу поверхности стенки в единицу времени, прямо пропорционально коэффициенту теплопроводности λ , разности температур на наружных поверхностях стенки $t_{c1} - t_{c2}$ и обратно пропорционально толщине стенки δ . Следует указать, что тепловой поток определяется не абсолютным значением температур, а их разностью $t_{c1} - t_{c2} = \Delta t$, которую принято называть температурным напором.

Отношение λ / δ , Вт/(м²·К) называется тепловой проводимостью стенки, а обратная величина δ / λ , м²·К/Вт – тепловым или термическим сопротивлением стенки. Последнее представляет собой падение температуры в стенке на единицу плотности теплового потока. Зная плотность теплового потока, легко вычислить общее количество теплоты Q_τ , которое передается через поверхность стенке величиной F за промежуток времени τ :

$$Q_\tau = qF\tau = \frac{\lambda}{\delta} (t_{c1} - t_{c2}) F\tau. \quad (2.9)$$

Из уравнения (2.8) найдем:

$$\frac{t_{c1} - t_{c2}}{\delta} = \frac{q}{\lambda}. \quad (2.10)$$

После введения этого выражения в уравнение температурного поля (2.7) получим:

$$t = t_{c1} - \frac{q}{\lambda} x. \quad (2.11)$$

Из уравнения (2.11) следует, что при прочих равных условиях температура в стенке убывает тем быстрее, чем больше плотность теплового потока.

Рассмотрим теплопроводность многослойной плоской стенки, состоящей из n однородных слоев. Примем, что контакт между слоями совершенный и температура на соприкасающихся поверхностях двух слоев одинакова.

При стационарном режиме тепловой поток, проходящий через любую изотермическую поверхность неоднородной стенки, один и тот же:

$$\partial q / \partial x = 0.$$

При заданных температурах на внешних поверхностях такой стенки, размерах слоев и соответствующих коэффициентах теплопроводности можно составить систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{\lambda_1}{\delta_1} (t_{c1} - t_{c2}); \\ q &= \frac{\lambda_2}{\delta_2} (t_{c1} - t_{c2}); \\ &\dots \\ q &= \frac{\lambda_n}{\delta_n} (t_{cn} - t_{c(n+1)}). \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

Определив температурные напоры из (2.12) в каждом слое и сложив, правые и левые части полученных уравнений, будем иметь:

$$t_{c1} - t_{c(n+1)} = q \left(\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \dots + \frac{\delta_n}{\lambda_n} \right). \quad (2.13)$$

Отсюда плотность теплового потока

$$q = \frac{t_{c1} - t_{c(n+1)}}{\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \dots + \frac{\delta_n}{\lambda_n}} = \frac{t_{c1} - t_{c(n+1)}}{\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\delta_i}{\lambda_i}}. \quad (2.14)$$

Величина $\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\delta_i}{\lambda_i}$, равная сумме термических сопротивлений всех n слоев, называется полным термическим сопротивлением теплопроводности многослойной стенки.

При сравнении переноса теплоты через многослойную стенку и стенку из однородного материала удобно ввести в рассмотрение эквивалентный коэффициент теплопроводности $\lambda_{эkv}$ многослойной стенки. Он равен коэффициенту теплопроводности однородной стенки, толщина которой Δ равна толщине многослойной стенки $\sum_{i=1}^{i=n} \delta_i$, а термическое сопротивление равно термическому сопротивлению рассматриваемой многослойной стенки, т. е.

$$\frac{\sum_{i=1}^{i=n} \delta_i}{\lambda_{эkv}} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\delta_i}{\lambda_i} \quad (2.15)$$

Отсюда

$$\lambda_{эkv} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} \delta_i}{\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\delta_i}{\lambda_i}}. \quad (2.16)$$

Из уравнения (2.16) следует, что эквивалентный коэффициент теплопроводности $\lambda_{эkv}$ зависит не только от теплофизических свойств слоев, но и от их толщины. Температуры на границах соприкосновения двух соседних слоев равны:

$$\left. \begin{aligned} t_{c2} &= t_{c1} - q \frac{\delta_1}{\lambda_1}; \\ t_{c3} &= t_{c2} - q \left(\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} \right); \\ t_{c(n+1)} &= t_{c1} - q \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} \end{aligned} \right\} . \quad (2-17)$$

Внутри каждого из слоев температура изменяется согласно (2.7), а для многослойной стенки в целом температурная кривая представляет ломаную линию.

б) Граничные условия третьего рода (теплопередача)

Передача тепла из одной подвижной среды (жидкости или газа) к другой через разделяющую их однородную или многослойную твердую стенку любой формы называется **теплопередачей**. Теплопередача включает в себя теплоотдачу от более горячей жидкости к стенке, теплопроводность в стенке, теплоотдачу от стенки к более холодной подвижной среде.

Рассмотрим теплопередачу через однородную и многослойную плоские стенки.

Пусть плоская однородная стенка имеет толщину δ (рис 2.2.). Заданы коэффициенты теплопроводности стенки λ температуры окружающей среды $t_{ж1}$

и $t_{ж2}$, а также коэффициенты теплоотдачи α_1 и α_2 ; будем считать, что величины $t_{ж1}$, $t_{ж2}$, α_1 и α_2 постоянны и не меняются вдоль поверхности. Это позволяет рассматривать изменение температуры жидкостей и стенки только в направлении, перпендикулярном плоскости стенки.

При заданных условиях необходимо найти тепловой поток от горячей жидкости к холодной и температуры на поверхностях стенки.

Плотность теплового потока от горячей жидкости к стенке определяется уравнением

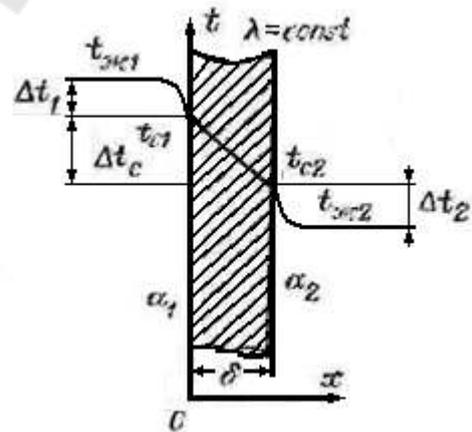


Рис. 2.2. Теплопередача через плоскую стенку.

$$q = \alpha_1(t_{ж1} - t_{c1}). \quad (2.18)$$

При стационарном тепловом режиме тот же тепловой поток пройдет путем теплопроводности через твердую стенку:

$$q = \frac{\lambda}{\delta}(t_{c1} - t_{c2}). \quad (2.19)$$

Тот же тепловой поток передается от второй поверхности стенки к холодной жидкости за счет теплоотдачи:

$$q = \alpha_2(t_{c2} - t_{ж2}). \quad (2.20)$$

Уравнения (2.18) – (2.20) можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} q \frac{1}{\alpha_1} &= t_{ж1} - t_{c1}; \\ q \frac{\delta}{\lambda} &= t_{c1} - t_{c2}; \\ &\dots \\ q \frac{1}{\alpha_2} &= t_{c2} - t_{ж2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

Сложив равенства (2.21) почленно, получим:

$$q \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \right) = t_{ж1} - t_{ж2}. \quad (2.22)$$

Отсюда плотность теплового потока, Вт/м²,

$$q = \frac{t_{ж1} - t_{ж2}}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}. \quad (2.23)$$

Обозначим:

$$\frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} = k \quad (2.24)$$

Эта величина измеряется в Вт/(м²·К).

С учетом (2.24) уравнение (2.23) можно записать в виде

$$q = k(t_{ж1} - t_{ж2}), \text{ Вт/м}^2. \quad (2.25)$$

Величина k имеет ту же размерность, что и α , и называется коэффициентом теплопередачи. Коэффициент теплопередачи k характеризует интенсивность передачи теплоты от одной жидкости к другой через разделяющую их стенку и численно равен количеству теплоты, которое передается через единицу поверхности стенки в единицу времени при разности температур между жидкостями в один градус.

Величина, обратная коэффициенту теплопередачи, называется полным термическим сопротивлением теплопередачи.

Полное термическое сопротивление однослойной стенки запишется:

$$R = \frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}. \quad (2.26)$$

Из (2.26) видно, что полное термическое сопротивление складывается из частных термических сопротивлений $1/\alpha_1$, δ/λ и $1/\alpha_2$, причем $1/\alpha_1 = R_1$ – термическое сопротивление теплоотдачи от горячей жидкости к поверхности стенки; $\delta/\lambda = R_c$ – термическое сопротивление теплопроводности стенки; $1/\alpha_2 = R_2$ – термическое сопротивление теплоотдачи от поверхности стенки к холодной жидкости.

Поскольку общее термическое сопротивление состоит из частных термических сопротивлений, то совершенно очевидно, что в случае многослойной стенки нужно учитывать термическое сопротивление каждого слоя. И если стенка состоит из слоев, то полное термическое сопротивление теплопередачи через такую стенку будет равно:

$$R = \frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \dots + \frac{\delta_n}{\lambda_n} + \frac{1}{\alpha_2} \quad \text{или} \quad R = \frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}. \quad (2.27)$$

Отсюда

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}}. \quad (2.28)$$

Плотность теплового потока через многослойную стенку, состоящую из n слоев, будет равна:

$$q = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}} = k(t_{жк1} - t_{жк2}). \quad (2.29)$$

Уравнение (2.29) для многослойной стенки подобно уравнению (2.25) для однородной плоской стенки. Различие заключается в выражениях для коэффициентов теплопередачи k . При сравнении уравнений (2.28) и (2.24) видно, что соотношение (2.24) является частным случаем уравнения (2.28), когда $n = 1$.

Тепловой поток Q , Вт, через поверхность F твердой стенки

$$Q = qF = k\Delta tF. \quad (2.30)$$

Температуры поверхностей однородной стенки можно найти из уравнений (2.21). Из них следует, что

$$t_{c1} = t_{жк1} - q \frac{1}{\alpha_1}; \quad t_{c2} = t_{жк1} - q \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} \right) \quad \text{или} \quad t_{c2} = t_{жк2} - q \frac{1}{\alpha_2}. \quad (2.31)$$

Из уравнения (2.29) следует, что передача теплоты через многослойную стенку при граничных условиях первого рода является частным случаем общего случая передачи теплоты при граничных условиях третьего рода.

2.2. Передача теплоты через цилиндрическую стенку ($q_v = 0$)

а) Граничные условия первого рода

Рассмотрим стационарный процесс теплопроводности в цилиндрической стенке (трубе) с внутренним диаметром $d_1 = 2r_1$ и наружным диаметром $d_2 = 2r_2$ (рис. 2.3.).

На поверхностях стенки заданы постоянные температуры t_{c1} и t_{c2} . В заданном интервале температур коэффициент теплопроводности материала стенки λ является постоянной величиной. Необходимо

найти распределение температур в цилиндрической стенке и тепловой поток через нее.

В рассматриваемом случае дифференциальное уравнение теплопроводности удобно записать в цилиндрической системе координат:

$$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0. \quad (2.32)$$

При этом ось Oz совмещена с осью трубы.

При заданных условиях температура изменяется только в радиальном направлении и температурное поле будет одномерным. Поэтому

$$\frac{\partial t}{\partial z} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0. \quad (2.33)$$

Кроме того, так как температуры на наружной и внутренней поверхностях трубы неизменны, изотермические поверхности являются цилиндрическими, имеющими с трубой общую ось. Тогда температура не должна изменяться также вдоль φ т. е.

$$\frac{\partial t}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (2.34)$$

С учетом (2.33) и (2.34) уравнение (2.32) примет вид:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} = 0. \quad (2.35)$$

Граничные условия:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } r = r_1 \quad t = t_{c1} \\ \text{при } r = r_2 \quad t = t_{c2} \end{array} \right\} \quad (2.36)$$

Если решить уравнение (2.35) совместно с (2.36), получим уравнение температурного поля в цилиндрической стенке. Введем новую переменную

$$u = \frac{dt}{dr} \quad (2.37)$$

Тогда

$$\frac{d^2 t}{dr^2} = \frac{du}{dr}; \quad \frac{1}{r} \frac{dt}{dr} = \frac{u}{r}. \quad (2.38)$$

Подставляя (2.37) и (2.38) в уравнение (2.35), получаем:

$$\frac{du}{dr} + \frac{1}{r} u = 0. \quad (2.39)$$

Интегрируя (2.39), получаем:

$$\ln u + \ln r = \ln C_1. \quad (2.40)$$

Потенцируя выражения (2.40) и переходя к первоначальным переменным, получаем:

$$dt = C_1 \frac{dr}{r}. \quad (2.41)$$

После интегрирования получим:

$$t = C_1 \ln r + C_2. \quad (2.42)$$

Постоянные C_1 и C_2 можно определить, если в уравнение (2.42) подставить граничные условия:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } r = r_1 \quad t = t_{c1}, \quad \text{отсюда } t_{c1} = C_1 \ln r_1 + C_2; \\ \text{при } r = r_2 \quad t = t_{c2}, \quad \text{отсюда } t_{c2} = C_1 \ln r_2 + C_2. \end{array} \right\} \quad (2.43)$$

Решение уравнений (2.43) относительно C_1 и C_2 дает

$$C_1 = \frac{t_{c1} - t_{c2}}{\ln \frac{r_1}{r_2}}; \quad C_2 = t_{c1} - (t_{c1} - t_{c2}) \frac{\ln r_1}{\ln \frac{r_1}{r_2}}. \quad (2.44)$$

Подставив значения C_1 и C_2 в уравнение (2.42), получим:

$$t = t_{c1} - (t_{c1} - t_{c2}) \frac{\ln \frac{r}{r_1}}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \quad \text{или} \quad t = t_{c1} - (t_{c1} - t_{c2}) \frac{\ln \frac{d}{d_1}}{\ln \frac{d_2}{d_1}}. \quad (2.45)$$

Полученное выражение представляет собой уравнение логарифмической кривой. То обстоятельство, что распределение температуры в цилиндрической стенке является криволинейным, можно объяснить следующим.

В случае плоской стенки плотность теплового потока q остается одинаковой для всех изотермических поверхностей. По этой причине градиент температуры сохраняет для всех изотермических поверхностей постоянную величину. В случае цилиндрической стенки плотность теплового потока через любую изотермическую поверхность зависит от радиуса.

Для нахождения количества теплоты, проходящего через цилиндрическую поверхность величиной F в единицу времени, можно воспользоваться законом Фурье:

$$Q = -\lambda \frac{dt}{dr} F.$$

Подставляя в уравнение закона Фурье значение градиента температуры согласно уравнению (2.41), получаем (учитывая, что $F = 2\pi r l$):

$$Q = \frac{2\pi\lambda l(t_{c1} - t_{c2})}{\ln \frac{d_2}{d_1}}; \quad (2.46)$$

здесь Q измеряется в ваттах.

Из уравнения (2.46) следует, что количество теплоты, проходящее через цилиндрическую стенку в единицу времени, полностью определяется заданными граничными условиями и не зависит от радиуса.

Тепловой поток (2.46) может быть отнесен либо к единице длины трубы, либо к единице внутренней или внешней поверхности. При этом расчетные формулы для плотности теплового потока, Вт/м²,

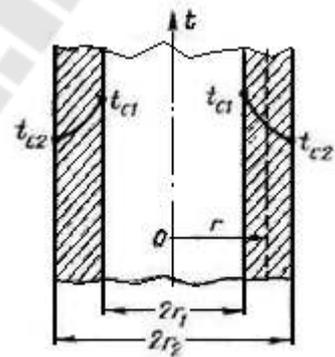


Рис. 2.3. Теплопроводность цилиндрической стенки.

принимают вид:

$$\frac{Q}{\pi d_1 l} = q_1 = \frac{2\lambda(t_{c1} - t_{c2})}{d_1 \ln \frac{d_2}{d_1}}. \quad (2.47)$$

(тепловой поток через единицу внутренней поверхности);

$$\frac{Q}{\pi d_2 l} = q_2 = \frac{2\lambda(t_{c1} - t_{c2})}{d_2 \ln \frac{d_2}{d_1}}. \quad (2.48)$$

(тепловой поток через единицу наружной поверхности);

$$\frac{Q}{l} = q_l = \frac{\pi(t_{c1} - t_{c2})}{\frac{1}{2\lambda} d_1 \ln \frac{d_2}{d_1}}. \quad (2.49)$$

(поток теплоты, проходящий через единицу длины трубы, Вт/м).

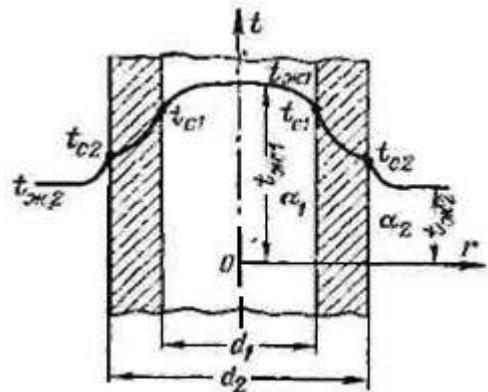
Тепловой поток, отнесенный к единице длины трубы, измеряется в Вт/м и называется **линейной плотностью теплового потока**. Как видно из уравнения (2.49), при неизменном отношении d_2/d_1 линейная плотность теплового потока не зависит от поверхности цилиндрической стенки. Плотности теплового потока q_1 и q_2 (отнесенные к внутренней и внешней поверхности) в случае передачи теплоты через трубу **неодинаковы**, причем всегда $q_1 > q_2$. Последнее ясно видно из уравнений (2.47) и (2.48).

Из уравнений (2.47) – (2.49) легко установить связь между величинами q_1 , q_2 и q_l :

$$q_l = \pi d_1 q_1 = \pi d_2 q_2. \quad (2.50)$$

б) *Граничные условия третьего рода (теплопередача)*

Рассмотрим однородную цилиндрическую стенку (трубу) с постоянным коэффициентом теплопроводности λ . Заданы постоянные температуры подвижных сред $t_{ж1}$ и $t_{ж2}$ и постоянные значения коэффициентов



теплоотдачи на внутренней и наружной поверхностях трубы α_1 и α_2 (рис. 2.4.).

Необходимо найти, q_l и t_c . Будем полагать, что длина трубы велика по сравнению с толщиной стенки. Тогда потерями теплоты с торцов трубы можно пренебречь, и при установившемся тепловом режиме количество теплоты, которое будет передаваться от горячей среды к поверхности стенки, проходить через стенку и отдаваться от стенки к холодной жидкости, будет одно и то же.

Следовательно, можно написать:

$$\left. \begin{aligned} q_l &= \alpha_1 \pi d_1 (t_{ж1} - t_{c1}); \\ q_l &= \frac{\pi (t_{c1} - t_{c2})}{\frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1}}; \\ q_l &= \alpha_2 \pi d_2 (t_{c2} - t_{ж2}). \end{aligned} \right\} (2.51)$$

Представим эти уравнения следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} t_{ж1} - t_{c1} &= \frac{q_l}{\pi \alpha_1 d_1}; \\ t_{c1} - t_{c2} &= \frac{q_l}{\pi 2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1}; \\ t_{c2} - t_{ж2} &= \frac{q_l}{\pi \alpha_2 d_2}. \end{aligned} \right\} (2.52)$$

Складывая уравнения, входящие в систему (2.52), получаем температурный напор:

$$t_{ж1} - t_{ж2} = \frac{q_l}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2} \right). (2.53)$$

Отсюда следует:

Рис. 2.4. Теплопередача через однородную цилиндрическую стенку

$$q_l = \frac{\pi(t_{жк1} - t_{жк2})}{\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}}. \quad (2.54)$$

Обозначим:

$$k_l = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}}. \quad (2.55)$$

С учетом (2.55) уравнение (2.54) запишется:

$$q_l = k_l \pi (t_{жк1} - t_{жк2}). \quad (2.56)$$

Величина k_l называется линейным коэффициентом теплопередачи, он измеряется в Вт/(м·К). Он характеризует интенсивность передачи теплоты от одной подвижной среды к другой через разделяющую их стенку. Значение k_l численно равно количеству теплоты, которое проходит через стенку длиной 1 м в единицу времени от одной среды к другой при разности температур между ними 1 град.

Величина $R_l = 1/k_l$, обратная линейному коэффициенту теплопередачи, называется линейным термическим сопротивлением теплопередачи. Она равна

$$R_l = \frac{1}{k_l} = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}, \quad (2.57)$$

здесь R_l измеряется в м·К/Вт.

Отдельные составляющие полного термического сопротивления представляют собой:

$1/\alpha_1 d_1$ и $1/\alpha_2 d_2$ – термические сопротивления теплоотдачи на соответствующих поверхностях, обозначим их соответственно R_{l1} и

R_{l2} ; $\frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1}$ – термическое сопротивление теплопроводности стенки, обозначим его через R_{lc} .

Следует отметить, что линейные термические сопротивления теплоотдачи для трубы определяются не только коэффициентами те-

плотности α_1 и α_2 , но и соответствующими диаметрами.

Если тепловой поток через цилиндрическую стенку отнести к внутренней или наружной поверхности стенки, то получим плотность теплового потока, Вт/м², отнесенную к единице соответствующей поверхности трубы:

$$q_1 = \frac{Q}{\pi d_1 l} = \frac{k_1}{d_1} (t_{жс1} - t_{жс2}) \text{ или } q_2 = \frac{Q}{\pi d_2 l} = \frac{k_1}{d_2} (t_{жс1} - t_{жс2}), \quad (2.58)$$

И

$$q_1 = k_1 (t_{жс1} - t_{жс2}); \quad q_2 = k_2 (t_{жс1} - t_{жс2}), \quad (2.59)$$

где $k_1 = k_l / d_1$ и $k_2 = k_l / d_2$.

Последнее соотношение устанавливает связь между коэффициентом теплопередачи при отнесении теплового потока к единице длины цилиндрической стенки и к единице поверхности:

$$k_l = k_1 d_1 = k_2 d_2;$$

2.3. Критический диаметр цилиндрической стенки

Рассмотрим влияние изменения наружного диаметра на термическое сопротивление однородной цилиндрической стенки. Из (2.57) имеем:

$$R_l = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}. \quad (2.60)$$

При постоянных значениях α_1 , d_1 , λ и α_2 полное термическое сопротивление теплопередачи цилиндрической стенки будет зависеть от внешнего диаметра. Из уравнения (2.57) следует, что при этих условиях $1/\alpha_1 d_1 \equiv R_{l1} = const$.

Термическое сопротивление теплопроводности $\frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} \equiv R_{lc}$ с увеличением d_2 будет возрастать, а термическое сопротивление теплоотда-

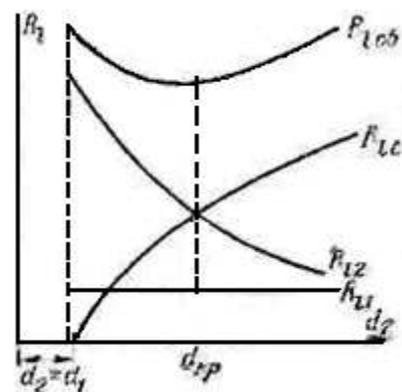


Рис. 2.5. Зависимость термического сопротивления цилиндрической стенки от d_2

чи $1/\alpha_2 d_2 \equiv R_{l2}$ будет уменьшаться. Очевидно, что полное термическое сопротивление будет определяться характером изменения составляющих R_{l1} и R_{l2} . Изменение частных термических сопротивлений изображено на рис. 2.5.

Для того чтобы выяснить, как будет изменяться R_l при изменении толщины цилиндрической стенки, исследуем R_l как функцию d_2 . Возьмем производную от R_l по d_2 и приравняем нулю:

$$\frac{d(R_l)}{d(d_2)} = \frac{1}{2\lambda d_2} - \frac{1}{\alpha_2 d_2^2} = 0. \quad (2.61)$$

Значение d_2 из последнего выражения соответствует экстремальной точке кривой $R_l = f(d_2)$. Исследовав кривую любым из известных способов на максимум и минимум, увидим, что в экстремальной точке имеет место минимум. Таким образом, при значении диаметра $d_2 = 2\lambda/\alpha_2$ термическое сопротивление теплопередачи будет минимальным.

Значение внешнего диаметра трубы, соответствующего минимальному полному термическому сопротивлению теплопередачи, называется критическим диаметром и обозначается $d_{кр}$. Рассчитывается он по формуле

$$d_{кр} = \frac{2\lambda}{\alpha_2}. \quad (2.62)$$

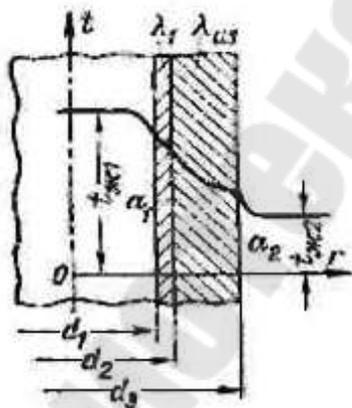


Рис. 2.6. К понятию критического диаметра изоляции

При $d_2 < d_{кр}$ с увеличением d_2 полное термическое сопротивление теплопередачи снижается, так как увеличение наружной поверхности оказывает на термическое сопротивление большее влияние, чем увеличение толщины стенки.

При $d_2 > d_{кр}$, с увеличением d_2 термическое сопротивление теплопередачи возрастает, что указывает на доминирующее влияние толщины стенки.

Изложенные соображения необходимо учитывать при выборе тепловой изоляции для покрытия различ-

ных цилиндрических аппаратов и трубопроводов.

Рассмотрим критический диаметр изоляции, наложенной на трубу (рис. 2.6). Термическое сопротивление теплопередачи для такой трубы запишется:

$$R_l = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda_c} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{2\lambda_{из}} \ln \frac{d_3}{d_2} + \frac{1}{\alpha_2 d_3}. \quad (2.63)$$

Из уравнения $q_l = \pi \Delta t / R_l$ следует, что q_l при увеличении внешнего диаметра изоляции d_3 сначала будет возрастать и при $d_3 = d_{кр}$ будет иметь максимум q_l . При дальнейшем увеличении внешнего диаметра изоляции q_l будет снижаться (рис. 2.7).

Выбрав какой-либо теплоизоляционный материал для покрытия цилиндрической поверхности, прежде всего, нужно рассчитать критический диаметр по формуле (2.62) для заданных $\lambda_{из}$, и α_2 .

Если окажется, что величина $d_{кр}$ больше наружного диаметра

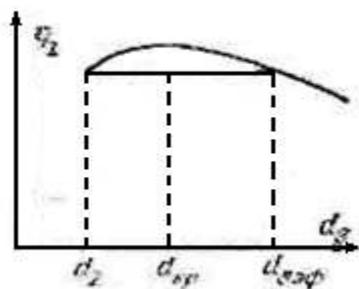


Рис. 2.6. Зависимость тепловых потерь от толщины изоляции, наложенной на цилиндрическую стенку.

трубы d_2 , то применение выбранного материала в качестве тепловой изоляции нецелесообразно. В области $d_2 < d_3 < d_{кр}$ из при увеличении толщины изоляции будет наблюдаться увеличение теплотерь. Это положение наглядно иллюстрируется на рис.

2.6. Только при $d_3 = d_{3эф}$ тепловые потери вновь станут такими же, как для первоначального, неизолированного трубопровода.

Следовательно, некоторый слой тепловой изоляции не будет оправдывать своего назначения. Значит, для эффективной работы тепловой изоляции необходимо, чтобы $d_{кр из} \leq d_2$.

Пример. Трубу внешним диаметром $d = 20$ мм необходимо покрыть тепловой изоляцией. В качестве изоляции может быть взят асбест с коэффициентом теплопроводности $\lambda = 0,1$ Вт/(м·К), коэффициент теплоотдачи во внешнюю среду $\alpha_2 = 5$ Вт/(м²·К). Целесообразно ли в данном случае использовать асбест в качестве материала для тепловой изоляции?

Критический диаметр изоляции

$$d_{крит} = \frac{2\lambda_{из}}{\alpha_2} = \frac{2 \cdot 0,1}{5} = 0,04 м = 40 мм.$$

Так как $d_2 < d_{крит}$, асбест в рассматриваемом случае использовать нецелесообразно.

В настоящем параграфе вопрос о критическом диаметре рассмотрен применительно к круглому цилиндру. Очевидно, что аналогичный эффект будет наблюдаться и в случае тел иной геометрии, у которых внутренняя и внешняя поверхности различны.

2.4. Теплопроводность в стержне (ребре) постоянного поперечного сечения

а) Дифференциальное уравнение и его решение

Ребра в поперечном сечении могут иметь профиль самой различной геометрической конфигурации (прямоугольник, круг, треугольник и другие фигуры, в том числе и неправильной геометрической формы).

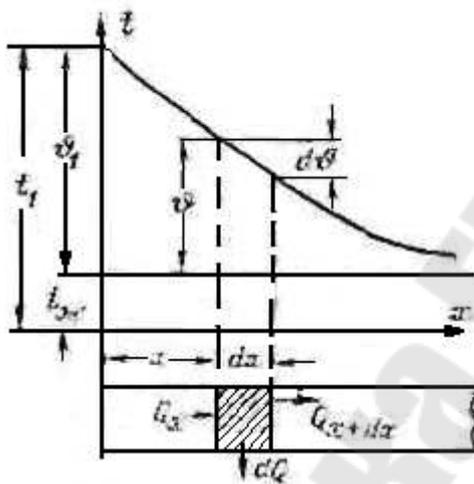


Рис. 2.7. Перенос теплоты через стержень.

Рассмотрим распространение тепла в прямом стержне с постоянным поперечным сечением по длине. Обозначим площадь поперечного сечения стержня через f и периметр через u . Стержень находится в среде с постоянной температурой $t_{жс}$ коэффициент теплоотдачи от поверхности стержня к окружающей среде будем считать

постоянным для всей поверхности. Будем полагать также, что коэффициент теплопроводности материала стержня λ достаточно велик, а поперечное сечение очень мало по сравнению с его длиной. Последнее дает основание пренебречь изменением температуры в поперечном сечении и считать, что она изменяется только вдоль оси стержня. Для удобства дальнейших выкладок отсчет температуры будем вести от $t_{жс} = const$. Отсчитанную таким образом избыточную температуру стержня обозначим через ϑ . Очевидно,

$$\vartheta = t - t_{жс}, \quad (2.64)$$

где $t_{жс}$ – температура среды, окружающей стержень;

t – текущая температура стержня.

Если задана температура основания стержня t_1 , то избыточная температура стержня (рис. 2.7.) будет:

$$\vartheta_1 = t_1 - t_{жс}$$

На расстоянии x от основания стержня выделим элемент стержня длиной dx . Уравнение теплового баланса для рассматриваемого элемента можно записать:

$$Q_x - Q_{x+dx} = dQ, \quad (2.65)$$

где Q_x – количество теплоты, входящее в левую грань элемента за единицу времени;

Q_{x+dx} – количество теплоты, которое выходит из противоположной грани элемента за то же время;

dQ – количество теплоты, отдаваемое за единицу времени наружной поверхностью элемента окружающей его среде.

Согласно закону Фурье

$$Q_x = -\lambda \frac{d\vartheta}{dx} f \quad \text{и} \quad Q_{x+dx} = -\lambda \frac{d}{dx} \left(\vartheta + \frac{d\vartheta}{dx} dx \right) f,$$

Откуда

$$Q_x = -\lambda \frac{d\vartheta}{dx} f - \lambda f \frac{d^2\vartheta}{dx^2} dx. \quad (2.66)$$

Следовательно,

$$Q_x - Q_{x+dx} = \lambda f \frac{d^2\vartheta}{dx^2} dx. \quad (2.67)$$

С другой стороны, согласно закону Ньютона – Рихмана:

$$dQ = \alpha_p \vartheta u dx. \quad (2.68)$$

Приравнявая (2.67) и (2.68), получаем следующее дифференциальное уравнение, описывающее изменение температуры стержня:

$$\frac{d^2\vartheta}{dx^2} = \frac{\alpha_p u}{\lambda f} \vartheta = m^2 \vartheta, \quad (2.69)$$

$$\text{где } m = +\sqrt{\frac{\alpha_p u}{\lambda f}} \quad (2.70)$$

величина m измеряется в 1/м.

Из выражения (2.70) видно, что для ребра, форма и размеры которого заданы, при условии постоянства коэффициента теплоотдачи α_p по всей поверхности и постоянства λ в рассматриваемом интервале температур, величина $m = const$. Тогда общий интеграл для уравнения (2.69) будет:

$$\vartheta = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}. \quad (2.71)$$

Значения постоянных C_1 и C_2 определяются из граничных условий. Граничные условия могут быть заданы по-разному в зависимости от длины стержня и других факторов.

б) Стержень бесконечной длины

В начальном сечении стержня температура поддерживается постоянной, т. е. при $x=0$ величина $\vartheta = \vartheta_1$. Если длина стержня $l \rightarrow \infty$, то вся теплота, подводимая к стержню, будет отдана им в окружающую среду и при $x \rightarrow \infty$ имеем $\vartheta = 0$.

Подстановка граничных условий в уравнение (2.71) дает:

$$\text{при } x = 0 \quad \vartheta_1 = C_1 + C_2;$$

$$\text{при } x \rightarrow \infty \quad C_1 e^{\infty} = 0.$$

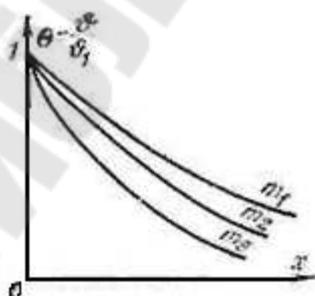
Последнее равенство возможно только при $C_1 = 0$. Таким образом, $C_2 = \vartheta_1$. Подставляя эти значения постоянных C_1 и C_2 в уравнение (2.71), получаем:

$$\vartheta = \vartheta_1 e^{-mx}. \quad (2.72)$$

Последнее равенство можно записать в виде:

$$\theta = \frac{\vartheta}{\vartheta_1} = e^{-mx}. \quad (2.73)$$

где θ – безразмерная температура, выра-



женная в долях температуры ϑ_1 начального сечения стержня.

На рис. 2.8. представлена зависимость безразмерной температуры θ от длины стержня при различных значениях параметра $m (m_1 < m_2 < m_3)$.

Рис. 2.8. Изменение температуры по длине стержня

Из рассмотрения рис. 2.8 следует, что безразмерная температура убывает тем сильнее, чем больше множитель m . При $x \rightarrow \infty$ все кривые асимптотически приближаются к $\theta = 0$.

Из уравнения $m = \sqrt{\alpha_p u / \lambda f}$ следует, что величина m пропорциональна теплоотдаче с боковой поверхности и обратно пропорциональна $\sqrt{\lambda f}$ – фактору, определяющему передачу теплоты теплопроводностью вдоль стержня. Отсюда следует, что при ребрировании нужно выбирать материал для ребер с большим коэффициентом теплопроводности. Последнее приводит к уменьшению m и сохранению больших избыточных температур вдоль стержня. При $\alpha_p / \lambda = const$ величина m возрастает с возрастанием u / f , что указывает на более эффективную работу ребер с профилями, имеющими меньшее отношение u / f при том же поперечном сечении.

Количество теплоты, передаваемое стержнем в окружающую среду, очевидно, будет равняться количеству теплоты, проходящему через его основание.

Через основание стержня проходит тепловой поток

$$Q = -\lambda \left(\frac{d\vartheta}{dx} \right)_{x=0} f;$$

здесь Q измеряется в ваттах.

Из уравнения (2.72) находим:

$$\left(\frac{d\vartheta}{dx} \right)_{x=0} = -m e^{-mx} \vartheta_1 |_{x=0} = -m \vartheta_1. \quad (2.74)$$

Подставляя значение градиента температуры при $x = 0$ в предыдущее уравнение для теплового потока, получаем формулу, определяющую количество теплоты, отданной стержнем в окружающую среду:

$$Q = \lambda f m \vartheta_1 = \vartheta_1 \sqrt{\alpha_p \lambda u f}. \quad (2.75)$$

в) Стержень конечной длины

Для стержня конечной длины дифференциальное уравнение (2.69) и его решение (2.71) сохраняет силу, но граничные условия будут другими:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } x=0 \quad \vartheta = \vartheta_1; \\ \text{при } x=l \quad -\lambda \left(\frac{d\vartheta}{dx} \right)_{x=l} = \alpha_l \vartheta_l; \\ \text{или} \\ \left(\frac{d\vartheta}{dx} \right)_{x=l} = \frac{\alpha_l}{\lambda} \vartheta_l \end{array} \right\}, \quad (2.76)$$

где ϑ_l температура на конце стержня;

α_l – коэффициент теплоотдачи с торца стержня.

При $x=l$ имеет место равенство количества теплоты, подведенного к торцу стержня за счет теплопроводности и количества теплоты, отдаваемого поверхностью торца в окружающую среду за счет теплоотдачи. Для определения постоянных C_1 и C_2 в уравнении (2.71) используем граничные условия (2.76):

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } x=0 \quad \vartheta_1 = C_1 + C_2; \\ \text{при } x=l \\ \left(\frac{d\vartheta}{dx} \right)_{x=l} = C_1 m e^{ml} - C_2 m e^{-ml} = -\frac{\alpha_l}{\lambda} \vartheta_l; \\ \vartheta_l = C_1 m e^{ml} + C_2 m e^{-ml} \end{array} \right\}. \quad (2.77)$$

Из полученных уравнений (2.76) определяем постоянные C_1 и C_2 :

$$C_1 = \frac{\vartheta_1 \left(m - \frac{\alpha_l}{\lambda} \right)}{e^{2ml} \left(m + \frac{\alpha_l}{\lambda} \right) + m - \frac{\alpha_l}{\lambda}}; \quad C_2 = \vartheta_1 \frac{e^{2ml} \left(m + \frac{\alpha_l}{\lambda} \right)}{e^{2ml} \left(m + \frac{\alpha_l}{\lambda} \right) + m - \frac{\alpha_l}{\lambda}}.$$

Подставляя полученные значения C_1 и C_2 в уравнение (2.71), получаем:

$$\vartheta = \vartheta_1 \left[\frac{e^{mx} \left(m - \frac{\alpha_l}{\lambda} \right)}{e^{2ml} \left(m + \frac{\alpha_l}{\lambda} \right) + m - \frac{\alpha_l}{\lambda}} + \frac{e^{-mx} e^{2ml} \left(m + \frac{\alpha_l}{\lambda} \right)}{e^{2ml} \left(m + \frac{\alpha_l}{\lambda} \right) + m - \frac{\alpha_l}{\lambda}} \right]. \quad (2.78)$$

Умножив и разделив правую часть уравнения (2.78) на e^{-ml} и произведя простые алгебраические преобразования, получим:

$$\vartheta = \vartheta_1 \left[\frac{m \left[e^{m(l-x)} + e^{-m(l-x)} \right] + \frac{\alpha_l}{\lambda} \left[e^{m(l-x)} - e^{-m(l-x)} \right]}{m \left[e^{ml} + e^{-ml} \right] + \frac{\alpha_l}{\lambda} \left[e^{ml} - e^{-ml} \right]} \right]. \quad (2.79)$$

Напомним, что

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = ch(x) \quad \text{и} \quad \frac{e^x - e^{-x}}{2} = sh(x).$$

С учётом сказанного уравнение (2.78) запишется:

$$\vartheta = \vartheta_1 \frac{ch[m(t-x)] + \frac{\alpha_l}{m\lambda} sh[m(t-x)]}{ch(ml) + \frac{\alpha_l}{m\lambda} sh(ml)}. \quad (2.80)$$

Если теплоотдачей с конца стержня пренебречь, то граничные условия (2.76) можно записать в виде:

$$\text{При } x = 0 \quad \vartheta = \vartheta_1;$$

$$\text{При } x = l \quad \left(\frac{d\vartheta}{dx} \right)_{x=l} = 0.$$

Последнее можно допустить для случая, когда α_l на торце стержня мало, а коэффициент теплопроводности материала λ велик и отношение $\alpha_l / \lambda \rightarrow 0$, т. е. можно пренебречь теплоотдачей с торца стержня.

Для этих условий в соотношении (2.80) вторые члены числителя и знаменателя правой части обращаются в нуль и уравнение принимает вид:

$$\vartheta = \vartheta_1 \frac{ch[m(t-x)]}{ch(ml)}; \quad (2.81)$$

здесь ϑ измеряется в $^{\circ}\text{C}$.

По формулам (2.80) и (2.81) можно вычислить температуру в любом сечении стержня. Обычно доля теплоты, отдаваемой с торца стержня, является величиной малой по сравнению с количеством теплоты, отдаваемым с поверхности ребра, и для практических инженерных расчетов, как правило, используется формула (2.81).

В предельном случае, когда $x=l$, формула (2.81) принимает вид:

$$\vartheta_{x=l} = \frac{\vartheta_1}{ch(ml)}. \quad (2.82)$$

Количество теплоты Q_p , Вт, отдаваемое поверхностью ребра в окружающую среду, будет равно количеству теплоты, подводимому к основанию ребра:

$$Q_p = -\lambda f \left(\frac{d\vartheta}{dx} \right)_{x=0}.$$

Из уравнения (2.81) находим:

$$\left(\frac{d\vartheta}{dx} \right)_{x=0} = -\vartheta_1 m \frac{sh(ml)}{ch(ml)} = -\vartheta_1 m th(ml).$$

Тогда

$$Q_p = \lambda f m \vartheta_1 th(ml). \quad (2.83)$$

Подставив $m = \sqrt{a_p u / \lambda f}$ в (2.83), получим:

$$Q_p = \vartheta_1 \sqrt{a_p u / \lambda f} th(ml). \quad (2.84)$$

Если длина стержня очень велика, то $ch(ml) \rightarrow \infty$, а $th(ml) \approx 1$.

Тогда $\vartheta_{x=l} = 0$

И формула (2.83) превращается в (2.75).

2.5. Теплопередача через ребристую плоскую стенку

Интенсификация теплопередачи за счет оребрения стенок

При передаче теплоты через цилиндрическую стенку термиче-

ские сопротивления $1/\alpha_1 d_1$ и $1/\alpha_2 d_2$ определяются не только значениями коэффициентов теплоотдачи, но и размерами самих поверхностей. При передаче тепла через шаровую стенку- влияние диаметров d_1 и d_2 оказывается еще сильнее, что видно из соотношений $1/\alpha_1 d_1^2$ и $1/\alpha_2 d_2^2$. Отсюда следует, что если α мало, то термическое сопротивление теплоотдачи можно уменьшить путем увеличения соответствующей поверхности. Такой же результат можно получить и для плоской стенки, если одну из поверхностей увеличить путем оребрения. Последнее обстоятельство и положено в основу интенсификации теплопередачи за счет оребрения. При этом термические сопротивления станут пропорциональными величинам

$$\frac{1}{\alpha_1 F_1} \text{ и } \frac{1}{\alpha_2 F_2}.$$

Следует указать, что при использовании метода оребрения нужно руководствоваться следующими соображениями: если $\alpha_1 \ll \alpha_2$, то оребрять поверхность со стороны α_1 следует до тех пор, пока $\alpha_1 F_1$ не достигает значения $\alpha_2 F_2$. Дальнейшее увеличение поверхности F_1 малоэффективно. Ребристые поверхности изготавливаются или в виде сплошных отливок или отдельных ребер, прикрепленных к поверхности.

Строгое аналитическое решение задачи о распространении тепла в ребре связано со значительными трудностями. В основу решения поэтому кладут некоторые допущения, которые позволяют сравнительно простым путем получить нужный результат. Ниже рассмотрим метод решения задач о теплопроводности в ребрах простейших геометрических форм.

Необходимо найти тепловой поток через плоскую ребристую стенку безграничных размеров. Стенка оребрена со стороны меньшего коэффициента теплоотдачи (рис. 2.9.).

Заданы постоянные значения коэффициентов теплоотдачи на неоребренной поверхности стенки α_l , гладкой части оребренной поверхности α_c и на поверхности ребер α_p . Заданы геометрические размеры ребер (рис. 2.9.) и температуры теплоносителей $t_{ж1}$ и $t_{ж2}$.

Поскольку для ребра $b \gg \delta$, то полагаем, что периметр поперечного сечения ребер $u = 2b$. Площадь поперечного сечения ребра

$$f = b\delta.$$

Следовательно, $m = \sqrt{a_p u / \lambda f} = \sqrt{2\alpha_p / \lambda \delta}$, 1/м. Подставив полученное выражение для m в уравнение (2.83), умножив и разделив на $2l$, получим:

$$Q_p = \vartheta_1 \sqrt{a_p 2b\lambda\delta} \frac{2l}{2l} \operatorname{th} \left(\frac{l}{\delta} \sqrt{\frac{2a_p b}{\lambda}} \right) = a_p \vartheta_1 F_p \frac{\operatorname{th} \left(\frac{l}{\delta} \sqrt{\frac{2a_p b}{\lambda}} \right)}{\frac{l}{\delta} \sqrt{\frac{2a_p b}{\lambda}}}; \quad (2.85)$$

здесь $a_p \delta / \lambda = Bi$ – безразмерный комплекс, называемый ч и с л о м Био. Число Bi является важной характеристикой процесса теплопроводности. Оно представляет собой отношение внутреннего термического сопротивления теплопроводности к внешнему термическому сопротивлению теплоотдачи:

$$Bi = \frac{\delta / \lambda}{1 / \alpha_p}.$$

Окончательно уравнение для теплового потока с поверхности ребра можно записать в виде

$$Q_p = a_p \vartheta_1 F_p \frac{\operatorname{th} \left(\frac{l}{\delta} \sqrt{2Bi} \right)}{\frac{l}{\delta} \sqrt{2Bi}}. \quad (2.86)$$

Обозначим:

$$\frac{\operatorname{th} \left(\frac{l}{\delta} \sqrt{2Bi} \right)}{\frac{l}{\delta} \sqrt{2Bi}} = E.$$

Величина E называется коэффициентом эффективности ребра. Тогда уравнение (2.86) принимает вид:

$$Q_p = a_p \vartheta_1 F_p E. \quad (2.87)$$

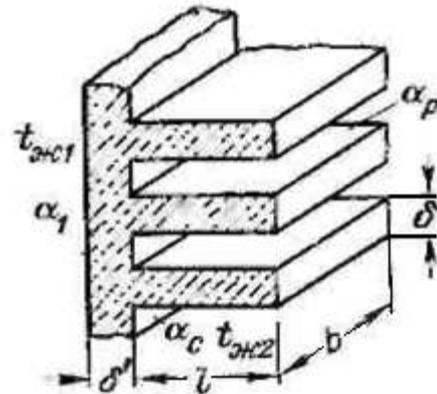


Рис. 2.9. Теплопередача через ребристую стенку

Величина $E = f\left(\frac{l}{\delta}\sqrt{2Bi}\right)$ стремится к своему максимальному значению, равному единице, при $\frac{l}{\delta}\sqrt{2Bi} \rightarrow 0$ (при заданных геометрических размерах ребра последнее возможно в случае, если $\lambda \rightarrow \infty$, т. е. $Bi \rightarrow 0$).

Теплота Q_c , Вт, отдаваемая гладкой частью ребренной поверхности,

$$Q_c = a_c \vartheta_1 F_c.$$

Общее количество теплоты:

$$Q = Q_p + Q_c = a_p \vartheta_1 F_p E + a_c \vartheta_1 F_c \quad (2.88)$$

или

$$Q = a_{np} \vartheta_1 F_{pc}, \quad F_{pc} = F_p + F_c. \quad (2.89)$$

Из сопоставления (2.88) и (2.89) следует, что

$$\alpha_{np} = a_p E \frac{F_p}{F_{pc}} + a_c \frac{F_c}{F_{pc}}. \quad (2.90)$$

Величина α_{np} , входящая в уравнение (2.90), называется *приведенным коэффициентом теплоотдачи*. Это такой усредненный коэффициент теплоотдачи ребристой стенки, который учитывает теплоотдачу поверхности ребра, поверхности гладкой части стенки и эффективность работы ребра.

Тогда для передачи теплоты через ребристую стенку можно записать систему уравнений:

$$Q = \alpha_1 F_1 (t_{ж1} - t_{c1}); \quad Q = \frac{\lambda}{\delta'} (t_{c1} - t_{c2}) F_1; \quad Q = \alpha_{np} (t_{c2} - t_{ж1}) F_{pc}; \quad \text{здесь } \delta' - \text{ см. рис. 2.9.}$$

Из этих уравнений получаем:

$$Q = \frac{t_{ж1} - t_{ж2}}{\frac{1}{\alpha_1 F_1} + \frac{\delta'}{\lambda F_1} + \frac{1}{\alpha_{np} F_{pc}}}. \quad (2.91)$$

Если тепловой поток отнести к единице оребренной поверхности стенки, то

$$\frac{Q}{F_{pc}} = q_{pc} \frac{t_{ж1} - t_{ж2}}{\frac{1}{\alpha_1} \frac{F_{pc}}{F_1} + \frac{\delta'}{\lambda} \frac{F_{pc}}{F_1} + \frac{1}{\alpha_{np}}} = k_{pc}(t_{ж1} - t_{ж2}), \quad (2.92)$$

где $k_{pc} = \frac{t_{ж1} - t_{ж2}}{\frac{1}{\alpha_1} \frac{F_{pc}}{F_1} + \frac{\delta'}{\lambda} \frac{F_{pc}}{F_1} + \frac{1}{\alpha_{np}}}$ – коэффициент теплопередачи через

ребристую стенку при отнесении теплового потока к оребренной поверхности, Вт/(м²·К).

Если тепловой поток отнести к неоребренной поверхности стенки, то получим:

$$\frac{Q}{F_1} = q_1 = \frac{t_{ж1} - t_{ж2}}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta'}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_{np}} \frac{F_1}{F_{pc}}} = k_1(t_{ж1} - t_{ж2}), \quad (2.93)$$

где k_1 – коэффициент теплопередачи при отнесении теплового потока к неоребренной поверхности стенки.

Отношение оребренной поверхности F_{pc} к гладкой F_1 называется коэффициентом оребрения.

Влияние оребрения на коэффициент теплопередачи можно показать на следующем примере. Пусть $\alpha_1 = 1000$ и $\alpha_2 = 20$ Вт/(м²·К). Предположим, что δ'/λ мало и им можно пренебречь, тогда

$$k'_1 = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_{np}} \frac{F_1}{F_{pc}}}$$

Для плоской поверхности (коэффициент оребрения F_{pc}/F_1 равен единице) получим:

$$k'_1 = \frac{1}{\frac{1}{1000} + \frac{1}{20}} \approx 20 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}.$$

Если стенка имеет ребра с одной стороны, причем коэффициент $F_{pc}/F_1 = 2$, то

$$k'_1 = \frac{1}{\frac{1}{1000} + \frac{1}{20} + \frac{1}{2}} \approx 40 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}.$$

Следовательно, при заданных соотношениях коэффициентов теплоотдачи при оребрении плоской стенки со стороны малого a с коэффициентом оребрения $F_{pc} / F_1 = 2$, передача теплоты увеличивается примерно в 2 раза.

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

3.1. Общие положения

В этой главе рассматривается перенос теплоты за счет теплопроводности при отсутствии внутренних источников теплоты, когда температура системы изменяется не только от точки к точке, но и с течением времени. Такие процессы теплопроводности, когда поле температуры в теле изменяется не только в пространстве, но и во времени, называют нестационарными. Они имеют место при нагревании (охлаждении) различных заготовок и изделий, производстве стекла, обжиге кирпича, вулканизации резины, пуске и остановке различных теплообменных устройств, энергетических агрегатов и т. д.

Среди практических задач нестационарной теплопроводности важнейшее значение имеют две группы процессов: а) тело стремится к тепловому равновесию; б) температура тела претерпевает периодические изменения.

К первой группе относятся процессы прогрева или охлаждения тел, помещенных в среду с заданным тепловым состоянием, например прогрев болванки в печи, охлаждение металлических брусков и чушек, охлаждение закаливаемой детали и т. п.

Ко второй группе относятся процессы в периодически действующих подогревателях, например тепловой процесс регенераторов, насадка которых то нагревается дымовыми газами, то охлаждается воздухом. На рис. 3.1 показан характер кривых, полученных при нагревании однородного твердого тела в среде с постоянной температурой $t_{жс}$. По мере нагрева температура в каждой точке асимптотически приближается к температуре нагревающей среды. Наиболее быстро изменяется температура точек, лежащих вблизи поверхности тела. С увеличением времени прогрева эта разность будет уменьшаться и теоретически через достаточно большой отрезок времени она будет равна нулю.

В условиях передачи теплоты через стенку при внезапном изменении температуры одного из теплоносителей не вся теплота будет передаваться через стенку: часть ее уйдет на изменение внутренней энергии самой стенки (ее температуры), и только при наступлении стационарного процесса вся теплота будет передаваться через стенку

от одной жидкости к другой.

Приведенные примеры указывают на то, что нестационарные тепловые процессы всегда связаны с изменением внутренней энергии или энтальпии вещества.

В настоящей главе будет рассмотрено лишь несколько наиболее важных задач, относящихся к процессам, в кото-

рых тело стремится к тепловому равновесию. Цель такого рассмотрения заключается в том, чтобы показать общие физические особенности такого рода процессов, познакомиться с методом решения задачи нестационарной теплопроводности и получить математические соотношения для практических расчетов. Для более широкого ознакомления с решениями большого круга задач нестационарной теплопроводности как в случае стремления температуры тела к состоянию равновесия, так и ее периодического изменения следует обратиться к монографии А. В. Лыкова.

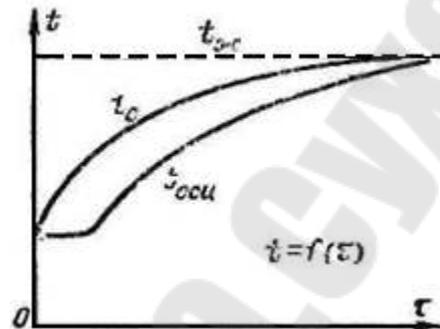


Рис. 3.1. Характер изменения температуры тела во времени

3.2. Аналитическое описание процесса

Аналитическое описание процесса теплопроводности включает в себя дифференциальное уравнение и условия однозначности.

Дифференциальное уравнение теплопроводности при отсутствии внутренних источников теплоты имеет вид:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right). \quad (3.1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Условия однозначности задаются в виде:} \\ \text{физических параметров } \lambda, c, \rho; \\ \text{формы и геометрических размеров объекта } l_0, l_1, l_2, \dots, l_n; \\ \text{температуры тела в начальных момент времени} \\ \tau = 0 \quad t = t_0 = f(x, y, z). \end{array} \right\} \quad (3.1)$$

Граничные условия могут быть заданы в виде граничных условий третьего рода:

$$\left(\frac{\partial t}{\partial n}\right)_{n=0} = -\frac{\alpha}{\lambda}(t_{n=0} - t_{жс}).$$

3.3. Охлаждение (нагревание) неограниченной пластины

Постановка задачи. Дана пластина толщиной 2δ . Если толщина пластины мала по сравнению с длиной и шириной, то такую пластину обычно считают неограниченной.

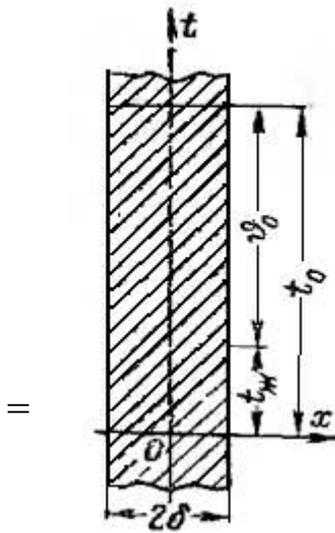


Рис. 3.2. К охлаждению плоской неограниченной пластины. При $\tau = 0$ задано $t_0 = const$ и $\vartheta_0 = const$

При заданных граничных условиях коэффициент теплоотдачи a одинаков для всех точек поверхности пластины. Изменение температуры происходит только в одном направлении x , в двух других направлениях температура не изменяется ($dt/dy = dt/dz = 0$), следовательно, в пространстве задача является одномерной. Начальное распределение температуры задано некоторой функцией $t(x, 0) = f(x)$. Охлаждение происходит в среде с постоянной температурой $t_{жс} = const$. На обеих поверхностях отвод теплоты осуществляется

при постоянном во времени коэффициенте теплоотдачи. Отсчет температуры пластины для любого момента времени будем вести от температуры окружающей среды, т. е. $t - t_{жс} = \vartheta$.

Так как задача в пространстве одномерная, то дифференциальное уравнение (3.1)

принимает вид:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}. \quad (3.2)$$

Начальные условия:
при $\tau = 0$

$$\vartheta = \vartheta_0 = f(x) - t_{жс} = F(x). \quad (3.3)$$

При заданных условиях охлаждения задача становится симмет-

ричной и начало координат удобно поместить на оси пластины, как показано на рис. 3.2. При этом граничные условия на оси и на поверхности пластины запишутся так:

а) на оси пластины при $x = 0$

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_{x=0} = 0; \quad (3.4)$$

б) на поверхности пластины при $x = \delta$

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_{x=\delta} = -\frac{\alpha}{\lambda} \vartheta_{x=\delta} \quad (3.5)$$

Дифференциальное уравнение (3.2) совместно с начальными (3.3) и граничными (3.4) условиями однозначно формируют поставленную задачу. Решение дифференциального уравнения (3.2) с учетом начальных и граничных условий и дает искомое распределение температуры в плоской пластине.

Решение дифференциального уравнения (3-4) ищем в виде произведения двух функций, из которых одна является функцией только τ , а другая – только x (метод разделения переменных):

$$\vartheta = \vartheta(\tau, x) = \varphi(\tau)\psi(x). \quad (3.6)$$

После подстановки последнего выражения в дифференциальное уравнение (3.2) получим:

$$\frac{\partial \varphi(\tau)}{\partial \tau} \psi(x) = a \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} \varphi(\tau)$$

или

$$\varphi'(\tau)\psi(x) = a\psi''(x)\varphi(\tau).$$

В этом уравнении легко разделяются переменные, и его можно записать следующим образом:

$$\frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau)} = a \frac{\psi''(x)}{\psi(x)}. \quad (3.7)$$

Левая часть уравнения (3.7) есть функция только τ , а правая — функция только x .

Если зафиксировать аргумент x и менять только τ , то при любом его значении левая часть уравнения (3.7) равна постоянной величине, стоящей в правой части, т. е. $\frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau)} = const$. Аналогично при фиксации

τ и изменении x правая часть уравнения (3.7) для любого значения x должна равняться постоянной левой части, которая зависит только от τ , т. е. $\frac{\psi''(x)}{\psi(x)} = const$.

Так как равенство (3.7) должно иметь место при любых значениях x и τ , то обе его части должны быть равны, одной и той же постоянной величине. Обозначим последнюю через ε и перепишем соотношение (3.7):

$$\frac{1}{a} \frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau)} = \frac{\psi''(x)}{\psi(x)} = const = \varepsilon. \quad (3.8)$$

Заметим, что нетривиальное решение для функции $\psi(x)$ получаем не при всех значениях ε , а только при $\varepsilon < 0$. Так как ε пока произвольная постоянная по численному значению, то полагаем $\varepsilon = -k^2$. Подставляя это значение для ε , получим:

$$\frac{1}{a} \frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau)} = \frac{\psi''(x)}{\psi(x)} = -k^2,$$

откуда

$$\varphi'(\tau) + ak^2\varphi(\tau) = 0; \quad (3.9)$$

$$\psi''(x) + k^2\psi(x) = 0. \quad (3.10)$$

Постоянная k определяется из граничных условий, а знак минус выбирается из физических соображений. Для тепловых процессов, стремящихся к тепловому равновесию, знак может быть только минус.

В результате мы получили систему обыкновенных дифференциальных уравнений (3.9) и (3.10), которые легко интегрируются.

Уравнению (3.9) удовлетворяет функция $\varphi(\tau) = C_1 e^{-ak^2\tau}$.

Уравнению (3.10) удовлетворяет функция вида:
 $\varphi(x) = C_2 \sin(kx) + C_3 \cos(kx)$.

Подставляя полученные выражения для $\varphi(\tau)$ и $\psi(x)$ в уравнение (3.6), получаем частное решение:

$$\vartheta = [C_2 \sin(kx) + C_3 \cos(kx)] C_1 e^{-ak^2\tau}. \quad (3.11)$$

Выражение (3.11) удовлетворяет исходному уравнению (3.2) при любых значениях постоянных C_1, C_2, C_3 и k .

Для того чтобы уравнение (3.11) было решением поставленной задачи, его нужно подчинить начальным и граничным условиям. Подчиняя уравнение (3.11) граничным условиям при $x=0$

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_{x=0} = 0,$$

находим:

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_{x=0} = C_1 e^{-ak^2\tau} k [C_2 \cos(kx) - C_3 \sin(kx)]_{x=0} = 0,$$

или

$$C_2 \cos(0) = C_3 \sin(0),$$

откуда $C_2 = 0$.

Это значит, что частное решение $\varphi(x) = C_2 \sin(kx)$ должно быть отброшено как не удовлетворяющее заданным граничным условиям.

Если учесть, что $C_2 = 0$, и обозначить $C_1 C_3 = A$, то уравнение (3.11) можно записать в виде

$$\vartheta = A e^{-ak^2\tau} \cos(kx). \quad (3.12)$$

Подчинив частное решение (3.12) граничному условию

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_{x=\delta} = -\frac{\alpha}{\lambda} \vartheta_{x=\delta},$$

получим:

$$-k A e^{-ak^2\tau} \sin(k\delta) = -\frac{\alpha}{\lambda} A e^{-ak^2\tau} \cos(k\delta), \quad (3.13)$$

откуда после простейших преобразований получаем:

$$\operatorname{ctg}(k\delta) = \frac{k\delta}{\frac{a\delta}{\lambda}},$$

где $\frac{\alpha\delta}{\lambda} = Bi$. Если обозначить $k\delta = \mu$ то последнее выражение можно записать следующим образом:

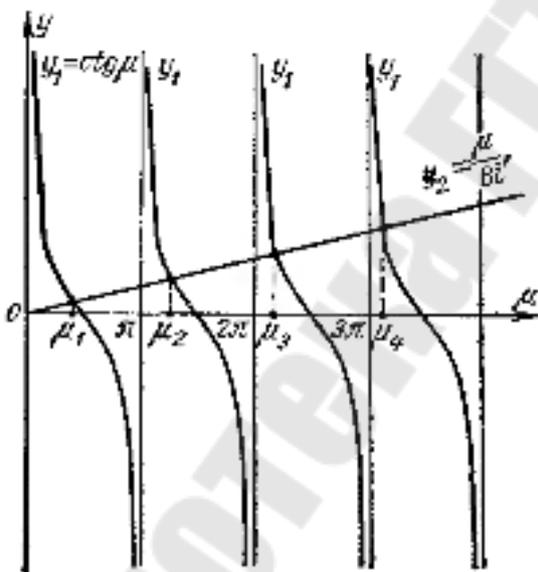
$$\operatorname{ctg}\mu = \mu/Bi. \quad (3.14)$$

Из анализа этого тригонометрического уравнения следует, что при каждом значении Bi существует бесконечное множество решений. Наиболее просто уравнение (3.14) можно решить графическим способом.

Обозначим левую часть уравнения (3.14) через $y_1 = \operatorname{ctg}\mu$, а правую – через $y_2 = \mu/Bi$. Пересечение котангенсоиды y_1 с прямой y_2 дает нам значение корней характеристического уравнения, т. е. μ (рис. 3.3).

Из рис. 3.3 следует, что мы имеем бесконечное множество значений величины μ_n причем каждое последующее больше предыдущего:

$$\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \dots < \mu_n < \dots$$



Важно отметить, что каждому значению числа Bi отвечает своя совокупность корней уравнения (3.14).

Рис. 3.3. К решению уравнения (3.14)

Таблица 3.1. Значения μ_n для пластины

| Bi | μ_1 | μ_2 | μ_3 | μ_4 | Bi | μ_1 | μ_2 | μ_3 | μ_4 |
|-------|---------|---------|---------|---------|----------|---------|---------|---------|---------|
| 0 | 0,0000 | 3,1416 | 6,2832 | 9,4248 | 1,0 | 0,8603 | 3,4256 | 6,4373 | 9,5293 |
| 0,001 | 0,0316 | 3,1419 | 6,2833 | 9,4249 | 1,5 | 0,9882 | 3,5422 | 6,5097 | 9,6801 |
| 0,002 | 0,0447 | 3,1422 | 6,2835 | 9,4250 | 2,0 | 1,0769 | 3,6436 | 6,5783 | 9,6296 |
| 0,004 | 0,0632 | 3,1429 | 6,2838 | 9,4252 | 3,0 | 1,1925 | 3,8088 | 6,7040 | 9,7240 |
| 0,006 | 0,0774 | 3,1435 | 6,2841 | 9,4254 | 4,0 | 1,2646 | 3,9352 | 6,8140 | 9,8119 |
| 0,008 | 0,0893 | 3,1441 | 6,2845 | 9,4256 | 5,0 | 1,3138 | 4,0336 | 6,9096 | 9,8928 |
| 0,01 | 0,0998 | 3,1448 | 6,2848 | 9,4258 | 6,0 | 1,3496 | 4,1116 | 6,9924 | 9,9667 |
| 0,02 | 0,1410 | 3,1479 | 6,2864 | 9,4269 | 7,0 | 1,3766 | 4,1746 | 7,0640 | 10,0339 |
| 0,04 | 0,1987 | 3,1543 | 6,2896 | 9,4290 | 8,0 | 1,3978 | 4,2264 | 7,1263 | 10,0949 |
| 0,06 | 0,2425 | 3,1606 | 6,2927 | 9,4311 | 9,0 | 1,4149 | 4,2694 | 7,1806 | 10,1502 |
| 0,08 | 0,2791 | 3,1668 | 6,2959 | 9,4333 | 10,0 | 1,4289 | 4,3058 | 7,2281 | 10,2003 |
| 0,1 | 0,3111 | 3,1731 | 6,2991 | 9,4354 | 15,0 | 1,4729 | 4,4255 | 7,3959 | 10,3898 |
| 0,2 | 0,4328 | 3,2039 | 6,3148 | 9,4459 | 20,0 | 1,4961 | 4,4915 | 7,4954 | 10,5117 |
| 0,3 | 0,5218 | 3,2341 | 6,3305 | 9,4565 | 30,0 | 1,5202 | 4,5615 | 7,6057 | 10,6543 |
| 0,4 | 0,5932 | 3,2636 | 6,3461 | 9,4670 | 40,0 | 1,5325 | 4,5979 | 7,6647 | 10,7334 |
| 0,5 | 0,6533 | 3,2923 | 6,3616 | 9,4775 | 50,0 | 1,5400 | 4,6202 | 7,7012 | 10,7832 |
| 0,6 | 0,7051 | 3,3204 | 6,3770 | 9,4879 | 60,0 | 1,5451 | 4,6353 | 7,7259 | 10,8172 |
| 0,7 | 0,7506 | 3,3477 | 6,3923 | 9,4983 | 80,0 | 1,5514 | 4,6543 | 7,7573 | 10,8606 |
| 0,8 | 0,7910 | 3,3744 | 6,4074 | 9,5087 | 100,0 | 1,5552 | 4,6658 | 7,7764 | 10,8871 |
| 0,9 | 0,8274 | 3,4003 | 6,4224 | 9,5190 | ∞ | 1,5708 | 4,7124 | 7,8540 | 10,9956 |

Первые четыре корня уравнения (3.14) μ_1, μ_2, μ_3 и μ_4 приведены в табл. 3.1 для различных значений числа Bi (от 0 до ∞).

При $Bi \rightarrow \infty$ прямая $y_2 = \mu/Bi$ совпадает с осью абсцисс и корни уравнения будут равны:

$$\mu_1 = \frac{\pi}{2}; \mu_2 = \frac{3}{2}\pi; \mu_3 = \frac{5}{2}\pi, \mu_n = (2n-1)\frac{\pi}{2}.$$

При $Bi \rightarrow 0$ прямая $y_2 = \mu/Bi$ совпадает с осью ординат и тангенс угла наклона прямой стремится к бесконечности, при этом корни уравнения (3.14) равны:

$$\mu_1 = 0; \mu_2 = \pi; \mu_3 = 2\pi, \mu_n = (n-1)\pi$$

Для других конечных значений числа Bi величины μ_n имеют промежуточные значения (см. табл. 3.1).

Следовательно, каждому найденному значению корня μ будет соответствовать свое частное распределение температуры:

$$\left. \begin{aligned} g_1 &= A_1 \cos\left(\mu_1 \frac{x}{\delta}\right) e^{-\mu_1^2 \frac{a\tau}{\delta^2}} \\ g_2 &= A_2 \cos\left(\mu_2 \frac{x}{\delta}\right) e^{-\mu_2^2 \frac{a\tau}{\delta^2}} \\ &\dots\dots\dots \\ g_n &= A_n \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) e^{-\mu_n^2 \frac{a\tau}{\delta^2}} \end{aligned} \right\} (3.15)$$

Полученные частные решения (3.15) будут удовлетворять дифференциальному уравнению при любых значениях постоянных A_1, A_2, \dots, A_n но ни одно из этих решений не будет соответствовать действительному распределению температуры в начальный момент времени. Однако путем наложения бесконечного числа таких распределений при соответствующем выборе величин A_n можно воспроизвести любую действительную температурную зависимость в начальный момент времени.

На основании сказанного общее решение можно представить суммой бесконечного ряда:

$$g = \sum_{n=1}^{n \rightarrow \infty} A_n \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) e^{-\mu_n^2 \frac{a\tau}{\delta^2}}. \quad (3.16)$$

Известно, что если отдельные распределения (3.15) удовлетворяют дифференциальному уравнению (3.2) и граничным условиям (3.4 – 3.5), то и сумма их также удовлетворяет тем же условиям.

Постоянная A_n в уравнении (3.16) найдется из начальных условий. Подчинив уравнение (3.16) начальному условию, получим:

$$g_0 = F(x) = \sum_{n=1}^{n \rightarrow \infty} A_n \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right). \quad (3.17)$$

Уравнение (3.17) есть разложение четной функции в ряд Фурье с заданными параметрами μ_n , определяемыми характеристическим уравнением (3.14). Для этой последовательности чисел μ_n справедлива формула

$$\int_{-\delta}^{+\delta} \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) \cos\left(\mu_m \frac{x}{\delta}\right) dx = \begin{cases} = 0, \rightarrow n \neq m, \\ \neq 0, \rightarrow n = m, \end{cases} \quad (3.18)$$

с помощью которой можно определить все коэффициенты A_n в уравнении (3.17). Для этого умножим обе части уравнения (3.17) на $\cos(\mu_n x/\delta) dx$ и затем проинтегрируем полученное соотношение по толщине пластины. Тогда

$$\int_{-\delta}^{+\delta} F(x) \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) dx = A_n \int_{-\delta}^{+\delta} \cos^2\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) dx, \quad (3.19)$$

ибо все остальные слагаемые в правой части, для которых $n \neq m$, обращаются в нуль. Интеграл в правой части соотношения (3.19) равен

$$\delta \left(1 + \frac{1}{2\mu_n} \sin 2\mu_n \right).$$

Тогда

$$A_n = \frac{\mu_n}{\delta(\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n)} \int_{-\delta}^{+\delta} F(x) \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) dx. \quad (3.20)$$

Из уравнения (3.20) следует, что A_n является функцией только корня характеристического уравнения и начального распределения температуры.

Подставив полученное выражение для постоянной A_n в уравнение (3.16), получим окончательное выражение для температурного поля при охлаждении однородной пластины:

$$\mathcal{G} = \sum_{n=1}^{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n}{\delta(\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n)} \left[\int_{-\delta}^{+\delta} F(x) \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) dx \right] \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) e^{-\mu_n^2 \frac{a\tau}{\delta^2}} \quad (3.21)$$

Уравнение (3.21) позволяет получить значение температуры в любой точке пластины для любого момента времени τ при любом начальном распределении температуры \mathcal{G}_0 .

Если в начальный момент времени ($\tau = 0$) температура в пластине распределена равномерно (рис. 3.2), т. е. $t_0 - t_{жс} = \mathcal{G}_0 = const$, то

интеграл в уравнении (3.20) равен $(\vartheta_0 2\delta / \mu_n) \sin \mu_n$. С учетом сказанного выражение для постоянной A_n принимает вид:

$$A_n = \vartheta_0 \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n}. \quad (3.22)$$

Подставляя значение A_n , полученное для случая равномерного распределения температуры в пластине в начальный момент времени, в уравнение (3.21), получаем:

$$\vartheta = \sum_{n=1}^{n \rightarrow \infty} \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n} \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) e^{-\mu_n^2 \frac{a\tau}{\delta^2}}. \quad (3.23)$$

Уравнению температурного поля (3.23) целесообразно придать безразмерную форму. Для этого разделим правую и левую части уравнения (3.23) на ϑ_0 . При этом обозначим:

$$\frac{A_n}{\vartheta_0} = D_n.$$

После этих преобразований получим:

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_0} = \sum_{n=1}^{n \rightarrow \infty} \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n} \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) e^{-\mu_n^2 \frac{a\tau}{\delta^2}}. \quad (3.24)$$

Входящие в уравнение температурного поля (3.24) величины $\frac{\vartheta}{\vartheta_0}; D_n; \mu_n; \frac{a\tau}{\delta^2}; \frac{x}{\delta}$ являются безразмерными и имеют следующий смысл:

$\frac{\vartheta}{\vartheta_0} = \Theta$ – безразмерная температура; $\frac{x}{\delta} = X$ – безразмерная координата; $\frac{a\tau}{\delta^2} = Fo$ – число Фурье, представляющее собой безразмерное время; D_n – безразмерный коэффициент.

С учетом последних обозначений уравнение (3.24) запишется:

$$\Theta = \sum_{n=1}^{n \rightarrow \infty} \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n} \cos(\mu_n X) \exp(-\mu_n^2 Fo). \quad (3.25)$$

Анализ полученного решения. Так как $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ представляет собой ряд возрастающих чисел, то чем больше μ , тем меньше роль последующего члена ряда по сравнению с предыдущим. Кроме того, чем больше число Fo , тем члены ряда будут убывать быстрее с увеличением номера n .

Многочисленные исследования показали, что уже при $Fo \geq 0,3$ ряд (3.25) становится настолько быстросходящимся, что распределение температуры достаточно точно описывается первым членом ряда:

$$\Theta = \frac{2 \sin \mu_1}{\mu_1 + \sin \mu_1 \cos \mu_1} \cos(\mu_1 X) \exp(-\mu_1^2 Fo). \quad (3.26)$$

Ранее обозначено $2 \sin \mu_1 / (\mu_1 + \sin \mu_1 \cos \mu_1) = D_1$. С учетом этого обозначения уравнение (3.26) можно записать в следующем виде:

$$\Theta = D_1 \cos(\mu_1 X) \exp(-\mu_1^2 Fo). \quad (3.27)$$

Величина D_1 является только функцией числа Bi и заранее может быть рассчитана и табулирована. Кроме того, если рассматривать температуру для определенного значения $X = x/\delta$, то и $\cos(\mu_1 X)$ является функцией Bi . Конкретно для оси пластины $X = x/\delta = 0$ и $\cos(\mu_1 \cdot 0) = 1$, а для поверхности $X = x/\delta = 1$ и $\cos(\mu_1 \cdot 1) = \cos \mu_1$.

Для оси пластины произведение $D_1 \cos(0)$ обозначим как некоторую функцию $N(Bi)$. Тогда уравнение (3.26) можно записать в следующем виде:

$$\Theta_{X=0} = N(Bi) \exp(-\mu_1^2 Fo). \quad (3.28)$$

Для поверхности пластины произведение $D_1 \cos \mu_1$ обозначим как некоторую функцию $P(Bi)$ и уравнение (3.27) запишется так:

$$\Theta_{X=1} = P(Bi) \exp(-\mu_1^2 Fo). \quad (3.29)$$

Функции $N(Bi)$ и $P(Bi)$ в уравнениях (3.28) и (3.29) табулированы и для расчета могут быть взяты из справочников. Кроме того, из уравнений (3.28) и (3.29) следует, что при заданной координате безразмерная температура является только функцией двух безразмерных параметров Bi и Fo :

$$\Theta_{X=0} = f_1(Bi, Fo) \text{ и } \Theta_{X=1} = f_2(Bi, Fo).$$

Логарифмируя уравнение (3.28), получаем:

$$\ln \Theta_{X=0} = \ln N(Bi) - \mu_1^2 Fo. \quad (3.30)$$

Аналогичное уравнение может быть получено после логарифмирования уравнения (3.29).

Из уравнения (3.30) следует, что при заданном значении координаты и при заданном Bi натуральный логарифм безразмерной температуры линейно зависит от времени.

Из уравнения (3.25) следует, что в условиях охлаждения (нагрева) пластины для любого момента времени при заданных граничных условиях поле температуры имеет вид симметричной кривой с максимумом на оси пластины ($X=0$). Для каждого последующего момента времени будет своя кривая, монотонно убывающая к поверхностям пластины. При этом для любого момента времени касательные к кривым в точках $X=\pm l$ проходят через две направляющие точки $+A$ и $-A$ — расположенные на расстоянии $\pm X_0$ от поверхности пластины, $X_0 = l/Bi$.

$$\theta_{x=0} = \frac{t_{x=0} - t'_{ж}}{t_0 - t_{ж}}$$

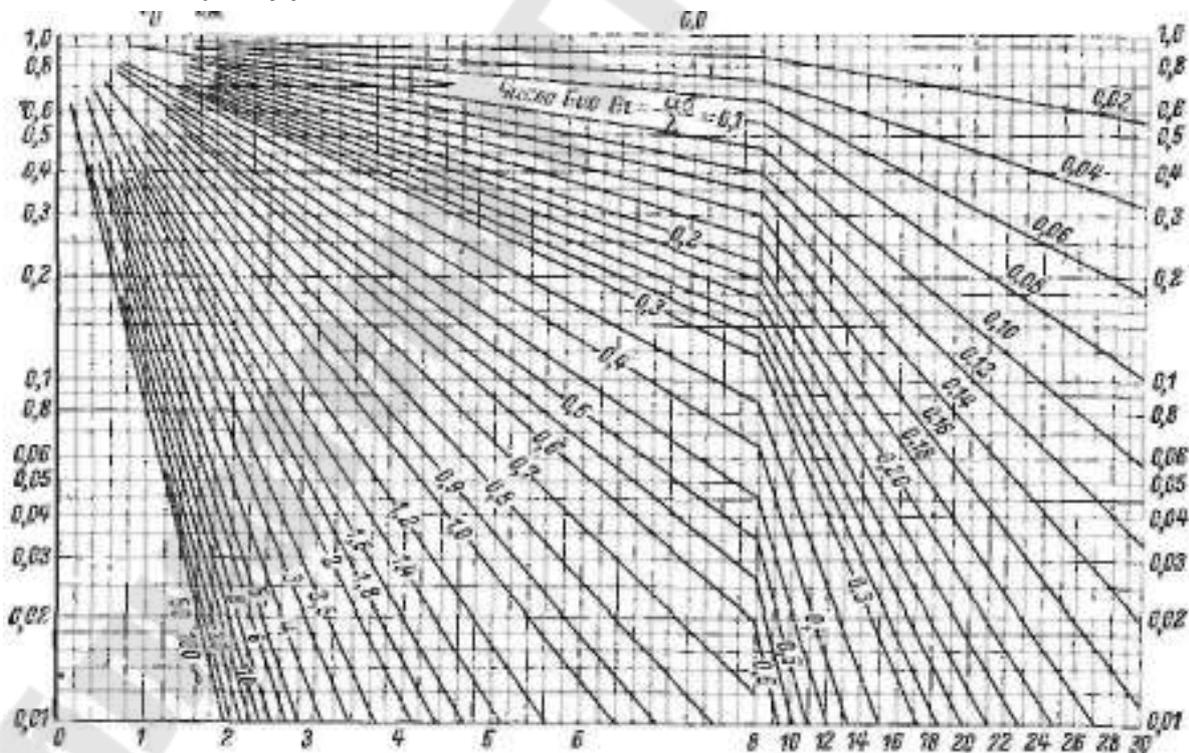


Рис. 3.4. Зависимость $\theta = f_1(Fo, Bi)$ для середины пластины.

$$Fo = \frac{\alpha\tau}{\delta^2}$$

$$\theta_{x=\delta} = \frac{t_{x=\delta} - t_{жс}}{t_0 - t_{жс}}$$

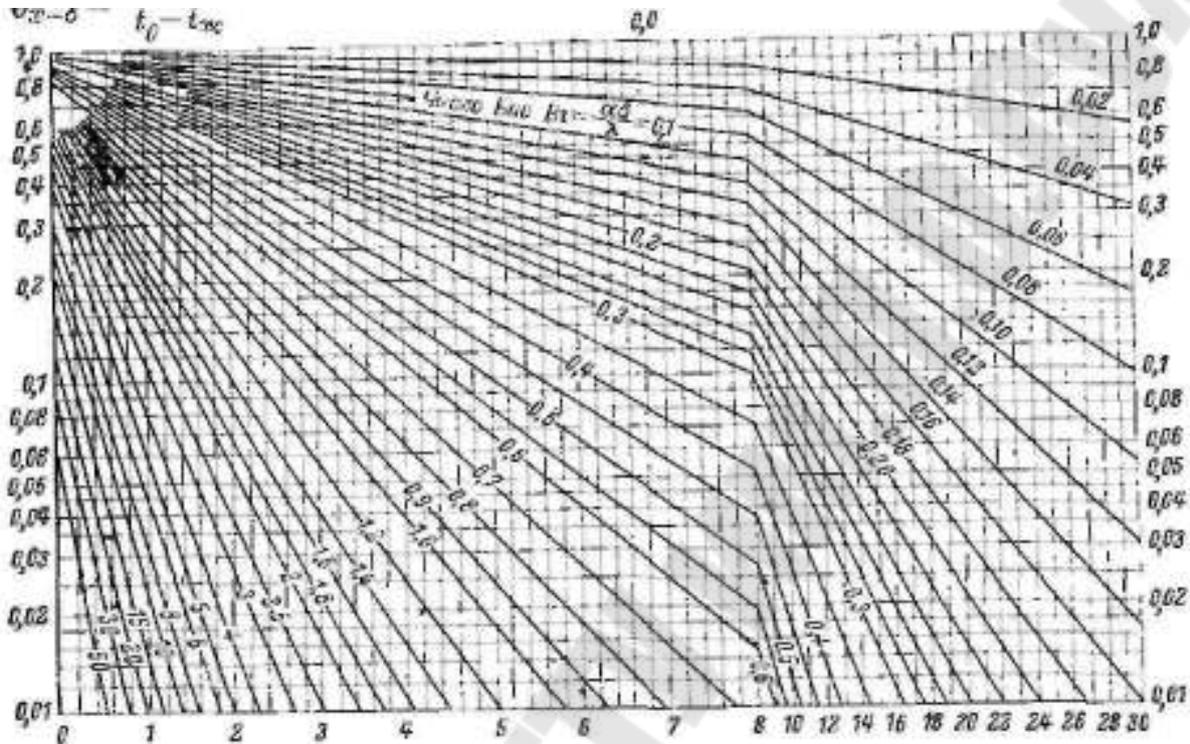


Рис. 3.5. Зависимость $\theta = f_1(Fo, Bi)$ для поверхности пластины.

$$Fo = \frac{\alpha\tau}{\delta^2}$$

Для доказательства этого важного свойства рассмотрим температурное поле для произвольного момента времени $Fo > 0$.

Умножив граничное условие (3.4 – 3.5) при $x = \pm\delta$ на δ/ϑ_0 , получим:

$$-\left[\frac{\partial\left(\frac{\vartheta}{\vartheta_0}\right)}{\partial\left(\frac{x}{\delta}\right)} \right]_{x=\delta} = \frac{\alpha\delta}{\lambda} \left(\frac{\vartheta}{\vartheta_0} \right)_{x=\delta}$$

Записывая последнее выражение в безразмерных величинах, будем иметь:

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial X} \right)_{X=1} = -Bi\theta_{X=1}. \quad (3.31)$$

Из рисунка следует, что

$$-\left(\frac{\partial \theta}{\partial X}\right)_{X=1} = -\frac{\theta_{X=1}}{X_0} = \operatorname{tg} \varphi. \quad (3.32)$$

Сравнивая выражение (3.31) и (3.32), получаем:

$$X_0 = \frac{1}{Bi}. \quad (3.33)$$

Из уравнения (3.33) следует, что расстояние точки A от поверхности определяется заданными условиями однозначности, которые справедливы для любого момента времени. Следовательно, касательные ко всем температурным кривым в точке пересечения с поверхностью пластины и неизменных граничных условиях всегда будут проходить через точку A . Сказанное справедливо не только для пластины, но и для цилиндра, шара и тел других геометрических форм.

Доказанное свойство температурных кривых дает возможность определить характер изменения температуры в теле при заданном значении числа Bi . Рассмотрим при этом три случая.

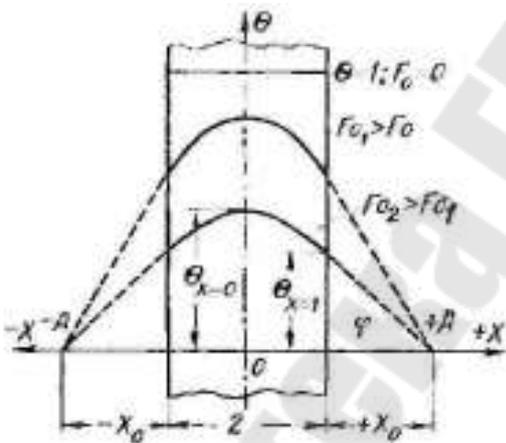


Рис. 3.6. Изменение температурного поля в плоской неограниченной стенке при ее охлаждении

1. Случай когда $Bi \rightarrow \infty$ (практически $Bi > 100$). Если число Bi стремится к бесконечности, то температура поверхности пластины сразу становится равной температуре окружающей среды, в которую помещена пластина. Последнее видно из уравнения (3.31): при $Bi \rightarrow \infty$ $X_0 = 1/Bi = 0$. Это означает, что точка пересечения касательных к температурным кривым находится на поверхности пластины. Из $Bi = (\delta/\lambda)/(1/\alpha)$ следует: $Bi \rightarrow \infty$ при заданных физических параметрах и толщине пластины тогда, когда

$\alpha \rightarrow \infty$, т. е. когда имеет место очень большая интенсивность отвода теплоты от поверхности. В этих случаях процесс охлаждения определяется физическими свойствами и размерами тела. При этом

$\mu_n = 2(n-1)\frac{\pi}{2}$ и тогда коэффициент ряда (3.25):

$$D_n = \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \cos \mu_n \sin \mu_n} = \frac{2 \sin \left[2(n-1)\frac{\pi}{2} \right]}{2(n-1)\frac{\pi}{2} + \sin \left[2(n-1)\frac{\pi}{2} \right] \cos \left[2(n-1)\frac{\pi}{2} \right]} =$$

$$= \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi(2n-1)} \quad (3.34)$$

Общее решение для рассматриваемого случая принимает вид:

$$\theta = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)} \exp \left[- \left(\frac{2n-1}{2} \right)^2 \pi^2 Fo \right]. \quad (3.35)$$

Тогда температура на оси пластины ($X=0$):

$$\theta_{X=0} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)} \exp \left[- \left(\frac{2n-1}{2} \right)^2 \pi^2 Fo \right]. \quad (3.36)$$

При $X = 1 \cos \left[2(n-1)\frac{\pi}{2} X \right] = 0$, и, следовательно,

$$\theta_{X=1} = 0. \quad (3.37)$$

Распределение температуры в пластине при $Fo > 0$ показано на рис. 3.7; здесь $Fo_1 < Fo_2 < Fo_3 < Fo_4 < \dots < Fo_n$. Как было сказано, при $Fo \geq 0,3$ ряд (3.25) быстро сходится и ошибка не превышает 1%, если отбросить все члены ряда, кроме первого. При этих условиях уравнение (3.36) принимает вид:

$$\theta_{X=0} = \frac{4}{\pi} \exp \left[- \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 Fo \right]. \quad (3.38)$$

Если уравнение (3.38) прологарифмировать и решить относительно числа Fo , то получим:

$$Fo = \frac{4}{\pi^2} \ln \left[\frac{4}{\pi \theta_{X=0}} \right]. \quad (3.39)$$

Учитывая, что $Fo = a\tau/\delta^2$, уравнение (3.39) можно записать в виде

$$\tau = \left(\frac{2\delta}{\pi} \right) \frac{1}{a} \ln \left[\frac{4}{\pi \theta_{X=0}} \right] \quad (3.40)$$

По формуле (3.40) можно определить время, необходимое для прогрева середины пластины до заданной температуры.

2. Очень малые числа Bi (практически $Bi < 0,1$). Если число Bi мало, то все коэффициенты членов ряда $D_n \rightarrow 0$, поскольку теперь $\mu_n = (n-1)\pi$, за исключением D_1 который равен:

$$D_1 = \left. \frac{2 \sin \mu_1}{\mu_1 + \sin \mu_1 \cos \mu_1} \right|_{\mu_1 \rightarrow 0} = 1$$

Из выражения $Bi = (\delta/\lambda)/(1/\alpha)$ видно, что малые значения числа Bi могут иметь место при малых размерах толщины пластины, при больших значениях коэффициента теплопроводности λ и малых значениях коэффициента теплоотдачи α . Следует заметить, что при малых значениях μ_1 функции $tg \mu_1$ и $\sin \mu_1$, можно заменить через их аргументы, и тогда характеристическое уравнение (3.14) запишется:

$$\frac{1}{\mu_1} = \frac{\mu_1}{Bi}$$

Учитывая сказанное, уравнение (3.25) можно переписать так:

$$\theta = \cos(\mu_1 X) \exp[-\mu_1^2 Fo] = \cos(\sqrt{Bi} X) \exp(-Bi Fo) \quad (3.41)$$

Найдем температуры на оси и на поверхности пластины:

$$\begin{aligned} \text{при } X=0 \quad \theta_{X=0} &= \exp(-Bi Fo); \\ \text{при } X=1 \end{aligned}$$

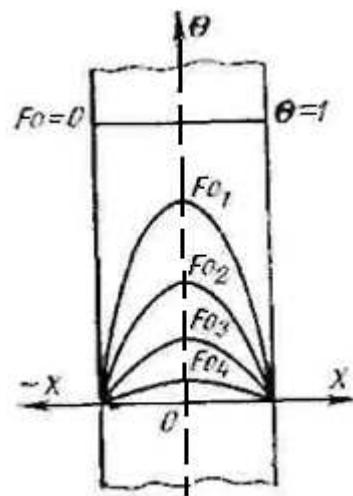


Рис. 3.7. Распределение температуры в плоской стенке при ее охлаждении в условиях $Bi \rightarrow \infty$; $Fo_1 < Fo_2 < Fo_3 < Fo_4$ (3-35)

$$\theta_{X=1} = \cos(\sqrt{Bi}) \exp(-Bi Fo)$$

Отношение температур на оси и поверхности пластины

$$\frac{\theta_{X=0}}{\theta_{X=1}} = \frac{\exp(-Bi Fo)}{\cos(\sqrt{Bi}) \exp(-Bi Fo)} \rightarrow 1$$

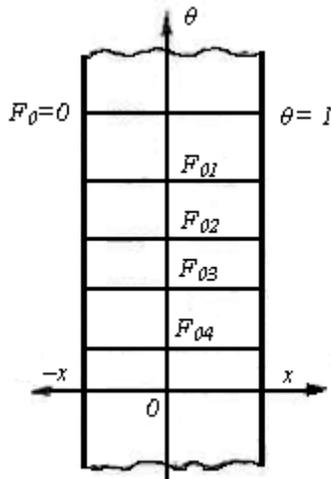


Рис. 3.8. Распределение температуры в плоской стенке при ее охлаждении в условиях $Bi \rightarrow 0$ $Fo_1 < Fo_2 < Fo_3 < Fo_4$

При малых Bi температура на поверхности пластины незначительно отличается от температуры на оси. Это указывает на то, что температура по толщине пластины распределяется равномерно и кривая температур остается почти параллельной оси Ox для любого момента времени (рис. 3.8).

Касательные к температурным кривым в точках пересечения их с поверхностью должны пересекаться с осью абсцисс в бесконечности:

при $Bi \rightarrow 0$ имеем $X_0 = 1/Bi \rightarrow \infty$.

В рассматриваемом случае процесс нагрева и охлаждения тела определяется интенсивностью теплоотдачи на поверхности пластины. Иначе говоря, процесс выравнивания температуры в теле происходит существенно интенсивнее, чем отвод теплоты с поверхности. Задача становится внешней.

3. Число Bi находится в пределах $0,1 \leq Bi < 100$. В рассматриваемом случае μ_n есть функция Bi , т. е. зависит от толщины пластины. Температурные кривые для любого момента времени будут выглядеть, как показано на рис. 3-9. В этом случае интенсивность процесса охлаждения (нагрева) определяется как внутренним, так и внешним термическими сопротивлениями.

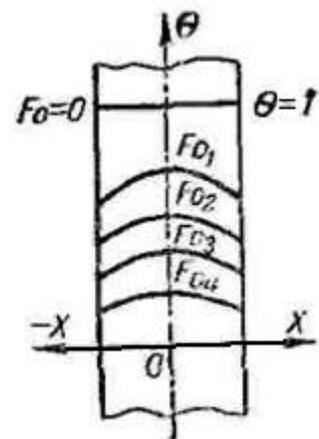


Рис. 3.9. Распределение температуры в плоской стенке при ее охлаждении в условиях Bi — конечная величина $Fo_1 < Fo_2 < Fo_3 < Fo_4$

3.4. Определение количества теплоты, отданного пластиной в процессе охлаждения

Количество теплоты Q_n , Дж, которое отдает или воспринимает пластина с обеих сторон за время от $\tau = 0$ до $\tau = \infty$, должно равняться изменению внутренней энергии пластины за период полного ее охлаждения (нагрева):

$$Q_p = 2\delta f \rho c (t_0 - t_{жс}). \quad (3.42)$$

Тогда за любой промежуток времени от $\tau = 0$ до τ_1 или, что то же, от F_0 до F_{01} внутренняя энергия пластины изменится на

$$Q = Q_n - Q_1 = 2\delta f \rho c (t_0 - t_{жс}) \left(1 - \frac{\bar{t}_1 - t_{жс}}{t_0 - t_{жс}} \right) \text{ или } Q = Q_n (1 - \bar{\Theta}_1) \quad (3.43)$$

где $\bar{\Theta}_1 = (\bar{t}_1 - t_{жс}) / (t_0 - t_{жс})$ – средняя безразмерная температура по толщине пластины в момент времени τ_1 .

Из соотношений (3.42) и (3.43) следует, что расчет количества теплоты, отданного или воспринятого пластиной, сводится к нахождению средней безразмерной температуры в интересующий нас момент времени. Средняя безразмерная температура для слоя пластины от оси симметрии до плоскости X найдется как

$$\bar{\Theta} = \frac{1}{X} \int_0^X \Theta dX$$

в соответствии с теоремой о среднем.

Если в это выражение подставить под знак интеграла значение в Θ из уравнения (3.25) и проинтегрировать в пределах от нуля до единицы, то получим;

$$\bar{\Theta} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin^2 \mu_n}{\mu_n^2 + \mu_n \sin \mu_n \cos \mu_n} \exp(-\mu_n^2 Fo) \quad (3.44)$$

Подставив в уравнение (3.43) вычисленное по формуле (3.44) значение средней температуры пластины для интересующего нас момен-

та времени, получим количество теплоты, отданное пластиной в окружающую среду за рассматриваемый промежуток времени.

При $Bi \rightarrow \infty$ (практически $Bi > 100$) уравнение (3.44) принимает вид:

$$\bar{\Theta} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi^2 (2n-1)^2} \exp\left[-\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2 \pi^2 Fo\right] \quad (3.45)$$

Если $Bi \rightarrow 0$ (практически $Bi < 0,1$), уравнение (3.44) принимает вид:

$$\bar{\Theta} = \exp(-Bi Fo) \quad (3.46)$$

При значениях числа $Fo \geq 0,3$ для пластины можно ограничиться первым членом ряда (3.44), тогда

$$\bar{\Theta} = \frac{2 \sin^2 \mu_1}{\mu_1^2 + \mu_1 \sin \mu_1 \cos \mu_1} \exp(-\mu_1^2 Fo) \quad (3.47)$$

Множитель $2 \sin^2 \mu_1 / (\mu_1^2 + \mu_1 \sin \mu_1 \cos \mu_1)$ зависит только от числа Bi и может быть представлен как некоторая функция $M(Bi)$, тогда уравнение (3.47) запишется:

$$\bar{\Theta} = M(Bi) \exp(-\mu_1^2 Fo). \quad (3.48)$$

Функция $M(Bi)$ может быть заранее рассчитана и представлена в таблицах. Тогда расчет средней температуры будет сводиться к вычислению экспоненты.

От $\tau = 0$ до τ , найдём по формуле:

$$\frac{Q}{Q_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{\mu_n^3} \frac{(\sin \mu_n - \mu_n \cos \mu_n)^2}{\mu_n - \sin \mu_n \cos \mu_n} (1 - e^{-\mu_n^2 Fo}). \quad (3.49)$$

В уравнении (3.49) $Q_n = \frac{4}{3} \pi r_0^3 \rho c (t_0 - t_{жс})$ – начальная избыточная внутренняя энергия шара. Из рассмотрения (3.49) следует, что

$$\frac{Q}{Q_n} = F(Bi, Fo). \quad (3.50)$$

3.5. Охлаждение (нагревание) тел конечных размеров

а) Охлаждение параллелепипеда

Рассмотрим охлаждение параллелепипеда в среде с постоянной температурой и с постоянным коэффициентом теплоотдачи α на всех его гранях. В начальный момент времени ($\tau = 0$) все точки параллелепипеда имеют одинаковую температуру t_0 .

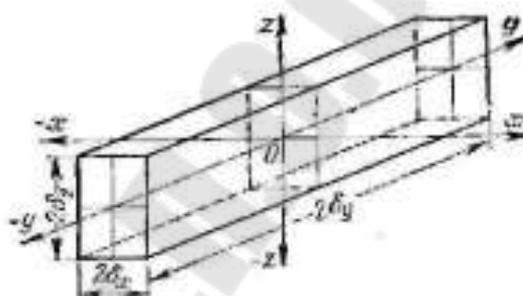


Рис. 3.10. К охлаждению параллелепипеда

Параллелепипед с размерами $2\delta_x \times 2\delta_y \times 2\delta_z$ является однородным и изотропным. Требуется найти распределение температуры в параллелепипеде для любого момента времени, а также среднюю температуру, необходимую для определения количества подведенной (отведенной) теплоты.

Поместим начало координат в центре параллелепипеда (рис. 3.10). При этом дифференциальное уравнение запишется следующим образом:

$$\frac{\partial t(x, y, z, \tau)}{\partial \tau} = a \nabla^2 t(x, y, z, \tau). \quad (3.51)$$

Начальные условия ($\tau = 0$)

$$t(x, y, z) = t_0 = \text{const}. \quad (3.52)$$

При заданных условиях задача симметрична относительно центра параллелепипеда. Если ввести обозначение $\vartheta = t - t_{жс}$, то граничные условия запишутся так:

а) для поверхности при $\tau > 0$

$$\left. \begin{aligned} \pm \lambda \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} \right)_{x=\pm\delta_x} &= \alpha \mathcal{G}_{x=\pm\delta_x}; \\ \pm \lambda \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} \right)_{y=\pm\delta_y} &= \alpha \mathcal{G}_{y=\pm\delta_y}; \\ \pm \lambda \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial z} \right)_{z=\pm\delta_z} &= \alpha \mathcal{G}_{z=\pm\delta_z}; \end{aligned} \right\} (3.53)$$

б) в центре параллелепипеда при $\tau < 0$

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} \right)_{x=0, \substack{0 \leq y \leq \delta_y \\ 0 \leq z \leq \delta_z}} &= 0; \\ \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} \right)_{y=0, \substack{0 \leq x \leq \delta_x \\ 0 \leq z \leq \delta_z}} &= 0; \\ \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial z} \right)_{z=0, \substack{0 \leq x \leq \delta_x \\ 0 \leq y \leq \delta_y}} &= 0. \end{aligned} \right\} (3.54)$$

Параллелепипеды, цилиндры конечных размеров и прямоугольные стержни можно рассматривать как тела, образованные пересечением соответственно трех взаимно перпендикулярных неограниченных пластин конечной толщины, цилиндра и пластины и двух пластин.

Можно доказать, что решение таких задач представляется произведением безразмерных температур для тел неограниченных размеров, в результате пересечения которых образовалось рассматриваемое тело.

Как было сказано, параллелепипед образован в результате пересечения трех взаимно перпендикулярных безграничных пластин конечной толщины. Следовательно, для него и решение можно представить, как произведение безразмерных температур для трех безграничных пластин:

$$\Theta = \Theta_x \Theta_y \Theta_z (3.55)$$

$$\text{где } \Theta_x = \frac{t(x, \tau) - t_{жс}}{t_0 - t_{жс}}; \quad \Theta_y = \frac{t(y, \tau) - t_{жс}}{t_0 - t_{жс}}; \quad \Theta_z = \frac{t(z, \tau) - t_{жс}}{t_0 - t_{жс}}$$

Общее решение (3.55) в развернутом виде запишется следующим

образом:

$$\Theta_x = \frac{t(x, y, z, \tau) - t_{жс}}{t_0 - t_{жс}} = \frac{t(x, \tau) - t_{жс}}{t_0 - t_{жс}} \frac{t(y, \tau) - t_{жс}}{t_0 - t_{жс}} \frac{t(z, \tau) - t_{жс}}{t_0 - t_{жс}} \quad (3.56)$$

Приведенное решение удовлетворяет как дифференциальному уравнению, так и граничным условиям, описывающим процесс теплопроводности в параллелепипеде.

Таким образом, решение задачи для рассматриваемого тела конечных размеров свелось к решению задачи для безграничной пластины конечной толщины. Уравнение (3.55) можно представить в виде:

$$\theta = F_x \left(\frac{x}{\delta_x}, \frac{\alpha \delta_x}{\lambda}, \frac{a \tau}{\delta_x^2} \right) F_y \left(\frac{y}{\delta_y}, \frac{\alpha \delta_y}{\lambda}, \frac{a \tau}{\delta_y^2} \right) F_z \left(\frac{z}{\delta_z}, \frac{\alpha \delta_z}{\lambda}, \frac{a \tau}{\delta_z^2} \right),$$

или

$$\theta = F_x(X, Bi_x, Fo_x) F_y(Y, Bi_y, Fo_y) F_z(Z, Bi_z, Fo_z)$$

Множители в уравнении (3.55) вычисляются по формуле (3.25).

Рассмотренный метод известен в теории теплопроводности под названием теоремы о перемножении решений. Полученное решение справедливо и для нахождения средней температуры.

Средняя безразмерная температура параллелепипеда выражается следующим образом:

$$\bar{\theta} = \frac{\bar{t}(\tau) - t_{жс}}{t_0 - t_{жс}} = \frac{\bar{t}(\tau)_x - t_{жс}}{t_0 - t_{жс}} \frac{\bar{t}(\tau)_y - t_{жс}}{t_0 - t_{жс}} \frac{\bar{t}(\tau)_z - t_{жс}}{t_0 - t_{жс}}$$

или

$$\bar{\theta} = \bar{\theta}_x \bar{\theta}_y \bar{\theta}_z = F_x(Bi_x, Fo_x) F_y(Bi_y, Fo_y) F_z(Bi_z, Fo_z). \quad (3.57)$$

В уравнении (3.58) множители находятся по формуле (3.38). Залетим, что теорема о перемножении решений справедлива и в более общем случае, когда коэффициенты теплопроводности различны для различных направлений, коэффициенты теплоотдачи на гранях разные.

б) Охлаждение длинного прямоугольного стержня

Однородный стержень охлаждается в среде с постоянной температурой $t_{жс}$ и при постоянном коэффициенте

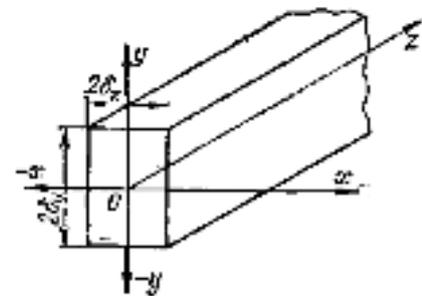


Рис. 3.11. К охлаждению полуограниченного прямоугольного стержня

теплоотдачи на его поверхности. В начальный момент времени ($t=0$) все точки стержня имеют одинаковую температуру.

Поперечное сечение стержня представляет собой прямоугольник размерами $2\delta_x * 2\delta_y$ (рис. 3.11). Такое тело можно рассматривать как результат пересечения двух пластин толщиной $2\delta_x$ и $2\delta_y$, условия однозначности для которых такие же, как и для образовавшегося стержня. Безразмерное температурное поле для поставленной задачи есть

$$\Theta = \Theta_x \Theta_y, \quad (3.58)$$

где $\Theta_x = F_x(X, Bi_x, Fo_x)$ и $\Theta_y = F_y(Y, Bi_y, Fo_y)$.

Множители в уравнении (3.58) вычисляются по формуле (3.25).

в) Охлаждение цилиндра конечной длины

Однородный цилиндр охлаждается в среде с постоянной температурой $t_{жс}$. Коэффициент теплоотдачи a на основаниях цилиндра и его поверхности одинаков. В начальный момент ($\tau=0$) все точки цилиндра имеют одинаковую температуру t_0 . Диаметр цилиндра равен $2r_0$, длина $l=2\delta_z$ (рис. 3.12). Необходимо найти распределение температуры в цилиндре для любого момента времени и среднюю температуру как функцию времени для заданных условий однозначности. Конечный цилиндр можно рассматривать как результат пересечения безграничного цилиндра

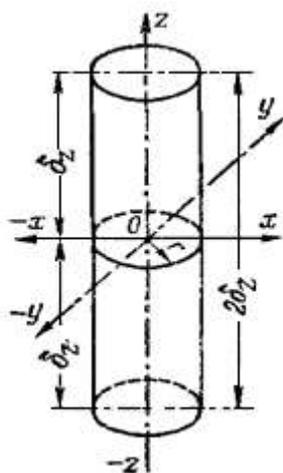


Рис. 3.12. К охлаждению цилиндра конечной длины

диаметром $2r_0$ и пластины толщиной $2\delta_z$; следовательно, и безразмерную температуру для такого тела можно записать как

$$\Theta = \Theta_x \Theta_r = \frac{t(z, \tau) - t_{жс}}{t_0 - t_{жс}} \frac{(r, \tau) - t_{жс}}{t_0 - t_{жс}}, \quad (3.59)$$

или

$$\Theta = F_z\left(\frac{z}{\delta_z}, \frac{\alpha \delta_z}{\lambda}, \frac{\alpha \tau}{\delta_z^2}\right) F_r\left(\frac{r}{r_0}, \frac{\alpha r_0}{\lambda}, \frac{\alpha \tau}{r_0^2}\right). \quad (3.60)$$

В уравнении (3.59) множители правой части находятся по формулам (3.25) и (3.55), причем в качестве определяющих линейных

размеров в уравнении (3.25) берется половина высоты цилиндра δ_z , а в уравнении (3.55) – радиус цилиндра r_0 . Средняя температура в цилиндре для любого момента времени

$$\bar{\Theta} = \frac{\bar{t}(\tau) - t_{жс}}{t_0 - t_{жс}} = \frac{\bar{t}(\tau)_z - t_{жс}}{t_0 - t_{жс}} \frac{\bar{t}(\tau)_r - t_{жс}}{t_0 - t_{жс}}, \quad (3.61)$$

или

$$\bar{\Theta} = \bar{\Theta}_я \bar{\Theta}_к = \bar{F}_z(Bi_z, Fo_z) \bar{F}_r(Bi_r, Fo_r) \quad (3.62)$$

3.6. Зависимость процесса охлаждения (нагрева) от формы и размеров тела

Скорость процесса распространения теплоты в телах зависит от отношения поверхности тел к их объему. Исследования процессов охлаждения тел указывают на то, что чем больше отношение поверхности тела к его объему, тем и скорость протекания процесса будет больше. Сказанное справедливо для любых значений числа Bi и может быть наглядно продемонстрировано на примере охлаждения пластины длинного цилиндра и шара. При $Bi=0$ для пластины, цилиндра и шара уравнения температурного поля запишутся соответственно

$$\Theta_{пл} = \exp(-BiFo); \Theta_{цикл} = \exp(-2BiFo); \Theta_m = \exp(-3BiFo). \quad (3.63)$$

Из приведенных уравнений следует, что при одинаковом определяющем размере и прочих равных условиях наибольшая скорость изменения температуры во времени будет наблюдаться для шара. Если сравнивать отношения поверхности к объему для пластины, цилиндра и шара, то их можно представить как 1:2:3.

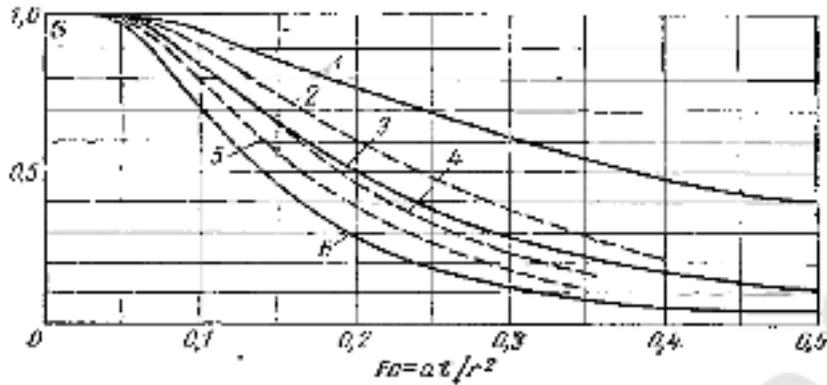


Рис. 3.13. Скорость охлаждения в центре для различных тел с одинаковым линейным размером l_0
 1 – безграничная пластинка; 2 – квадратная балка бесконечной длины;
 3 – цилиндр бесконечной длины; 4 – куб; 5 – цилиндр, длина равна диаметру; 6 – шар

На рис. 3.13 приведены кривые изменения температуры во времени на оси и в центре тел различной геометрической формы при одинаковом значении числа Bi . Из рис. 3.13 следует, что для шара скорость охлаждения больше, чем для любого другого тела. Следует помнить, что все сказанное справедливо для тел с одинаковым характерным линейным размером l_0 .

3.7. Регулярный режим охлаждения (нагрева) тел

Анализ полученных решений для тел различной геометрической формы показывает, что они имеют одинаковую структуру, т. е. представляют собой сумму бесконечного ряда, члены которого расположены по быстро убывающим экспоненциальным функциям. Например, для безграничной пластины при охлаждении ее в среде с постоянной температурой $t_{жс}$ и постоянным коэффициентом теплоотдачи a на ее поверхностях получено:

$$\vartheta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) e^{-\mu_n^2 \frac{\alpha \tau}{\delta^2}} \quad (3.64)$$

В этом уравнении A_n – постоянный коэффициент, свой для каждого члена ряда (не зависящий ни от координат, ни от времени), он найден из начальных условий.

Множитель $\cos(\mu_n x/\delta)$ является функцией только координаты x и его можно обозначить U_n . Экспонента будет убывать пропорциональ-

но времени x . Комплекс $\mu_n^2 \alpha / \delta^2$ представляет собой постоянное вещественное положительное число, которое можно обозначить m_n , причем m будет изменяться в зависимости от номера индекса так же, как и μ , т. е.

$$m_1 < m_2 < m_3 < \dots < m_n, \quad (3.66)$$

где $n=1, 2, 3 \dots$

С учетом сказанного выражение для пластины можно представить как

$$\vartheta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n U_n e^{-m_n \tau} \quad (3.67)$$

Для тел других геометрических форм температурное поле также будет описываться уравнением вида (3.67). Специфика геометрической формы учитывается различным видом множителей A_n и U_n . Для тел одной и той же формы различным начальным распределениям температуры будут соответствовать разные совокупности чисел A_n .

При малых значениях τ от $\tau=0$ до $\tau=\tau_1$ распределение температуры внутри тела и скорость изменения во времени температуры в отдельных точках тела зависят от особенностей начального распределения температур. В этих условиях поле температур в теле будет определяться не только первым, но и последующими членами ряда (3.67).

Это первый период охлаждения, при котором скорость изменения температуры внутри тела зависит от вида начального распределения температуры, называют неупорядоченной стадией процесса охлаждения (нагревания). Благодаря неравенству (3.66) с увеличением времени τ последующие члены ряда (3.67) будут быстро убывать, т. е. ряд становится быстро сходящимся.

Начиная с некоторого момента времени $\tau > \tau_1$ начальные условия

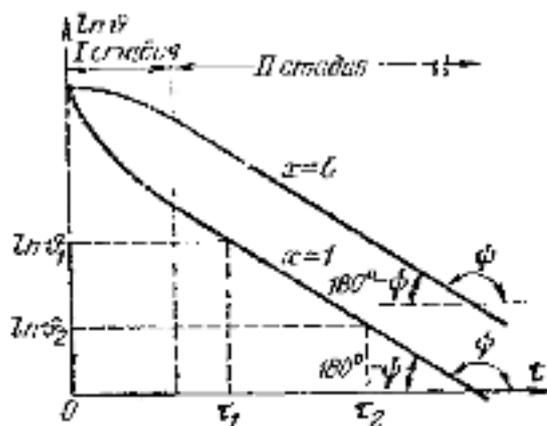


Рис. 3.14. Зависимость $\ln \vartheta$ от времени при охлаждении (нагревании) тел

начинают играть второстепенную роль и процесс полностью определяется только условиями охлаждения на границе тела и среды, физическими свойствами тела и его геометрической формой и размерами. Температурное поле описывается первым членом ряда (3.67):

$$\vartheta = A_1 U_1 e^{-m_1 \tau} \quad (3.68)$$

Это соотношение показывает, что изменение избыточной температуры как в пространстве, так и во времени не зависит от начального распределения температуры. Логарифмируя последнее уравнение и опуская индексы, получаем:

$$\ln \vartheta = \ln(AU) - m\tau \quad (3.69)$$

или

$$\ln \vartheta = -m\tau + C(x, y, z)$$

Из уравнения (3.69) следует, что натуральный логарифм избыточной температуры для всех точек тела изменяется во времени по линейному закону. Графическая зависимость между $\ln \vartheta$ и временем будет иметь вид прямой (рис. 3.14). При длительном охлаждении ($\tau \rightarrow \infty$ или, что то же, $Fo \rightarrow \infty$) все точки тела в конце концов принимают одинаковую температуру, равную $t_{жс}$ (наступило стационарное состояние).

Таким образом, весь процесс охлаждения можно разделить на три стадии.

Первая стадия (неупорядоченного) режима характеризуется большим влиянием начального распределения температуры, и зависимость между ϑ и τ описывается уравнением (3.67).

Вторая стадия охлаждения называется регулярным режимом, и зависимость между ϑ и τ описывается уравнением (3.68).

Третья стадия охлаждения соответствует стационарному режиму, когда температура во всех точках тела равна температуре окружающей среды (имеет место тепловое равновесие).

Остановимся на более подробном рассмотрении второй стадии охлаждения.

После дифференцирования обеих частей уравнения (3.69) по времени получим:

$$\frac{1}{\vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = -m = const \quad (3.70)$$

В левой части уравнения (3.70) стоит выражение для относительной скорости изменения температуры, и оно равняется постоянной величине m , не зависящей ни от координат, ни от времени.

Величина m измеряется в 1/с и называется темпом охлаждения. При наступлении регулярного режима темп охлаждения не зависит ни от координат, ни от времени и является величиной постоянной для всех точек тела. Темп охлаждения, как это следует из уравнения (3.70), характеризует относительную скорость изменения температуры в теле и зависит только от физических свойств тела, процесса охлаждения на его поверхности, геометрической формы и размеров тела.

Итак, регулярный режим охлаждения (нагревания) тел характеризуется тем, что изменение температурного поля во времени описывается простой экспонентой и относительная скорость охлаждения m для всех точек тела остается величиной постоянной, не зависящей ни от координат, ни от времени.

Если экспериментально определить изменение избыточной температуры ϑ во времени τ и построить зависимость в полулогарифмических координатах, то из рис. 3.14 следует, что темп охлаждения в стадии регулярного режима найдется как

$$\frac{\ln \vartheta_1 - \ln \vartheta_2}{\tau_2 - \tau_1} = m = \text{const} \quad (3.71)$$

Выражение для зависимости темпа охлаждения от физических свойств тела, его геометрической формы и размеров, а также условий теплообмена на поверхности тела можно найти из анализа теплового баланса.

Изменение внутренней энергии тела

$$dQ = -c\rho V \frac{\partial \bar{\vartheta}_V}{\partial \tau} d\tau \quad (3.72)$$

где c – удельная теплоемкость, Дж/(кг*К);

V – объем тела, м³;

ρ – плотность вещества, кг/м³;

$\bar{\vartheta}_V$ — средняя по объему избыточная температура, °С;

τ – время, с.

С другой стороны, за тот же промежуток времени вся теплота должна быть отведена с поверхности тела в окружающую среду за счет

теплоотдачи

$$dQ = \overline{\alpha} \overline{\vartheta}_F F d\tau \quad (3.73)$$

здесь $\overline{\alpha}$ — среднее значение коэффициента теплоотдачи;

$\overline{\vartheta}_F$ — средняя температура поверхности тела в данный момент времени:

$$\overline{\vartheta}_F = \frac{1}{F} \int \vartheta_F dF . \quad (3.74)$$

Приравнявая выражения (3.72) и (3.73), находим:

$$-\frac{\partial \overline{\vartheta}_V}{\partial \tau} = \frac{\overline{\alpha} F}{c\rho V} \overline{\vartheta}_F \quad (3.75)$$

или, если разделить полученное выражение на $\overline{\vartheta}_V$ и учесть, что $c\rho V = C$, Дж/К – полная теплоемкость тела,

В левой части этого выражения стоит относительная скорость охлаждения m , 1/с, и если отношение $\overline{\vartheta}_F / \overline{\vartheta}_V$ обозначить через Ψ , (3.75) можно записать:

$$m = \psi \frac{\overline{\alpha} F}{C} \quad (3.76)$$

Из уравнения (3.76) следует, что *относительная скорость охлаждения*, или, иначе говоря, темп охлаждения m однородного и изотропного тела при конечном значении коэффициента теплоотдачи *а пропорциональна коэффициенту теплоотдачи, поверхности тела и обратно пропорциональна его теплоемкости* (первая теорема Кондратьева). В

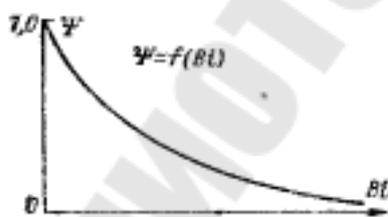


Рис. 3.15. Зависимость $\psi = f(Bi)$

случая:

уравнении (3.76) множитель $\psi = \overline{\vartheta}_F / \overline{\vartheta}_V$ называется коэффициентом неравномерности распределения температуры в теле и зависит от условий охлаждения на поверхности тела. Для выяснения характера зависимости коэффициента Ψ от числа Bi , учитывающего условия протекания процесса на поверхности, рассмотрим два предельных

а) $Bi \rightarrow 0$ (практически $Bi < 0,1$)

Как было сказано, эти условия соответствуют внешней задаче, когда распределение температуры в теле зависит от его размеров и физических свойств и, следовательно, усредненные по поверхности и объему температуры будут одинаковы: $\overline{\vartheta_F} = \overline{\vartheta_V}$. Коэффициент неравномерности распределения температуры в теле

$$\psi = \frac{\overline{\vartheta_F}}{\overline{\vartheta_V}} = 1$$

б) $Bi \rightarrow \infty$ (практически $Bi > 100$)

При этих условиях задача становится внутренней и процесс охлаждения определяется только размерами тела и его физическими свойствами.

В силу большой интенсивности теплообмена температура на поверхности тела принимает постоянное значение, равное температуре окружающей среды. Коэффициент неравномерности распределения температуры

$$\psi = \frac{\overline{\vartheta_F}}{\overline{\vartheta_V}} = 0$$

Из сказанного следует, что ψ будет изменяться от нуля до единицы (рис. 3.15).

При $Bi \rightarrow \infty$ или, что то же $\alpha \rightarrow \infty$ темп охлаждения t становится прямо пропорциональным коэффициенту температуропроводности тела a , m^2/c (вторая теорема Кондратьева):

$$\alpha = Km_\infty \quad (3.77)$$

Коэффициент пропорциональности K зависит только от геометрической формы и размеров тела. Докажем это на примере охлаждения однородной безграничной пластины. Напомним, что

$$m = \frac{\mu^2 \alpha}{l^2_0}$$

откуда

$$\mu = l_0 \sqrt{\frac{m}{\alpha}} \quad (3.78)$$

Рассмотрим характеристическое уравнение для безграничной пластины

$$\operatorname{ctg} \mu = \frac{\mu}{Bi}$$

При $Bi \rightarrow \infty$ имеем $\operatorname{ctg} \mu \rightarrow 0$, а μ стремится к своему предельному значению $\pi/2$; при $Bi \rightarrow 0$ $\operatorname{ctg} \mu \rightarrow \infty$ и μ устремляется к нулю.

Следовательно, величина μ для пластины во всем диапазоне значений чисел Bi изменяется от нуля до своего предельного значения, равного $\pi/2$ (рис. 3.16). Для тел другой геометрической формы имеют место свои пределы изменения величины μ .

Так как при $Bi \rightarrow \infty$ (практически $Bi > 100$) при охлаждении бесконечной однородной пластины можно принять $\mu = \pi/2$, то из уравнения (3.78) получаем:

$$m_\infty = \left(\frac{\pi}{2l_0} \right)^2 a \quad (3.79)$$

Напомним, что для пластины характерным линейным размером является половина ее толщины, т. е. $l_0 = \delta$. Тогда из уравнения (3.79) получаем:

$$a = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2\delta} \right)^2} m_\infty = Km_\infty$$

где $K = \frac{1}{(\pi/2\delta)^2}$ – коэффициент пропорциональности для безграничной пластины, который определяется только формой и геометрическими размерами.

Коэффициенты пропорциональности для тел других геометрических форм:

для шара

$$K = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{r_0} \right)^2};$$

для параллелепипеда

$$K = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{l_2}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{l_3}\right)^2};$$

для цилиндра конечной длины

$$K = \frac{1}{\left(\frac{2.405}{r_0}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{l}\right)^2};$$

На основе теории регулярного режима разработаны различные экспериментальные методики определения теплофизических характеристик разных материалов. При определении физических параметров тела поступают следующим образом.

Для определения коэффициента температуропроводности используют калориметр, имеющий форму цилиндра или шара. Создают условия, близкие к $\alpha \rightarrow \infty$, измеряют изменение избыточной температуры во времени и строят зависимость в полулогарифмических координатах (рис. 3.17). Тогда

$$m = \frac{\ln \vartheta_1 - \ln \vartheta_2}{\tau_2 - \tau_1}.$$

Из уравнения $a = Km_\infty$, находят коэффициент температуропроводности.

Для определения коэффициента теплопроводности выбирают ламбдакалориметр. Обычно калориметр строят в виде шара. Сущность метода заключается в том, что создают условия охлаждения, когда

коэффициент теплоотдачи α остается конечной величиной, и при этих условиях определяется темп охлаждения описанным выше способом. Далее из характеристического уравнения, которое для шара имеет вид

$$\frac{1}{ctg\mu} = \frac{\mu}{Bi - 1}$$

находят коэффициент теплопроводности.



Рис. 3.16. Зависимость $\mu = f(Bi)$

Напомним, что для шара характерным линейным размером является его радиус r_0 ; величина $\mu = r_0 \sqrt{m/a}$.

$$Bi - 1 = -r_0 \sqrt{\frac{m}{a}} \operatorname{ctg} \left(r_0 \sqrt{\frac{m}{a}} \right);$$

тогда

$$\lambda = \frac{\bar{\alpha} r_0}{1 - r_0 \sqrt{\frac{m}{a}} \operatorname{ctg} \left(r_0 \sqrt{\frac{m}{a}} \right)}; \quad (3.80)$$

здесь λ измеряется в Вт/(м·К).

В уравнении (3.80) неизвестная величина α определяется на эталонном калориметре, изготовленном из материала с известным коэффициентом теплопроводности.

Мы рассмотрели метод регулярного теплового режима для условий, когда температура среды постоянная ($t_{жс} = const$) и который Г. М. Кондратьев назвал регулярным режимом первого рода.

В последние годы получили развитие и широкое распространение

методы регулярного режима для случаев,

когда температура среды –

линейная функция времени

$t_{жс} = t_{жс0} + b\tau$ и температура среды –

периодическая функция времени

$t_{жс} = t_{жс0} + t_m \cos \pi \nu \tau$ (где ν – частота

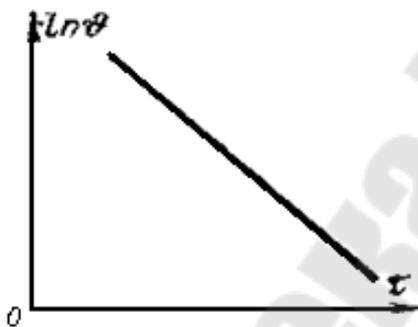
колебаний, t_m – амплитуда колебания

температуры среды). Эти два случая по-

лучили название методов регулярного

режима второго и третьего родов.

Рис. 3.17. К определению темпа охлаждения m



А. В. Лыков показал, что регуляризация кинетики нагревания тела происходит не только по температурным полям, но и по потокам теплоты. Поэтому при нагревании нет необходимости различать регулярные режимы первого, второго и третьего родов. В качестве общего свойства теплового регулярного режима можно принять соотношение

$$-\frac{d\bar{t}}{d\tau} = m(t_{\text{жс}} - \bar{t}), \quad (3.81)$$

где \bar{t} – средняя по объему тела температура;

$t_{\text{жс}}$ – температура среды;

m – коэффициент пропорциональности, называемый темпом нагревания (охлаждения).

Часть вторая

КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛООБМЕН В ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Глава четвертая

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ УЧЕНИЯ О КОНВЕКТИВНОМ ТЕПЛООБМЕНЕ

4.1. Основные понятия и определения

Понятие конвективного теплообмена охватывает процесс теплообмена при движении жидкости или газа. При этом перенос теплоты осуществляется одновременно конвекцией и теплопроводностью. Под конвекцией теплоты понимают перенос теплоты при перемещении макрочастиц жидкости или газа в пространстве из области с одной температурой в область с другой. Конвекция возможна только в текучей среде, здесь перенос теплоты неразрывно связан с переносом самой среды.

Если в единицу времени через единицу контрольной поверхности нормально к ней проходит масса жидкости $\rho \vec{\omega}$, кг/(м²·с), где $\vec{\omega}$ – скорость,

ρ – плотность жидкости, то вместе с ней переносится энтальпия, Дж/(м²·с):

$$\vec{q}_{\text{конв}} = \rho \vec{\omega} i \quad (4.1)$$

Конвекция теплоты всегда сопровождается теплопроводностью, так как при движении жидкости или газа неизбежно происходит соприкосновение отдельных частиц, имеющих различные температуры. В результате конвективный теплообмен описывают уравнением

$$\vec{q} = \vec{q}_{\text{тпр}} + \vec{q}_{\text{конв}} = -\lambda \nabla t + \rho \vec{\omega} i \quad (4.2)$$

Здесь \vec{q} является локальным (местным) значением плотности теплового потока за счет конвективного теплообмена. Первый член правой части уравнения (4.2) описывает перенос теплоты теплопроводностью, второй – конвекцией.

Конвективный теплообмен между потоками жидкости или газа и поверхностью соприкасающегося с ним тела называется конвективной теплоотдачей или теплоотдачей. Очень часто в инженерных расчетах определяют теплоотдачу; при этом знание конвективного теплообмена внутри жидкой среды может представлять косвенный интерес, поскольку перенос теплоты внутри жидкости отражается и на теплоотдаче.

При расчетах теплоотдачи используют закон Ньютона – Рихмана

$$dQ_c = \alpha(t_c - t_{жс})dF. (4.3)$$

Согласно закону Ньютона – Рихмана тепловой поток dQ_c , Вт, от жидкости к элементу поверхности соприкасающегося тела dF (или от dF к жидкости) прямо пропорционален dF и разности температур $\Delta t = t_c - t_{жс}$,

где t_c – температура поверхности тела,

$t_{жс}$ – температура окружающей жидкой или газообразной среды.

Разность температур $t_c - t_{жс}$ называют температурным напором.

Коэффициент пропорциональности α , входящий в уравнение (4.3), называется коэффициентом теплоотдачи. Он учитывает конкретные условия процесса теплоотдачи, влияющие на его интенсивность.

Согласно уравнению (4.3)

$$\alpha = \frac{dQ_c}{(t_c - t_{жс})dF} = \frac{q_c}{t_c - t_{жс}}. (4.4)$$

Это тождество следует рассматривать как определение коэффициента теплоотдачи, который измеряется в Вт/(м²·К).

Таким образом, коэффициент теплоотдачи есть плотность теплового потока q_c на границе жидкости (газа) и соприкасающегося тела, отнесенная к разности температур поверхности этого тела и окружающей среды.

В общем случае коэффициент теплоотдачи переменен по поверхности F . Если α и Δt не изменяются по F , то закон Ньютона – Рихмана может быть записан следующим образом:

$$Q_c = \alpha(t_c - t_{жс})F$$

Коэффициент теплоотдачи зависит от большого количества факторов. В общем случае α является функцией формы и размеров тела, режима движения, скорости и температуры жидкости, физических параметров жидкости и других величин. По-разному протекает процесс теплоотдачи в зависимости от природы возникновения движения жидкости.

Чтобы привести жидкость в движение, к ней необходимо приложить силу. Силы, действующие на какой-либо элемент жидкости, можно разделить на массовые (или объемные) и поверхностные. Массовыми называют силы, приложенные ко всем частицам жидкости и обусловленные внешними силовыми полями (например, гравитационным или электрическим). Поверхностные силы возникают вследствие действия окружающей жидкости или твердых тел; они приложены к поверхности контрольного объема жидкости. Такими силами являются силы внешнего давления и силы трения.

Различают свободную и вынужденную конвекцию. В первом случае движение в рассматриваемом объеме жидкости возникает за счет неоднородности в нем массовых сил. Если жидкость с неоднородным распределением температуры, и, как следствие, с неоднородным распределением плотности, находится в поле земного тяготения, может возникнуть свободное гравитационное движение. В дальнейшем в основном будет рассматриваться гравитационная свободная конвекция, вызванная неоднородностью температурного поля.

Вынужденное движение рассматриваемого объема жидкости происходит под действием внешних поверхностных сил, приложенных на его границах за счет предварительно сообщенной кинетической энергии (например, за счет работы насоса, вентилятора, ветра). Как вынужденное рассматривается и течение изучаемого объема жидкости под действием однородного в нем поля массовых сил. Иллюстрацией последнего может являться течение изотермической пленки жидкости по стенке под действием сил тяжести.

Вынужденное движение в общем случае может сопровождаться свободным движением. Относительное влияние последнего тем больше, чем больше разница температур отдельных частиц среды и чем меньше скорость вынужденного движения. При больших скоростях вынужденного движения влияние свободной конвекции становится пренебрежимо малым.

В дальнейшем в основном будут рассмотрены стационарные процессы течения и теплоотдачи. Условием стационарности является

неизменность во времени скорости и температуры в любой точке жидкости (газа).

4.2. Физические свойства жидкости

В зависимости от физических свойств жидкостей (газов) процесс теплообмена может протекать различно и своеобразно. Особенно большое влияние оказывают коэффициент теплопроводности λ , удельная теплоемкость c_p , плотность ρ , коэффициент температуропроводности a , уже использовавшиеся при рассмотрении теплопроводности, и коэффициент вязкости μ . Для каждого вещества эти величины имеют определенные значения и являются функцией параметров состояния (температуры и давления, прежде всего температуры). Особенно существенные изменения физических свойств могут иметь место в околоскритической области термодинамических состояний и в области очень низких температур.

В книге в основном рассматриваются процессы при монотонных и не слишком значительных изменениях физических свойств определенного вещества. Теплообмен в околоскритической области будет рассмотрен особо.

При теоретическом анализе конвективного теплообмена для простоты и наглядности выводов в основном будем полагать, что физические свойства жидкости (газа) постоянны в исследуемом интервале температур.

Все реальные жидкости обладают вязкостью; между частицами или слоями, движущимися с различными скоростями, всегда возникает сила внутреннего трения, противодействующая движению. Согласно закону Ньютона эта касательная сила s , Па (отнесенная к единице поверхности), которая действует в любой точке потока в плоскости, ориентированной по течению, пропорциональна изменению скорости в направлении нормали к этой плоскости:

$$s = \mu \frac{d\omega}{dn} \quad (4.5)$$

Коэффициент (μ называется динамическим коэффициентом вязкости или просто коэффициентом вязкости; его единица измерения $\text{Н}\cdot\text{с}/\text{м}^2$). При $d\omega/dn = 1$ численно $s = \mu$.

В уравнении гидродинамики и теплопередачи часто входит от-

ношение вязкости μ к плотности ρ , называемое кинематическим коэффициентом вязкости и обозначаемое буквой ν , $\text{м}^2/\text{с}$:

$$\nu = \mu / \rho$$

Коэффициенты μ и ν являются физическими параметрами. Они существенно зависят от температуры.

У капельных жидкостей вязкость почти не зависит от давления, но значительно уменьшается при повышении температуры. Типичный характер функции $\mu = f(t)$ для капельных жидкостей представлен на рис. 4.1.

У газов μ увеличивается при повышении температуры (рис. 4.2). При увеличении давления коэффициент вязкости газов также увеличивается, но слабо.

Кинематическая вязкость капельных жидкостей уменьшается при повышении температуры почти в такой же степени, как и μ , так как плотность ρ слабо зависит от температуры. Напротив, у газов, плотность которых при повышении температуры сильно уменьшает-

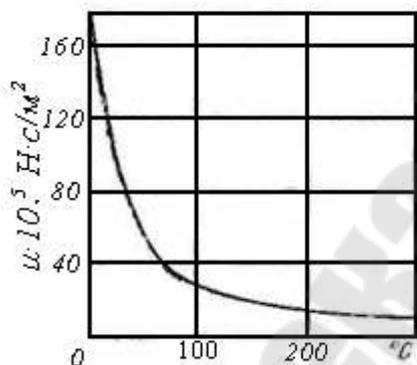


Рис. 4.1. Зависимость динамического коэффициента вязкости воды от температуры

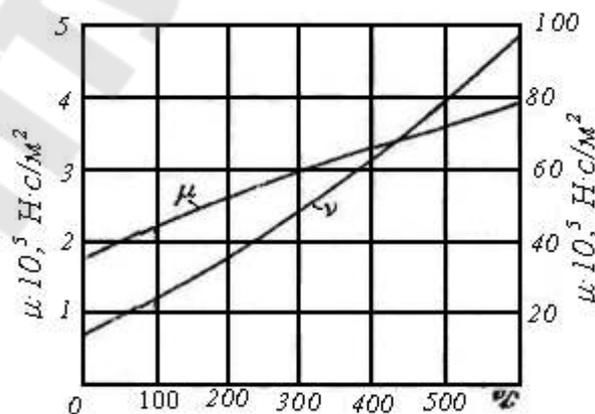


Рис. 4.2. Зависимость динамического и кинематического коэффициента вязкости воздуха от температуры при давлении $p=760$ мм рт. ст.

ся, кинематическая вязкость при увеличении температуры быстро повышается. При течении жидкости или газа, обладающих вязкостью, наличие внутреннего трения приводит к процессу диссипации (рассеяния) энергии. Существо процесса диссипации состоит в том, что часть кинетической энергии движущейся жидкости необратимо переходит в теплоту и вызывает нагревание жидкости. Если вяз-

кость жидкости или ее скорость невелики, то нагревание будет незначительным.

В дальнейшем в основном будут рассматриваться процессы, для которых выделяемая теплота трения незначительна и ею можно пренебречь.

На теплоотдачу оказывает влияние сжимаемость жидкостей. Изотермической сжимаемостью или коэффициентом сжатия тела при $t = const$ называют величину

$$\varepsilon = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right) \quad (4.6)$$

представляющую собой относительное изменение плотности вещества при изменении давления.

Некоторые жидкости не подчиняются закону Ньютона (4.5). Если попытаться описать вязкие свойства этих жидкостей с помощью уравнения (4.5), то оказывается, что коэффициент вязкости не только является функцией состояния вещества, но зависит и от параметров процесса – от изменения скорости и температуры. Такие жидкости называют «неньютоновскими».

Для капельных жидкостей изотермическая сжимаемость чрезвычайно мала. Так, например, для воды $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-5} \text{ Па}^{-1}$, т. е. повышение давления на 1 бар вызывает относительное изменение плотности на 1/20 000. То же самое имеет место и для других капельных жидкостей, что позволяет пренебречь для них изотермической сжимаемостью.

Для воздуха в нормальном состоянии $\varepsilon = 10^{-5} \text{ Па}^{-1}$. Таким образом, сжимаемость воздуха в 20 000 раз больше сжимаемости воды. Аналогичное соотношение имеет место и для других газов.

Однако главным является не способность газа сжиматься, а то, насколько он в действительности сжимается в рассматриваемом течении. Для значительного сжатия газа необходимо значительное изменение давления. Если при движении газа возникают разности давления, небольшие по сравнению с его абсолютным давлением, то изменения объема получаются малыми, и такие потоки газа в первом приближении можно считать несжимаемыми.

Значительные изменения давления возникают при больших скоростях течения. При этом нужно учитывать теплоту трения и сжимаемость газа. В результате теплоотдача при больших скоростях име-

ет ряд особенностей, неучет которых может привести к существенным ошибкам.

В дальнейшем в основном будет рассматриваться теплоотдача несжимаемой жидкости. При этом слово «жидкость» будет употребляться как собирательное понятие и для жидкостей, и для газов. Теплоотдача сжимаемого газа будет рассмотрена отдельно.

Между сжимаемыми и несжимаемыми течениями газа нет резкой границы. Обычно считают, что если скорость газа меньше четвертой части скорости звука, то к газам допустимо применять законы движения и теплоотдачи, полученные для несжимаемой жидкости.

Помимо изотермической сжимаемости для конвективного теплообмена большое значение имеет тепловое расширение жидкости. Последнее характеризуется температурным коэффициентом объемного расширения, определяемым уравнением ($p = const$)

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_p. \quad (4.7)$$

Согласно определению температурный коэффициент объемного расширения β , K^{-1} , представляет собой относительное изменение объема при изменении температуры на один градус (при постоянном давлении).

Для жидкостей температурный коэффициент объемного расширения сравнительно мал (исключение составляет область вблизи термодинамической критической точки). Для некоторых жидкостей, например для воды при $t < 4^\circ C$, коэффициент β может иметь отрицательное значение.

Для идеального газа температурный коэффициент объемного расширения есть величина, обратная абсолютной температуре газа,

$$\beta = \frac{1}{T}.$$

В неравномерно нагретой жидкости вследствие теплового расширения возникает неоднородное поле плотности, что в конечном итоге может привести к свободному движению.

4.3. Дифференциальные уравнения конвективного теплообмена (постановка краевых задач конвективного теплообмена)

Из уравнения (4.2)

$$\vec{q} = -\lambda \nabla t + \rho \vec{\omega} i$$

следует, что плотность теплового потока в любой точке жидкости для каждого момента времени однозначно определяется, если известны поля температур, удельной энтальпии и скорости.

Связь между температурой и энтальпией может быть установлена следующим образом. Для реальной жидкости $i = i(T, p)$, и согласно понятию о полном дифференциале

$$di = \left(\frac{\partial i}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial i}{\partial p} \right)_T dp.$$

Отсюда

$$i = \int_T c_p dT + \int_p \left(\frac{\partial i}{\partial p} \right)_T dp. \quad (4.8)$$

Из дифференциальных уравнений термодинамики и из определения температурного коэффициента объемного расширения следует, что

$$\left(\frac{\partial i}{\partial p} \right)_T = \frac{1}{\rho} \left[1 + \frac{T}{\rho} \left(\frac{\partial i}{\partial T} \right)_p \right] = \frac{1}{\rho} [1 - \beta T]_p. \quad (4.9)$$

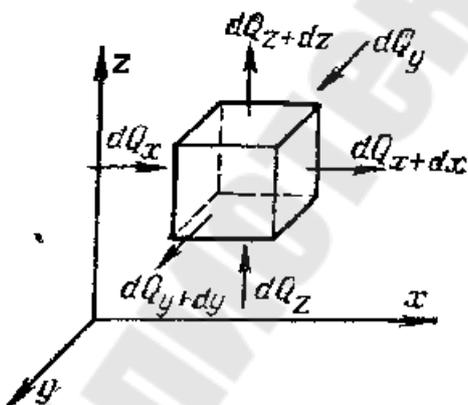


Рис. 4.3. К выводу дифференциального уравнения энергии

Для многих задач в предположении о несжимаемости жидкости. $p = const$ с достаточной степенью точности можно принять $(\partial i / \partial p)_T = 0$, т. е. пользоваться соотношением, справедливым для термодинамически, идеального газа:

$$di = c_p dT \text{ и } i = \int_T c_p dT. \quad (4.10)$$

Приведенные здесь уравнения позволяют установить связь между полем температур и полем энтальпии. Чтобы аналитически найти поля тем-

ператур (энтальпии) и скоростей и определить \vec{q} , необходимо располагать соответствующими уравнениями.

Уравнение энергии. Выведем дифференциальное уравнение, описывающее температурное поле в движущейся жидкости. При выводе будем полагать, что жидкость однородна и изотропна, ее физические параметры постоянны, энергия деформации мала по сравнению с изменением внутренней энергии.

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} + \omega_x \frac{\partial t}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial t}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial t}{\partial z} = a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) + \frac{q_v}{\rho c_p}.$$

Последнее уравнение, является искомым уравнением энергии, описывающим распределение температур внутри движущейся жидкости.

Многочлен, стоящий в левой части уравнения, представляет собой полную производную от температуры по времени. Действительно, если $t=t(\tau, x, y, z)$, то на основании понятия о полной производной имеем:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{\partial t}{\partial \tau} + \frac{\partial t}{\partial x} \frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial t}{\partial y} \frac{dy}{d\tau} + \frac{\partial t}{\partial z} \frac{dz}{d\tau},$$

где

$$\frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau} \text{ и } \frac{dz}{d\tau}$$

имеют смысл составляющих скорости ω_x , ω_y и ω_z .

Здесь $\partial t / \partial \tau$ характеризует изменение температуры во времени в какой-либо точке жидкости, т. е. является локальным изменением t ; член

$$\omega_x \frac{\partial t}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial t}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial t}{\partial z}$$

характеризует изменение температуры при переходе от точки к точке, т. е. является конвективным изменением t .

Применяя обозначение

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = \nabla^2 t,$$

уравнение энергии можно записать в форме

$$\frac{dt}{d\tau} = a\nabla^2 t + \frac{q_v}{\rho c_p}.$$

Если $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$, уравнение энергии переходит в уравнение теплопроводности.

Температурное поле в движущейся жидкости зависит от составляющих скорости ω_x , ω_y и ω_z . Чтобы сделать систему уравнений замкнутой, необходимо добавить уравнения, которые бы описывали изменение скорости во времени и пространстве. Такими уравнениями являются дифференциальные уравнения движения.

Выделим в потоке жидкости неподвижный относительно координатной системы элементарный параллелепипед (рис. 4.3) с ребрами dx , dy и dz . Через грани параллелепипеда теплота переносится теплопроводностью и конвекцией; в общем случае в рассматриваемом объеме может выделяться теплота внутренними источниками за счет энергии, внешней по отношению к рассматриваемой жидкости.

$$\rho \frac{\partial i}{\partial \tau} = -\text{div} \vec{q} + q_v,$$

У р а в н е н и я д в и ж е н и я.

В общем случае трёхмерного движения несжимаемой жидкости с постоянными физическими параметрами скоростное поле описывается тремя уравнениями движения, каждое соответственно в проекциях сил на оси Ox , Oy и Oz :

для оси Ox

$$\rho \frac{d\omega_x}{d\tau} = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 \omega_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial z^2} \right); \quad (4.11)$$

для оси Oy

$$\rho \frac{d\omega_y}{d\tau} = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 \omega_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_y}{\partial z^2} \right); \quad (4.12)$$

для оси Oz

$$\rho \frac{d\omega_z}{d\tau} = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial z^2} \right). \quad (4.13)$$

Уравнения (4.11) – (4.13) называют уравнениями Навье – Стокса. Все слагаемые уравнений (4.11) – (4.13) имеют размерность силы, отнесенной к единице объёма.

В общем случае составляющие скорости ω_x , ω_y и ω_z изменяются во времени и в пространстве. Член, стоящий в левой части уравнений (4.11) – (4.13), представляет собой полную производную от скорости по времени.

На основании понятия о полной производной имеем:

$$\frac{d\omega_x}{d\tau} = \frac{\partial\omega_x}{\partial\tau} + \omega_x \frac{\partial\omega_x}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial\omega_x}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial\omega_x}{\partial z}. \quad (4.14)$$

Аналогично и для других осей:

$$\frac{d\omega_y}{d\tau} = \frac{\partial\omega_y}{\partial\tau} + \omega_x \frac{\partial\omega_y}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial\omega_y}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial\omega_y}{\partial z}; \quad (4.15)$$

$$\frac{d\omega_z}{d\tau} = \frac{\partial\omega_z}{\partial\tau} + \omega_x \frac{\partial\omega_z}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial\omega_z}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial\omega_z}{\partial z}. \quad (4.16)$$

Производные $\frac{\partial\omega_x}{\partial\tau}$, $\frac{\partial\omega_y}{\partial\tau}$ и $\frac{\partial\omega_z}{\partial\tau}$ характеризуют изменение скорости во времени в какой-либо точке жидкости, т. е. характеризуют локальное изменение скорости; остальные три члена, стоящие в правых частях уравнений, характеризуют изменение скорости при переходе от точки к точке. Используя векторную диаграмму записи, уравнения (4.11) – (4.13) можно переписать в виде

$$\rho \frac{d\vec{\omega}}{d\tau} = \rho \vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{\omega}. \quad (4.17)$$

Уравнение движений (4.17) получено без учёта зависимости физических параметров жидкости от температуры. В частности, не учтена зависимость плотности от температуры. В то же время свободное движение жидкости определяется разностью плотностей холодных и нагретых частиц жидкости.

У р а в н е н и е с п л о ш н о с т и.

Дифференциальное уравнение сплошности или непрерывности для сжимаемых жидкостей:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial(\rho \omega_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \omega_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \omega_z)}{\partial z} = 0. \quad (4.18)$$

Для несжимаемых жидкостей, полагая $\rho = \text{const}$, получаем:

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z} = 0 \quad (4.19)$$

или, что то же самое,

$$\text{div} \vec{\omega} = 0. \quad (4.20)$$

Уравнение сплошности является уравнением сохранения массы.

Таким образом, процесс конвективного теплообмена в несжимаемой однородной среде с постоянными физическими параметрами описывается системой дифференциальных уравнений (4.2), (4.10), (4.18) и (4.20).

Условия однозначности. Полученные дифференциальные уравнения конвективного теплообмена описывают бесчисленное множество конкретных процессов. Чтобы выделить рассматриваемый процесс и определить его однозначно, к системе дифференциальных уравнений нужно присоединить условия однозначности. Условия однозначности дают математическое описание всех частных особенностей рассматриваемого явления; они состоят из:

1) **геометрических условий**, характеризующих форму и размеры тела или системы, в которой протекает процесс;

2) **физических условий**, характеризующих физические свойства среды;

3) **временных или начальных условий**, характеризующих особенности процесса в начальный момент времени; для стационарных задач эти условия отпадают;

4) **граничных условий**, характеризующих особенности протекания процесса на границах жидкой среды.

В последних должны быть заданы граничные значения зависимых (искомых) переменных или их производных. Например, для любого момента времени задаются распределения температур или тепловых потоков по поверхности тела (в простейшем случае $t_c = \text{const}$ или $q_c = -\lambda(\partial t / \partial n)_{n=0} = \text{const}$), распределение температур и скоростей жидкости на входе в канал или на большом удалении от рассматриваемой поверхности теплообмена, значения скорости на стенке и т. д.

Очевидно, в зависимости от вида задания граничных и других условий результаты решения (интегрирования), представляемые в виде формул или числовых значений, могут быть различны.

Система дифференциальных уравнений в совокупности с условиями однозначности представляет собой математическую формулировку краевой задачи.

4.4. Гидродинамический и тепловой пограничные слои

Для инженерной практики особый интерес представляет теплообмен между жидкостью и омываемым ею телом. Рассмотрим особенности течения и переноса теплоты в пристенном слое жидкости.

Условия «п р и л и п а н и я». В настоящее время в гидродинамике вязкой жидкости получила признание гипотеза о том, что частицы жидкости, непосредственно прилегающие к твердому телу, адсорбируются последним, как бы прилипают к его поверхности, т е их скорость равна скорости тела (а если тело неподвижно, то нулю).

Этот слой «прилипшей» жидкости нужно рассматривать как бесконечно тонкий слой. Гипотеза о равенстве нулю скоростей жидкости на стенке нашла косвенное подтверждение в хорошем согласии с опытом результатов многочисленных теоретических работ, в основу которых она была положена.

Равенство нулю скорости жидкости на стенке выполняется до тех пор, пока газ можно считать сплошной средой. По мере увеличения разрежения ослабляется взаимодействие газа со стенкой и разреженный газ вблизи стенки начинает проскальзывать.

Степень разрежения потока характеризуют значением параметра Кнудсена \bar{l}/l_0 , представляющего собой отношение средней длины свободного пробега молекул газа \bar{l} к характерному размеру твердого тела l_0 (например, диаметру трубы или проволоки).

Если примерно $\bar{l}/l_0 > 0,001$, то газ уже нельзя рассматривать как сплошную среду, для которой выполняется условие прилипания.

При значениях параметра Кнудсена, примерно больших 10, газ должен рассматриваться как свободный молекулярный поток. Его взаимодействие с твердым телом описывается на основе законов кинетической теории газов.

При значениях параметра Кнудсена, заключенных между 0,001 и 10, разреженный газ не может рассматриваться ни как полностью

сплошная, ни как полностью свободномолекулярная среда. Для этой области чисел Кнудсена разрабатываются свои методы расчета течения и теплообмена.

Мы будем рассматривать в основном сплошные среды и исходить из равенства нулю скорости исчезающего тонкого слоя жидкости, непосредственно прилегающего к поверхности твердого тела.

У р а в н е н и е т е п л о т д а ч и . Так как у поверхности твердого тела имеется тонкий слой неподвижной жидкости, из уравнения (4.2) следует, что плотность теплового потока на стенке (теплотдача) может быть определена по уравнению Фурье

$$q_c = -\lambda(\partial t / \partial n)_{n=0}, \quad (4.21)$$

где n – нормаль к поверхности тела.

Таким образом, если известно температурное поле, q_c можно вычислить, не обращаясь к закону Ньютона – Рихмана:

$$q_c = \alpha(t_c - t_{жс}). \quad (4.21')$$

При необходимости по известному температурному полю можно определить и коэффициент теплоотдачи. Из уравнений (4.21) и (4.21') следует, что

$$\alpha = -\frac{\lambda}{t_c - t_{жс}} \left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_{n=0}. \quad (4.22)$$

Будем называть это уравнение у р а в н е н и е м теплоотдачи.

Из условия равенства нулю относительной скорости жидкости на поверхности тела следуют и другие важные для расчетной практики выводы, облегчающие нахождение поля температур, и, следовательно, определение q_c и α .

Г и д р о д и н а м и ч е с к и й п о г р а н и ч н ы й с л о й . Рассмотрим продольное обтекание плоской поверхности тела безграничным потоком жидкости. Скорость и температура набегающего потока постоянны и равны соответственно w_0 и t_0 . При соприкосновении

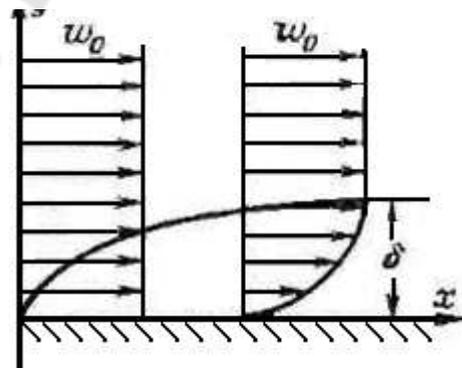


Рис. 4.4. Изменение условий в гидродинамическом пограничном слое

частиц жидкости с поверхностью тела они «прилипают» к ней. В результате в области около пластины вследствие действия сил вязкости образуется тонкий слой заторможенной жидкости, в пределах которого скорость изменяется от нуля на поверхности тела до скорости невозмущенного потока (вдали от тела). Этот слой заторможенной жидкости получил название гидродинамического пограничного слоя. Теория гидродинамического пограничного слоя впервые дана Л. Прандтлем (1904 г.).

Чем больше расстояние x от передней кромки пластины, тем толще пограничный слой, так как влияние вязкости по мере движения жидкости вдоль тела все дальше проникает в невозмущенный поток. Эта особенность пограничного слоя иллюстрируется рис. 4-6, на котором представлены распределения скорости при различных значениях x .

Для течения жидкости внутри пограничного слоя справедливо условие $\partial w_x / \partial y \neq 0$, вне пограничного слоя и на его внешней границе:

$$\partial w_x / \partial y = 0 \text{ и } w_x = w_0. \quad (4.23)$$

Понятия «толщина пограничного слоя» и «внешняя граница пограничного слоя» довольно условны, так как резкого перехода от пограничного слоя к течению вне слоя нет. Скорость в пограничном слое по мере увеличения y асимптотически стремится к w_0 .

Поэтому под толщиной пограничного слоя δ подразумевается такое расстояние от стенки, на котором скорость будет отличаться от скорости потока вдали от тела на определенную заранее заданную малую величину $\varepsilon \ll 1$ (например на 1%): при $y = \delta w_x = (1 - \varepsilon)w_0$.

Таким образом, при омывании тела поток жидкости как бы разделяется на две части: на пограничный слой и на внешний поток.

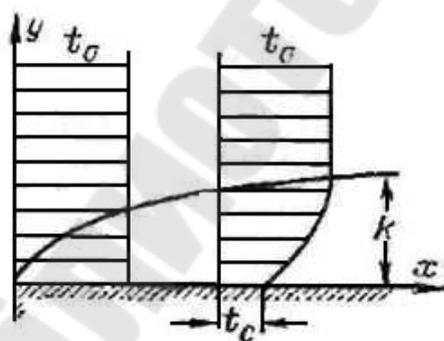


Рис. 4.5. Изменение температуры в тепловом пограничном слое.

Во внешнем потоке преобладают силы инерции, вязкостные силы здесь не проявляются. Напротив, в пограничном слое силы вязкости и инерционные силы соизмеримы.

Если $Re \ll 1$, то $\frac{\delta}{l} \gg 1$ ($\delta \gg l$). В

этом случае по сути дела нет деления потока на две области, все пространство жидкости у тела

охвачено действием сил вязкости.

здесь $Re = w_0 l / \nu$ – число Р е й н о л ь д с а, характеризующее соотношение сил инерции и сил вязкости.

Если $Re \gg 1$, то $\delta \ll 1$, т. е. у поверхности тела образуется сравнительно тонкий слой подторможенной жидкости, для которого в первом приближении справедливы сделанные нами упрощения. Таким образом, теория пограничного слоя приобретает характер метода упрощения математической формулировки краевой задачи и связанной с этим возможности решения.

Т е п л о в о й п о г р а н и ч н ы й с л о й. Аналогично понятию гидродинамического пограничного слоя Г. Н. Кружилиным было введено понятие теплового пограничного слоя (рис. 4-7). Тепловой пограничный слой – это слой жидкости у стенки, в пределах которого температура изменяется от значения, равного температуре стенки, до значения, равного температуре жидкости вдали от тела. Для области внутри теплового пограничного слоя справедливо условие $\partial t / \partial y \neq 0$, а на внешней границе и вне его.

Точнее, при $y = k$ $t = (1 - \varepsilon)t_0$, где $\varepsilon \ll 1$, так как температура t должна асимптотически стремиться к значению t_0 .

$$\partial t / \partial y = 0 \text{ и } t = t_0. (4.24)$$

Таким образом, все изменение температуры жидкости сосредоточивается в сравнительно тонком слое, непосредственно прилегающем к поверхности тела. Толщины гидродинамического и теплового пограничных слоев δ и k в общем случае не совпадают – это зависит от рода жидкости и некоторых параметров процесса течения и теплообмена. Будем полагать, что они одного порядка: $k = O(\delta)$.

Форма и размеры поверхности теплообмена существенно влияют на теплоотдачу. В зависимости от этих факторов может резко меняться характер обтекания поверхности, по-иному строится пограничный слой. В технике имеется большое многообразие поверхностей нагрева. Каждая такая поверхность создает специфические условия движения и теплоотдачи.

Известно, что имеются два основных режима течения жидкости: ламинарный и турбулентный. При ламинарном режиме частицы жид-

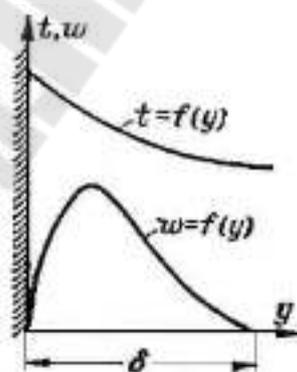


Рис. 4.6. Гидродинамический и тепловой пограничные слои при свободном движении

кости движутся без перемешивания, слоисто; при турбулентном – неупорядоченно, хаотически, направление и величина скорости отдельных частиц беспрестанно меняются. Эти режимы течения наблюдаются и в пограничном слое. При малых значениях x течение в пограничном слое может быть ламинарным. По мере увеличения x толщина пограничного слоя возрастает, слой делается неустойчивым и течение в пограничном слое становится турбулентным.

4.5. Турбулентный перенос теплоты и количества движения

Турбулентное течение существенно отличается от ламинарного. На

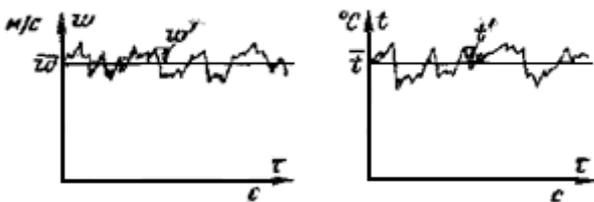


Рис. 4.7. Изменение скорости w и температуры t в неподвижной точке турбулентного потока

рис. 4.7 показана осциллограмма колебаний скорости в определенной неподвижной точке турбулентного потока, имеющего неизменную среднюю скорость течения. Мгновенная скорость пульсирует около некоторого среднего во времени значения. Помимо

показанного на графике рис. 4.8 изменения абсолютной величины w происходит еще и изменение направления мгновенной скорости. Отклонение мгновенной скорости w от средней во времени \bar{w} называют пульсациями скорости или пульсационными скоростями w' . При этом $w = \bar{w} + w'$. Таким образом, турбулентное движение состоит как бы из регулярного течения, описываемого осредненными значениями скоростей, и из наложенного на него хаотического пульсационного течения.

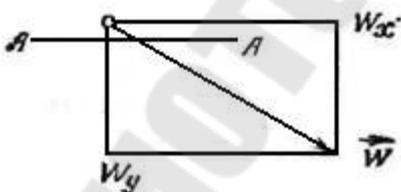


Рис. 4.8. Мгновенное значение скорости в плоском турбулентном потоке

При пульсациях скорости происходит перенос механической энергии. Если в потоке имеет место разность температур, то пульсации скорости приводят и к переносу теплоты, вследствие чего возникают пульсации температуры (рис. 4.6). Температура в определенной неподвижной точке турбулентного потока колеблется около некоторого среднего во времени значения \bar{t} . Пульсация температуры

t' связана с t и \bar{t} уравнением $t = \bar{t} + t'$.

Таким образом, турбулентное течение, строго говоря, является нестационарным процессом, однако если осредненные во времени скорости и температуры \bar{w} и \bar{t} не изменяются, то такое движение и связанный с ним перенос теплоты можно рассматривать как стационарные (квазистационарные) процессы. При этом интервал времени осреднения должен быть достаточно большим по сравнению с периодом пульсации, но в то же время достаточно малым по сравнению с каким-либо характерным для осредненного движения интервалом времени, чтобы учесть возможные изменения средних скоростей и температур во времени. Будем в дальнейшем полагать, что средние значения актуальных величин w , t получены как среднеинтегральные.

В общем случае пульсации скорости и температуры приводят к пульсациям давления и физических свойств.

Полагают, что выведенные в 4.3 дифференциальные уравнения конвективного теплообмена справедливы для отдельных струек пульсационного движения. Эти уравнения можно записать в осредненных значениях скорости и температуры, если произвести замену $t = \bar{t} + t'$ $w_x = \bar{w}_x + w'_x$, $w_y = \bar{w}_y + w'_y$ и т. д.

Глава пятая

ПОДОБИЕ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА

5.1. Общие положения

Конвективный теплообмен описывается системой дифференциальных уравнений и условиями однозначности с большим количеством переменных. Попытки аналитического решения полной системы уравнений наталкиваются на серьезные трудности. Поэтому большое значение приобретает экспериментальный путь исследования. С помощью эксперимента для определенных значений аргументов можно получить числовые значения искомых переменных и затем подобрать уравнения, описывающие результаты опытов. Однако при изучении столь сложного процесса, как конвективный теплообмен, не всегда легко проводить и опытное исследование.

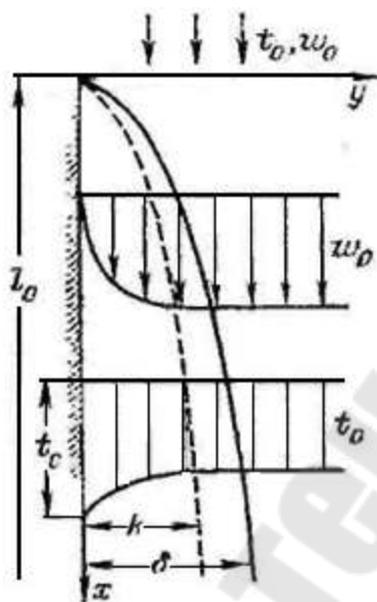


Рис. 5.1. К постановке краевой задачи конвективного теплообмена.

Для исследования влияния на процесс какой-либо одной величины остальные нужно сохранять неизменными, что не всегда возможно или затруднительно из-за большого количества переменных. Кроме того, при этом нужно быть уверенным, что результаты, получаемые с помощью какой-либо конкретной установки (модели), можно перенести и на другие аналогичные процессы (образец). Эти трудности помогает разрешить теория подобия. С помощью теории подобия размерные физические величины можно объединить в безразмерные комплексы, причем так, что число комплексов будет меньше числа величин, из которых составлены эти комплексы. Полученные безразмерные комплексы можно рассматривать как новые переменные.

При введении в уравнения безразмерных комплексов число величин под знаком искомой функции формально сокращается, что упрощает исследование физических процессов. Кроме того, новые безразмерные переменные отражают влияние не только отдельных фак-

торов, но и их совокупности, что позволяет легче определить физические связи в исследуемом процессе.

Теория подобия устанавливает также условия, при которых результаты лабораторных исследований можно распространить на другие явления, подобные рассматриваемому. Ввиду этого теория подобия, прежде всего, является теоретической базой эксперимента, но не только. Теория подобия является важным подспорьем теоретических исследований. Хотя методами теории подобия вид искомой функции не может быть определен, эта теория облегчает в ряде случаев анализ процесса и описание полученных результатов.

Для практического использования выводов теории подобия необходимо уметь приводить к безразмерному виду математические описания изучаемых процессов.

Воспользуемся методом масштабных преобразований.

5.2. Приведение математической формулировки краевой задачи к записи в безразмерных переменных

Пусть поверхность твердого тела омывается несжимаемой жидкостью, температура и скорость которой вдали от тела постоянны и равны соответственно t_0 и w_0 . Размер тела l_0 задан. Температура поверхности тела равна t_c . Для определенности примем, что $t_c > t_0$. Будем полагать, что физические параметры жидкости постоянны (учтем только подъемную силу, возникающую в результате зависимости плотности от температуры). Теплота трения не учитывается. Рассматриваемый процесс является стационарным.

Расположим оси координат так, как показано на рис. 5.1. Для простоты примем, что ось Oy нормальна к поверхности тела, а ось Ox направлена вдоль тела и вертикальна.

При этом $g_x = g$, а проекции вектора сил тяжести (или подъемной силы) на оси Oy и Oz будут равны нулю ($g_y = g_z = 0$).

Размер тела вдоль оси Oz намного больше l_0 .

При принятых условиях поля температур и скоростей можно описать дифференциальными уравнениями в «приближении пограничного слоя (см. § 4.4). Учтем дополнительно подъемную силу $\rho g \beta \vartheta$, считая ее соизмеримой с вязкостным членом $\mu(\partial^2 w_x / \partial y^2)$. Введем также обозначение $\vartheta = t - t_0$, где t – температура жидкости

(заметим, что $dt = d\mathcal{G}$, так как $t_0 = const$).

Уравнение энергии

$$w_x \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} + w_y \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} = a \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial y^2};$$

Уравнение движения

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + g\beta \mathcal{G};$$

Уравнение сплошности

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0.$$

Напишем граничные условия:

$$\left. \begin{array}{l} 1) \text{ Вдали от тела } (y = \infty) \\ \mathcal{G} = \mathcal{G}_0 \equiv 0; w_x = w_0; w_y = 0. \\ 2) \text{ На поверхности тела } (y = 0, 0 \leq x \leq l_0, -\infty \leq z \leq +\infty) \\ \mathcal{G} = \mathcal{G}_c \equiv t_c - t_0 = const; w_x = w_y = w_z = 0. \end{array} \right\} (a)$$

В уравнениях и условиях однозначности можно различить три вида "величин":

н е з а в и с и м ы е переменные – это координаты x, y .

з а в и с и м ы е переменные – это \mathcal{G}, w_x и w_y зависимые переменные однозначно определяются значениями независимых переменных, если заданы величины, входящие в условия однозначности;

п о с т о я н н ы е в е л и ч и н ы – это $w_0, t_0, l_0, \mathcal{G}_c, \nu, a, g\beta$ и др.; они задаются условиями однозначности и для определенной задачи являются постоянными, не зависящими от других переменных; от задачи к задаче они могут меняться; постоянными эти величины называют потому, что они не являются функцией независимых переменных.

Таким образом, искомые зависимые переменные \mathcal{G}, w_x и w_y зависят от большого числа величин: они являются функцией независимых переменных и постоянных величин, входящих в условия одно-

значности.

Величины, содержащиеся в уравнениях и условиях однозначности, можно сгруппировать в комплексы. Число безразмерных комплексов будет меньше числа размерных величин.

Для приведения к безразмерному виду выберем масштабы приведения. В качестве масштабов удобно принять постоянные величины, входящие в условия однозначности. Для линейных величин выберем какой-либо характерный размер, например длину поверхности теплообмена l_0 , для скорости w_0 , для температуры ϑ_c .

Обозначим безразмерные величины:

$$\left. \begin{aligned} X = \frac{x}{l_0}, Y = \frac{y}{l_0}, W_x = \frac{w_x}{w_0}, \\ W_y = \frac{w_y}{w_0}, \theta = \frac{\vartheta}{\vartheta_c}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Тогда

$$\left. \begin{aligned} x = l_0 X, y = l_0 Y, w_x = w_0 W_x, \\ w_y = w_0 W_y, \vartheta = \vartheta_c \theta. \end{aligned} \right\} \quad (B)$$

Подставим в уравнения значения величин согласно равенствам (B).

Преобразуем уравнение энергии. Так как, например,

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial (l_0 Y)} \left[\frac{\partial (\vartheta_c \theta)}{\partial (l_0 Y)} \right] = \frac{\vartheta_c}{l_0^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2},$$

то в результате подстановки равенств (B) после умножения левой и правой частей уравнения энергии на l_0^2 / a будем иметь:

$$\frac{x_0 l_0}{a} \left(W_x \frac{\partial \theta}{\partial X} + W_y \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) = \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \quad (5.1)$$

Аналогично преобразуем и уравнение движения. После подстановки равенства (B) в уравнение движения умножим его на $l_0^2 / \nu w_0$.

В результате получим:

$$\frac{w_0 l_0}{\nu} \left(W_x \frac{\partial \theta}{\partial X} + W_y \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) = \frac{\partial^2 W_x}{\partial Y^2} + \frac{g \beta \vartheta_c l_0^2}{\nu w_0} \theta. \quad (5.2)$$

Сделаем следующее преобразование комплекса, входящего в последнее уравнение:

$$\frac{g \beta \vartheta_c l_0^2}{\nu w_0} \theta = \frac{g \beta \vartheta_c l_0^3}{\nu^2} \frac{\nu}{w_0 l_0} \theta. \quad (5.3)$$

Учитывая эти преобразования, окончательно получаем:

$$\frac{w_0 l_0}{\nu} \left(W_x \frac{\partial W_x}{\partial X} + W_y \frac{\partial W_y}{\partial Y} \right) = \frac{\partial^2 W_x}{\partial Y^2} + \frac{g \beta \vartheta_c l_0^3}{\nu^2} \frac{\nu}{w_0 l_0} \theta. \quad (5.4)$$

После преобразования уравнения сплошности получим:

$$\frac{w_0}{l_0} \left(\frac{\partial W_x}{\partial X} + \frac{\partial W_y}{\partial Y} \right) = 0$$

или, так как w_0 / l_0 не равно нулю,

Приводя к безразмерному виду граничные условия, получаем:

$$\left. \begin{array}{l} 1) \text{ Вдали от тела } (Y = \infty) \\ \theta = \theta_0 \equiv 0; W_x = 1; W_y = 0. \\ 2) \text{ На поверхности тела } (Y = 0, 0 \leq X \leq 1) \\ \theta = \theta_0 \equiv 1; W_x = W_y = 0. \end{array} \right\} \quad (\Gamma)$$

Из условий (г) следует, что, несмотря на то, что величины w_0, t_c, t_0 и др., входящие в размерные граничные условия, могут иметь различные числовые значения, каждая из безразмерных величин θ_0, θ_c и др. имеет в рассматриваемом случае вполне конкретное числовое значение.

Как следует из § 4.4, при известном температурном поле коэффициент теплоотдачи может быть определен по уравнению

$$\alpha = -\frac{\lambda}{t_c - t_0} \left(\frac{\partial t}{\partial y} \right)_{y=0}.$$

Приводя к записи в безразмерных переменных, получаем:

$$\frac{\alpha l_0}{\lambda} = -\left(\frac{\partial \theta}{\partial Y}\right)_{Y=0}.$$

Безразмерный комплекс $\alpha l_0 / \lambda$ полностью определяется производной $(\partial \theta / \partial Y)_{Y=0}$.

5.3. Безразмерные переменные (числа подобия) и уравнения подобия

Помимо безразмерных величин θ, W_x, W_y и безразмерных координат, составленных из однородных физических величин, в уравнения входят также безразмерные комплексы, состоящие из разнородных физических величин: $\frac{\alpha l_0}{\lambda}, \frac{w_0 l_0}{a}, \frac{w_0 l_0}{\nu}, \frac{g \beta \vartheta_c l_0^3}{\nu^2}$.

Этим комплексам, называемым числами подобия, присвоены имена ученых, внесших значительный вклад в развитие гидродинамики или теплопередачи.

Первый из этих безразмерных комплексов обозначают

$$Nu \equiv \frac{\alpha l_0}{\lambda} \quad (5.5)$$

и называют числом Н у с с е л ь т а или безразмерным коэффициентом теплоотдачи. Число Нуссельта характеризует теплообмен на границе стенка – жидкость; это следует из уравнений (4.3) и (5.1). В задачах конвективного теплообмена число Nu обычно является искомой величиной, поскольку в него входит определяемая величина α .

Несмотря на внешнее сходство с числом Био, рассмотренным при изучении теплопроводности, число Нуссельта существенно отличается от него. В число Bi входит коэффициент теплопроводности твёрдого тела; в число Nu – коэффициент теплопроводности жидкости. Кроме того, в число Био коэффициент теплоотдачи вводится как величина, заданная в условиях однозначности, мы же рассматриваем коэффициент теплоотдачи, входящий в Nu , как величину искомую.

Безразмерный комплекс

$$Re = \frac{w_0 l_0}{\nu} \quad (5.6)$$

называют числом Рейнольдса. Оно характеризует соотношение сил инерции и сил вязкости. Действительно, число Рейнольдса будет получено, если член уравнения движения, учитывающий инерционные силы, разделить на член, учитывающий в этом уравнении силы трения:

$$\frac{w_x \partial w_x / \partial x}{\nu \partial^2 w_x / \partial y^2} = \frac{w_0^2 / l_0}{\nu w_0 / l_0^2} \frac{W_x \partial W_x / \partial X}{\partial^2 W_x / \partial Y^2} = \frac{w_0 / l_0}{\nu} \frac{W_x \partial W_x / \partial X}{\partial^2 W_x / \partial Y^2}$$

Число Рейнольдса является важной характеристикой как изотермического, так и неизотермического процессов течения жидкости.

Третий безразмерный комплекс обозначают

$$Pe \equiv \frac{w_0 l_0}{a} \quad (5.7)$$

и называют числом Пекле. Его можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{w_0 l_0}{a} = \frac{\rho c_p w_0 g}{\frac{\lambda}{l_0} g}$$

здесь числитель характеризует теплоту, переносимую конвекцией, а знаменатель – теплоту, переносимую теплопроводностью.

По существу мы получили ранее число Пекле путем деления конвективного члена уравнения на член, учитывающий перенос теплоты теплопроводностью.

Безразмерный комплекс

$$Gr \equiv \frac{g \beta g_c l_0^3}{\nu^2} \quad (5.8)$$

называют числом Г р а с г о ф а . Оно характеризует подъемную силу, возникающую в жидкости вследствие разности плотностей. Так как при выводе уравнения движения (4.18) было принято, что

$$\beta g = \frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0}$$

Вместо Gr можно написать его более общую модификацию – число Архимеда:

$$Ar = \frac{gl_0^3}{\nu^2} \frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0} \quad (5.9)$$

В случае однородной среды при условии $\beta = const$ число Архимеда идентично числу Gr .

Используя введенные обозначения, систему безразмерных дифференциальных уравнений можно записать в следующем виде:

$$Nu = -(\partial\theta/\partial Y)_{Y=0}; \quad (5.10)$$

$$Pe \left(W_x \frac{\partial\theta}{\partial X} + W_y \frac{\partial\theta}{\partial Y} \right) = \frac{\partial^2\theta}{\partial Y^2}; \quad (5.11)$$

$$Re \left(W_x \frac{\partial W_x}{\partial X} + W_y \frac{\partial W_x}{\partial Y} \right) = \frac{Gr}{Re} \theta + \frac{\partial^2 W_x}{\partial Y^2}; \quad (5.12)$$

$$\frac{\partial W_x}{\partial X} + \frac{\partial W_y}{\partial Y} = 0. \quad (5.13)$$

Система безразмерных дифференциальных уравнений и безразмерных условий однозначности (Γ) (см. § 5.2) представляет собой математическую формулировку задачи.

Безразмерные величины $\theta, W_x, W_y, X, Y, Nu, Re, Pe, Gr$ можно рассматривать как новые переменные. Их можно разделить на три группы:

н е з а в и с и м ы е переменные – это безразмерные координаты X, Y ;

з а в и с и м ы е переменные – это θ, W_x, W_y, Nu ; они однозначно определяются значениями независимых переменных при определенных значениях величин, входящих в условия однозначности;

п о с т о я н н ы е величины – это Re, Pe, Gr ; они заданы условиями однозначности и для конкретной задачи являются постоянными [действительно, как следует из (5.6) – (5.8), числа Re, Pe, Gr со-

стоят только из величин, входящих в условия задачи].

В результате можно написать:

$$Nu = f_1(X_c, Y_c, Re, Pe, Gr); \quad (5.14)$$

$$\theta = f_2(X, Y, Re, Pe, Gr); \quad (5.15)$$

$$W_x = f_3(X, Y, Re, Pe, Gr); \quad (5.16)$$

$$W_y = f_4(X, Y, Re, Pe, Gr). \quad (5.17)$$

Уравнения вида (5.14) – (5.17) называют уравнениями подобия.

Здесь X_c, Y_c – уравнение (5.14) – соответствуют поверхности теплоотдачи (стенки). Нахождение α (или Nu) для точек пространства, не лежащих на поверхности стенки, не имеет смысла. В рассматриваемой задаче $Y_c = 0$.

Если в уравнении движения учесть член $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$, то в результате приведения к безразмерной записи появился бы и член

$$\frac{l_0}{\rho w_0} \frac{\partial p}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{p}{\rho w_0^2} \frac{w_0 l_0}{\nu} \right) = \frac{\partial}{\partial X} (Eu Re).$$

Безразмерный комплекс

$$Eu = \frac{p}{\rho w_0^2} \quad (5.18)$$

называют числом Эйлера. Это число характеризует соотношение сил давления и сил инерции. В уравнения конвективного теплообмена зависимая переменная Eu входит только под знаком производной. Следовательно, для рассматриваемой нами несжимаемой жидкости с постоянными физическими параметрами существенно не абсолютное значение давления, а его изменение¹. Поэтому число Эйлера обычно представляют в виде

$$Eu = \frac{p - p_0}{\rho w_0^2}$$

где p_0 – какое-либо фиксированное значение давления, например давление на входе в канал. Это давление может быть неизвестной ве-

личиной.

Для многих процессов течения и теплоотдачи существен не только размер l_0 , но и некоторые другие характерные размеры.

Например, при движении жидкости в прямой гладкой трубе характерными размерами являются диаметр и длина трубы; если труба изогнута, то дополнительным характерным размером является радиус кривизны трубы. При течении жидкости в шероховатых трубах представляют интерес размеры, оценивающие высоту неровностей и их концентрацию на поверхности теплообмена. Все необходимые размеры l_0, l_1, l_2 и т. д. должны быть заданы в условиях задачи. В этом случае под знаком функции в уравнениях (5.14) – (5.17) должны быть величины

$$L_1 = \frac{l_1}{l_0}, L_2 = \frac{l_2}{l_0} \text{ и т. д.}$$

Очевидно, внесение в этом случае под знак функции величины L_1, L_2, \dots, L_n является необходимым. Во всех случаях список безразмерных величин должен соответствовать математической формулировке задачи. Произвольное же исключение или введение под знак функции новых переменных, безусловно, недопустимо. Любая подобного рода операция должна быть обоснована.

Очевидно, при неизменной математической формулировке задачи новые безразмерные величины могут быть получены соответствующим комбинированием старых безразмерных величин, однако при этом число переменных под знаком функции не должно измениться.

Число Pe , полученное при приведении к безразмерному виду уравнения энергии, можно представить как произведение двух безразмерных переменных:

$$Pe = Re Pr = \frac{w_0 l_0 \nu}{\nu a}. \quad (5.19)$$

Безразмерная величина $Pr = \nu/a$ представляет собой новую переменную, называемую числом Прандтля. Число Прандтля целиком составлено из физических параметров, и поэтому и само является физическим параметром. Его можно записать и в виде

$$Pr = \frac{\nu}{a} = \frac{\mu c_p}{\lambda} \quad (5.20)$$

Число Pr газов практически не зависит ни от температуры, ни от давления и для данного газа является величиной постоянной, определяемой атомностью газа.

В соответствии с кинетической теорией газов число Pr имеет следующие значения:

| | |
|----------------------------------|------|
| Для одноатомных газов | 0,67 |
| Для двухатомных газов | 0,72 |
| Для трехатомных газов. | 0,8 |
| Для четырехатомных и более газов | 1 |

Действительные значения числа Pr реальных газов несколько отличаются от указанных значений.

Числа Pr тяжелых и щелочных жидких металлов, применяемых в качестве теплоносителей, изменяются в пределах $Pr \approx 0,005 \div 0,05$.

Малые значения числа Pr жидких металлов объясняются высокой теплопроводностью последних.

В зависимости от значения числа Pr жидкости делят на три группы: жидкости с числами $Pr \ll 1$ (жидкие металлы), теплоносители с $Pr \approx 1$ (неметаллические капельные жидкости при больших температурах и газы), жидкости с числами $Pr > 1$ (неметаллические капельные жидкости).

Безразмерные переменные можно разделить на два вида:

Определяемые – что числа, в которые входят искомые зависимые переменные; в рассматриваемом случае зависимыми являются α , ϑ , ω_x и ω_y , следовательно, определяемыми являются Nu , Θ , W_x и W_y ;

Определяющие – это числа, целиком составленные из независимых переменных и постоянных величин, входящих в условия однозначности; в рассматриваемом случае определяющими являются X, Y, Re, Pr , (или Pe) и Gr .

Числа подобия, составленные из наперед заданных параметров (постоянных) математического описания процесса, называют также критериями подобия.

5.4. Условия подобия физических процессов

Явления природы, которые описываются одинаковыми по форме записи дифференциальными уравнениями, но различны по своему физическому содержанию, называются *аналогичными*.

Дифференциальные уравнения отражают наиболее общие черты явлений и не учитывают частные, количественные особенности. Такими особенностями являются форма и размеры системы, в которой протекает физический процесс; к частным особенностям относятся также физические свойства рабочих тел, участвующих в процессе, условия протекания процесса на границах системы и др. Частные особенности различных явлений одного и того же класса определяются с помощью условий однозначности.

Проведенный анализ системы безразмерных дифференциальных уравнений и условия однозначности делает более понятными общие условия подобия физических процессов, сформулированные ниже в виде трех правил:

1. *Подобные процессы должны быть качественно одинаковыми, т. е. они должны иметь одинаковую физическую природу и описываться одинаковыми по форме записи дифференциальными уравнениями.*

2. *Условия однозначности подобных процессов должны быть одинаковыми во всем, кроме числовых значений размерных постоянных, содержащихся в этих условиях.*

3. *Одноименные определяющие безразмерные переменные подобных процессов должны иметь одинаковое числовое значение.*

Сформулированные условия являются определением подобия физических процессов.

5.5. Следствия из условий подобия

Пусть имеются два подобных процесса конвективного теплообмена, например, при течении жидкости в каналах произвольного поперечного сечения. Обозначим один процесс буквой A , другой – буквой B .

Масштабами линейных размеров выберем какой-либо размер каналов, например, их высоты h_A и h_B . Тогда

$$X_A = \frac{x_A}{h_A}; Y_A = \frac{y_A}{h_A}; Z_A = \frac{z_A}{h_A} \text{ и } X_B = \frac{x_B}{h_B}; Y_B = \frac{y_B}{h_B}; Z_B = \frac{z_B}{h_B}.$$

Будем рассматривать процессы A и B в точках, характеризующихся равенствами:

$$X_A = X_B; Y_A = Y_B; \text{ и } Z_A = Z_B$$

Точки, удовлетворяющие этим равенствам, называются сходственными.

Для сходственных точек справедливы следующие отношения:

$$x_A = x_B \frac{h_A}{h_B} = x_B c_l; y_A = y_B \frac{h_A}{h_B} = y_B c_l; z_A = z_B \frac{h_A}{h_B} = z_B c_l;$$

$$\text{Здесь } c_l = h_A / h_B$$

Если равенства выполняются для двух подобных процессов, то, очевидно, для сходственных точек должны выполняться и равенства

$$W_{xA} = W_{xB} \text{ или } \omega_{xA} / \omega_{0A} = \omega_{xB} / \omega_{0B},$$

Где ω_{0A} и ω_{0B} – значения скорости, заданные условиями однозначности; это может быть, например, скорость на входе соответственно в каналы A и B . Из последнего равенства следует, что

$$\frac{\omega_{xA}}{\omega_{xB}} = \frac{\omega_{0A}}{\omega_{0B}} = c_\omega = const,$$

т. е. в любых сходственных точках подобных процессов отношение скоростей есть величина постоянная.

Аналогично можно написать:

$$\frac{\alpha_A}{\alpha_B} = \frac{\lambda_A}{\lambda_B} \frac{h_A}{h_B} = c_\alpha = \frac{c\lambda}{c_l} = const, \frac{\vartheta_A}{\vartheta_B} = c_\vartheta = const \text{ и т. д.}$$

Таким образом, если процессы A и B подобны, то любая физическая величина φ в данной точке процесса A пропорциональна соответствующей величине в сходственной точке процесса B , т. е.

$$\varphi_A = c_\varphi \varphi_B \quad (5.21)$$

Коэффициенты пропорциональности c_φ называют константами подобия. Они безразмерны; в общем случае не равны единице, не зависят ни от координат, ни от времени и различны для всех величин, имеющих различный физический смысл. Если все константы подобия

равны единице, то процессы являются тождественными.

Предположим, что подобным процессам A и B подобен также процесс B . Тогда можно записать:

$$\varphi_A = c'_\varphi \varphi_B$$

причем c_φ и c'_φ в общем случае не равны.

Таким образом, подобные процессы можно рассматривать как один и тот же процесс, но взятый в различном масштабе, причем масштабы разноименных величин могут быть неодинаковыми.

Выбор констант подобия не может быть произведен произвольно. Покажем это на примере.

Для двух подобных процессов A и B вынужденной конвекции справедливо условие $Re_A = Re_B$, где $Re_A = \frac{\omega_{0A} l_{0A}}{\nu_A}$ и $Re_B = \frac{\omega_{0B} l_{0B}}{\nu_B}$.

Одноименные величины, входящие в Re_A и Re_B , связаны между собой с помощью констант подобия:

$$\omega_{0A} = c_w \omega_{0B}, l_{0A} = c_l l_{0B} \text{ и } \nu_A = c_\nu \nu_B.$$

Подставив эти равенства в Re_A , получим:

$$Re_A = \frac{c_w c_l \omega_{0B} l_{0B}}{c_\nu \nu_B} = \frac{c_w c_l}{c_\nu} Re_B$$

Или

$$\frac{Re_A}{Re_B} = \frac{c_w c_l}{c_\nu} = 1.$$

Это и есть условие, ограничивающее произвольный выбор констант c_w, c_l и c_ν .

Аналогично

$$\frac{Pr_A}{Pr_B} = \frac{c_\nu}{c_a} = 1, \frac{Nu_A}{Nu_B} = \frac{c_a c_l}{c_\lambda} = 1 \text{ и т. д.}$$

Глава шестая

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЯ И РАСЧЕТА КОНВЕКТИВНОЙ ТЕПЛОТДАЧИ

6.1. Местный коэффициент теплоотдачи

Местный (локальный) коэффициент теплоотдачи определяется по уравнению (4.4)

$$\alpha = \frac{dQ_c}{(t_c - t_{жс})dF} = \frac{q_c}{t_c - t_{жс}}.$$

Значения q_c и t_c берутся для элемента поверхности dF . Выбор же расчетной температуры $t_{жс}$ законом Ньютона – Рихмана не предопределен. В общем случае конвективного теплообмена температура жидкости переменна в рассматриваемом пространстве. Появляется необходимость в договоренности о том, какое значение температуры жидкости выбирается за расчетное, т. е. вводимое в закон Ньютона – Рихмана.

В существующей практике даже для одной и той же задачи за расчетную могут быть приняты различные значения температуры. Например, при течении жидкости в трубах за расчетную принимают среднюю в рассматриваемом сечении температуру жидкости \bar{t} и температуру жидкости на входе в трубу $\bar{t}_{вх}$. В зависимости от выбора расчетной температуры жидкости числовые значения α могут быть различны, различны и законы изменения α вдоль трубы.

В большинстве случаев за расчетную принимается средняя в данном сечении трубы температура жидкости. При рассмотрении обтекания тела неограниченным потоком за расчетную будет приниматься температура жидкости за пределами теплового пограничного слоя.

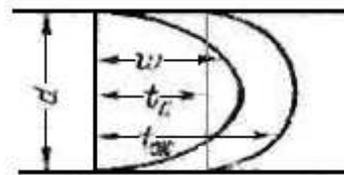


Рис. 6.1. Распределение температуры и скорости жидкости по сечению канала

6.2. Средняя по сечению потока температура жидкости

В общем случае температура и скорость жидкости переменны по

сечению потока. Возможное распределение t и ω_x в определенном сечении трубы показано на рис. 6.1.

Выделим в поперечном сечении канала элементарную площадку df . Массовый расход жидкости через df равен $dG = \rho\omega_x df$, кг/с. Количество теплоты, переносимое конвекцией в единицу времени через df , будет равно:

$$dQ_x = \rho\omega_x i df.$$

Интегрируя по всему сечению, получаем количество теплоты, проносимое в единицу времени через данное сечение с координатой x :

$$Q_x = \int_0^{f_0} \rho\omega_x i df. \quad (\text{а})$$

Выберем среднее значение удельной энтальпии \bar{i} так, чтобы выполнялось равенство

$$Q_x = \bar{i} \int_0^{f_0} \rho\omega_x df = \bar{i} G. \quad (\text{б})$$

Из уравнений (а) и (б) следует, что

$$\bar{i} = \frac{\int_0^{f_0} \rho\omega_x i df}{\int_0^{f_0} \rho\omega_x df} = \frac{1}{G} \int_0^{f_0} \rho\omega_x i df. \quad (6.1)$$

Определенная по уравнению (6.1) средняя энтальпия называется среднемассовой по сечению энтальпией потока. Соответствующая ей температура \bar{t} является среднемассовой по сечению температурой потока.

Если изменением ρ и c_p можно пренебречь, то уравнение (6.1) переходит в следующее:

$$\bar{t} = \frac{1}{V} \int_0^{f_0} \omega_x t df, \quad (6.2)$$

где $V = G / \rho$ – объемный расход жидкости, $\text{м}^3/\text{с}$.

Если по сечению потока также и скорость постоянна, то формула осреднения принимает вид:

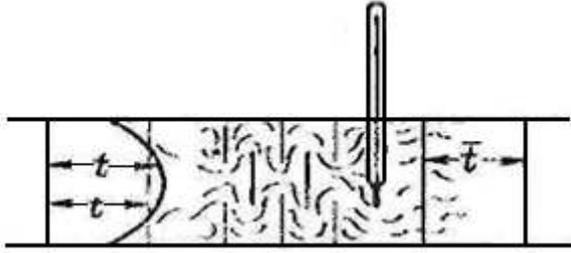


Рис. 6.2. Экспериментальное определение средней массовой температуры жидкости

$$\bar{t} = \frac{1}{f_0} \int_0^{f_0} t df. \quad (6.3)$$

Для экспериментального определения среднемассовой температуры в канале устанавливают перемешивающее устройство. За смесителем температура выравнивается, и среднемассовую температуру можно определить путем измерения в точке (рис. 6.2).

6.3. Осреднение коэффициентов теплоотдачи и температурного напора

Для расчета теплопередачи часто необходимо знать среднее по поверхности значение коэффициента теплоотдачи. Среднее значение α определяют согласно закону Ньютона – Рихмана:

$$\bar{\alpha} = \frac{Q_c}{\Delta \bar{t} F} = \frac{\bar{q}_c}{\Delta \bar{t}}. \quad (6.4)$$

Вычисляя средние значения плотности теплового потока \bar{q}_c и температурного напора $\Delta \bar{t}$ как среднеинтегральные, формулу (6.4) можно записать в виде

$$\bar{\alpha} = \frac{\bar{q}_c}{\Delta \bar{t}} = \frac{\frac{1}{F_0} \int_0^{F_0} q_c dF}{\frac{1}{F_0} \int_0^{F_0} \Delta \bar{t} dF} = \frac{\int_0^{F_0} \alpha \Delta t dF}{\int_0^{F_0} \Delta t dF}; \quad (6.5)$$

здесь F_0 – поверхность осреднения. Если, α изменяется только вдоль одной координатной оси, то

$$\bar{\alpha} = \frac{\int_0^{x_0} \alpha \Delta t dF}{\int_0^{x_0} \Delta t dF}. \quad (6.6)$$

Среднее значение коэффициента теплоотдачи часто определяют как среднеинтегральное:

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{F_0} \int_0^{F_0} \alpha dF \quad \text{или} \quad \bar{\alpha} = \frac{1}{x_0} \int_0^{x_0} \alpha dx. \quad (6.7)$$

Осреднение, по формулам (6.5) и (6.7) может дать различные результаты. В некоторых случаях разница достигает многих десятков процентов.

Если $\Delta t = t_c - t_{жс} = const$, то формула (6.5) переходит в (6.7) и последнее уравнение может рассматриваться как частный случай уравнения (6.5).

В настоящее время в теплопередаче при $\Delta t \neq const$ используются как первый, так и второй методы осреднения. Предпочтительнее использовать первый – согласно уравнению (6.5). При $\Delta t \neq const$ использование среднеинтегрального значения коэффициента теплоотдачи приводит к необходимости введения в расчет специально подобранного среднего температурного напора; только в этом случае можно получить правильное значение теплового потока.

В дальнейшем средние значения α и Nu (как и других величин) будут отмечены горизонтальной чертой над буквенным символом.

Если произведено осреднение коэффициента теплоотдачи по всей рассматриваемой поверхности, то $\bar{\alpha}$ не будет зависеть от координат. Если же осреднение произведено на отдельных участках поверхности, то такие средние значения в общем случае могут изменяться от участка к участку.

Уравнения, полученные в предыдущем параграфе, принципиально позволяют вычислять среднеинтегральный температурный напор

$$\Delta \bar{t} = \frac{1}{F_0} \int_0^{F_0} \Delta t dF \quad \text{или} \quad \Delta \bar{t} = \frac{1}{x_0} \int_0^{x_0} \Delta t dx. \quad (6.8)$$

необходимый для расчета по уравнению (6.5). Однако в общем случае вычисление среднеинтегрального напора практически может представить очень серьезные трудности (особенно при экспериментальном определении средних коэффициентов теплоотдачи).

Поэтому часто средние коэффициенты теплоотдачи определяют по уравнению (6.4), по в расчет вводят среднеарифметический

$$\Delta \bar{t}_a = \frac{\Delta t_1 + \Delta t_2}{2} \quad (6.9)$$

или среднелогарифмический

$$\Delta \bar{t}_l = \frac{\Delta t_1 - \Delta t_2}{\ln \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}} \quad (6.10)$$

температурные напоры (здесь Δt_1 и Δt_2 соответственно местный температурный напор в начале и в конце участка осреднения). Средние температурные напоры $\Delta \bar{t}_a$ и $\Delta \bar{t}_l$ являются частными случаями среднеинтегрального температурного напора, в общем случае использование $\Delta \bar{t}_a$ и $\Delta \bar{t}_l$ является условностью.

6.4. Получение эмпирических формул

Прежде чем обрабатывать опытные данные в числах подобия, нужно установить, от каких чисел зависит определяемое значение. Для этого можно воспользоваться методом, описанным ранее. Составляется система дифференциальных уравнений, описывающих экспериментально изучаемый процесс, и формулируются условия однозначности. Затем математическое описание процесса приводится к безразмерному виду. Предположим, было получено, что $Nu = f(Re, Pr)$.

По данным измерений подсчитываются значения Re и Pr и соответствующие им значения Nu . Зависимость между числами подобия обычно представляется в виде степенных функций, например: $Nu = c Re^n, Pr^m$, где c , n , m являются постоянными безразмерными числами.

Такого рода зависимости применимы лишь в тех пределах изме-

нения аргумента, в которых подтверждены опытом.

Предположим, что число Nu зависит только от Re (или что опыты проводились с теплоносителем, число Прандтля которого является постоянной величиной). В этом случае $Nu = c Re^n$.

Логарифмируя последнее уравнение, получаем:
 $\lg Nu = \lg c + n \lg Re$.

Обозначая $\lg Nu$ через Y , $\lg Re$ через X и $\lg c$ через A , можно написать:

$$Y = A + nX.$$

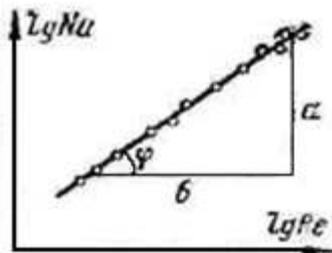


Рис. 6.3. К установлению зависимости вида $Nu = c Re^n$

Последнее выражение является уравнением прямой линии. Показатель степени n представляет собой тангенс угла наклона прямой к оси абсцисс. Следовательно, значение n можно определить с помощью графического представления опытных данных в координатах $\lg Nu = f(\lg Re)$ (рис. 6.3)

Показатель степени n равен:

$$n = \operatorname{tg} \varphi = a / b.$$

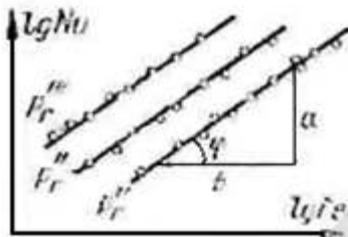


Рис. 6.4. К установлению зависимости вида $Nu = c Re^n Pr^m$

Постоянная c определяется из уравнения $c = Nu / Re^n$, которому удовлетворяет любая точка прямой.

Проверкой применимости степенной зависимости является тот факт, что в логарифмических координатах все точки укладываются на прямую. Если же опытные точки располагаются по кривой, то эту кривую обычно заменяют ломаной. Для отдельных участков такой кривой значения c и n различны.

В случае если искомая величина Nu является функцией двух аргументов, например $Nu = f(Re, Pr)$, на графике получается семейство прямых; второй аргумент берется в качестве параметра (рис. 6.4). Тогда по одной из прямых определяют показатель при числе Рейнольдса, а затем опытные данные представляют на графике в виде зависимости $\lg(Nu / Re^n) = f(\lg Pr)$. Из последнего графика определяют по-

казатель степени m при критерии Прандтля, а затем по уравнению $c = Nu / (Re^n Pr^m)$ определяют значение коэффициента c .

Для обработки опытных данных используются электронные вычислительные машины. Основываясь на математической статистике, постоянные c , n , m и т. д. можно найти расчетным путем. Существуют специальные стандартные программы расчета на ЭЦВМ, облегчающие работу исследователя.

В последнее время все шире используется полуэмпирический метод получения формул. Зависимость между безразмерными переменными представляется в виде функции, получаемой предварительно с точностью до постоянных из аналитического рассмотрения задачи. Постоянные определяются с помощью опытных данных. Такой путь получения формул является предпочтительным по сравнению с эмпирическим.

О п р е д е л я ю щ и й р а з м е р . В числа подобия входит характерный размер l_0 . Теория подобия не определяет однозначно, какой размер должен быть принят за определяющий, т. е. за тот размер, который будет принят как масштаб линейных размеров. Если в условиях однозначности заданы несколько размеров, за определяющий обычно принимают тот, который в большей степени отвечает физическому существу процесса. Остальные размеры входят в уравнение подобия в виде симплексов $L_1 = l_1 / l_0$, $L_2 = l_2 / l_0$ и т. д.

В ряде случаев за определяющий линейный размер принимается комбинация разнородных физических величин, входящих в условия однозначности. Такая комбинация имеет размерность линейной величины и пропорциональна какому-либо линейному размеру.

О п р е д е л я ю щ а я т е м п е р а т у р а . В числа подобия входят физические параметры жидкости. При получении безразмерных переменных физические свойства часто считают постоянными. В действительности, поскольку температура жидкости переменна, изменяются и значения ее физических свойств. Поэтому при обработке опытных данных по теплообмену важным является также вопрос выбора так называемой определяющей температуры, по которой определяются значения физических параметров, входящих в числа подобия.

Экспериментальные и теоретические работы показывают, что нет такой универсальной определяющей температуры, выбором которой автоматически учитывалась бы зависимость теплоотдачи от изменения физических параметров. Поэтому в настоящее время преобла-

дает точка зрения, в соответствии с которой за определяющую следует принимать такую температуру, которая в технических расчетах бывает, задана или легко может быть вычислена.

При расчетах определяющие температуру и линейный размер необходимо выбирать точно так же, как это сделано при получении формулы. Не учет этого обстоятельства может привести к значительным ошибкам.

Глава седьмая

ТЕПЛОТДАЧА ПРИ ВЫНУЖДЕННОМ ПРОДОЛЬНОМ ОМЫВАНИИ ПЛОСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Для простоты будем полагать, что плоская поверхность омывается потоком несжимаемой жидкости, скорость и температура которой за пределами гидродинамического и теплового пограничных слоев постоянны и равны соответственно ω_0 и t_0 .

Поток направлен вдоль пластины, температура поверхности тела во времени не изменяется. Внутренние источники теплоты в жидкости отсутствуют, теплота трения пренебрежимо мала.

7.1. Интегральные уравнения пограничного слоя

$$\frac{d}{dx} \int_0^k \omega_x (t_0 - t) dy = -\frac{q_c}{\rho c_p}. \quad (7.1)$$

Это уравнение называют интегральным уравнением теплового потока для теплового пограничного слоя. Здесь интеграл левой части и q_c являются функциями только x . При приближенных расчетах функциями $\omega_x = \omega_x(y)$ и $t = t(y)$ часто задаются, исходя из накопленного опыта.

Интегральное уравнение импульсов для гидродинамического пограничного слоя запишем в следующем виде:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \omega_x (\omega_0 - \omega_x) dy = \frac{s_c}{\rho}. \quad (7.2)$$

Здесь s_c – касательное напряжение трения при $y = 0$, т. е. на поверхности стенки.

Интегральное уравнение теплового потока (7.1) впервые получено Г. Н. Кружилиным, а уравнение импульсов (7.2) – Т. Карманом. Эти уравнения пригодны и для турбулентного пограничного слоя, если под ω_x и t подразумевать осредненные во времени значения скорости и температуры.

7.2. Теплоотдача при ламинарном пограничном слое

Толщина гидродинамического пограничного слоя определяется выражением

$$\delta = \sqrt{\frac{280}{13}} \sqrt{\frac{\nu x}{\omega_0}} \approx 4,64 \sqrt{\frac{\nu x}{\omega_0}}. \quad (7.3)$$

Формула (7.3) показывает, что δ меняется пропорционально корню квадратному из расстояния от переднего края пластины до данной точки. Этой формуле можно придать безразмерный вид:

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4,64}{\sqrt{\omega_0 x / \nu}} = \frac{4,64}{\sqrt{Re_x}}. \quad (7.4)$$

Толщина теплового пограничного слоя определяется:

$$k = \frac{4,64x}{\sqrt{Re_x} \sqrt[3]{Pr}}. \quad (7.5)$$

Где $Re_x = \omega_0 x / \nu$.

Для капельных жидкостей, как правило, $Pr \geq 1$ и, следовательно, $k \leq \delta$, т. е. выполняется условие, принятое при интегрировании уравнения теплового потока. Число Прандтля газов изменяется в пределах примерно от 0,6 до 1; в частности, для воздуха $Pr \approx 0,7$ в большом интервале температур. При этом $k > \delta$, однако, разница в толщинах теплового и гидродинамического слоев невелика. Например, при $Pr = 0,6$ имеем $k = 1,18\delta$. Опыт показывает, что указанным различием k и δ практически можно пренебречь.

Для жидких металлов $k \gg \delta$, для них полученные результаты непригодны.

Это утверждение справедливо, если не только гидродинамический, но и тепловой слой развивается с самого начала пластины ($x=0$), т. е. в начальной части пластины нет необогреваемого участка

Определим коэффициент теплоотдачи.

$$\alpha = \frac{\lambda}{\vartheta_0} \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{3 \lambda}{2 k}. \quad (7.6)$$

Следовательно, коэффициент теплоотдачи обратно пропорционален толщине пограничного слоя.

Уравнение (7.6) можно привести к безразмерному виду. Для этого умножим левую и правую части на x/λ и подставим значение k согласно (7.5). Получим:

$$Nu_x = 0,33 \sqrt{\text{Re}} \sqrt[3]{\text{Pr}}; \quad (7.7)$$

$$\text{Здесь } Nu_x = \frac{\alpha x}{\lambda} = \frac{\alpha l}{\lambda} \frac{x}{l} = Nu_l X; \quad \text{Re}_x = \frac{\omega_0 x}{\nu} = \frac{\omega_0 l}{\nu} \frac{x}{l} = \text{Re}_l X; \quad \text{Pr} = \nu / a;$$

l – длина пластины вдоль потока.

Уравнение (7.7) можно записать следующим образом:

$$Nu_l = 0,33 X^{-0,5} \text{Re}_l^{0,5} \text{Pr}^{1/3}. \quad (7.8)$$

Отсюда следует, что

$$Nu_l = a X^{-0,5} \quad \text{или} \quad a = c x^{-0,5} \quad (7.9)$$

величины $a = 0,33 \text{Re}_l^{0,5} \text{Pr}^{1/3}$ и

$c = a \lambda l^{-0,5}$ содержащие коэффициент пропорциональности 0,33, скорость ω_0 , Длину пластины l и физические параметры λ , ν и a , от x не зависят.

Согласно (7.9) при $x = 0$ коэффициент теплоотдачи бесконечно велик, при увеличении x он принимает конечные и постоянно уменьшающиеся значения (рис. 7.1). Такой характер изменения a объясняется тем, что температурный напор $\vartheta_0 = t_0 - t_c$ не изменяется вдоль пластины, в то время как температурный градиент на стенке непрерывно уменьшается с ростом x – см. уравнения (7.9) и (7.5).

Формула (7.7) получена при условии, что температура поверхности пластины постоянна, физические параметры жидкости не зависят от температуры и в начале пластины нет необогреваемого участка.

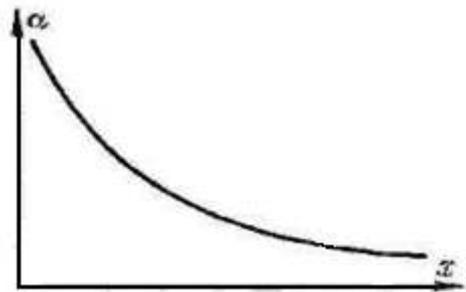


Рис. 7.1. Изменение коэффициента теплоотдачи вдоль пластины при ламинарном пограничном слое

Как показывают опыт и теория, неучет этих фактов может привести к значительным ошибкам.

Зависимость теплоотдачи от изменения физических параметров жидкости. Уравнение (7.5) получено при условии, что все физические параметры постоянны. На самом деле физические параметры зависят от температуры.

Большей частью физические параметры, входящие в уравнение (7.7) и (7.8), в том числе и Pr , выбирают по температуре набегающего потока t_0 . Зависимости физических параметров от температуры неодинаковы у различных жидкостей. В результате коэффициент теплоотдачи капельных жидкостей зависит от рода жидкости, ее температуры, направления теплового потока и температурного напора.

Влияние указанных факторов на теплоотдачу является следствием переменности температуры в тепловом пограничном слое и соответствующего изменения физических параметров, являющихся функциями температуры.

Обычно физические параметры газов выбираются по температуре внешнего потока. Теплоотдача нагреваемого газа существенно зависит от температурного фактора при температурных напорах порядка сотен градусов.

Физические параметры капельных жидкостей более сложно и по-разному зависят от температуры. В настоящее время теория еще не может дать какого-либо общего, единообразного учета влияния переменности физических параметров на теплоотдачу капельных жидкостей.

Опытным путем установлено, что зависимость теплоотдачи капельных жидкостей от направления теплового потока и температурного напора можно приближенно учитывать путем введения в уравнение подобия дополнительного множителя $(Pr_{жс}/Pr_c)^{0,25}$, где индексы «ж» и «с» обозначают, что соответствующие значения числа Pr выбираются по температуре жидкости вдали от тела и по температуре стенки. Эта поправка прежде всего учитывает влияние на теплообмен изменения-вязкости жидкости.

Множитель $(Pr_{жс}/Pr_c)^{0,25}$ был предложен М. А. Михеевым. Позже было показано, что для некоторых конкретных условий значение показателя степени n при $Pr_{жс}/Pr_c$ должно быть переменным, однако поправка $(Pr_{жс}/Pr_c)^n$ не сильно отличается от предложенной М. А. Михеевым.

При нагревании жидкости $Pr_{жс}/Pr_c > 1$, при охлаждении $Pr_{жс}/Pr_c < 1$. Отношение $Pr_{жс}/Pr_c$ при течении определенной капельной жидкости тем больше отличается от единицы, чем больше температурный напор.

Если $\mathcal{G}_0 \rightarrow 0$, то $(Pr_{жс}/Pr_c) \rightarrow 1$. При заданном q_c , как следует из уравнения $q_c = \alpha(t_0 - t)$, температурный напор будет очень мал, если α очень велик. В этом случае можно принять, что $(Pr_{жс}/Pr_c) \approx 1$.

На газы поправка $(Pr_{жс}/Pr_c)^{0,25}$ не распространяется.

По-особому протекает теплообмен при состоянии жидкости, близком к критическому. В этом случае поправка $(Pr_{жс}/Pr_c)^{0,25}$ не может быть использована.

Ряд авторов учитывает влияние переменности физических параметров путем введения в уравнение подобия симплексов $\lambda_{жс}/\lambda_c$, $\mu_{жс}/\mu_c$ и $c_{ржс}/c_{рс}$, где индексы «ж» и «с» обозначают, что соответствующие параметры выбираются по температуре жидкости вдали от тела или по температуре стенки.

Зависимость теплоотдачи от изменения температуры поверхности по ее длине. Изменение t_c по длине пластины может существенно сказаться на теплоотдаче. В результате переменности температуры стенки изменяется распределение температур в тепловом пограничном слое, изменяется его толщина и значение градиента температур в жидкости у поверхности тела. Коэффициент теплоотдачи в определенном месте пластины зависит от развития пограничного слоя на предыдущем участке, в том числе и от изменения температуры стенки на этих участках. Этот эффект усложняется переменностью физических параметров жидкости.

Во многих случаях изменение температуры поверхности или температурного напора можно описать степенным законом

$$\mathcal{G}_c(x) = Ax^m, \quad (7.10)$$

где $\mathcal{G}_c = t_c(x) - t_0$; $t_0 = const$;

$t_c(x)$ – местное значение температуры поверхности;

A и m – постоянные, не зависящие от x .

При $m=0$ $\mathcal{G}_c = A = t_c - t_0 = const$, что соответствует рассмотренной задаче при $t_c = const$.

Теплоотдача неизотермической пластины изучалась рядом исследователей. Анализ этих работ показывает, что при возрастании m толщина теплового пограничного слоя уменьшается. Теплоотдача при этом возрастает.

Влияние продольного градиента температуры поверхности можно учесть соотношением теплоотдачи пластины с переменной ($m \neq 0$) и постоянной ($m = 0$) температурой поверхности; обозначим это отношение через ε :

$$\varepsilon = \frac{Nu_{x(m \neq 0)}}{Nu_{x(m = 0)}} \text{ или } Nu_{x(m \neq 0)} = \varepsilon Nu_{x(m = 0)}.$$

Значения ε определялись аналитически и для частных величин проверялись экспериментально; они приведены в табл. 7.1

Таблица 7.1. Зависимость $\varepsilon = f(m)$

| m | - 0,25 | 0 ($t_c = const$) | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 $q_c = const$ | 0,8 | 1,0 | 2,0 |
|---------------|-----------|------------------------|------|------|-----|------|----------------------|------|------|------|
| ε | 0,65 | 1 | 1,09 | 1,17 | 1,2 | 1,30 | 1,36 | 1,52 | 1,60 | 1,98 |

Влияние необогреваемого начального участка. В этом случае имеет место одновременное развитие гидродинамического и теплового пограничного слоев, что влияет на коэффициент теплоотдачи. Наличие поверхности, не участвующей в теплообмене, соответствует особому случаю изменения температуры поверхности пластины по ее длине.

Обширные экспериментальные исследования влияния необогреваемого начального участка на теплоотдачу были выполнены И. И. Жюгждой и А. А. Жукаускасом. В этих опытах отношение длины начального необогреваемого участка x_0 к полной длине l изменялось от 0,425 до 0,86. При этом числа Pr изменялись от 0,7 до 510 (воздух, вода, трансформаторное масло) и $Re_{жсx1}$ – от 3 до $3 \cdot 10^4$.

Для расчета местных коэффициентов теплоотдачи пластины при ламинарном пограничном слое и наличии необогреваемого участка было получено уравнение

$$Nu_{жсх1} = 0,33\varepsilon Re_{жсх1}^{0,5} Pr_{жс}^{0,33} (x_1/x)^{0,2} (Pr_{жс}/Pr_c)^{0,25}; \quad (7.11)$$

здесь в числа подобия подставляется координата $x_1 = x - x_0$, отсчитываемая от начала обогреваемого участка. Физические параметры выбираются по температуре набегающего потока t_0 , что отмечено индексом «ж» (исключение составляет значение числа Pr_c , выбираемое по температуре стенки в данном сечении).

7.3. Переход ламинарного течения в турбулентное

Переход ламинарного течения в турбулентное происходит на некотором участке (рис. 7.2). Течение на этом участке имеет нестабильный характер и называется переходным.

Законы теплообмена при ламинарном и турбулентном режимах различны, поэтому определение их границ имеет большое значение.

О режиме течения судят по критическим значениям числа Рейнольдса

$$Re_{кр1} = \frac{\omega_0 x_{кр1}}{\nu} \quad \text{и} \quad Re_{кр2} = \frac{\omega_0 x_{кр2}}{\nu},$$

где x – продольная координата, отсчитываемая от передней кромки поверхности.

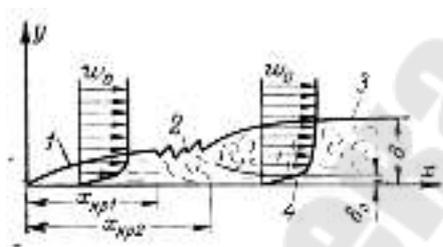


Рис. 7.2. Схема пограничного слоя

1 – ламинарный пограничный слой; 2 – переходная область; 3 – турбулентный пограничный слой; 4 – вязкий (ламинарный) подслой

(интенсивность) турбулентности, частота пульсаций. При ускорении потока ($\partial p/\partial x < 0$, конфузорное течение) переход затягивается, при

Зная $Re_{кр1}$ и $Re_{кр2}$, можно рассчитать значения $x_{кр1}$ и $x_{кр2}$, определяющие соответственно начало разрушения ламинарного слоя и появление устойчивого турбулентного течения. Опыты показывают, что переход к турбулентному течению может иметь место при значениях $Re_{кр} = \omega_0 x_{кр}/\nu$ примерно от 10^4 до $4 \cdot 10^6$. Координаты $x_{кр1}$ и $x_{кр2}$ зависят от ряда факторов.

На переход влияют такие характеристики внешнего потока, как степень

замедлении ($\partial p/\partial x > 0$, диффузорное течение) – наступает при меньших значениях x (или Re_x).

Помимо параметров внешнего потока на переход из ламинарной формы течения в турбулентную влияют параметры, в той или иной степени связанные с омываемым телом. Значения $Re_{кр1}$ и $Re_{кр2}$ зависят от интенсивности теплообмена, от волнистости, шероховатости омываемой поверхности, удобообтекаемости передней кромки пластины, вибрации тела. Некоторые факторы взаимосвязаны.

На рис. 7.3 представлена зависимость критических чисел Рейнольдса от степени турбулентности набегающего потока Tu , определяемой выражением

$$Tu = \frac{\sqrt{\frac{1}{3}(\overline{\omega_x'^2} + \overline{\omega_y'^2} + \overline{\omega_z'^2})}}{\omega_0}, \quad (7.12)$$

где $\overline{\omega_x'^2}$, $\overline{\omega_y'^2}$ и $\overline{\omega_z'^2}$ – средние во времени квадраты трех составляющих пульсаций скорости; ω_0 – скорость внешнего потока.

При сравнительно малых значениях Tu переход не зависит от степени турбулентности внешнего потока, а определяется характеристиками самого ламинарного слоя (его устойчивостью). Увеличение Tu приводит к уменьшению $Re_{кр}$.

На практике сечение перехода можно определить, в частности, по изменению распределения осредненной во времени скорости $\overline{\omega_x}(y)$. При турбулентном течении $\overline{\omega_x}$ резко увеличивается вблизи стенки; на удалении от нее $\overline{\omega_x}(y)$ становится более выровненной. Выравнивание объясняется турбулентным переносом количества движения.

Данные о критических числах Рейнольдса в основном получены в опытах с воздухом. Если $Tu < 0,1\%$, значение нижнего критического числа Рейнольдса $Re_{кр1}$ не зависит от степени турбулентности набегающего потока и для изотермического течения равно $3,1 \cdot 10^6$. По данным Л. М. Зысиной-Моложен для случая продольного безградиентного омывания пластины воздушным потоком зависимость $Re_{кр1}$ от Tu и температурного фактора T_c/T_0 может быть описана уравнением

$$Re_{кр1} = 3,1 \cdot 10^6 \varphi(Tu) \psi(T_c/T_o); \quad (7.13)$$

здесь $\varphi(Tu) = 1$ при $Tu < 0,12\%$; $\varphi = 0,23Tu^{-0,7}$, если $Tu = 0,12 - 1,0\%$; при $Tu > 1,0\%$; $\varphi = 0,23Tu^{-1,76}$. Функция ψ определяется уравнением $\psi = (T_c/T_o)^{-2,3}$, где T_c, T_o – соответственно температуры стенки и набегающего потока.

Такое существенное влияние температурного фактора объясняется увеличением вязкости газа с увеличением температуры и, как следствие, замедлением течения у стенки с ростом T_c/T_o (рис. 7.3). Замедление течения у стенки при неизменной скорости на удалении способствует потере устойчивости потока, появлению дополнительного движения, направленного поперек основного течения вдоль пластины.

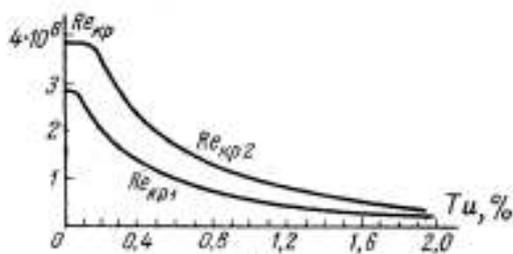


Рис. 7.3. Значения $Re_{кр1}$ и

$Re_{кр2}$ в зависимости от степени турбулентности набегающего на пластину потока

$$[Re_{кр2} \approx 1,4 Re_{кр1} \text{ при } Tu < 0,1\% , Re_{кр2} \approx 1,6 Re_{кр1} \text{ при } Tu > 0,6\%$$

(изотермическое безградиентное течение вдоль пластины).

Течение в переходной области бегающего на пластину потока, не является стабильным. Турбулентность появляется в некоторой части пограничного слоя, затем турбулентно текущая жидкость уносится потоком. Смена ламинарных и турбулентных состояний течения происходит через неравномерные промежутки времени. Такое перемежающееся течение характеризуют коэффициентом перемежаемости ω . Коэффициент перемежаемости указывает, какую долю некоторого промежутка времени в определенной области жидкости существует турбулентное течение. Следовательно, коэффициент $\omega = 1$ означает, что течение все время турбулентное, а коэффициент $\omega = 0$ показывает, что течение все время ламинарное. Таким образом, граничные значения $x_{кр1}$ и $x_{кр2}$ приобретают характер осредненных во времени значений.

Большое количество влияющих факторов и отсутствие сведений о значении Tu в промышленных установках затрудняют точное определение сечений перехода. Поэтому в расчетной практике отрезок $\Delta x = x_{кр2} - x_{кр1}$ часто заменяют точкой, а критическое значение Re

оценивают приближенно по данным опытов. При достаточно удобообтекаемой передней кромке пластины можно принять, что

$$\text{Re}_{kp1} \approx \text{Re}_{kp2} \approx \text{Re}_{kp} \approx 10^5.$$

7.4. Теплоотдача при турбулентном пограничном слое

Перенос теплоты и количества движения поперек турбулентного пограничного слоя может быть описан уравнениями (4.42) и (4.43):

$$q = -(\lambda + \lambda_T) \frac{\partial \bar{t}}{\partial y} = -(\lambda + \rho c_p \varepsilon_q) \frac{\partial \bar{t}}{\partial y}; (7.14)$$

$$s = (\mu + \mu_T) \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} = (\mu + \rho \varepsilon_s) \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y}. (7.15)$$

Запишем эти уравнения в следующем виде:

$$q = -\lambda \left(1 + \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T} \frac{\varepsilon_s}{\nu} \right) \frac{\partial \bar{t}}{\partial y}; (7.16)$$

$$s = \rho \nu \left(1 + \frac{\varepsilon_s}{\nu} \right) \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y}; (7.17)$$

здесь через Pr_T обозначено отношение $\varepsilon_s / \varepsilon_q$.

Величину Pr_T называют турбулентным числом Прандтля. Как показано в § 4.5, кинематические коэффициенты турбулентного переноса теплоты и количества движения ε_q и ε_s зависят от параметров процесса турбулентного течения. Вследствие этого в общем случае турбулентное число Прандтля также может являться параметром процесса. С учетом (7.14) и (7.15) дифференциальные уравнения энергии (4.44) и движения (4.45) для турбулентного пограничного слоя примут вид:

$$\frac{\bar{w}_x}{w_x} \frac{\partial \bar{g}}{\partial x} + \frac{\bar{w}_y}{w_y} \frac{\partial \bar{g}}{\partial y} = a \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(1 + \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_x} \frac{\varepsilon_s}{\nu} \right) \frac{\partial \bar{g}}{\partial y} \right]; (7.18)$$

$$\overline{w_x} \frac{\partial \overline{w_x}}{\partial x} + \overline{w_y} \frac{\partial \overline{w_x}}{\partial y} = \nu \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(1 + \frac{\varepsilon_s}{\nu} \right) \frac{\partial \overline{w_x}}{\partial y} \right]. \quad (7.19)$$

Если $Pr = 1$ ($a = \nu$) и $Pr_T = 1$, то уравнения (7.18) и (7.19) становятся идентичными. В этом случае при идентичных граничных условиях поля температуры $\overline{\vartheta}$ и скорости $\overline{w_x}$ будут подобны.

Чтобы проинтегрировать уравнения (7.18) и (7.19), необходимо иметь сведения о коэффициентах турбулентного переноса теплоты и количества движения. Можно воспользоваться интегродифференциальными уравнениями (7.1) и (7.2), но для этого необходимо знать, в частности, распределения скорости и температуры в турбулентном потоке.

Для создания совершенных расчетных формул необходимо сочетание теоретических и экспериментальных методов исследования, позволяющих проникнуть в механизм турбулентного переноса теплоты и количества движения при различных условиях течения.

Для определения профиля осредненной скорости воспользуемся уравнениями (4.47) и (4.50):

$$s_T = \rho l^2 \left(\frac{d\overline{w_x}}{dy} \right)^2 = \rho (\chi y)^2 \left(\frac{d\overline{w_x}}{dy} \right)^2.$$

Отсюда

$$\sqrt{\frac{s_T}{\rho}} = l \frac{d\overline{w_x}}{dy} = \chi y \frac{d\overline{w_x}}{dy}.$$

причем отдельные части этого уравнения имеют размерность скорости.

Предположим, что касательное напряжение турбулентного течения не изменяется по y , т. е. $\sqrt{s_T/\rho} = \sqrt{s_c/\rho} = const$. Обозначим $\sqrt{s_c/\rho}$ через w_* и назовем динамической скоростью. Тогда

$$w_* = \chi y \frac{d\overline{w_x}}{dy}, \quad d\overline{w_x} = \frac{w_*}{x} \frac{dy}{y}$$

$$\overline{w_x} = \frac{w_*}{x} \ln y + c. \quad (7.20)$$

Уравнение (7.20) выражает так называемое логарифмическое распределение осредненной скорости турбулентного течения в пристенной области. Определим постоянную c согласно условию $\overline{w_x}(0) = 0$. Из уравнения (7.20) следует, что при $y \rightarrow 0$ $\overline{w_x} = -\infty$, т. е. получаем абсурдный результат.

Необходимо учесть силы вязкости, которые должны быть велики непосредственно у стенки. Слой жидкости у стенки, в котором преобладают силы вязкости и который является составной частью турбулентного пограничного слоя, называют вязким подслоем (или ламинарным подслоем). Учитывая только силы вязкости, уравнение движения можно записать в виде $d^2 \overline{w_x} / dy^2 = 0$, откуда следует, что $d\overline{w_x} / dy = \text{const} = c_1$ и $\overline{w_x} = c_1 y + c_2$, т. е. в вязком подслое имеет место линейное изменение скорости. Таким образом, в данном случае $s = s_c = \mu d\overline{w_x} / dy = \text{const}$. Отсюда:

$$s_c = \mu \frac{w_2}{\delta_n} = \rho w_*^2; \quad (7.21)$$

здесь δ_n - толщина вязкого подслоя;

$w_2 = \overline{w_x}(\delta_n)$ - скорость на внешней границе вязкого подслоя.

Из (7.21) следует, что

$$\delta_n = \nu w_2 / w_*^2.$$

Определим постоянную интегрирования c в уравнении (7.20) из условия, что при $y = \delta_n = \nu w_2 / w_*^2$ $w_x = \overline{w_x}(\delta_n) = w_2$. Получим:

$$c = \frac{w_2}{w_*} - \frac{1}{x} \ln \delta_n = \frac{w_2}{w_*} - \frac{1}{x} \ln \frac{\nu w_2}{w_*^2}.$$

Подставляя значение c в (7.20), после некоторых преобразований (учитываем, что разность логарифмов равна логарифму частного):

$$\overline{W}^+ = \frac{\overline{w_x}}{w_*} = \frac{1}{x} \ln y_* + \eta. \quad (7.22)$$

Формулу (7.22) называют *универсальным логарифмическим* распределением осредненной скорости в пристенной области турбулентного потока. Здесь

$$y^* = \frac{w_* y}{\nu} \text{ и } \eta = \frac{w_*}{w_*} - \frac{1}{x} \ln \frac{w_*}{w_*}.$$

Формула (7.22) неоднократно сопоставлялась с опытными данными при различных значениях y^* , (исключая очень малые значения y^* внутри вязкого подслоя). Результаты сопоставления можно отразить, в частности, графиком рис. 7.4.

Кривая 1 соответствует линейному изменению скорости в вязком подслое:

$$w_x = w_* y^* = \frac{w_*^2}{\nu} y = \frac{s_c}{\mu} y. \quad (7.23)$$

Кривая 2 отражает логарифмическое распределение осреднённой скорости в пристенной турбулентной части пограничного слоя. В этой области

$$\frac{\bar{w}_x}{w_*} = 5.6 \lg y^* + 4.9. \quad (7.24)$$

Пересечению кривых 1 и 2 соответствует значение $y^* = w_* y / \nu$, примерно равное 12. Отсюда можно оценить расчетную толщину вязкого подслоя

$$\delta_n \approx 12 \frac{\nu}{w_*} = 12 \nu \sqrt{\frac{\rho}{s_c}}. \quad (7.25)$$

При больших значениях y^* распределение скоростей отклоняется от логарифмического.

Опыты показывают сложность движения в турбулентном слое – рис. 7.4. Вязкий подслой не имеет строго ламинарного течения вдоль стенки. Пульсации, особенно крупномасштабные (низкочастотные), проникают в вязкий

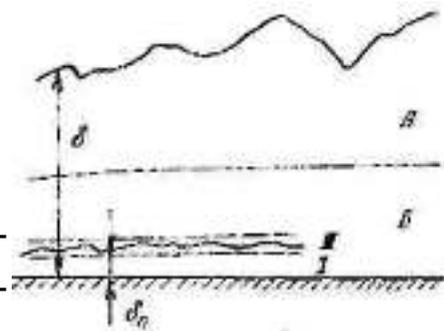


Рис. 7.4. Схема строения турбулентного пограничного слоя
A – внешняя область; *B* – пристенная область; *I* – вязкий подслой; *II* – промежуточный слой

подслоем, где их течение регламентируется вязкими силами. Движение в вязком подслое, вообще говоря, является нестационарным, граница подслоя четко не определена.

Внешняя граница вязкого подслоя является мощным генератором пульсационного движения. Наиболее высокая интенсивность турбулентности наблюдается в пристенной турбулентной области. Если, например, степень турбулентности во внешнем потоке может составлять доли процента, то в пристенной области она может достигать нескольких десятков процентов. Пристенная область составляет примерно 20% толщины пограничного слоя (толщина вязкого подслоя на один-два порядка меньше). Течение во внешней области пограничного слоя, составляющей примерно 80% его толщины, зависит, в частности, от течения во внешнем потоке.

Внешняя граница турбулентного пограничного слоя непрерывно пульсирует. Это связано с периодическим проникновением масс жидкости внешнего потока, где степень турбулентности может быть невысока, во внешнюю область пограничного слоя. Такое взаимодействие пограничного слоя с внешним потоком приводит к образованию области перемежаемого течения.

Аналогично вязкому подслою непосредственно у стенки можно выделить тепловой подслой. Он характеризуется преобладанием переноса теплоты теплопроводностью над турбулентным переносом.

Совпадение толщин вязкого подслоя δ_n и теплового k_n имеет место при $Pr = 1$. При $Pr > 1$ имеем, что $k_n < \delta_n$. Последнее неравенство равносильно утверждению, что в части вязкого подслоя от $y = k_n$ до $y = \delta_n$ теплота переносится не только теплопроводностью, но и пульсациями. Пульсаций, проникающие в вязкий подслой, оказываются существенными для теплового переноса, но не дают значительного вклада в перенос количества движения, по сравнению с молекулярным вязкостным переносом. Такой характер течения в особенности должен проявляться для очень вязких жидкостей ($Pr \gg 1$).

В предельном случае $Pr \ll 1$ должна иметь место обратная картина.

Для малотеплопроводных очень вязких сред, какими являются жидкости с большими числами $Pr = \mu c_p / \lambda$, тепловой подслой является основным термическим сопротивлением.

Ввиду интенсивного турбулентного переноса толщины теплового и динамического пограничных слоев k и δ практически совпадают.

При турбулентном течении толщина слоя δ больше, чем при ламинарном. Это объясняется влиянием турбулентной вязкости.

Вводя поправку $(Pr_{жс}/Pr_c)^{0,25}$, получаем широко распространенную в расчетной практике формулу

$$Nu_{жс,x} = 0,0296 Re_{жс,x}^{0,8} Pr_{жс}^{0,43} (Pr_{жс}/Pr_c)^{0,25}. \quad (7.26)$$

За определяющую принята температура жидкости вдали от тела t_0

и (за исключением Pr_c , выбираемого по t_c). Определяющим размером является координата x , отсчитываемая от начала участка теплообмена.

Согласно формуле (7.26) $\alpha = cx^{-0,2}$. Среднеинтегральное значение α

при этом равно $\alpha = 1,25\alpha_{x=l}$.

Если вся пластина занята турбулентным слоем (в случае высокой степени турбулентности набегающего потока, неудобообтекаемости передней кромки и т. п.), то изменение коэффициента теплоотдачи вдоль пластины имеет вид, изображенный на рис. 7.5 (кривая 1). При наличии на передней части пластины ламинарного пограничного слоя коэффициент теплоотдачи изменяется по более сложному закону (рис. 7.5, кривая 2). В этом случае среднюю теплоотдачу необходимо рассчитывать отдельно для участков с различными режимами течения.

Область переходного течения $\Delta x = x_{kp1} - x_{kp2}$ не всегда может быть определена достаточно точно. Поэтому в расчетах часто полагают, что переход из ламинарной формы течения в турбулентную происходит при определенном значении x , т. е. заменяют отрезок Δx точкой.

При развитом вынужденном турбулентном течении теплоотдача, как правило, не зависит от числа Грасгофа (исключением может являться околоскритическая область).

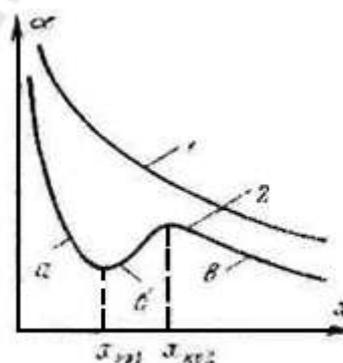


Рис. 7.5. Изменение коэффициента теплоотдачи вдоль пластины 1 – полностью турбулентное течение; 2 – смешанное течение; а – ламинарное; б – переходное; в – турбулентное

Глава восьмая

ТЕПЛООТДАЧА ПРИ ВЫНУЖДЕННОМ ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ В ТРУБАХ

8.1. Особенности движения и теплообмена в трубах

Процесс теплоотдачи при течении жидкости в трубах является более сложным по сравнению с процессом теплоотдачи при омывании поверхности неограниченным потоком. Жидкость, текущая вдали от пластины, не испытывает влияния процессов, происходящих у стенки. Поперечное сечение трубы имеет конечные размеры. В результате, начиная с некоторого расстояния от входа, жидкость по всему поперечному сечению трубы испытывает тормозящее действие сил вязкости, происходит изменение температуры жидкости, как по сечению, так и по длине канала. Все это сказывается на теплоотдаче.

В дальнейшем основное внимание уделим рассмотрению течения и теплообмена в гладких прямых трубах с неизменным по длине круглым поперечным сечением. Как и раньше, не будем учитывать диссипацию механической энергии. В жидкости отсутствуют внутренние источники теплоты.

Течение жидкости может быть ламинарным и турбулентным. О режиме течения в трубах судят по значению числа Рейнольдса

$$Re = \frac{\bar{w}d}{\nu}$$

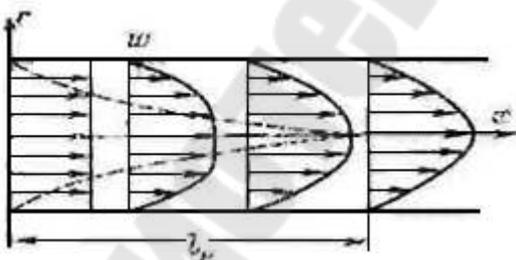


Рис. 8.1. Стабилизация распределения скорости при движении жидкости в трубе

течения.

где \bar{w} – средняя скорость жидкости;
 d – внутренний диаметр трубы.

Если $Re < Re_{kp} \approx 2000$, то течение является ламинарным. Значение $Re_{kp1} = 2000$ является нижним критическим значением числа Рейнольдса.

При $Re > 2000$ поток после единичного возмущения уже не возвращается к ламинарному режиму течения.

Развитое турбулентное течение в технических трубах устанавливается при $Re > Re_{кр2} \approx 10^3$.

Течение при $Re = 2 \cdot 10^3 \div 10^4$ называют переходным. Ему соответствует и переходный режим теплоотдачи.

Если жидкость поступает в трубу из большого объема и стенки трубы на входе несколько закруглены, распределение скорости в начальном сечении считают равномерным (рис. 8.1). При движении у стенок образуется гидродинамический пограничный слой, толщина которого постепенно нарастает. В достаточно длинных трубах на некотором расстоянии от входа пограничный слой заполняет все поперечное сечение. При постоянных физических свойствах жидкости после заполнения устанавливается постоянное распределение скорости, характерное для данного режима течения.

Расстояние, отсчитываемое от входа до сечения, соответствующего слиянию пограничного слоя, называется длиной гидродинамического начального участка или участком гидродинамической стабилизации.

Стабилизированное течение ($x \geq l_H$) не зависит от распределения скорости на входе ($x = 0$), но распределение скорости как при $x < l_H$ так и при $x \geq l_H$ может зависеть от процесса теплообмена.

Гидродинамический начальный участок наблюдается как при ламинарном, так и при турбулентном течении. Однако при $Re > Re_{кр1}$ течение в начальном участке может развиваться своеобразно. В передней части трубы может существовать ламинарная форма течения. Образующийся ламинарный пограничный слой при достижении критической толщины переходит в турбулентный. Толщина последнего быстро растет, пока не заполнит все течение трубы. Зона начального участка в месте изменения режима течения характеризуется перемежаемостью движения.

Изменение режима течения может произойти и за пределами началь-

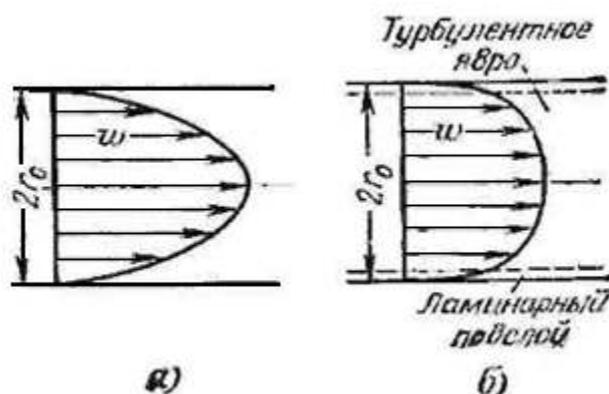


Рис. 8.2. Распределение скорости по сечению трубы стабилизированном ламинарном (а) и турбулентном (б) движении жидкости

ного гидродинамического участка.

При $Re \geq 5 \cdot 10^4$ практически с самого начала развивается турбулентный пограничный слой. Если жидкость втекает из большого объема в трубу, имеющую острую кромку на входе, то в начале трубы образуются вихри, приводящие к быстрому разрушению ламинарного пограничного слоя.

Длина гидродинамического начального участка и его доли, занятые соответственно ламинарным и турбулентным пограничным слоями, зависят от числа Re , степени турбулентности потока на входе и ряда других факторов. Многие факторы взаимосвязаны.

Если поток гидродинамически стабилизирован ($x > l_H$), скорости по сечению потока при ламинарном изотермическом движении распределяются по параболе (рис. 8.2, а):

$$w_x = w_{\max} \left(1 - (r/r_0)^2\right),$$

где r_0 – радиус трубы;

w_{\max} – скорость на оси трубы (при $r = 0$).

Средняя скорость при этом равна половине максимальной:
 $\bar{w}_x = 0,5 w_{\max}$.

При турбулентном движении почти все сечение трубы заполнено турбулентно текущей жидкостью. У стенки же образуется вязкий подслой. При больших числах Re толщина подслоя составляет ничтожную часть диаметра трубы. Несмотря на это, для малотеплопроводных сред вязкий подслой является основным термическим сопротивлением.

При стабилизированном турбулентном течении жидкости в трубах распределение скорости по поперечному сечению имеет вид усеченной параболы (рис. 8.2, б). Максимальная скорость по-прежнему на оси трубы. Наиболее резко скорость изменяется вблизи стенки.

Распределение скоростей в турбулентной части потока (см. § 7.4) можно описать с помощью универсального логарифмического закона (7.21)

$$\frac{\bar{w}_x}{w_*} = \frac{1}{x} \ln y_* + \eta;$$

здесь $w_* = \sqrt{s_c / \rho}$; $y_* = w_* y / \nu$; $y = r_0 - r$. Согласно данным ряда исследований для турбулентного ядра ($y_* \geq 30$) $x = 0,4$ и $\eta = 5,5$; для

промежуточной между турбулентным ядром и вязким подслоем области ($y_* \approx 5 \div 30$) $1/x = 5,0$ и $\eta = 3,05$. В пределах вязкого подслоя ($y_* \approx 0 \div 5$) принимается линейное изменение скорости:

$$\frac{\bar{w}_x}{w_*} = y_* \text{ или } \bar{w}_x = \frac{s_c}{\mu} y$$

Напряжение трения на стенке есть функция числа Рейнольдса. Отсюда появляется зависимость

распределения скорости по сечению от Re . Чем больше число Рейнольдса, тем резче изменяется скорость вблизи стенки и менее резко – в центральной части потока, т. е. эпюра скорости, становится более заполненной. В результате отношение средней по сечению трубы скорости к максимальной ($r = 0$) будет зависеть от числа Рейнольдса.

Экспериментально получено, что эта величина изменяется слабо и равна $0,8 - 0,9$.

Приведенные сведения о распределении скорости в турбулентном потоке, прежде всего, соответствуют изотермическим течениям или течениям с практически не проявляющейся переменностью физических свойств жидкости.

По мере движения жидкости вдоль трубы наблюдается прогрев или охлаждение пристенных слоев, если температура жидкости отлична от температуры трубы. В начале трубы центральное ядро жидкости еще имеет температуру, равную температуре на входе, это ядро в теплообмене не участвует, все изменение температуры сосредоточивается в пристенном слое. Таким образом, у поверхности трубы в ее начальной части образуется тепловой погранич-

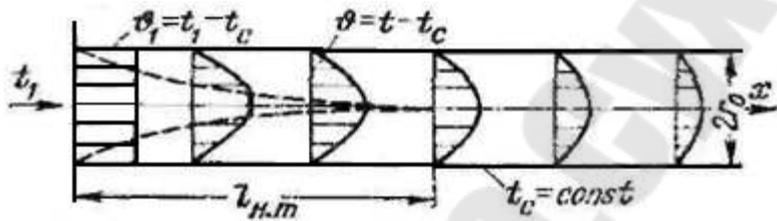


Рис. 8.3. Изменение распределения температуры при движении жидкости в трубе

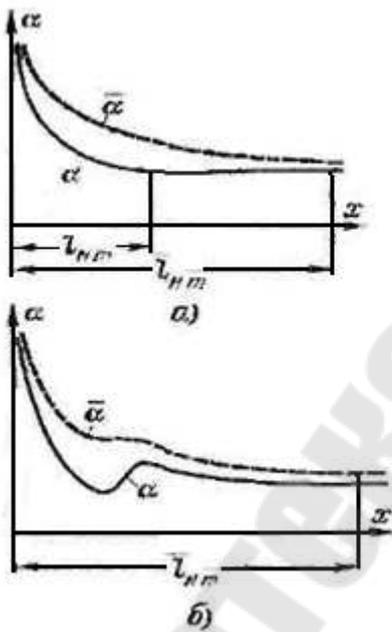


Рис. 8.4. Изменение местного и среднего коэффициента теплоотдачи по длине трубы
а – неизменный режим течения.
б – смешанный режим

верхности трубы в ее начальной части образуется тепловой погранич-

ный слой, толщина которого по мере удаления от входа увеличивается. На некотором расстоянии от входа, равном l_{nm} тепловой пограничный слой заполняет все сечение трубы; в дальнейшем вся жидкость участвует в теплообмене, причем интенсивность теплообмена уже не зависит от распределения скорости и температуры на входе. Участок трубы длиной l_{nm} , называют начальным тепловым участком или участком термической стабилизации.

Если при $x > l_{nm}$ закон задания граничных условий на стенке не изменяется, то такой теплообмен называют стабилизированным. В отличие от эюр скорости эюры температур при $x > l_{nm}$ даже в случае постоянных физических свойств жидкости не остаются неизменными (рис. 8.3). Существенное изменение граничных условий может привести к эффекту, подобному эффекту формирования нового теплового пограничного слоя (например, при резком увеличении тепловой нагрузки, при возмущении потока каким-либо местным препятствием).

В случае постоянных физических свойств жидкости и при простейших граничных условиях (например, $t_c = const$, $q_c = const$) коэффициент теплоотдачи при стабилизированном теплообмене является величиной постоянной (рис. 8.4). Производная $(\partial t / \partial r)_{r=r_0}$ и температурный напор $\mathcal{G} = \bar{t} - t_c$, где \bar{t} – среднемассовая по сечению температура жидкости, при $t_c = const$ убывают вдоль трубы с одинаковой скоростью, если $x > l_{nm}$ (или остаются постоянными при $q_c = const$).

На начальном участке производная $(\partial t / \partial r)_{r=r_0}$ убывает гораздо быстрее температурного напора. В результате, как следует из уравнения теплоотдачи

$$\alpha = -\frac{\lambda}{\mathcal{G}} \left(\frac{\partial t}{\partial r} \right)_{r=r_0}$$

на участке термической стабилизации α резко падает и при стабилизированном теплообмене становится постоянной величиной (рис. 8.4, а).

Если на начальном участке изменяется режим течения, то изменение коэффициента теплоотдачи по длине трубы будет иным, например как на рис. 8.4, б. Коэффициент теплоотдачи уменьшается на участке ламинарного течения и растет при его разрушении. Затем происходит стабилизация теплообмена при турбулентном течении.

Длина начального теплового участка зависит от большого количества факторов» например от коэффициента теплопроводности жидкости, наличия гидродинамической стабилизации, числа Рейнольдса, распределения температур на входе и т. п.

Теория показывает, что при ламинарном течении жидкости с постоянными физическими параметрами и однородной температурой на входе в случае $t_c = const$

$$\frac{l_{нт}}{d} = 0,055Pe$$

и в случае $q_c = const$

$$\frac{l_{нт}}{d} = 0,07Pe$$

Эти уравнения соответствуют предварительно гидродинамически стабилизированному течению.

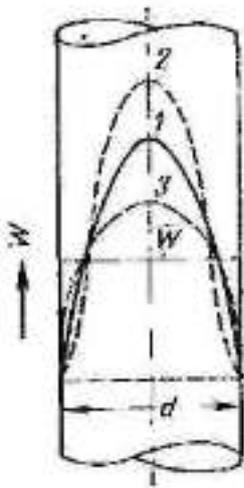


Рис. 8.5. Распределение скорости по сечению трубы при вязкостном течении капельных жидкостей 1 – изотермическое течение; 2 – охлаждение жидкости; 3 – нагревание жидкости

При ламинарном течении число Рейнольдса может достигать величины примерно 2000. При этом для газов, у которых $Pr \approx 1$ (напомним, что $Pe = RePr$) расчетная длина начального теплового участка достигает примерно ста диаметров. У очень вязких жидкостей ($Pr \gg 1$) значение $l_{нт}$ может изменяться от нескольких сотен до нескольких десятков тысяч диаметров. В последнем случае теплообмен практически всегда происходит в пределах начального участка.

Согласно многочисленным опытным данным при турбулентном течении $l_{нт} = (10 \div 15)d$

В связи с переменностью физических параметров при ламинарном течении ($Re < 2000$) могут иметь место два режима неизотермического движения: вязкостный и вязкостно-гравитационный. Законы теплоотдачи для этих двух режимов различны.

В вязкостно-гравитационном течении силы вязкости и подъемные силы соизмеримы.

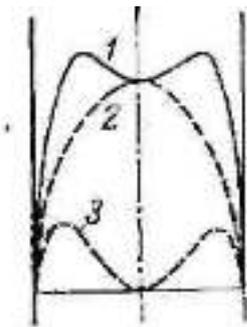
Вязкостный режим имеет место при преобладании сил вязкости над подъемными силами, т. е. он соответствует течению вязких жидкостей

при отсутствии влияния естественной конвекции.

По сравнению с вязкостно-гравитационным вязкостный режим тем более вероятен, чем меньше диаметр трубы, чем больше вязкость жидкости и чем меньше температурный напор.

При вязкостном режиме распределение скорости по сечению трубы отклоняется от параболического, так как вследствие изменения температуры по сечению изменяется и вязкость. При этом распределение скоростей зависит от того, имело ли место нагревание или охлаждение жидкостей (рис. 8.5). При одной и той же средней по сечению температуре в случае нагревания жидкости ее температура у стенки будет больше, чем при охлаждении. Чем больше температура капельной жидкости, тем меньше ее вязкость. В результате при нагревании жидкости скорость вблизи стенки больше, чем при охлаждении, и теплоотдача увеличивается.

При вязкостно-гравитационном режиме, помимо влияния изменения вязкости, распределение скоростей в сильной мере зависит от интенсивности и направления токов естественной конвекции, обусловленных разностью плотностей менее и более нагретых частей жидкости.



В зависимости от взаимного направления вынужденного и свободного движения можно различать три случая:

направления естественного и вынужденного движения совпадают;

направления свободного и вынужденного движения взаимно перпендикулярны;

направления свободного и вынужденного движения взаимно противоположны.

Первый случай имеет место при нагревании жидкости и ее движении в вертикальной трубе снизу вверх или при охлаждении жидкости и ее движении в вертикальной трубе сверху вниз. При этом под влиянием естественной конвекции скорости жидкости у стенки возрастают (рис. 8.6), эпюра скоростей может иметь два максимума.

Второй случай соответствует взаимно перпендикулярному направлению вынужденной и естественной конвекции, он наблюдается в горизонтальных трубах. В

поперечном сечении трубы под влиянием естественной конвекции возникает поперечная циркуляция жидкости. При нагревании жидкости у

Рис. 8.6. Распределение скорости по сечению трубы при совпадении направлений вынужденного и свободного движения

1 – суммарная кривая; 2 – за счет вынужденного движения; 3 – за счет свободного движения

стенки возникают восходящие токи и нисходящие – в середине трубы; при охлаждении – наоборот. В результате жидкость движется как бы по винтовой линии. За счет лучшего перемешивания жидкости теплоотдача в среднем увеличивается. При прочих равных условиях она будет больше, чем при совпадении вынужденного и свободного движения.

Третий случай, соответствующий взаимно противоположному направлению вынужденной и естественной конвекции, имеет место при нагревании жидкости и ее движении в вертикальной трубе сверху вниз и охлаждении жидкости и ее движении снизу вверх. При этом скорость жидкости у стенки под влиянием токов естественной конвекции, направленных в противоположную сторону, уменьшается. В некоторых случаях у стенки может образоваться возвратное, или вихревое, движение жидкости. В этом случае коэффициенты теплоотдачи практически равны коэффициентам теплоотдачи, определенным по уравнению для турбулентного движения.

8.2. Теплоотдача при течении жидкости в гладких трубах круглого поперечного сечения.

А. Теплоотдача при ламинарном режиме

При гидродинамически стабилизированном ламинарном течении жидкости с неизменными физическими свойствами

$$w_x = 2\bar{w}_x[1 - (r/r_0)^2] \text{ или } W_x = 2(1 - R^2),$$

где $W_x = w_x / \bar{w}_x$ или $R = r / r_0$

Согласно последней формуле интегрируя, получаем:

$$\frac{1}{Nu_d} = 2 \int_0^R \frac{dR}{R} \left[\int_0^R 2(1 - R^2) R dR \right]^2 = \frac{11}{48}$$

Отсюда следует, что

$$Nu_d = \frac{48}{11} \approx 4,36$$

Таким образом, при стабилизированной теплопередаче критерий Нуссельта постоянен и равен 4,36.

Это значение получено при условии $q_c = const$. При

$t_c = const$ теория дает, что $Nu_d = 3,66$. Значения Nu получены для параболического распределения скоростей. Такое распределение будет иметь место при неизменных физических параметрах жидкости, в частности при исчезающе малых температурах напорах, поэтому расхождение полученного результата с опытными данными может быть очень велико. Кроме того, рассмотренная нами теория не учитывает теплообмен в начальном участке трубы.

По мере удаления от входа ввиду большего влияния стеснения потока закономерности процесса изменяются.

При аналитических расчетах учет переменности физических параметров в совокупности с учетом других влияющих факторов требует сложной и трудоемкой работы. Поэтому в настоящее время практические расчеты предпочитают вести с помощью сравнительно простых эмпирических формул. Рассмотрим результаты некоторых экспериментальных работ.

Для случая $q_c = const$, проведенной в Энергетическом институте им. Г.М. Кржижановского, предложена для расчета местных коэффициентов теплоотдачи при вязкостном течении в начальном тепловом участке следующая формула:

$$Nu_{жс(x)} = 0,33 Re_{жс(x)x}^{0.5} Pr_{жс(x)}^{0.43} (Pr_{жс(x)} / Pr_{с(x)})^{0.25} (x/d)^{0.1} \quad (8.1)$$

Здесь в качестве определяющего размера принято расстояние рассматриваемого сечения от начала трубы, а в качестве определяющей температуры – средняя в данном сечении температура жидкости (значение $Pr_{с(x)}$ выбирается по местному значению температуры стенки).

Согласно формуле (8.1) $a = cx^{-0.4}$, где c – величина, не зависящая от x . Осредняя коэффициенты теплоотдачи по формуле (6.21), получаем, что $a = 1.4a_{x=l}$.

В экспериментах теплообмен имел место с начала трубы (теплоотдача измерялась, начиная с $\frac{x}{d} = 2$), относительная длина трубы составляла $l/d \leq 216$, где l – длина трубы, а d – внутренний диаметр. Формула (8.1) близка к формуле для продольно-омываемой пластины. Полагают, что комплекс $(x/d)^{0.1}$ учитывает влияние кривизны канала и стеснение потока стенками трубы.

Если длина трубы больше длины начального теплового участка и теплообмен имеет место с начала трубы, средние коэффициенты теплоотдачи при вязкостном течении могут быть определены по уравнению

$$\bar{Nu} = 1,55 \left(Pe \frac{d}{i} \right)^{\frac{1}{3}} (\mu_c \mu_{жс})^{-0,14} \varepsilon_l. (8.2)$$

Здесь средний коэффициент теплоотдачи отнесен к среднему логарифмическому температурному напору. Физические свойства жидкости, входящие в Nu и Pe , а также значение $\mu_{жс}$ выбираются по температуре $t = t_c - \Delta t_l / 2$ (значение μ_c берется по средней температуре стенки). Определяющим размером, вводимым в \bar{Nu} и Pe , является внутренний диаметр трубы.

Величина ε_l представляет собой поправку на гидродинамический начальный участок, формирующийся одновременно с начальным термическим участком; поправка ε_l может быть вычислена по формуле

$$\varepsilon_l = 0,10 \left(\frac{1}{Re d} \frac{l}{d} \right)^{-1,7} / \left(1 + 2,5 \frac{1}{Re d} \frac{l}{d} \right),$$

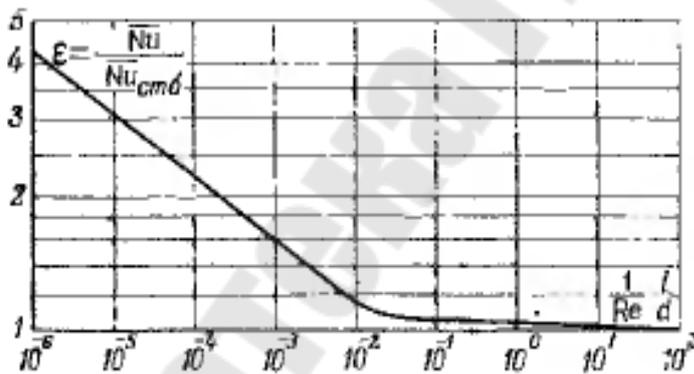


Рис. 8.7. Теплоотдача на гидродинамическом начальном участке круглой трубы при ламинарном течении и $t_c = const$

$(\mu_c / \mu_{жс})^{-0,14}$ справедлив для капельных жидкостей и непригоден для газов.

справедливой при

$$\frac{1}{Re d} \frac{l}{d} < 0,1, \text{ или взята из}$$

графика рис. 8.7. Определяющие величины те же, что и для критериев \bar{Nu} и Pe .

Если $l_0 \geq l_{н.т}$ то следует принимать $\varepsilon_l = 1$.

Уравнение (8.2) получено при $\frac{1}{Re d} \frac{l}{d} < 0,01$ и $0,07 \leq \mu_c / \mu_{жс} \leq 1500$.

Учет влияния вязкости с помощью отношения

Формула (8.2) может быть использована при постоянной или слабо изменяющейся по длине температуре стенки. имеет место вязкостно-гравитационный режим. Здесь $Gr = g\beta\Delta t d^3 / \nu^2$; $\Delta t = |(t_c - t_0)|$; t_0 - температура жидкости при входе на трубу; физические параметры, входящие в $GrPr$ выбираются по температуре $t = 0,5(t_0 + t_c)$.

При вязкостно-гравитационном режиме коэффициенты теплоотдачи больше определяемых по формулам (8.1) и (8.2). В результате влияния естественной конвекции коэффициент теплоотдачи при определенных условиях может увеличиться в 5 раз.

Учет влияния естественной конвекции при различных положениях трубы в сочетании с различными условиями ее нагревания и охлаждения является достаточно трудной задачей. Сравнительно небольшие различия граничных условий часто приводят к существенно разным результатам экспериментов, что затрудняет получение обобщенных зависимостей, справедливых для всех случаев вязкостно-гравитационного режима.

Приближенная оценка среднего коэффициента теплоотдачи при вязкостно-гравитационном режиме может быть произведена по формуле

$$\bar{Nu}_{жсд} = 0,15 Re_{жсд}^{0,32} Pr_{жс}^{0,33} (Gr_{жсд} Pr_{жс})^{0,1} (Pr_{жс} / Pr_c)^{0,25} \bar{\epsilon}_l \quad (8.3)$$

Здесь в виде определяющей принята средняя температура жидкости в трубе. Определяющим размером является внутренний диаметр трубы. Коэффициент $\bar{\epsilon}_l$ учитывает изменение среднего коэффициента теплоотдачи по длине трубы. Если $l/d \geq 50$, то $\bar{\epsilon}_l = 1$. При $l/d < 50$ поправку $\bar{\epsilon}_l$ можно приближенно оценить с помощью табл. 8.1:

Таблица 8.1. Значения $\bar{\epsilon}_l$ при ламинарном режиме

| | | | | | | | | | |
|--------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|----|
| l/d | 1 | 2 | 5 | 10 | 15 | 20 | 30 | 40 | 50 |
| $\bar{\epsilon}_l$ | 1,90 | 1,70 | 1,44 | 1,28 | 1,18 | 1,13 | 1,05 | 1,02 | 1 |

Б. Теплоотдача при турбулентном режиме

Ранее при рассмотрении турбулентного пограничного слоя было получено:

$$q_c = \frac{s_c c_p (t_0 - t_c)}{\omega_0 \left[1 + \frac{12}{\omega_0} \sqrt{\frac{s_c}{p}} (\text{Pr}^{\frac{2}{3}} - 1) \right]}$$

Примем для течения в трубе, что $\omega_0 = \bar{\omega}$ и $t_0 = \bar{t}$, где $\bar{\omega}$ и \bar{t} – соответственно средние по сечению скорость и температура жидкости.

При безотрывном течении, когда гидравлическое сопротивление определяется силами трения, величину s_c можно найти, зная коэффициент гидравлического сопротивления ξ для стабилизированного течения.

Разность давления в двух поперечных сечениях трубы 1 и 2 $\Delta p = p_1 - p_2$ (рис. 8.8) при стабилизированном течении идет на преодоление трения на стенках (в начальном участке еще дополнительно на перестройку потока). Тогда

$$\Delta p f = s_c F,$$

где f – площадь поперечного сечения трубы;

F – поверхность трубы между сечениями 1 и 2.

Согласно закону Дарси

$$\Delta p = \xi \frac{1}{d} \frac{\rho \bar{\omega}^2}{2}$$

Тогда

$$s_c = \Delta p \frac{f}{F} = \xi \frac{1}{d} \frac{\rho \bar{\omega}^2}{2} \frac{f}{F}$$

Для круглой трубы

$$\frac{l}{d} \frac{f}{F} = \frac{1}{4}$$

Отсюда

$$s_c = \frac{\xi}{8} \rho \bar{\omega}^2 \quad (8.4)$$

Подставив последнее соотношение в уравнение (7.32) и разделив левую и правую части этого уравнения на $\rho c_p \bar{\omega} (\bar{t} - t_c)$ получим:

$$St = \frac{a}{\rho c_p \bar{w}} = \frac{\xi/8}{1 + 12\sqrt{\xi/8}(\text{Pr}^{2/3} - 1)} \quad (8.5)$$

Напомним, что число Стантона St можно представить следующим образом:

$$St = \frac{Nu}{\text{Re Pr}}$$

Если $\text{Pr} = 1$, то вместо (8.5) имеем:

$$St = \frac{\xi}{8} \quad \text{или} \quad Nu = \frac{\xi}{8} \text{Re Pr} \quad (8.6)$$

Б. С. Петуховым и В. В. Кирилловым была предложена формула

$$Nu_{\text{жсд}} = \frac{\frac{\xi}{8} \text{Re}_{\text{жсд}} \text{Pr}_{\text{жс}}}{1,07 + 12,7\sqrt{\xi/8}(\text{Pr}^{2/3} - 1)} \varepsilon_t \quad (8.7)$$

где несколько уточнены постоянные, входящие в уравнение. Здесь $\varepsilon_t = (\mu_{\text{жс}} / \mu_c)^n$; $n=0,11$ при нагревании капельной жидкости и $n=0,25$ при ее охлаждении¹.

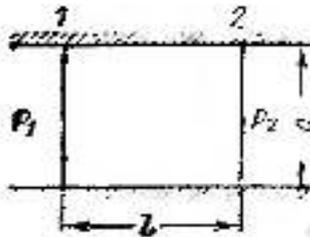


Рис. 8.8. К выводу уравнения 8.4

Формула (8.7) дает значения коэффициентов теплоотдачи при стабилизированном теплообмене. За определяющую приняты либо средняя по сечению (при расчете местных коэффициентов теплоотдачи), либо средняя в трубе (при расчете средних коэффициентов теплоотдачи) температура жидкости. Исключение составляет коэффициент динамической вязкости μ_c , выбираемый по температуре стенки. За определяющий размер взят внутренний диаметр трубы. Формула (8.7) пригодна для расчета теплоотдачи различных жидкостей при $\text{Pr} \geq 0,7$.

На основе уравнения (8.6) можно получить расчетную формулу для $\text{Pr} \geq 1$, если ввести в (8.6) экспериментально определенную функцию $f(\text{Pr}) = 0,91 \text{Pr}^{0,43}$

При расчете теплоотдачи по формуле (8.7) коэффициент гидрав-

лического сопротивления трения ξ рекомендуется определять по уравнению Г. К. Филоненко. $\xi = 1/(1,82 \lg \text{Re}_{\text{жс}d} - 1,64)^2$.

деление коэффициента гидравлического сопротивления используем формулу

$$\xi = 0,184 \text{Re}_d^{-0,2}$$

Тогда, вводя дополнительно поправку $\varepsilon_t = (\text{Pr}_{\text{жс}}/\text{Pr}_c)^{0,25}$ на переменность физических свойств капельных жидкостей, получим формулу, предложенную М. А. Михеевым

$$\bar{Nu}_{\text{жс}d} = 0,021 \text{Re}_{\text{жс}d}^{0,8} \text{Pr}_{\text{жс}}^{0,43} (\text{Pr}_{\text{жс}}/\text{Pr}_c)^{0,25} \quad (8.8)$$

Формула описывает среднюю теплоотдачу в прямых гладких трубах при $(l/d) > 50$. За определяющую здесь принята средняя температура жидкости в трубе, а за определяющий размер – внутренний диаметр. Число выбирается по средней температуре поверхности стенки.

Для расчета местных коэффициентов теплоотдачи при турбулентном течении газа в прямой гладкой трубе А. С. Сукомелом и др. была получена формула

$$Nu_{\text{жс}(x)d} = 0,022 \text{Re}_{\text{жс}(x)}^{0,8} \text{Pr}_{\text{жс}(x)}^{0,43} \varepsilon_l \quad (8.9)$$

За определяющую здесь принята средняя в данном сечении температура газа, а за определяющий размер – внутренний диаметр трубы. Величина ε_l является поправкой на изменение коэффициента теплоотдачи в начальном термическом участке. При $(x/d) \geq 15$ имеем $\varepsilon_l \approx 1$. При $(x/d) < 15$ и турбулентном течении с самого начала трубы согласно поправочный коэффициент ε_l можно определить по формуле

$$\varepsilon_l = 1,38(x/d)^{-0,12} \quad (8.10)$$

Как следует из последнего уравнения, на начальном участке коэффициент теплоотдачи по мере увеличения x уменьшается.

При расчете по формулам (8.7) и (8.8) средней теплоотдачи коротких труб $(l/d) < 50$ полученные значения \bar{Nu} необходимо умно-

жить на поправку $\bar{\varepsilon}_l = \bar{a} / a_\infty$, где a_∞ – коэффициент теплоотдачи при (l/d) [практически $(l/d) > 50$].

Как отмечалось в § 8.1, длины начальных гидродинамического и теплового участков зависят от ряда факторов, например, от числа Рейнольдса, степени турбулентности потока на входе, начального распределения скорости, тепловых граничных условий и т. п. От этих же факторов зависят и поправочные коэффициенты ε_l и $\bar{\varepsilon}_l$. Поэтому используемые в настоящее время в расчетной практике значения поправочных коэффициентов не являются универсальными и отражают специфику опытных исследований, в результате которых они были получены. Чем меньше l/d (или x/d), тем больше может быть различие поправочных коэффициентов и тем больше может быть ошибка расчета.

Используя уравнение (8.10), для оценки $\bar{\varepsilon}_l$ можно получить следующую формулу:

$$\bar{\varepsilon}_l \approx 1 + \frac{2}{l/d} \quad (8.11)$$

здесь l – длина участка осреднения, отсчитываемая от входного сечения трубы.

Коэффициент теплоотдачи может зависеть от переменности температуры стенки по длине трубы. При турбулентном течении неизотермичность поверхности стенки сравнительно слабо сказывается на теплоотдаче.

В случае теплообмена газа при больших температурных напорах коэффициенты теплоотдачи могут отличаться от вычисленных по уравнениям (8.7) – (8.10) [на газы поправки типа $(Pr_{жс} / Pr_c)^n$ и $(\mu_{жс} / \mu_c)^n$ не распространяются]. Изменение теплоотдачи обычно учитывают введением в правую часть уравнений (8.4)–(8.6) функции $f(\theta_c)$, где $\theta_c = \frac{T_c}{T_{жс}}$; T_c – средняя или местная температура стенки, К,

в зависимости от того, рассчитывается средний или местный коэффициент теплоотдачи; $T_{жс}$ – соответственно среднемассовая в трубе или в данном сечении температура газа, К.

В. Теплоотдача при переходном режиме

При числах Рейнольдса примерно от $2 \cdot 10^3$ до 10^4 теплоотдача

зависит от очень большого количества факторов, трудно поддающихся учету.

Переходный режим характеризуется перемежаемостью течения. Наличие наряду с вынужденным свободным движением может существенно изменить протекание процесса. Сложный характер течения в переходной области чисел Рейнольдса затрудняет количественное описание процесса теплообмена. Обобщенные методики расчета теплообмена в переходной области отсутствуют. Приближенная оценка наибольшего и наименьшего значений коэффициента теплоотдачи может быть произведена соответственно по формулам для турбулентного и вязкостного течений.

В настоящее время наиболее хорошо изучена теплоотдача в круглых трубах. Расчет теплоотдачи в трубах некруглого поперечного сечения часто сводят к определению той же величины в некоторой эквивалентной трубе круглого поперечного сечения с диаметром

$$d_{\text{экв}} = \frac{4V}{F} = \frac{4F}{\rho} \quad (8.12)$$

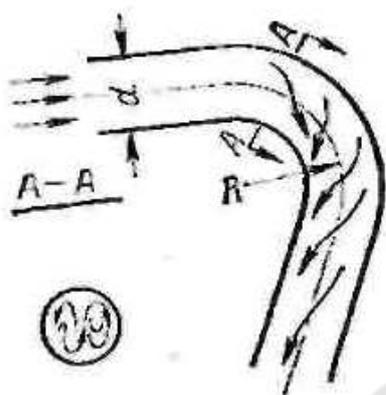


Рис. 8.9. Течение в изогнутом канале

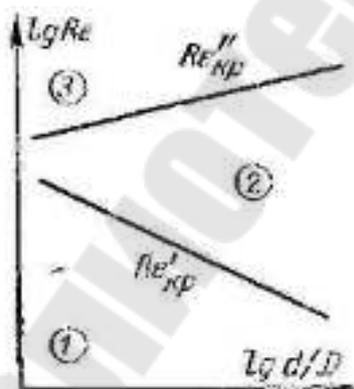


Рис. 8.10. Зависимость $Re'_{кр}$ и $Re''_{кр}$ от d/D для изогнутых труб (змеевиков)

Теплоотдача в шероховатых трубах. При турбулентном течении жидкости в шероховатых трубах происходят существенные гидродинамические преобразования. Эти преобразования связаны с высотой бугорка шероховатости δ и толщиной вязкого подслоя δ_n . Упрощая явление, можно рассматривать два основных случая: бугорки шероховатости глубоко погружены в подслоя ($\delta \ll \delta_n$) и бугорки шероховатости выходят за пределы вязкого подслоя ($\delta \gg \delta_n$).

В первом случае бугорки шероховатости не нарушают течения в подслое, они обтекаются без отрыва. При этом нет никакой разницы между гладкой и шероховатой трубами. Такое омывание бугорков шероховатости тем вероятнее, чем меньше число Re

и относительная шероховатость δ/d (d –

диаметр трубы), так как с уменьшением числа Re толщина подслоя увеличивается. Понятие относительной шероховатости при этом приобретает чисто гидродинамический смысл.

Если $\delta \gg \delta_n$, течение в вязком подслое нарушается, происходит отрывное, вихревое обтекание бугорков шероховатости. Турбулентные пульсации у стенки, особенно у вершин бугорков, увеличиваются. Так как при турбулентном течении жидкости основное термическое сопротивление передаче тепла сосредоточено в подслое, то изменение течения приводит к увеличению теплоотдачи. При ламинарном течении коэффициент теплоотдачи и гидравлическое сопротивление не зависят от относительной шероховатости. В этом случае теплоотдача может увеличиваться за счет того, что шероховатая стенка имеет большую поверхность теплообмена, чем гладкая (эффект оребрения).

При турбулентном движении жидкости шероховатость начинает сказываться на теплоотдаче и гидравлическом сопротивлении при различных значениях чисел Re . Чем меньше δ/d , тем больше предельное число Re_{np} , соответствующее изменению закона теплоотдачи. При этом одновременно с ростом коэффициента теплоотдачи увеличивается и гидравлическое сопротивление Δp .

В экспериментах шероховатость создавалась путем механической обработки (накатки, нарезки). опыты показывают, что теплоотдача в шероховатых трубах по сравнению с гладкими дополнительно зависит от формы неровностей поверхности, значения относительной шероховатости δ/d и расстояния между бугорками.

При определенных условиях теплоотдача шероховатой трубы может увеличиться почти в 3 раза по сравнению с гладкой. Это позволяет использовать шероховатость как средство интенсификации теплообмена.

При нерациональном создании шероховатости коэффициент теплоотдачи может быть и ниже, чем для гладкой трубы. Снижение коэффициента теплоотдачи может иметь место в случае высоких бугорков шероховатости, так как за ними у поверхности стенки может образоваться застойная зона. Этот эффект проявляется по-разному в зависимости от числа Рейнольдса, формы бугорков шероховатости, расстояния между ними и т. п. При одной и той же относительной высоте δ/d можно получить как улучшение, так и ухудшение теплоотдачи. Поэтому необоснованная экстраполяция результатов эксперимента на неисследованную область определяющих параметров в данном случае

особенно опасна.

Целесообразно создавать шероховатость с относительными шагами $(s/\delta)_{opt} = 12 \div 14$ (s – расстояние по потоку между соседними неровностями). При $s/\delta \geq 8$ для расчета среднего коэффициента теплоотдачи может быть использована формула В. И. Гомелаури обобщившего данные своих опытов с водой и трансформаторным маслом, Нуннера – с воздухом, Брауэра и Федынского – с водой:

$$Nu_{ж, d_{экв}} = 0,022 Re_{ж, d_{экв}}^{0,8} Pr_{ж}^{0,47} (Pr_{ж}/Pr_c)^{0,25} \varepsilon_{ш}; \quad (8.13)$$

здесь

$$\varepsilon_{ш} = \exp \left[0,85 \frac{(s/\delta)_{opt}}{s/\delta} \right] \text{ при } \frac{s}{\delta} > \left(\frac{s}{\delta} \right)_{opt};$$

$$\varepsilon_{ш} = \exp \left[0,85 \frac{s/\delta}{(s/\delta)_{opt}} \right] \text{ при } \frac{s}{\delta} < \left(\frac{s}{\delta} \right)_{opt}.$$

Формула получена в результате обработки опытов по теплоотдаче при турбулентном течении теплоносителей в трубах и кольцевых щелях. Можно принять, что оптимальный относительный шаг $(s/\delta)_{opt} = 13$ при любом значении числа Прандтля в интервале от 1 до 80.

Глава девятая

ТЕПЛООТДАЧА ПРИ ВЫНУЖДЕННОМ ПОПЕРЕЧНОМ СМЫВАНИИ ТРУБ И ПУЧКОВ ТРУБ

9.1. Теплоотдача при поперечном омывании одиночной круглой трубы

Омывание трубы поперечным неограниченным потоком жидкости характеризуется рядом особенностей. Плавное, безотрывное обтекание цилиндра в том виде, как это показано на рис. 9.1, имеет место только при $Re = \omega_0 d / \nu \leq 5$ (ω_0 – скорость набегающего потока; d –

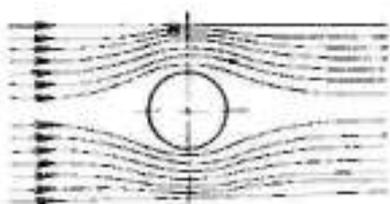


Рис. 9.1. Безотрывное омывание цилиндра



Рис. 9.2. Омывание цилиндра с отрывом ламинарного (а) и турбулентного пограничного слоя (б)

внешний диаметр). При $Re > 5$ поперечно-омываемый круговой цилиндр представляет собой неудобообтекаемое тело. Пограничный слой, образующийся на передней половине трубы, в кормовой части отрывается от поверхности и позади цилиндра образуются два симметричных вихря. При дальнейшем увеличении числа Рейнольдса вихри вытягиваются по течению все дальше от трубы. Затем вихри периодически отрываются от трубы и уносятся потоком жидкости, образуя за цилиндром вихревую дорожку (рис. 9.2).

До $Re \approx 10^3$ частота отрыва вихря растет и затем в области примерно $Re \approx 10^3 \div 2 \cdot 10^5$ становится практически постоянной величиной, характеризуемой числом Струхаля $Re \approx 10^3 \div 2 \cdot 10^5$ (здесь f – частота).

Отрыв пограничного слоя является следствием возрастания давления вдоль потока и подтормаживания жидкости твердой стенкой. При обтекании передней половины цилиндра сечение потока уменьшается, а скорость жидкости увеличивается, в результате чего статическое давление у поверхности стенки снижается. Наоборот, в кормо-

вой части статическое давление увеличивается, так как здесь скорость уменьшается.

За счет действия сил вязкости скорость и, следовательно, кинетическая энергия жидкости непосредственно у поверхности цилиндра малы. Возрастание давления вдоль потока приводит к торможению жидкости и последующему возникновению возвратного движения. Возвратное течение оттесняет пограничный слой от поверхности тела; присходит отрыв потока и образование вихрей (рис. 9.3). Отрыв пограничного слоя и образование вихрей являются основной особенностью поперечного омывания трубы.

При сравнительно небольших числах Рейнольдса и малой степени турбулентности набегающего потока наблюдается отрыв ламинарного пограничного

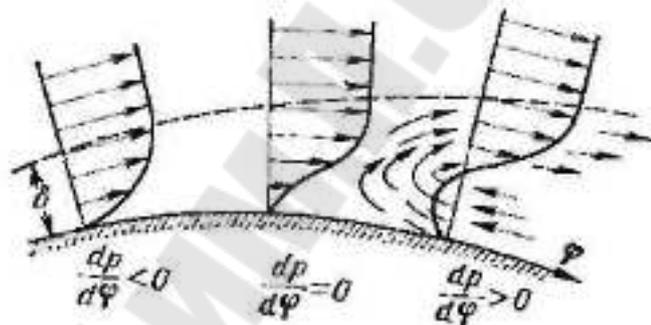


Рис. 9.3. Распределение скорости у поверхности цилиндра и образование возвратного течения

слоя. Он происходит при угле φ , равном примерно 82° (угол φ отсчитывается от лобовой образующей трубы), и имеет место вскоре после минимума давления.

и имеет место вскоре после минимума давления.

Если числа Рейнольдса значительны, подтормаживание течения за счет роста давления приводит не к отрыву, а к переходу движения в слое в турбулентную форму. Турбулентный пограничный слой обладает большей кинетической энергией, так как последняя дополнительно переносится в слой из внешнего потока турбулентными пульсациями. В результате место отрыва резко смещается, но потоку. Турбулентный слой отрывается при $\varphi \approx 140^\circ$. Смещение места отрыва приводит к уменьшению вихревой зоны за цилиндром (рис. 9.2), обтека-

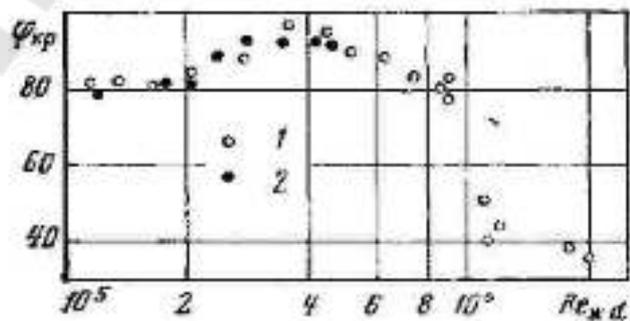


Рис. 9.4. Зависимость угла $\varphi_{кр}$ соответствующего переходу ламинарного пограничного слоя в турбулентный, от числа Re
 \circ – $d=50$ мм; \bullet – $d=30.7$ мм, вода $q_c = const$

турбулентный слой отрывается при $\varphi \approx 140^\circ$. Смещение места отрыва приводит к уменьшению вихревой зоны за цилиндром (рис. 9.2), обтека-

ние цилиндра улучшается.

Турбулентное течение в части пограничного слоя наступает при достаточно больших значениях числа Re . Разными авторами было получено, что турбулентный пограничный слой появляется при $Re \approx 10^5 \div 4 \cdot 10^5$.

На величину $Re_{кр}$ влияет степень турбулентности набегающего на цилиндр потока жидкости и другие факторы (§ 7.3). Чем больше степень турбулентности, тем при меньших значениях числа Re появится турбулентный, пограничный слой. Степень турбулентности потока может зависеть от конструкции опытной установки и изменяться с изменением скорости потока. Можно принять, что приближенно $Re_{кр} = 2 \cdot 10^5$.

По данным А. А. Жукаускаса и П. М. Дауэтаса при $Re_{кр} > 2 \cdot 10^5$ угол $\varphi_{кр}$, соответствующий переходу ламинарного течения в пограничном слое в турбулентное, зависит от числа Рейнольдса (рис. 9.4).

Своеобразный характер омывания трубы отражается и на ее теплоотдаче.

На рис. 9.5 показано изменение коэффициента теплоотдачи по окружности цилиндра. Кривая 1 соответствует теплоотдаче при отрыве ламинарного пограничного слоя, кривая 2 – теплоотдаче при отрыве турбулентного.

Падение коэффициента теплоотдачи на лобовой части трубы объясняется ростом толщины ламинарного пограничного слоя. На кривой 1 минимум теплоотдачи примерно соответствует месту отрыва слоя; кормовая часть трубы оmyвается жидкостью, имеющей сложный вихревой характер движения. При малых Re теплоотдача кормовой половины цилиндра невелика; с возрастанием Re она увеличивается и может сравняться с теплоотдачей лобовой части трубы.

На кривой 2 имеется два минимума. Первый соответствует переходу ламинарного течения в слое в турбулентное. Коэффициент теплоотдачи при этом резко возрастает: при больших значениях числа Рейнольдса он может увеличиться в 2-3 раза. Второй минимум соответствует месту отрыва турбулентного пограничного слоя. Снижение теплоотдачи перед отрывом можно объяснить подтормаживавшем пограничного слоя. За местом отрыва труба оmyвается вихрями, имеющими сложный характер движения. Здесь теплоотдача несколько возрастает.

Теплоотдача ламинарного пограничного слоя при $q_c = const$ в среднем на 15-20% выше, чем при $t_c = const$.

Из изложенного следует, что теплоотдача цилиндра связана с характером омывания. Ввиду сложности картины течения сложен и характер изменения теплоотдачи, что обуславливает трудность теоретического решения для всех областей омывания.

Подробные экспериментальные исследования средней по окружности трубы теплоотдачи были проведены А. А. Жукаускасом. Им были также использованы опытные данные других авторов. В результате обобщения опытных данных было получено, что средний по окружности коэффициент теплоотдачи описывается уравнениями:

при $5 < Re < 10^3$

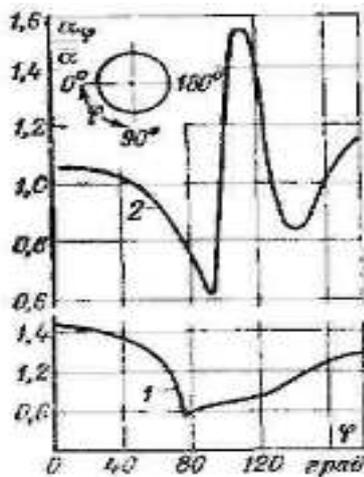


Рис. 9.5. Изменение местного коэффициента теплоотдачи α_φ по окружности цилиндра, омываемого поперечным потоком газа 1 – $Re = 70800$; 2 – $Re = 219800$; α – средний по окружности коэффициент теплоотдачи; $q_c = const$

$$Nu_{ж,d} = 0,5 Re_{ж,d}^{0,5} Pr_{ж}^{0,38} (Pr_{ж}/Pr_c)^{0,25}; \quad (9.1)$$

при $5 < Re < 10^3$

$$Nu_{ж,d} = 0,25 Re_{ж,d}^{0,6} Pr_{ж}^{0,38} (Pr_{ж}/Pr_c)^{0,25}; \quad (9.2)$$

при $5 < Re < 10^3$

$$Nu_{ж,d} = 0,023 Re_{ж,d}^{0,8} Pr_{ж}^{0,37} (Pr_{ж}/Pr_c)^{0,25}; \quad (9.3)$$

Здесь за определяющий линейный размер принят внешний диаметр трубы, скорость отнесена к самому узкому поперечному сечению канала, стесненному цилиндром. Определяющей температурой является средняя температура жидкости; исключение составляет Pr_c , выбираемый по средней температуре стенки трубы.

Согласно формулам (9.1) и (9.2) при $Re = 10^3$ происходит изменение закона теплообмена. В опытной установке А. А. Жукаускаса степень турбулентности потока была невелика. Если набегающий на цилиндр поток искусственно турбулирован, то коэффициент теплоотдачи будет больше, чем это следует из формулы (9.2); при этом изменение закона теплообмена наступает при числах Рейнольдса, меньших 10^3 .

Искусственную турбулизацию потока можно осуществить с по-

мощью различных неудобообтекаемых решеток; особенно значительно возмущен поток на выходе из вентилятора или насоса. Если, например, цилиндр поместить непосредственно за вентилятором, то средняя теплоотдача может увеличиться в 2 раза.

В некоторых случаях мелкоячеистые решетка (сетки) используются как детурбулизаторы; образуемые ими мелкие вихри быстро затухают.

Угол атаки $\psi = 0$ соответствует продольному омыванию трубки. При прочих равных условиях поперечное омывание дает более высокую теплоотдачу. Заметим, что характеры продольного и поперечного омывания существенно различны.

Гидродинамическая теория теплообмена устанавливает связь между теплоотдачей и гидравлическим сопротивлением трения. При поперечном смывании цилиндра его полное сопротивление складывается из сопротивления трения и сопротивления формы. Сопротивление формы обуславливается отрывом потока и последующим образованием вихрей. При этом сопротивление трения представляет собой небольшую долю полного сопротивления. Обычно измеряют полное сопротивление цилиндра. Поэтому в случае вихревого омывания трубы гидродинамическая теория теплообмена не используется.

9.2. Теплоотдача при поперечном омывании пучков труб

Теплообменные устройства сравнительно редко выполняются из одной поперечно-омываемой трубы, так как поверхность теплообмена при этом невелика. Обычно трубы собирают в пучок. В технике чаще встречаются два основных типа трубных пучков: шахматный и коридорный (рис. 9.7). Характеристикой пучка являются поперечный шаг s_1 (расстояние между осями труб в направлении, поперечном потоку жидкости) и продольный шаг s_2 (расстояние между осями соседних двух рядов труб, расположенных один за другим в направлении течения жидкости). Помимо s_1 и s_2 пучки характеризуются внешним диаметром труб и количеством рядов труб походу жидкости (на рис. 9.7 в каждом пучке по пять рядов). Для определенного пучка шаги s_1 и s_2 и диаметр труб d обычно являются постоянными, не изменяющимися как поперек, так и вдоль течения жидкости. Течение жидкости в пучке имеет достаточно сложный характер. Рядом стоящие трубы пучка оказывают воздействие на омывание соседних, в результате тепло-

обмен труб пучка отличается от теплоотдачи одиночной трубы. Обычно пучок труб устанавливают в каком-либо канале. Поэтому течение в пучке может быть связано с течением в канале.

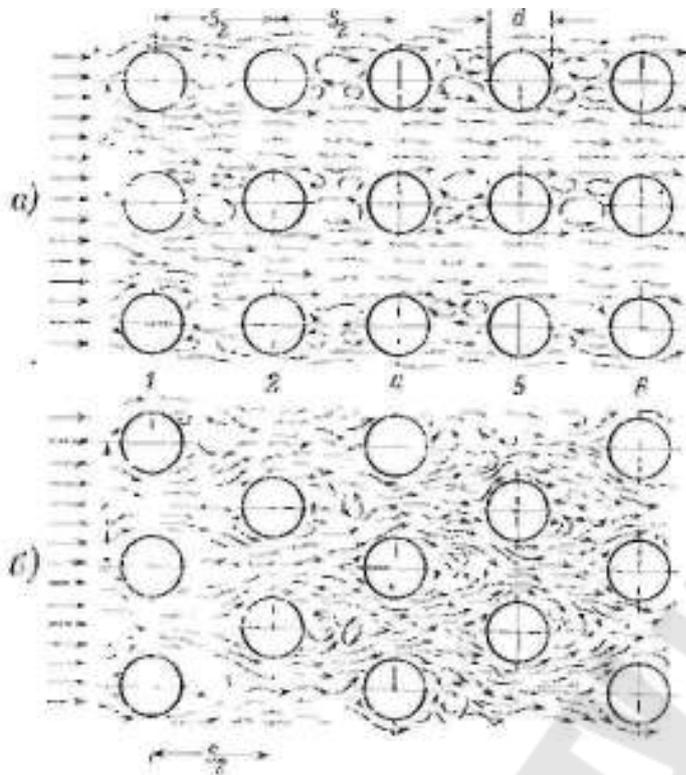


Рис. 9.7. Схемы расположения труб в коридорных (а) и шахматных (б) пучках труб и характер движения жидкости в них

Известны два основных режима течения жидкости: ламинарный и турбулентный. Эти же режимы могут иметь место и при движении жидкости в пучке. Форма течения жидкости в пучке во многом зависит от характера течения в канале перед пучком. Если при данном расходе и температурах течение в канале, где установлен пучок, было бы турбулентным при отсутствии пучка, то оно обязательно будет турбулентным и в пучке, так как пучок является прекрасным турбулизатором. Однако если пучок помещен в канал, в котором до его уста-

новки имел бы место ламинарный режим течения, то в этом случае в зависимости от числа Re можно иметь как одну, так и другую формы течения. Чем меньше число Re , тем устойчивее ламинарное течение, чем больше – тем легче перевести его в турбулентное. При низких значениях числа Re течение может остаться ламинарным. При этом межтрубные зазоры как бы образуют отдельные щелевидные каналы переменного сечения (исключение составляет предельный случай, когда расстояния между трубами очень велики).

В технике чаще встречается турбулентная форма течения жидкости в пучках. Так, например, поперечно-омываемые трубные поверхности нагрева котельных агрегатов омываются турбулентным потоком.

Однако и при турбулентном течении имеют место различные законы теплообмена. Это объясняется различным характером течения на стенках труб. Закон теплоотдачи изменяется при появлении на по-

верхности труб турбулентного пограничного слоя. Согласно опытам с одиночными трубами турбулентный пограничный слой на стенке появляется при $Re > 2 \cdot 10^5$. На трубах пучка турбулентный слой может появиться при меньших числах Re . Для пучков приближенно можно принять, что $Re_{кр} = 1 \cdot 10^5$. При этом в Re вводят скорость, подсчитанную по самому узкому поперечному сечению пучка; определяющий размер — внешний диаметр труб.

При $Re_{кр} < 1 \cdot 10^5$ передняя часть трубы омывается ламинарным пограничным слоем, а кормовая — неупорядоченными вихрями. Таким образом, в то время как течение в пространстве между трубами является турбулентным, на передней половине трубы имеется слой ламинарно текущей жидкости — имеет место смешанное движение жидкости.

Изменение характера омывания сказывается и на теплоотдаче. Можно выделить три основных режима омывания и теплоотдачи в поперечно-омываемых трубных пучках. Назовем их соответственно ламинарным, смешанным и турбулентным режимами.

В настоящее время наиболее изученным является смешанный режим. Он часто встречается в технике, в том числе и в котельных агрегатах. Смешанному режиму соответствуют числа Re примерно от 10^3 до 10^5 . Рассмотрим его основные особенности.

Омывание первого ряда труб и шахматного и коридорного пучков аналогично омыванию одиночного цилиндра. Характер омывания остальных труб (рис. 9.7) в сильной мере зависит от типа пучка. В коридорных пучках все трубы второго и последующих рядов находятся в вихревой зоне впереди стоящих труб, причем циркуляция жидкости в вихревой зоне слабая, так как поток в основном проходит в продольных зазорах между трубами (в «коридорах»). Поэтому в коридорных пучках как лобовая, так и кормовая части трубок омываются со значительно меньшей интенсивностью, чем те же части одиночной трубки.

Глава десятая

ТЕПЛООБМЕН ПРИ ИЗМЕНЕНИИ АГРЕГАТНОГО СОСТОЯНИЯ

10.1. Теплоотдача при кипении жидкости

До сих пор изучались процессы, в которых рабочее тело не меняло своего агрегатного состояния. В данной же главе будут рассматриваться процессы кипения и конденсации, которые сопровождаются изменением агрегатного состояния рабочего тела.

Различают кипение жидкости на твердой поверхности теплообмена и кипение в объеме жидкости. Объемное кипение может происходить при перегреве жидкости относительно температуры насыщения при данном давлении. Кроме того, его можно получить при быстром снижении давления и при наличии в жидкости внутренних источников теплоты.

Наблюдение процесса кипения показывает, что на поверхности теплообмена (если ее температура выше температуры кипения или насыщения t_n) возникают пузырьки пара. Зарождаются они только в отдельных местах обогреваемой поверхности, называемых *центрами парообразования*. Центрами образования пузырьков пара являются неровности самой стенки и выделяющиеся из жидкости пузырьки газа. При достижении определенных размеров пузырьки пара отрываются от поверхности и всплывают наверх, а на их месте возникают новые пузырьки. Величина пузырька пара в значительной степени зависит от смачивающей способности жидкости. Если кипящая жидкость хорошо смачивает поверхность теплообмена, то пузырек пара имеет тонкую ножку и легко отрывается. Если кипящая жидкость не смачивает поверхности, то пузырек пара имеет толстую ножку, при этом верхняя часть пузырька открывается, а ножка остается на поверхности.

Рост пузырьков до отрыва от обогреваемой поверхности и движение их после отрыва вызывают интенсивную циркуляцию и перемешивание жидкости в пограничном слое, вследствие чего резко возрастает интенсивность теплоотдачи от поверхности к жидкости. Такой режим называется *пузырьковым кипением*. При пузырьковом кипении вся теплота от поверхности нагрева передается пограничному

слою жидкости, так как площадь соприкосновения ножек пузырьков пара с поверхностью весьма незначительна.

С возрастанием температурного напора или с возрастанием плотности теплового потока число центров парообразования увеличивается. Их становится так много, что образующиеся пузырьки пара сливаются в один сплошной паровой слой, а кипение при таких условиях называется *пленочным*. Эта пленка ввиду малой теплопроводности пара представляет большое термическое сопротивление. Теплоотдача от стенки к жидкости резко падает, а температурный напор значительно возрастает.

Коэффициент теплоотдачи в условиях свободного движения в большом объеме зависит от физических свойств жидкости, температурного напора и давления. На рис. 10.1 показан график изменения коэффициента теплоотдачи воды при кипении и зависимость плотности теплового потока от Δt .

При малых температурных напорах – до 5° , значение коэффициента теплоотдачи определяется условиями свободной конвекции однофазной жидкости (участок *AB*).

При увеличении Δt коэффициент теплоотдачи быстро возрастает и происхо-

дит интенсивное пузырьковое кипение. В точке *K* наступает изменение режима кипения. Пузырьковое кипение переходит в пленочное, и при дальнейшем повышении Δt коэффициент теплоотдачи резко падает. Этот переход сопровождается таким интенсивным образованием пузырьков, что они не успевают отрываться и образуют сплошную паровую пленку, которая изолирует жидкость от стенки, а кипение переходит в пленочное.

Величины Δt , α и q , соответствующие моменту перехода пузырькового режима кипения в пленочный, называют *критическими*. Установление существования $\Delta t_{кр}$ имеет большое практическое значение для выбора оптимального режима работы кипятильных и выпарных аппаратов.

Для определения коэффициента теплоотдачи и критической величины теплового потока при пузырьковом кипении жидкости в ус-

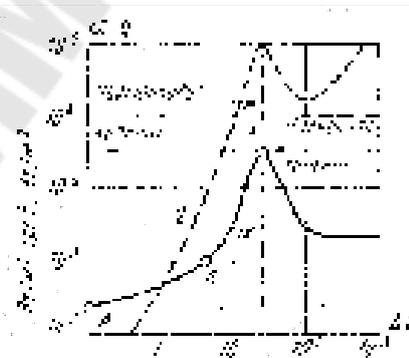


Рис. 10.1. График изменения коэффициента теплоотдачи воды при кипении и зависимость плотности теплового потока от Δt

ловиях естественной конвекции и в большом объеме Г.Н. Кружилин, обработав опытные данные на основании теории подобия, предложил обобщенные формулы в следующем виде:

$$\alpha = 0,008 \left(\frac{p''r}{p' - p''} \right)^{0,033} \cdot \left(\frac{p'}{\sigma} \right)^{0,33} \cdot \frac{\lambda^{0,75} q^{0,7}}{\mu^{0,45} c^{0,12} T_n^{0,37}} \text{ вт/м}^2 \cdot \text{град}, \quad (10.1)$$

$$\alpha = 5466 \frac{\lambda^{0,4} (p' - p'')^{0,48} \left(\frac{p'}{\sigma} \right)^{0,36} T_n^{0,32} \sigma^{0,21}}{p'^{0,31} \mu^{0,14} c^{0,8}} \text{ вт/м}^2, \quad (10.2)$$

где p' и p'' – плотности жидкости и газа;

r – теплота парообразования;

σ – коэффициент поверхностного натяжения;

λ – коэффициент теплопроводности жидкости;

μ – коэффициент динамической вязкости жидкости;

c – теплоемкость жидкости;

T_n – абсолютная температура насыщенного пара при данном давлении.

Академик М. А. Михеев, используя данные Г. Н. Кружилина, рекомендует для $p = 0,2 - 80$ бар весьма простые расчетные формулы при пузырьковом кипении воды

$$\alpha = 3,15 p^{0,15} q^{0,7}; \quad \infty = 46 \Delta t^{2,33} p^{0,5} \text{ вт/м}^2 \cdot \text{град}, \quad (10.3)$$

где $\Delta t = t_{cm} - t_n$ – температурный напор;

p – абсолютное давление пара, бар;

q – плотность теплового потока, вт/м^2 .

10.2. Теплоотдача при конденсации пара

Если пар соприкасается с поверхностью какого-либо тела, температура которого ниже температуры насыщения, то вследствие теплообмена пар охлаждается и конденсируется. Конденсат в виде пленки или капель оседает на поверхности и стекает вниз.

В зависимости от состояния поверхности различают два вида конденсации: *капельную* и *пленочную*. Если поверхность конденсатора

не смачивается жидкостью (покрыта каким-либо жиром, керосином, нефтяным продуктом и др.) и конденсат осаждается в виде отдельных капелек, то происходит капельная конденсация. На смачиваемой поверхности конденсатора конденсирующийся насыщенный пар образует сплошную пленку определенной толщины; такая конденсация называется пленочной. Капельная конденсация – явление случайное, неустойчивое и кратковременное. Она отличается интенсивным теплообменом и коэффициент теплоотдачи при ней в 15–20 раз выше, чем при пленочной конденсации. Объясняется это явление тем, что конденсирующийся пар находится в непосредственном соприкосновении с охлаждаемой поверхностью.

При пленочной конденсации теплота пара передается поверхности пленки конденсата, а пленка передает теплоту стенке. Пленка конденсата представляет значительное термическое сопротивление и чем она толще, тем меньше теплоотдача.

Обычно в теплообменных аппаратах, работающих на водяном паре, наблюдается пленочная конденсация. В верхней части вертикальной стенки или трубы пленка стекает с малыми скоростями и движение пленки будет ламинарным. По мере увеличения скорости конденсата движение пленки переходит в турбулентное.

Рассмотрим теплоотдачу при пленочной конденсации в случае ламинарного движения пленки конденсата.

В данном процессе перенос теплоты через пленку осуществляется только теплопроводностью. Пусть поверхность пленки конденсата, обращенная к пару, имеет температуру t_n (температуру насыщения), а поверхность пленки конденсата, соприкасающаяся со стенкой, имеет температуру t_{cm} . Тогда при коэффициенте теплопроводности конденсата λ и толщине пленки δ плотность теплового потока равна

$$q = \frac{\lambda}{\delta}(t_n - t_{cm}) \text{ вт/м}^2.$$

Кроме того, из закона Ньютона – Рихмана известно, что при коэффициенте теплоотдачи α плотность теплового потока равна

$$q = \alpha(t_n - t_{cm}) \text{ вт/м}^2,$$

откуда

$$\alpha = \frac{\lambda}{\delta} \text{ вт/м}^2 \text{ град.} \quad (10.4)$$

Из уравнения (10.4) следует, что коэффициент теплоотдачи α зависит от толщины слоя конденсата, стекающего по стенке вниз, и чем толще будет слой, тем меньше теплоотдача.

В основу теории конденсации пара положены исследования Нуссельта, который вычислил толщину пленки конденсата, а затем, интегрируя величину количества теплоты, проходящей через вертикальную стенку высотой H , нашел уравнение для определения коэффициента теплоотдачи.

В дополнение к исследованиям Нуссельта академик П. Д. Капица показал, что движение пленки может иметь волновой характер и теплопроводность такой пленки в среднем на 21% выше, чем пленки, имеющей ламинарное движение. Поэтому при практических расчетах рекомендуют следующие формулы определения среднего значения коэффициента теплоотдачи:

для вертикальной стенки

$$\alpha_{вер} = 1,144 \sqrt{\frac{gpr\lambda^3}{H(t_n - t_{cm})}} \text{ вт/м}^2\text{град.} \quad (10.5)$$

для горизонтальной стенки

$$\alpha_{гор} = 0,724 \sqrt{\frac{gpr\lambda^3}{vd(t_n - t_{cm})}} \text{ вт/м}^2\text{град.} \quad (10.6)$$

где g – ускорение силы тяжести;

λ – коэффициент теплопроводности жидкости;

r – полная теплота парообразования;

ρ – плотность жидкости;

ν – кинематическая вязкость жидкости;

H – высота вертикальной стенки;

t_n – температура насыщенного пара;

t_{cm} – температура поверхности стенки;

d – наружный диаметр трубы.

Физические параметры конденсата λ , ν и ρ берутся при средней температуре пленки конденсата, равной $t_{cp} = 0,5(t_n + t_{cm})$. Теплота парообразования r берется при температуре насыщения t_n .

В общем виде уравнение теплообмена при конденсации в условиях ламинарного движения в критериальной форме имеет следующий вид:

$$Nu = C\sqrt[4]{Ga \cdot K \cdot Pr \cdot (Pr_{жс}/Pr_{см})}, \quad (10.7)$$

где K – критерий фазового превращения, равный

$$K = \frac{r}{c_{ржс}\Delta t};$$

$$Nu = \frac{\alpha l}{\lambda}; \quad Ga = \frac{gl^3}{\nu^2}; \quad Pr = \frac{\nu}{a}.$$

Формула справедлива для паров различных веществ.

Масса конденсата, образующаяся на 1 м^2 поверхности, определяется по формуле

$$m = \frac{q}{r} = \frac{\lambda}{\delta r} (t_n - t_{см}) \text{ кг/м}^2 \text{ сек} \quad (10.7)$$

Так как высота трубы всегда больше диаметра, то коэффициент теплоотдачи при горизонтальном расположении трубы выше, чем при вертикальном.

10.3. Влияние различных факторов на теплоотдачу при конденсации

Формулы Нуссельта относятся к неподвижному или медленно движущемуся пару ($w < 10 \text{ м/сек}$). Если движение пара совпадает по направлению с движением пленки конденсата, то толщина последней уменьшается, а коэффициент теплоотдачи увеличивается. При встречном движении пара и пленки конденсата толщина последней увеличивается, а коэффициент теплоотдачи уменьшается.

Однако при сравнительно большой скорости пара происходит срыв конденсатной пленки, что приводит к значительному росту коэффициента теплоотдачи.

При конденсации перегретого пара необходимо учитывать теплоту перегрева $q_{пер} = c_{рм}(t - t_n)$ и в формулы Нуссельта следует подставлять величину $r + q_{пер}$. За разность температур по-прежнему берется

$$\Delta t = (t_n - t_{см}).$$

Состояние поверхности конденсатора также играет большую роль. На трубах, покрытых ржавчиной, с большой шероховатостью толщина пленки конденсата значительно увеличивается, что вызывает уменьшение коэффициента теплоотдачи более чем на 30% по сравне-

нию с гладкой и чистой поверхностью. Примеси различных газов в паре заметно уменьшают теплоотдачу при конденсации. Снижение теплоотдачи происходит потому, что пар конденсируется, а газ или воздух остается на холодной стенке в виде слоя, через который молекулы пара проникают из ядра потока лишь путем диффузии, тем самым увеличивая в значительной степени термическое сопротивление пленки. Так, наличие в паре 1% воздуха уменьшает коэффициент теплоотдачи при конденсации на 60% (для движущегося пара влияние воздуха меньше).

Большое значение для получения высоких коэффициентов теплоотдачи при конденсации пара имеет правильное расположение труб конденсатора. Вертикально расположенные трубы конденсатора обычно снабжаются через каждые 10 см колпачками, которые отводят конденсат от поверхности трубы, тем самым увеличивая теплоотдачу в 2–3 раза. При горизонтальном расположении пучка труб большой эффект получается в том случае, когда струйка конденсата с верхней трубы стекает на небольшую часть поверхности нижней трубы, т. е. попадает у горизонтального диаметра.

Часть третья

ТЕПЛООБМЕН ИЗЛУЧЕНИЕМ

Глава одиннадцатая

ТЕПЛОПЕРЕНОС ИЗЛУЧЕНИЕМ

11.1. Теплоперенос излучением. Основные законы лучистого теплообмена. Коэффициент облученности тел

Лучистый теплообмен (теплообмен излучением или радиацией) может происходить между телами, находящимися на больших расстояниях друг от друга (Солнце – Земля).

Тепловое излучение – результат внутриатомных процессов, обусловленных влиянием температуры. При нагреве тела тепловая энергия переходит в лучистую энергию..

Лучеиспускание тела в пространство может быть равномерным или направленным. Лучистая энергия, падающая на тело в зависимости от его природных свойств, формы, состояния поверхности, в общем случае частью поглощается телом и переходит в тепловую энергию, частью проходит сквозь него и частью отражается.

Согласно электромагнитной теории света, носителями лучистой энергии являются электромагнитные волны, излучаемые телами. Эти волны в изотропной среде или вакууме распространяются прямолинейно со скоростью света, подчиняясь законам преломления, поглощения и отражения. При взаимодействии с веществом носители лучистой энергии, проявляют себя как фотоны (кванты энергии), обладающие характером движущихся частиц.

Распределение энергии при падении излучения на поверхность реального жидкого или твердого тела:

$$Q = Q_R + Q_A + Q_D \text{ или } Q_R/Q + Q_A/Q + Q_D/Q = R + A + D, \quad (11.1)$$

где $R = \frac{Q_R}{Q}$ – доля отраженного телом лучистого потока, называемый отражательной способностью тела;

$A = \frac{Q_A}{Q}$ – доля поглощаемого телом лучистого потока, называемый поглощательной способностью тела;

$D = \frac{Q_D}{Q}$ – доля пропускаемого телом лучистого потока, называемый пропускательной способностью тела;

Есть зеркальное отражение и диффузионное. Если при отражении поверхностью луч остается в одной плоскости, подчиняясь закону равенства углов падения и отражения, то такую поверхность называют зеркальной.

Тело называют белым, если оно полностью отражает лучи. $R = 1; A = D = 0$.

Абсолютно черное тело: $A = 1; R = D = 0$.

Тело, пропускающее полностью лучи через себя называется диатермичным: $D = 1; R = A = 0$.

Большинство реальных тел непрозрачны и для них характерно $D = 0; R + A = 1$.

Энергия излучается телом при данной температуре во всех направлениях в виде спектра. Суммарное количество энергии, излученное на всех длинах волн в единицу времени, называется полным или интегральным лучистым потоком Q . Монохроматическим или однородным (спектральным) лучистым потоком Q_λ называется излучение в узком интервале длин волн: от λ до $\lambda + \Delta\lambda$.

Интегральный лучистый поток, приходящийся на единицу поверхности называется плотностью интегрального излучения

$$E = \frac{dQ}{dF}, \text{ Вт/м}^2. \quad (11.2)$$

Уравнение служит и для выражении лучеиспускательной способности поверхности или поверхностной плотности излучения.

$$I = \frac{dE}{d\lambda}, \text{ Вт/м}^3. \quad (11.3)$$

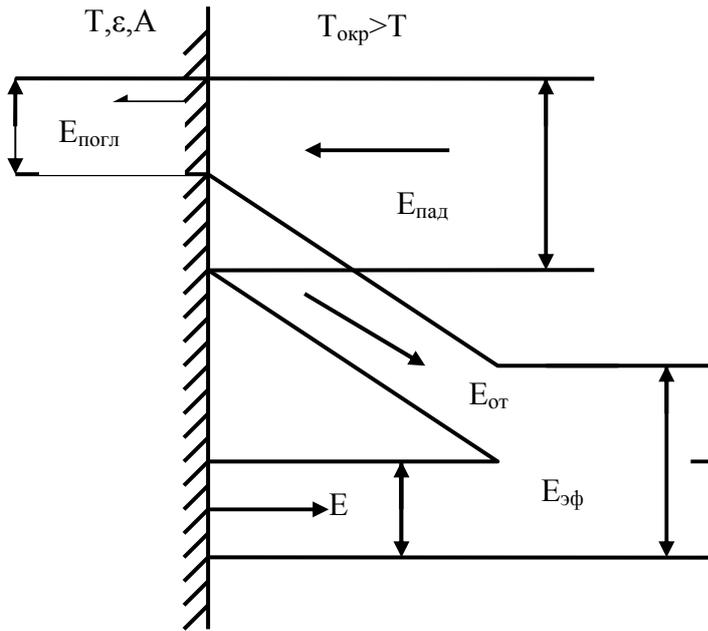


Рис. 11.1.

$E_{\text{погл.}} = A \cdot E_{\text{пад.}}$ - поглощённое излучение;

$E_{\text{отр.}} = (1 - A) \cdot E_{\text{пад.}}$ - отражённое излучение;

Суммарный поток из собственного излучения E и отражённого наз. эффективным излучением тела.

$$E_{\text{эф}} = E + (1 - A) \cdot E_{\text{пад.}}$$

Результирующее излучение учитывает наряду с собственным излучением и излучение, поглощаемое телом из окружающей среды $A E_{\text{пад.}}$

Для другого случая, когда $T > T_{\text{окр.}}$

$$E_{\text{рез.}} = E - A \cdot E_{\text{пад.}} = E_{\text{эф}} - E_{\text{пад.}} = q_{\text{рез.}}$$

$$E_{\text{эф}} = q_{\text{рез.}} + E_{\text{пад.}}$$

Но т.к.

$$E_{\text{пад.}} = \frac{E - q_{\text{рез.}}}{A} \text{ имеем } E_{\text{эф}} = q_{\text{рез.}} - \frac{q_{\text{рез.}} - E}{A} = q_{\text{рез.}} \cdot \left(1 - \frac{1}{A}\right) + \frac{E}{A}.$$

11.2. Основные законы теплового излучения. Закон Планка

В 1900 г. М. Планк, разрабатывая квантовую теорию излучения, теоретически вывел закон распределения энергии ,излучаемой абсо-

лютно чёрным телом в зависимости от длин волн:

$$E_{0\lambda} = c_1 \cdot \lambda^{-5} (e^{c_2/\lambda T} - 1)^{-1}, \text{Вт/м}^3, (11.4)$$

где $E_{0\lambda}$ - спектральная интенсивность излучения абсолютно черного тела Вт/м^3 ;

λ - длина волны, м;

$c_1 = 3,68 \cdot 10^{-16}, \text{Вт/м}^2$ и $c_2 = 1,67 \cdot 10^{-2}, \text{м} \cdot \text{К}$ - постоянные.

Графически закон Планка изображён на рисунке.

$$10^{-9} E_{0\lambda}, \text{Вт/м}^3,$$

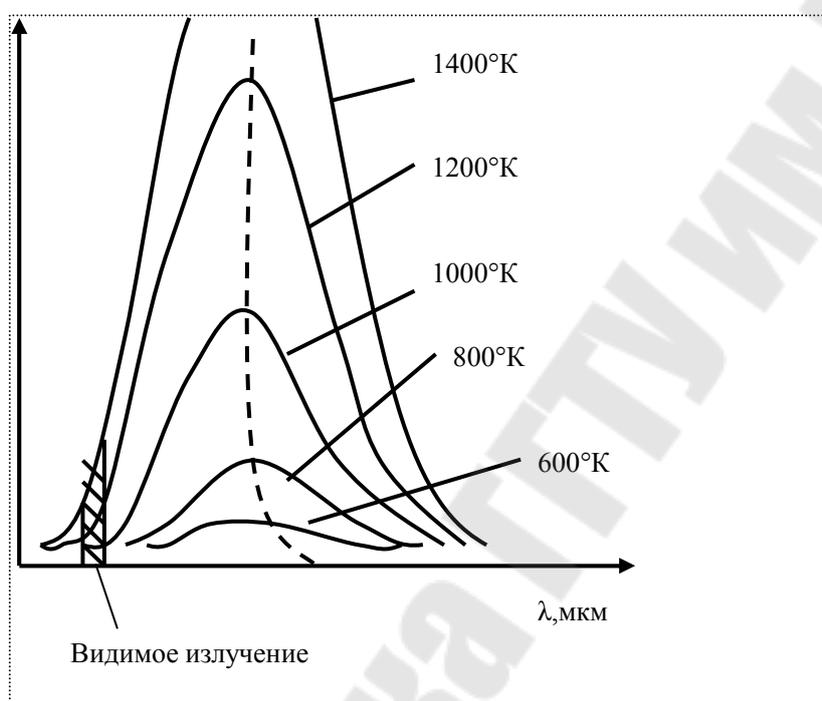


Рис. 11.2.

Начиная от нуля, интенсивность излучения быстро растёт с увеличением длины волны, достигая максимума при некотором её значении, после чего убывает.

Максимальная интенсивность излучения при повышении температуры смещается в область коротких волн, что видно из закона Вина:

$$\lambda_{max} \cdot T = 2,9 \text{ мм} \cdot \text{°К}$$

Из рассмотренного рисунка видно, что энергия видимого излучения по сравнению с энергией инфракрасного излучения пренебрежимо мала.

11.3. Закон Стефана-Больцмана

Полное количество энергии, излучаемой 1 м^2 поверхности абс. черного тела, для всех длин волн от $\lambda=0$ до $\lambda=\infty$ определяется уравнением:

$$E_0 = \int_0^{\infty} E_{0\lambda} d\lambda = \int_0^{\infty} \frac{c_1 \lambda^{-5} d\lambda}{e^{c_2/\lambda T} - 1}, \text{ Вт/ м}^2 \quad (11.5)$$

Интегрирование этого уравнения дает:

$$E_0 = \sigma_0 T^4, \text{ Вт/ м}^2,$$

где $\sigma_0 = 5,67 \cdot 10^{-8}, \text{ Вт/ (м}^2 \cdot \text{°K}^4)$ - постоянная излучения абс. черного тела.

Закон Ст.-Б. “интегральное излучение или лучеиспускательная (излучательная) способность абс. черного тела (т.е. полное количество энергии, излучаемой ед. поверхности тела за единицу времени) пропорциональна четвертой степени абсолютной температуры”.

При больших значениях температуры в инженерных расчетах удобнее пользоваться формулой:

$$E_0 = C_0 \left(\frac{T}{100} \right)^4, \text{ Вт/ м}^2$$

$$C_0 = \sigma_0 \cdot 10^8 = 5,67 \text{ Вт/ (м}^2 \cdot \text{K}^4)$$

Закон Ст.-Б. может быть применен и к серым телам:

Серые тела – тела, спектр излучения которых подобен спектру абс. черного тела, и отличаются от него тем, что при одной и той же температуре каждая ордината интенсивности излучения серого тела составляет одну и ту же долю от сходственной ординаты абс. черного тела.

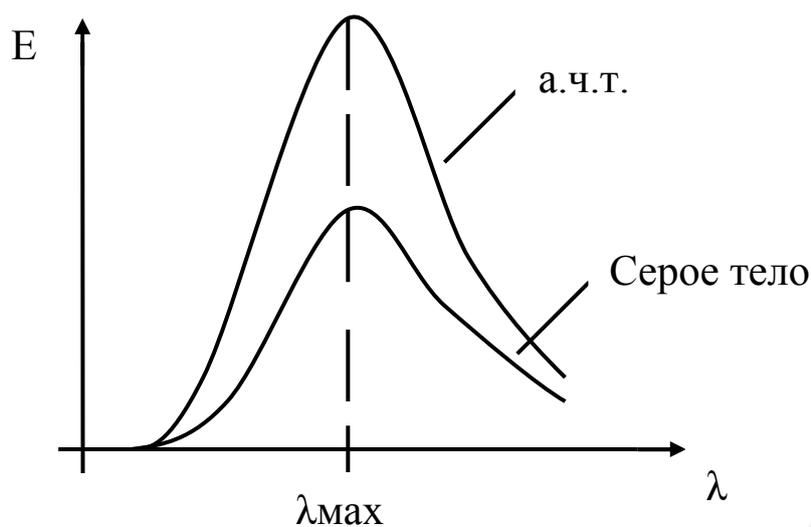


Рис. 11.3.

Для серого тела :

$$E = C \left(\frac{T}{100} \right)^4,$$

C – постоянная излучения серого тела.

Относительная излучательная способность или степень черноты тела:

$$\varepsilon = \frac{E}{E_0} = \frac{\sigma \cdot T^4}{\sigma_0 \cdot T^4} = \frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{C}{C_0}$$

$$0 < \varepsilon < 1$$

Расчетное уравнение для серого излучения имеет вид:

$$E = \varepsilon E_0 = \varepsilon C_0 \left(\frac{T}{100} \right)^4.$$

11.4. Закон Кирхгофа

Устанавливает связь между излучательной и поглощательной способностью любого тела.

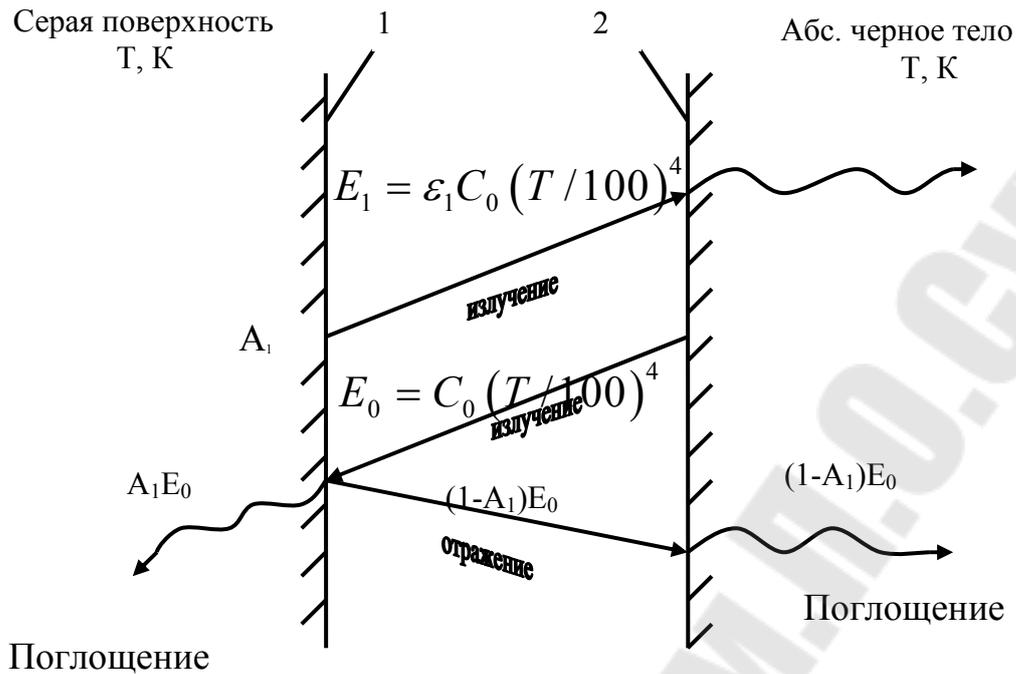


Рис. 11.4.

Поверхность тела 2 излучает на тело 1 энергию $E_0 = c_0 \cdot \left(\frac{T}{100}\right)^4$ часть которой $A_1 E_0$ поглощается телом 1. Тело 1 в свою очередь излучает энергию $E_1 = \varepsilon_1 \cdot E_0 = \varepsilon_1 \cdot C_0 \left(\frac{T}{100}\right)^4$. При равенстве температур обеих поверхностей тепловой поток, излучаемый серой поверхностью, должен быть равен тепловому потоку, который она поглощает:

$$A_1 \cdot E_0 = E_1; \frac{E_1}{A_1} = E_0 = C_0 \left(\frac{T}{100}\right)^4$$

Полученная закономерность справедлива для любых других серых тел, поглощательные способности которых соответственно равны A_2 , A_3 и т.д.

Поэтому уравнение, выражающее закон Кирхгофа будет:

$$\frac{E_1}{A_1} = \frac{E_2}{A_2} = \frac{E_3}{A_3} = E_0 = C_0 \left(\frac{T}{100}\right)^4 \quad (11.6)$$

Для любого тела отношение его лучеиспускательной способности к поглощательной способности равно лучеиспускательной способности абсолютно чёрного тела при той же температуре и зависит

только от температуры.

Подставляя в уравнение вместо E_1 , E_2 и т.д. соответственно $C_1 \left(\frac{T}{100}\right)^4$, $C_2 \left(\frac{T}{100}\right)^4$ и т.д. и сокращая на $\left(\frac{T}{100}\right)^4$ получим:

$$c_1/A_1 = c_2/A_2 = c_3/A_3 = C_0$$

$A = E$, т.е. поглощательная способность тела и степень черноты численно равны друг другу.

11.5. Закон Ламберта

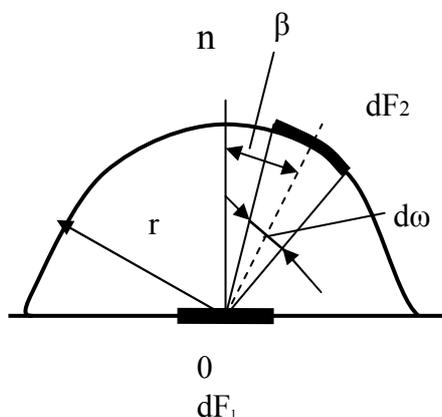


Рис. 11.5.

Закон Стефана-Больцмана позволяет определить полное количество энергии, излучаемой в пространство поверхностью абсолютно чёрного тела во всех направлениях. Излучение осуществляется различно во всех направлениях и по этому приходится учитывать его интенсивность.

Количество энергии, излучаемой в определённом направлении проекцией площадки на нормаль луча в единице телесного угла в единицу времени, т.е. лучеиспускательная способность в данном направлении, называется яркостью в направлении β (угловой плотностью излучения):

$$I = \frac{dE_\beta}{d\omega}, \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{стер.}) \quad (11.7)$$

Закон Ламберта устанавливает, что интенсивность излучения с единицы поверхности абсолютно чёрного тела в каком-либо направлении пропорциональна косинусу угла между этим направлением и нормалью к поверхности:

$$I = I_n \cdot \cos \beta$$

I_H - интенсивности излучения, нормальном к элементу поверхности.
 β - угол между направлением лучеиспускания и нормалью.

Общее количество энергии, излучаемой элементарной площадью dF_1

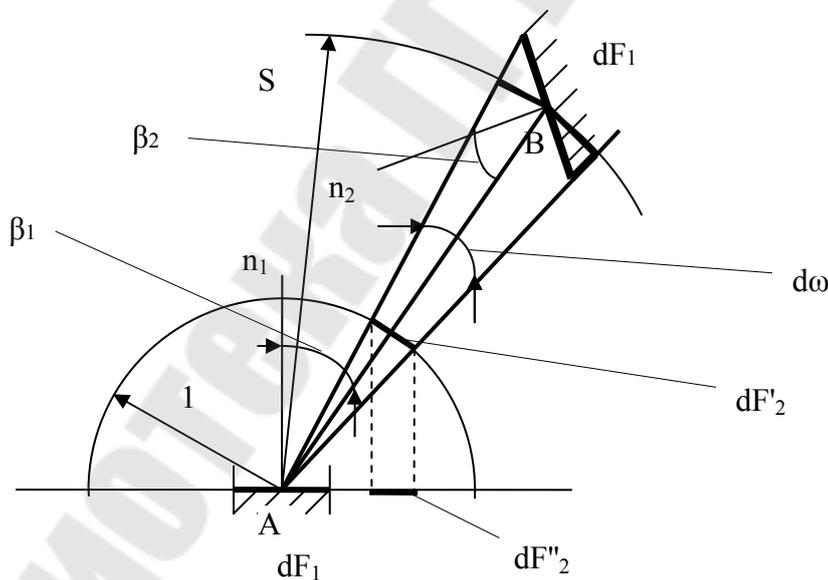
$$E_0 = \int I \cdot d\omega = \int I_H \cdot \cos \beta \cdot d\omega = 2\pi \cdot I_H \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \beta \cdot \sin \beta \cdot d\beta = \pi \cdot I_H$$

Следовательно, общее количество энергии, которое излучается в нормальном направлении.

11.6. Лучистый теплообмен между двумя телами в лучепрозрачной среде

Каждое тело излучает энергию на другие тела и одновременно поглощает энергию, излучаемую другими телами. Более нагретые тела теряют излучения больше, чем поглощают. Наоборот, более холодные тела поглощают больше энергии, чем излучают.

Пусть теплообмен излучение происходит между двумя абсолютно



чёрными телами, dF_1 и dF_2 .

Энергия излучаемая за единицу времени поверхностью dF_1 в

Рис. 11.6.

пределах пространственного угла $d\omega$, под которым поверхность dF_2 видна из центра поверхности dF_1 будет:

$$dQ_1 = \dot{I}_{n1} \cdot \cos \beta_1 \cdot d\omega_1 \cdot dF_1$$

телесный угол $d\omega_1 = \frac{dF_2 \cdot \cos \beta_2}{S^2}$

$$dQ_1 = \dot{I}_{n1} \cdot \frac{dF_2 \cdot \cos \beta_2 \cdot \cos \beta_1 \cdot dF_1}{S^2}$$

Аналогично $dQ_2 = \dot{I}_{n2} \cdot \cos \beta_2 \cdot d\omega_2 \cdot dF_2 = \dot{I}_{n2} \frac{\cos \beta_1 \cdot \cos \beta_2}{S^2} \cdot dF_1 \cdot dF_2$

В результате от поверхности dF_1 на поверхность dF_2 передаётся следующее количество энергии:

$$dQ = dQ_1 - dQ_2 = (\dot{I}_{n1} - \dot{I}_{n2}) \cdot \frac{\cos \beta_1 \cdot \cos \beta_2}{S^2} \cdot dF_1 \cdot dF_2$$

т. к. $\dot{I}_{n1} = \frac{\sigma_0 \cdot T_1^4}{\pi}$ и $\dot{I}_{n2} = \frac{\sigma_0 \cdot T_2^4}{\pi}$

$$dQ = \frac{\cos \beta_1 \cdot \cos \beta_2}{\pi S^2} \cdot dF_1 \cdot dF_2 \cdot (T_1^4 - T_2^4)$$

Введем новое понятие – угловой коэффициент или коэффициент облучения.

Угловой коэффициент $d\phi_{12}$ элементарной поверхности dF_1 относительно элементарной поверхности dF_2 равен отношению количества тепла, излучаемого единицей элементарной поверхности dF_1 на элементарную поверхность dF_2 , деленному на лучеиспускающую способность E_1 элемента.

$$d\phi_{12} = \frac{1}{\pi} \cos \beta_1 d\omega_1 = \frac{\cos \beta_1 \cos \beta_2 dF_2}{\pi S^2}$$

Следовательно $d\phi_{12}$ явл. чисто геометрическим фактором, зависящим от формы поверхностей, их размеров и взаимного расположения. Т.о.

$$dQ_1 = E_1 d\phi_{12} dF_1$$

$$dQ_2 = E_2 d\phi_{12} dF_1$$

$$dQ = (E_1 - E_2) d\varphi_{12} dF_1 = \sigma_0 d\varphi_{12} dF_1 (T_1^4 - T_2^4)$$

или

$$dQ = (E_1 - E_2) d\varphi_{21} dF_2 = \sigma_0 d\varphi_{21} dF_2 (T_1^4 - T_2^4)$$

Лучистый теплообмен между двумя конечными абсолютно черными поверхностями определяется:

$$Q = \varphi_{12} F_1 \sigma_0 (T_1^4 - T_2^4) = \varphi_{12} F_1 C_0 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right], \text{Вт}$$

$$Q = \varphi_{21} F_2 \sigma_0 (T_1^4 - T_2^4) = \varphi_{21} F_2 C_0 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right], \text{Вт}$$

$$F_1 \varphi_{12} = F_2 \varphi_{21}$$

$$\varphi_{12} = \frac{1}{F_1} \int_{F_1} \int_{F_2} \frac{\cos \beta_1 \cos \beta_2}{\pi S^2} dF_1 dF_2$$

Лучистый теплообмен между двумя серыми поверхностями определяется по формуле

$$Q = c_{np} \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \cdot F_1 \cdot \varphi_{12}, \text{Вт}$$

c_{np} – приведённый коэффициент лучеиспускания, который для замкнутой системы, состоящей из двух серых поверхностей, в общем случае определяется по формуле

$$c_{np} = \frac{c_0}{\left(\frac{1}{\varepsilon_1} - 1 \right) \cdot \varphi_{12} + 1 + \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right) \cdot \varphi_{21}}, \text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$$

11.7. Лучистый теплообмен между газами и окружающими их стенками

$$\varepsilon_{\text{стенки}} < 1.$$

Собственное излучение газов на единицу поверхности за одну секунду

$$q_{\Gamma} = \varepsilon_{\Gamma} \cdot c_0 \left(\frac{T_{\Gamma}}{100} \right)^4, \text{Вт}/\text{м}^2$$

Собственное излучение стенки:

$$q_c = \varepsilon_c \cdot c_0 \left(\frac{T_\Gamma}{100} \right)^4, \text{Вт/м}^2$$

для определения количества тепла, переданного от не запыленных га-

зов, чаще пользуются: $q_l = \varepsilon'_c \varepsilon_\Gamma \cdot c_0 \left[\left(\frac{T_\Gamma}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_c}{100} \right)^4 \right] \cdot \Psi, \text{Вт/м}^2$

$\varepsilon'_c = (\varepsilon_c + 1)/2, \text{Вт/м}^2$ – поправка, учитывающая отклонение луче-
испускания от закона Стефана-Больцмана.

Для запыления газов $\Psi = 1$.

При расчётах конвективной поверхностей нагрева, когда кон-
вективный теплообмен преобладает над лучистым, принято формулу
для подсчёта количества тепла, переданного излучением, представля-
ется в виде:

$$q_l = \alpha_l \cdot (t_\Gamma - t_c), \text{Вт/м}^2$$

$$\alpha_l = \frac{q_l}{t_\Gamma - t_c}, \text{Вт/м}^2 \text{ – коэффициент лучистого теплообмена.}$$

Подставляя вместо q_l его значение для не запылённых газов:

$$\alpha_l = \varepsilon'_c \varepsilon_\Gamma \cdot c_0 \frac{\left[\left(\frac{T_\Gamma}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_c}{100} \right)^4 \right]}{t_\Gamma - t_c} \cdot \Psi, \text{Вт/м}^2$$

11.8. Экраны

Между двумя поверхностями I и II располагается экран III из
тонкой жести. Его температура на передней и задней поверхностях
одинакова.

q_0 – количество тепла, которым обмениваются поверхности без экра-
нов.

q_1 – обмениваются поверхности I и II температура экрана T_{III} .

Случай I. У всех одинаковый коэффициент излучения.

Приведённый коэффициент излучения:

$$c = \frac{1}{\frac{1}{c_I} + \frac{1}{c_I} - \frac{1}{c_S}}$$

$$q = c \cdot \left[\left(\frac{T_I}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_{II}}{100} \right)^4 \right]$$

$$q_1 = c \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_{III}}{100} \right)^4 \right] = c \cdot \left[\left(\frac{T_{III}}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_{II}}{100} \right)^4 \right]$$

Из этого следует, что:

$$\left(\frac{T_{III}}{100} \right)^4 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{T_I}{100} \right)^4 + \left(\frac{T_{II}}{100} \right)^4 \right]$$

Получим:

$$q_1 = c \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \frac{1}{2} \left(\frac{T_I}{100} \right)^4 - \frac{1}{2} \left(\frac{T_{II}}{100} \right)^4 \right] = \frac{1}{2} \cdot q_0$$

Для n экранов:

$$q_n = \frac{1}{n+1} \cdot q_0$$

Случай II.

Пусть поверхности имеют коэффициент излучения c_1 , а экран c_{III} .

Приведённый коэффициент излучения в отсутствии экрана:

$$c_0 = \frac{1}{\frac{1}{c_I} + \frac{1}{c_I} - \frac{1}{c_S}}$$

а между телом и экраном:

$$c_1 = \frac{1}{\frac{1}{c_I} + \frac{1}{c_{III}} - \frac{1}{c_S}}$$

получим: $q_0 = c_0 \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_{II}}{100} \right)^4 \right]$

$$q_1 = c_1 \cdot \left[\left(\frac{T_I}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_{III}}{100} \right)^4 \right] = c_1 \cdot \left[\left(\frac{T_{III}}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_{II}}{100} \right)^4 \right] =$$

$$= c_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{T_I}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_{II}}{100} \right)^4 \right]$$

$$\text{т. о. } \frac{q_1}{q_0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{c_1}{c_0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{c_I} + \frac{1}{c_I} - \frac{1}{c_S}}{\frac{1}{c_I} + \frac{1}{c_{III}} - \frac{1}{c_S}}$$

11.9. Сложный теплообмен

Обычно передача теплоты от тела с высокой температурой к телу с низкой температурой происходит через разделительную стенку. При этом в передаче теплоты одновременно принимают участие все виды теплообмена – теплопроводность, конвекция и лучеиспускание, которые были подробно изучены в предыдущих главах. Теплообмен, учитывающий все виды теплообмена, называется *сложным теплообменом* (рис. 11.7).

Количественной характеристикой процесса теплообмена от газа к стенке (или наоборот) является суммарный коэффициент теплоотдачи $\alpha = \alpha_K + \alpha_{из}$, где α_K учитывает передачу тепла теплопроводностью и конвекцией, а $\alpha_{из}$ – передачу тепла излучением.

Плотность теплового потока рассчитываемого теплового аппарата определяется по уравнению:

$$q = \alpha(t_2 - t_{cm}) \text{ Вт/м}^2 \quad (11.8)$$

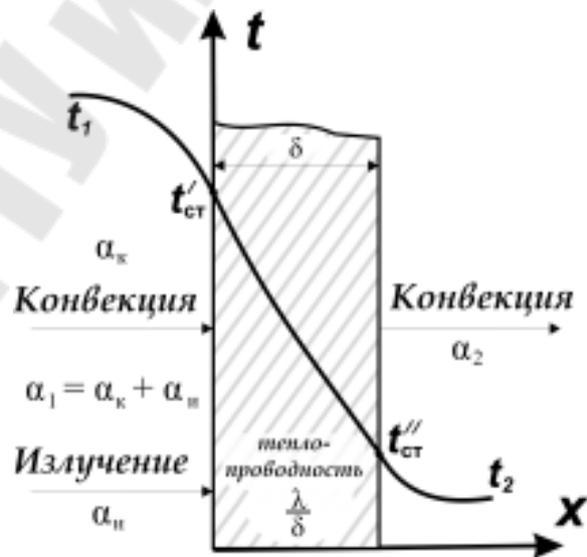


Рис. 11.7.

где α - суммарный коэффициент теплоотдачи. Этот коэффициент входит в уравнение коэффициента теплопередачи.

В этом случае уравнение коэффициента теплопередачи для плоской стенки принимает вид

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_{к1} + \alpha_{и1}} + \sum \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_{к2} + \alpha_{и2}}} \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{град.}$$

В дальнейшем будем обозначать буквой α_1 или α_2 суммарный коэффициент теплоотдачи, учитывающий конвекцию, теплопроводность и излучение.

11.10. Сложный теплообмен

Разделение общего процесса переноса тепла на элементарные явления – теплопроводность, конвекцию и тепловое излучение – производится в основном из методологических соображений. В действительности же, эти явления протекают в общем случае одновременно и как-то влияют друг на друга.

В практических расчетах разделение таких сложных процессов на элементарные явления не всегда возможно и целесообразно. Обычно результат совокупного действия отдельных элементарных явлений приписывается одному из них, которое и считается главным. Влияние же отдельных явлений сказывается лишь на величине количественной характеристики основного.

Процесс переноса тепла между потоками излучающего газа и стенкой является результатом совокупного влияния конвективного теплообмена и теплового излучения; это так называемый сложный теплообмен. Здесь в качестве основного явления обычно принимается конвекция. В этом случае количественной характеристикой процесса является коэффициент теплоотдачи $\alpha_0 = \alpha_k + \alpha_l$, где α_k - учитывает действие конвекции и теплопроводности.

Если $t_{жс}$ - температура газа, а t_c - температура стенки, то каждой единице поверхности этой стенки передается тепло путем соприкосновения

$$q_k = \alpha_k (t_{жс} - t_c)$$

И путем теплового излучения

$$q_l = \varepsilon c_0 \left[\left(\frac{T_{жс}}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_c}{100} \right)^4 \right]$$

Суммируя имеем:

$$q_0 = q_k + q_l = \alpha_k (t_{жс} - t_c) + \varepsilon c_0 \left[\left(\frac{T_{жс}}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_c}{100} \right)^4 \right];$$

Т. К. $t_{жс} - t_c = T_{жс} - T_c$, то

$$q_0 = \left\{ \alpha_k + \varepsilon c_0 \left[\frac{\left(\frac{T_{жс}}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_c}{100} \right)^4}{T_{жс} - T_c} \right] \right\} (t_{жс} - t_c)$$

$$q_0 = (\alpha_k + \alpha_l)(t_{жс} - t_c) = \alpha_0 (t_{жс} - t_c)$$

Если стенка омывается капельной жидкостью, то $\alpha_l = 0$ и $\alpha_0 = \alpha_k$.

Часть четвертая

ТЕПЛООБМЕННЫЕ АППАРАТЫ

Глава двенадцатая

ТЕПЛОПЕРЕДАЧА В ТЕПЛООБМЕННЫХ АППАРАТАХ

12.1 Тепловой баланс и водяные эквиваленты

По принципу действия теплообменные аппараты могут быть разделены на рекуперативные, регенеративные и смесительные. Рекуперативными называются такие аппараты, в которых тепло от горячего теплоносителя к холодному передается через разделяющую их стенку (котлы, подогреватели, конденсаторы и т.д.). Регенеративными называются такие аппараты, в которых одна и та же поверхность омывается то горячим, то холодным теплоносителем (регенераторы мартеновских и стеклоплавных печей, воздухонагреватели и т.д.)

Эти аппараты называют поверхностными теплообменниками.

В смесительных аппаратах процесс теплоотдачи происходит путем непосредственного соприкосновения и смешения горячего и холодного теплоносителей. В этом случае теплопередача протекает одновременно с массообменом.

При расчете теплообменных аппаратов основным расчетным уравнением является уравнение теплопередачи:

$$Q = KF\Delta t$$

Прямоток – теплоносители движутся в одном направлении. Противоток – теплоносители движутся навстречу друг другу. Перекрестный ток – теплоносители движутся перекрестно.

При расчете пользуются помимо уравнения теплоотдачи еще и уравнением теплового баланса, которое для случая, когда не меняется агрегатное состояние теплоносителей, можно заменить:

$$Q = M_1c_1(t'_1 - t''_1) = M_2c_2(t''_2 - t'_2) = W_1(t'_1 - t''_1) = W_2(t''_2 - t'_2)$$

M_1, M_2 – часовые массовые расходы, кг/ч; c_1, c_2 – средние массовые теплоемкости, Дж/кг·град; $\Delta t_1 = t'_1 - t''_1$ – падение температуры греющей среды; $\Delta t_2 = t''_2 - t'_2$ – падение t нагреваемой среды

$$W_1 = M_1c_1 = V_1\rho_1c_1; W_2 = M_2c_2 = V_2\rho_2c_2$$

W_1, W_2 – водяные эквиваленты (или числа) теплоносителей.

Численное значение водяного эквивалента равно количеству воды, которое по своей теплоемкости эквивалентно теплоемкости данного теплоносителя.

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{t'_1 - t''_1}{t''_2 - t'_2}$$

Чем меньше водяной эквивалент данного теплоносителя, тем больше изменяется его температурный перепад $\Delta t'$. Характер изменения температур рабочих тел при прямотоке и противотоке показан на рисунках:

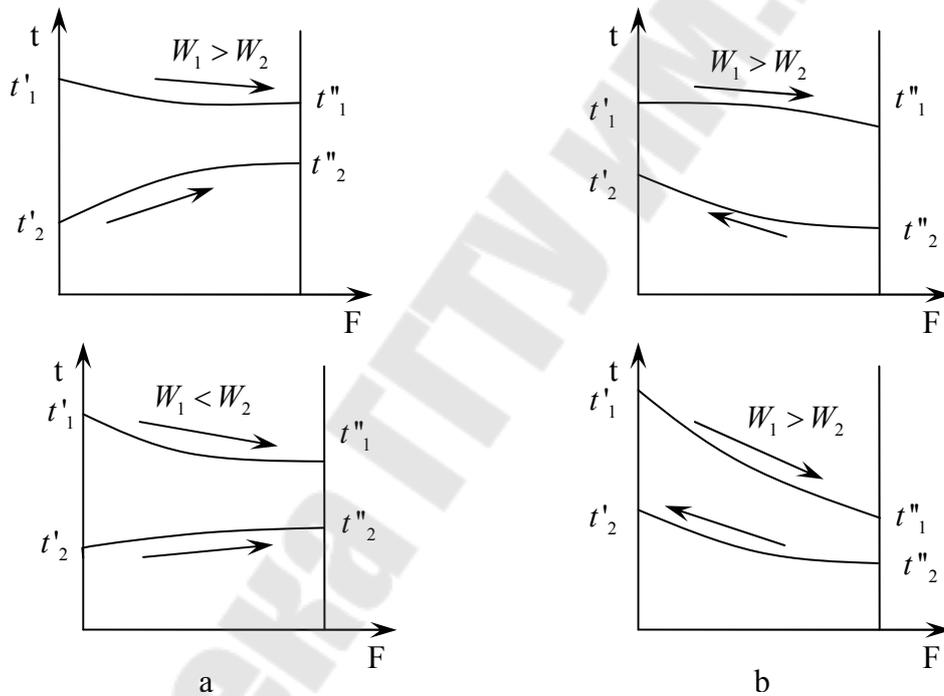


Рис. 12.1.

В случае теплообменных аппаратов, когда греющей или нагреваемой средой являются газообразные тела (продукты сгорания, воздух), то в тепловом балансе количества отдаваемого или поглощаемого этими телами тепла обычно выражают через объемные удельные теплоемкости.

В этом случае

$$Q = V_1 \rho_1 c_1 (t'_1 - t''_1) = V_2 \rho_2 c_2 (t''_2 - t'_2) = V_1 c'_1 (t'_1 - t''_1) = V_2 c'_2 (t''_2 - t'_2)$$

12.2. Определение среднего температурного напора

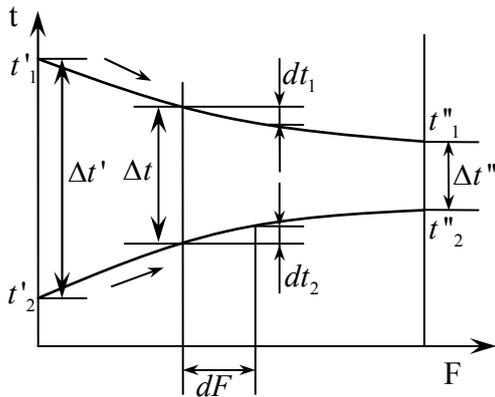


Рис. 12.2.

Для определения среднего температурного напора напишем уравнение, выражающее количество переданного тепла на элементарном участке поверхности нагрева dF

$$dQ = K(t_1 - t_2)dF \quad (12.1)$$

В результате того, что греющая среда теряет dQ тепла, ее температура снижается на

$$dt_1 = -\frac{dQ}{M_1 C_1} = -\frac{dQ}{W_1} \quad (12.2)$$

Температура же нагреваемой среды повышается на

$$dt_2 = \frac{dQ}{M_2 C_2} = \frac{dQ}{W_2} \quad (12.3)$$

Т. к. $W_1 = \frac{Q}{t'_1 - t''_1}$ и $W_2 = \frac{Q}{t''_2 - t'_2}$, то подставляя их значения в

(12.2) и (12.3) и решая их совместно с (1), находим для прямотока:

$$\frac{d(t_1 - t_2)}{t_1 - t_2} = -\left[(t'_1 - t''_1) + (t''_2 - t'_2) \right] \frac{KdF}{Q}$$

Интегрируя, находим количество теплоты, переданной через стенку для прямотока

$$Q = KF \left[\frac{(t'_1 - t''_2) - (t''_1 - t'_2)}{\ln \frac{t'_1 - t''_2}{t''_1 - t'_2}} \right] = KF \Delta t_{cp}$$

Аналогично для противотока:

$$Q = KF \left[\frac{(t'_1 - t''_2) - (t''_1 - t'_2)}{\ln \frac{t'_1 - t''_2}{t''_1 - t'_2}} \right] = KF \underline{\Delta t_{cp}}$$

Обозначим наибольшую разность температур греющей и нагреваемой среды через Δt_{δ} , а меньшую разность Δt_m , тогда для прямого и противотока получим общую формулу

$$\Delta t_{cp} = \frac{\Delta t_{\delta} - \Delta t_m}{\ln \frac{\Delta t_{\delta}}{\Delta t_m}}$$

Если $\frac{\Delta t_m}{\Delta t_{\delta}} > 0.6$, можно среднелогарифмический температурный напор заменить среднеарифметическим.

$$\Delta t_{cp} = \frac{t'_1 + t''_1}{2} - \frac{t'_2 + t''_2}{2}$$

При перекрестном токе при сложных схемах средний напор будет меньше соответственного напора при противотоке и его вычисляют

$$\Delta t_{cp} = \varepsilon \Delta t$$

ε – поправочный коэффициент, который находится в зависимости от P и R

$$P = \frac{t''_2 - t'_2}{t'_1 - t''_1} \quad \text{и} \quad R = \frac{t'_1 - t''_1}{t''_2 - t'_2}$$

12.3. Сравнение схем теплообменников

При прямом токе нельзя нагреть теплоноситель выше той температуры, при которой греющий теплоноситель покидает аппарат, т.е. $t''_2 < t''_1$. При противотоке же t''_2 может быть выше t''_1 . Следовательно, при одинаковой начальной температуре нагреваемого теплоносителя при противотоке можно ее нагреть выше, чем при прямом токе.

Δt_{cp} при противотоке при прочих равных условиях больше, чем

при прямотоке, а поэтому поверхность нагрева при противотоке получается меньше.

Таким образом противоток выгоднее прямотока. Однако на практике противоток не всегда осуществим из-за опасности перегрева металла в наиболее горячих местах его поверхности.

12.4. Расчет конечной температуры рабочих жидкостей

Это так называемый проверочный расчет. Известно $F, K, W_1, W_2, t'_1, t'_2$. Необходимо определить: t''_1, t''_2, Q .

$$\text{Т.к. } Q = w_1(t'_1 - t''_1), \text{ то } t''_1 = t'_1 - \frac{Q}{w_1}$$

$$\text{Т.к. } Q = w_2(t''_2 - t'_2), \text{ то } t''_2 = t'_2 + \frac{Q}{w_2}$$

Если принять, что температуры рабочих жидкостей меняются по линейному закону, то

$$Q = KF \left(\frac{t'_1 + t''_1}{2} - \frac{t'_2 + t''_2}{2} \right)$$

Произведя подстановки и преобразования, получим:

$$Q = \frac{t'_1 - t'_2}{\frac{1}{KF} + \frac{1}{2w_1} + \frac{1}{2w_2}}$$

Эти формулы справедливы для небольших изменений температур жидкостей. В общем случае конечная температура зависит от схемы движения рабочих жидкостей, поэтому для прямотока и противотока необходим более точный вывод формул.

Часть пятая

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ ТЕПЛО- И МАССОПЕРЕНОСА

Глава тринадцатая

ТЕПЛО- И МАССООТДАЧА

13.1. Основные понятия и определения

В движущейся однокомпонентной среде теплота переносится теплопроводностью и конвекцией. Этот процесс называется конвективным теплообменом. По аналогии перенос вещества в многокомпонентной среде совместно происходящими процессами молекулярной диффузии и конвекции называют конвективным массообменом.

Практический интерес представляют процессы теплообмена и массообмена при испарении, сублимации (возгонке), конденсации, сорбции, десорбции и др. В этом случае система является гетерогенной. Поверхность жидкой (или твердой) фазы играет роль, аналогичную роли твердой стенки в процессах теплоотдачи без сопутствующей диффузии. Аналогично теплоотдаче конвективный массообмен между жидкой или твердой поверхностью и окружающей средой называют массоотдачей.

В рассматриваемых случаях тепло- и массоотдача идут одновременно. Для расчетов теплоотдачи используют закон Ньютона–Рихмана

$$q_c = \alpha(t_c - t_0);$$

здесь q_c измеряется в Дж/(м²·с).

Для расчетов массоотдачи используют уравнение

$$j_{ic} = \beta(\rho_{ic} - \rho_{i0}) \quad (13.1)$$

$$j_{ic} = \rho\beta(m_{ic} - m_{i0}), \quad (13.2)$$

где j_{ic} – плотность потока массы, кг/(м²·с);

β – коэффициент массоотдачи, отнесенный к разности концентраций диффундирующего вещества, м/с; индексы «с» и «0» показывают, что концентрация диффузионного вещества берется соответ-

венно на поверхности раздела фаз и вдали от нее.

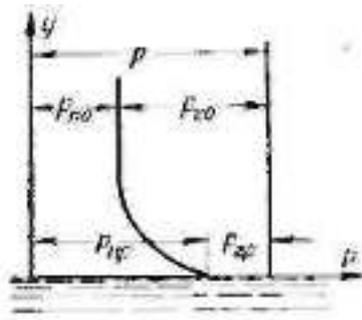


Рис. 13.1. Распределение концентраций пара и газа у поверхности испарения

Используя уравнение состояния идеальных газов, выражение (13.1) или (13.2) можно записать в следующем виде:

$$j_{ic} = \beta_p (\rho_{ic} - \rho_{i0}); \quad (13.3)$$

здесь β_p – коэффициент массоотдачи, отнесенный к разности парциальных давлений $\Delta z = \rho_{ic} - \rho_{i0}$.

Коэффициенты массоотдачи β и β_p связаны соотношением

$$\beta = \beta_p RT. \quad (13.4)$$

Рассмотрим испарение жидкости в парогазовую среду. Будем полагать, что полное давление по всему объему парогазовой смеси неизменно, а температурные разности пренебрежимо малы: В этом случае можно не учитывать термо- и бародиффузию. Отсутствуют возбудители движения, посторонние для рассматриваемого процесса испарения.

Концентрация пара изменяется от значения m_{nc} на поверхности испаряющейся жидкости до значения m_{n0} вдали от поверхности раздела (рис. 13.1). Так как $m_n - m_z = 1$, то

$$\frac{\partial m_n}{\partial y} = -\frac{\partial m_z}{\partial y}. \quad (a)$$

Следовательно, газ должен диффундировать в направлении, обратном направлению диффузии пара. Пар может свободно диффундировать в парогазовую среду. Для газа же поверхность жидкости является непроницаемой преградой. Вследствие этого количество газа у поверхности жидкости должно непрерывно увеличиваться. Но в случае стационарного режима распределение концентраций не изменяется по времени. Поэтому перемещение газа к поверхности испарения должно компенсироваться конвективным потоком парогазовой смеси, направленным от жидкости. Этот поток называют **с т е ф а н о в ы м** потоком. Его скорость обозначим через w_{cn} .

Суммарный поток пара будет равен сумме молекулярного и конвективного потоков:

$$j_{nc} = -\rho D \left(\frac{\partial m_n}{\partial y} \right)_c + \rho m_{nc} w_{nc}. \quad (13.5)$$

Суммарный поток газа у поверхности жидкости равен нулю:

$$j_{nc} = -\rho D \left(\frac{\partial m_z}{\partial y} \right)_c + \rho m_{zc} w_{cnc} = 0.$$

Из последнего уравнения с учетом уравнения (а) получаем:

$$w_{cnc} = -\frac{D}{m_{zc}} \left(\frac{\partial m_u}{\partial y} \right)_c. \quad (13.6)$$

Подставив полученное значение (а) в уравнение (13.6), получим

$$j_{nc} = -\rho D \left(\frac{m_n + m_z}{m_z} \right)_c \left(\frac{\partial m_n}{\partial y} \right)_c = -\rho D \frac{1}{m_{zc}} \left(\frac{\partial m_n}{\partial y} \right)_c. \quad (13.7)$$

Уравнение (13.7) впервые было получено Стефаном. Это уравнение отличается от закона диффузии, относящегося к условиям беспрепятственного распространения обоих компонентов смеси, дополнительным множителем $1/m_{zc}$. Этот множитель учитывает конвективный (Стефанов) поток, вызванный непроницаемостью поверхности испарения для газа. Как следует из изложенного, стефанов конвективный поток появляется и при отсутствии вынужденной или свободной тепловой конвекции.

Поток массы на поверхности испарения определяется с помощью уравнения (13.1). Этот же поток может быть определен уравнением (13.6). Приравняв правые части уравнений (13.1) и (13.6), получим:

$$\beta(m_{nc} - m_{n0}) = -D \frac{1}{m_{zc}} \left(\frac{\partial m_n}{\partial y} \right)_c \quad (13.8)$$

Или

$$\beta = -D \frac{1}{m_{2c} m_{nc} - m_{n0}} \left(\frac{\partial m_n}{\partial y} \right)_c. \quad (13.9)$$

Рассмотренный процесс испарения жидкости в парогазовую смесь соответствует условиям полупроницаемой поверхности, т. е. поверхности, проницаемой для одного (активного) компонента смеси (пара) и непроницаемой для другого (инертного) компонента (газа). Полупроницаемая поверхность наблюдается и при конденсации пара из парогазовой смеси.

В случае полностью проницаемой поверхности через нее проходят оба компонента. Поверхность является полностью проницаемой, например, при конденсации обоих компонентов бинарной паровой смеси. Такой же эффект может иметь место и при испарении некоторых растворов.

Будем исходить из того, что k в случае тепло- и массообмена

$$\alpha = \frac{\lambda}{t_c - t_0} (\nabla t)_c. \quad (13.10)$$

Такое определение коэффициента теплоотдачи не отличается от ранее использованного.

Общее количество теплоты q_c , отдаваемой или воспринимаемой жидкостью и парогазовой смесью, равно сумме теплоты, переданной конвективным теплообменом, и теплоты, переданной диффундирующей массой в виде энтальпии.

При полупроницаемой поверхности в условиях стационарного процесса стефанов поток компенсирует встречный молекулярный поток газа и реально возникает лишь поперечный поток пара. В этом случае на границе раздела фаз

$$q_c = -\lambda(\nabla t)_c + j_{nc} i_{nc}. \quad (13.11)$$

13.2. Тройная аналогия

Сравним уравнения диффузии, энергии и движения, описывающие поля концентраций, температуры и скорости в отдельно идущих процессах переноса вещества, теплоты и количества движения. Выведенные ранее уравнения запишем при некоторых упрощающих предположениях.

Уравнение массообмена (без учета термо- и бародиффузии)

$$\frac{dm_i}{d\tau} = D\nabla^2 m_i \quad (\text{а})$$

Уравнение энергии (без учета диффузионной составляющей теплового потока)

$$\frac{dt}{d\tau} = a\nabla^2 t. \quad (\text{б})$$

Уравнение движения (без учета массовых сил к для безнапорного движения)

$$\frac{d\vec{w}}{d\tau} = \nu\nabla^2 \vec{w}. \quad (\text{в})$$

Уравнения (а) – (в) по записи аналогичны. Эти уравнения содержат три физических параметра: D , a и ν , каждый из которых характеризует соответственно перенос вещества, теплоты и импульса. Размерности D , a и ν одинаковы ($\text{м}^2/\text{с}$). При $D=a=\nu$ расчетные поля концентраций, температур и скорости будут подобны, если имеет место подобие условий однозначности. В частности, поля концентраций и температур будут подобны, если $D=a$ или $D/a=1$. Отношение D/a называют числом Льюиса – Семенова и обозначают через Le .

Для теплообмена, не осложненного массообменом («чистого» теплообмена), и без учета массовых сил получено ранее, что

$$\overline{Nu} = \varphi(\text{Re}, \text{Pr}). \quad (\text{г})$$

Исходя из аналогии процессов теплообмена и массообмена, можно написать:

$$\overline{Nu}_\partial = \phi(\text{Re}, \text{Pr})_\partial; \quad (\text{д})$$

здесь $\overline{Nu}_\partial = \beta l / D$ – диффузионное число Нуссельта;

$\text{Pr}_\partial = \nu / D$ – диффузионное число Прандтля.

Эти числа являются аналогами чисел \overline{Nu} и Pr . При аналогии процессов теплообмена и массообмена функции φ и ϕ одинаковы. Если одноименные определяющие критерии подобия равны, будут численно одинаковы и числа Nu и Nu_∂ . Можно, например, провести исследование теплообмена и полученные формулы использовать для расчета массообмена, заменив числа Nu и Pr соответственно на Nu_∂ и Pr_∂ . Так, если для расчета теплоотдачи получено уравнение

$$\overline{Nu} = a Re^n Pr^m,$$

то для расчета массоотдачи, происходящей в аналогичных условиях, используется уравнение

$$\overline{Nu}_\partial = a Re^n Pr^m_\partial,$$

где a , n , m – одни и те же величины.

Необходимо учитывать зависимость тепло- и массоотдачи от дополнительных безразмерных переменных, отражающих специфику совместно проходящих процессов переноса теплоты и массы.

Если массообмен не интенсивен, то в ряде случаев его влиянием на теплообмен можно пренебречь с достаточной для практики точностью.

13.3. Диффузионный пограничный слой

Аналогично понятиям гидродинамического и теплового пограничных слоев можно ввести понятие диффузионного пограничного слоя. В его пределах концентрация активного компонента смеси изменяется от m_{2c} на поверхности раздела фаз до m_{20} на внешней границе слоя. Внутри пограничного слоя справедливо условие $\partial m_2 / \partial y \neq 0$, вне диффузионного пограничного слоя и на его внешней границе выполняются условия

$$m_2 = m_{20}; \quad \partial m_2 / \partial y = 0.$$

Диффузионный пограничный слой может образовываться в процессах испарения, сублимации, вдува вещества через пористую стенку, при конденсации пара из парогазовой смеси и т. д.

Для диффузионного пограничного слоя дифференциальное уравнение массообмена может быть упрощено. В случае омывания плоской неограниченной пластины поле концентрации в диффузионном пограничном слое можно описать следующим уравнением:

$$\rho \left(w_x \frac{\partial m_2}{\partial x} + w_y \frac{\partial m_2}{\partial y} \right) = - \frac{\partial I_{y2}}{\partial y}.$$

Дифференциальное уравнение диффузионного пограничного слоя аналогично уравнениям теплового и гидродинамического пограничного слоев и справедливо при идентичных условиях. Следовательно, при аналогичных условиях однозначности решения этих уравнений должны быть одинаковы.

$$\psi = St / St_0,$$

где St_0 – число Стантона при отсутствии массообмена.

$b = (j_{ic} / \rho w_0) l / St_0$ – фактор проницаемости, пропорциональный плотности поперечного потока на поверхности стенки (раздела фаз) j_{ic} ; w_0 – скорость потока за пределами пограничного слоя.

При $b \leq 0,1$ теплоотдача практически не зависит от поперечного потока вещества.

В заключение отметим, что при очень интенсивном вдуве уравнения пограничного слоя могут не выполняться. Условием их выполнения может служить неравенство $b < 10$. При этом пограничный слой еще сравнительно тонок.

13.4. Критерии подобия тепло- и массопереноса

Наличие дифференциальных уравнений совместно с условиями однозначности позволяет воспользоваться теорией подобия для получения критериев подобия.

$$D\rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_{II} + D\rho_0 \delta \left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_{II} + G = 0 \quad (13.12)$$

$$-\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_{II} + \alpha(t_c - t_{II}) - \rho(1 - \xi)G = 0 \quad (13.13)$$

где ρ_0 – плотность абсолютно сухого тела;

t_c – температура среды;

t_n – температура поверхности тела, получается ряд критериев подобия. Критерий Фурье

$$Fo = \frac{a\tau}{l^2}; \quad Fo_D = \frac{D\tau}{l^2}.$$

характеризующий гомохронность полей переноса тепла и массы вещества.

Критерий Лыкова

$$Lu = \frac{D}{a},$$

характеризующий инерционность поля влажности по сравнению с

инерционностью температурного поля. Критерий Поснова

$$Pn = \frac{\delta \Delta t}{\Delta u},$$

равный отношению перепада удельного влагосодержания, вызванного перепадом температуры в стационарном состоянии. Критерий Кирпичева для переноса тепла и влаги

$$Ki = \frac{ql}{\lambda \Delta t}; \quad Ki_D = \frac{Gl}{D \rho_0 \Delta u}.$$

Критерии Pn и Ki характеризуют: первый – отношение потока тепла, подводимого к поверхности тела, к потоку тепла, отводимого внутрь тела, а второй – соотношение между интенсивностями внешнего и внутреннего переноса массы.

Тепловой и диффузионный (для переноса вещества) критерий Прандтля

$$Pr = \frac{\nu}{a}; \quad Pr_D = \frac{\nu}{D}.$$

Критерий Нуссельта

$$Nu_D = \frac{\alpha_D l}{D},$$

где α_D – коэффициент массоотдачи, отнесенный к разности концентраций диффундирующего вещества, $м/сек$.

Этот коэффициент является аналогом коэффициента теплоотдачи

Диффузионный критерий Нуссельта Nu_D характеризует соотношение между интенсивностью массообмена и влагопроводностью в пограничном слое.

Критерий Гухмана

$$Gu = \frac{T_c - T_M}{T_c},$$

где T_c и T_M — абсолютная температура парогазовой смеси по сухому и мокрому термометрам.

Термодинамический критерий испарения Гухмана характеризует влияние массопереноса на теплообмен.

При экспериментальном изучении чистого теплообмена иско-

мой величиной является, как правило, коэффициент теплоотдачи a , а критерий Nu будет определяемым, критерии Fo , Re , Pr , Gr , Gu – определяющими. Зависимость между критериями подобия определяется соотношением

$$Nu = f(Fo, Re, Gr, Pr, Gu).$$

Результаты обработки экспериментальных данных по массообмену обычно представляются в виде критериального уравнения

$$Nu_D = f(Fo_D, K_1, Re, Ar, Pr_D, Gu),$$

где критерий $K_1 = \frac{1}{1 - \rho_{10}}$, а ρ_{10} определяется из уравнения $\rho_{10} = \frac{u}{1 - u}$ (u – влагосодержание).

В применении к отдельным задачам критериальные уравнения могут быть упрощены. Например, при стационарном процессе выпадают критерии Fo и Fo_D ; при вынужденном турбулентном движении можно пренебречь влиянием свободного движения, вследствие чего выпадают критерии Gr и Ar .

ЛИТЕРАТУРА

1. Промышленные теплообменные процессы и установки /под общ. ред. А.М. Бакластова. – М.: Энергоатомиздат, 1986. – 322с.
2. Промышленная теплоэнергетика и теплотехника: Справочник /под общ. ред. В.А. Григорьева и В. М. Зорина. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – кн.4. – 586 с.
3. Теплотехническое оборудование и теплоснабжение промышленных предприятий. /Б.Н. Голубков [и др.]. – М.: Энергия, 1972. – 422 с.
4. Нащокин, В.В. Техническая термодинамика и теплопередача. /В.В. Нащокин. – М.: Высшая школа, 1980.– 468 с.
5. Исаченко, В. П. Теплопередача. /В.П. Исаченко, В.А. Осипова, Л.С. Сукомел. – М.: Энергоатомиздат, 1981. – 417с.
6. Дытнерский, Ю.И. Основные процессы и аппараты химической технологии. Пособие по проектированию. /Ю.И. Дытнерский, Г.С. Борисов, В.П. Брыков. – М.: Химия, 1991. – 412 с.
7. Богданов, С.Н. Теоретические основы хладотехники. /С.Н. Богданов. – М.: Агропромиздат, 1986. – 319 с.
8. Керн, Д. Развитые поверхности теплообмена. /Д. Керн, А. Краус. – М.: Энергия, 1977. – 461 с.
9. Низкотемпературные тепловые трубы /под общ. ред. Л.Л.Васильева. – Мн.: Наука и техника, 1976. – 138 с.
10. Плановский, А.А. Сушка дисперсных материалов в химической промышленности. /А.А. Плановский, Б.И. Муштаев, В.М. Ульянов. – М.: Химия, 1979. – 287 с.
11. Павлов, К.Ф. Примеры и задачи по курсу процессов и аппаратов химической технологии. /К.Ф. Павлов, П.Г. Романков, А.А. Носков. – Л.: Химия, 1981. – 560 с.
12. Лебедев, П.Д., Теплоиспользующие установки промышленных предприятий. /П.Д. Лебедев, А.А. Щукин. – М.: Энергия, 1970. – 408 с.
13. Мещеряков, Ф.Е. Основы холодильной техники и холодильной технологии. /Ф.Е. Мещеряков. – М.: Пищевая промышленность, 1975. – 559 с.
14. Доссат, Р.Дж. Основы холодильной техники. /Р.Дж. Доссат. – М.: Легкая и пищевая промышленность, 1984. – 518 с.

15. Холодильные машины. /Н.Н. Кошкин [и др.] – М.: Пищевая промышленность, 1973. – 511 с.
16. Теплообменные аппараты холодильных установок. / Г.Н. Данилова [и др.] – Л.: Машиностроение, 1986.– 328 с.
17. Тепловые и конструктивные расчеты холодильных машин. /Е.М. Бамбушек [и др.] – Л.: Машиностроение, 1987. – 420 с.
18. Касаткин, А.Г. Основные процессы и аппараты химической технологии. /А.Г. Касаткин. – М.: Химия, 1973. – 652 с.
19. Сидельковский, Л.Н. Котельные установки промышленных предприятий. /Л.Н. Сидельковский, В.Н. Юренев. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 528 с.
20. Зайцев И.Д., Асеев Г.Г. Физико-химические свойства бинарных и многокомпонентных растворов неорганических веществ. М.: Химия, 1988. 498с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|--|-----|
| Введение | 3 |
| Часть первая. Теплопроводность | 6 |
| Глава 1. Основные положения учения о теплопроводности | 6 |
| 1.1. Методы изучения физических явлений | 6 |
| 1.2. Температурное поле | 7 |
| 1.3. Температурный градиент | 9 |
| 1.4. Тепловой поток. Закон Фурье | 10 |
| 1.5. Зависимость коэффициента теплопроводности веществ от параметров состояния | 12 |
| 1.6. Дифференциальное уравнение теплопроводности | 16 |
| 1.7. Условия однозначности для процессов теплопроводности | 23 |
| Глава 2. Теплопроводность при стационарном режиме | 27 |
| 2.1. Передача теплоты через плоскую стенку ($q_v = 0$) | 27 |
| 2.2. Передача теплоты через цилиндрическую стенку ($q_v = 0$) | 35 |
| 2.3. Критический диаметр цилиндрической стенки | 42 |
| 2.4. Теплопроводность в стержне (ребре) постоянного поперечного сечения | 45 |
| 2.5. Теплопередача через ребристую плоскую стенку | 51 |
| Глава 3. Нестационарные процессы теплопроводности | 56 |
| 3.1. Общие положения | 56 |
| 3.2. Аналитическое описание процесса | 57 |
| 3.3. Охлаждение (нагревание) неограниченной пластины | 58 |
| 3.4. Определение количества теплоты, отданного пластиной в процессе охлаждения | 74 |
| 3.5. Охлаждение (нагревание) тел конечных размеров | 76 |
| 3.6. Зависимость процесса охлаждения (нагревания) от формы и размеров тела | 80 |
| 3.7. Регулярный режим охлаждения (нагревания) тел | 81 |
| Часть вторая. Конвективный теплообмен в однородной среде | 91 |
| Глава 4. Основные положения учения о конвективном теплообмене | 91 |
| 4.1. Основные понятия и определения | 91 |
| 4.2. Физические свойства жидкости | 94 |
| 4.3. Дифференциальные уравнения конвективного теплообмена (постановка краевых задач конвективного теплообмена) | 98 |
| 4.4. Гидродинамический и тепловой пограничные слои | 103 |

| | |
|---|-----|
| 4.5. Турбулентный перенос теплоты и количества движения | 107 |
| Глава 5. Подобие и моделирование процессов конвективного теплообмена | 109 |
| 5.1. Общие положения | 109 |
| 5.2. Приведение математической формулировки краевой задачи к записи в безразмерных переменных | 110 |
| 5.3. Безразмерные переменные (числа подобия) и уравнения подобия | 114 |
| 5.4. Условия подобия физических процессов | 119 |
| 5.5. Следствия из условий подобия | 120 |
| Глава 6. Общие вопросы обработки результатов измерения и расчета конвективной теплоотдачи | 123 |
| 6.1. Местный коэффициент теплоотдачи | 123 |
| 6.2. Средняя по сечению потока температура жидкости | 123 |
| 6.3. Осреднение коэффициентов теплоотдачи и температурного напора | 125 |
| 6.4. Получение эмпирических формул | 127 |
| Глава 7. Теплоотдача при вынужденном продольном омывании плоской поверхности | 131 |
| 7.1. Интегральные уравнения пограничного слоя | 131 |
| 7.2. Теплоотдача при ламинарном пограничном слое | 132 |
| 7.3. Переход ламинарного течения в турбулентное | 137 |
| 7.4. Теплоотдача при турбулентном пограничном слое | 140 |
| Глава 8. Теплоотдача при вынужденном течении жидкости в трубах | 146 |
| 8.1. Особенности движения и теплообмена в трубах | 146 |
| 8.2. Теплоотдача при течении жидкости в гладких трубах круглого поперечного сечения. | 153 |
| Глава 9. Теплоотдача при вынужденном поперечном смывании труб и пучков труб | 164 |
| 9.1. Теплоотдача при поперечном омывании одиночной круглой трубы | 164 |
| 9.2. Теплоотдача при поперечном омывании пучков труб | 168 |
| Глава 10. Теплообмен при изменении агрегатного состояния | 171 |
| 10.1. Теплоотдача при кипении жидкости | 171 |
| 10.2. Теплоотдача при конденсации пара | 173 |
| 10.3. Влияние различных факторов на теплоотдачу при конденсации | 176 |
| Часть третья. Теплообмен излучением | 178 |

| | |
|--|-----|
| Глава 11. Теплоперенос излучением | 178 |
| 11.1. Теплоперенос излучением. Основные законы лучистого теплообмена. Коэффициент облученности тел | 178 |
| 11.2. Основные законы теплового излучения. Закон Планка | 180 |
| 11.3. Закон Стефана-Больцмана | 182 |
| 11.4. Закон Кирхгофа | 183 |
| 11.5. Закон Ламберта | 185 |
| 11.6. Лучистый теплообмен между двумя телами в лучепрозрачной среде | 186 |
| 11.7. Лучистый теплообмен между газами и окружающими их стенками | 188 |
| 11.8. Экраны | 189 |
| 11.9. Сложный теплообмен | 191 |
| 11.10. Сложный теплообмен | 192 |
| Часть четвертая. Теплообменные аппараты | 194 |
| Глава 12. Теплопередача в теплообменных аппаратах | 194 |
| 12.1. Тепловой баланс и водяные эквиваленты | 194 |
| 12.2. Определение среднего температурного напора | 196 |
| 12.3. Сравнение схем теплообменников | 197 |
| 12.4. Расчет конечной температуры рабочих жидкостей | 198 |
| Часть пятая. Основные закономерности тепло- и массопереноса | 199 |
| Глава 13. Тепло- и массоотдача | 199 |
| 13.1. Основные понятия и определения | 199 |
| 13.2. Тройная аналогия | 202 |
| 13.3. Диффузионный пограничный слой | 204 |
| 13.4. Критерии подобия тепло- и массопереноса | 205 |
| Литература | 206 |

Овсянник Анатолий Васильевич
Новиков Михаил Николаевич
Шаповалов Александр Валерьевич

ТЕПЛОМАССОБМЕН

Курс лекций
для студентов специальностей
1-43 01 05 «Промышленная теплоэнергетика» дневной
и заочной форм обучения и 1-43 01 07 «Техническая
эксплуатация энергооборудования организаций»
дневной формы обучения

Подписано к размещению в электронную библиотеку
ГГТУ им. П. О. Сухого в качестве электронного
учебно-методического документа 01.02.10.

Per. № 108E.
E-mail: ic@gstu.by
<http://www.gstu.by>