Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (105), 2017

## Физика

*УДК 539.12*

# Углы смешивания из распадов векторных мезонов

В.В. Андреев[1], В.Ю. Гавриш[2], А.Ф. Крутов[3]

На основе общей структуры констант лептонных и радиационных распадов легких мезонов, рассчитанных в пуанкаре инвариантной квантовой механике и современных экспериментальных данных, проведен анализ углов смешивания для $\varphi$, $\omega$ и $\eta$, $\eta^{'}$-мезонов.
**Ключевые слова:** угол смешивания, пуанкаре инвариантная квантовая механика, константа распада.

On the basis of the general structure of the leptonic and radiative decays of light mesons calculated in Poincaré invariant quantum mechanics and modern experimental data, an analysis of mixing angles for $\varphi$, $\omega$, and $\eta$, $\eta^{'}$ mesons is performed.
**Keywords:** mixing angle, Poincaré invariant quantum mechanics, decay constant.

**Введение.** Значения углов смешивания $\varphi-\omega$ и $\eta-\eta^{'}$ обсуждались много раз за последние пятьдесят лет. Интерес к такой тематике связан с нарушением $SU(3)$ симметрии для процессов с указанными адронами. Имеются многочисленные исследования по извлечению значения углов смешивания на основе различных экспериментальных данных (например, [1], [2], [3], [4]).

Важными составляющими процедуры извлечения углов смешивания из распадов легких мезонов являются схемы смешивания и построения матричных элементов данных процессов. Последнее делается с использованием тех или иных моделей (модельные киральные лагранжианы [4], релятивистские кварковые модели [5], феноменологические построения [1], [6].

Классической схемой смешивания легких мезонов является процедура, в которой используется по одному углу для $\varphi-\omega$ и $\eta-\eta^{'}$ состояний: $\theta_V$ и $\theta_P$, соответственно (так называемый one mixing angle analysis). При этом другие легкие мезоны ($\rho,\pi$ и $K$-мезоны), состоящие из $u,d$ и $s$-кварков не смешиваются с $\varphi,\omega$ и $\eta,\eta^{'}$ мезонами.

Наряду с классической схемой смешивания в последнее время исследуются схемы с двумя углами смешивания для $\eta-\eta^{'}$ мезонов [7], [8], варианты, включающие дополнительное смешивание между $\rho$ и $\omega$ мезонами [9], [10], а также смешивание для $\rho-\omega-\varphi$ и $\pi-\eta-\eta^{'}$ мезонов с тремя углами смешивания для каждой из комбинаций [11].

В данной работе предлагается провести процедуру извлечения углов смешивания из распадов псевдоскалярных $P$ и векторных мезонов $V$ типа $V\to\ell^-\ell^+$ (распад в лептонную пару $\ell^-\ell^+$) и $V\to P\gamma$, $P\to V\gamma$ (радиационные распады) с использованием только общей структуры матричных элементов в рамках релятивистской кварковой модели, основанной на пуанкаре инвариантной квантовой механике (ПИКМ) [12], [13].

Поскольку свойства мезонов изучаются на низкоэнергетических масштабах, то особую важность приобретают непертурбативные эффекты квантовой хромодинамики (КХД). ПИКМ является удобной моделью для эффективного включения непертурбативных эффектов КХД, а также учета релятивистских эффектов и даже структуры самих кварков. Используя минимальные знания о векторах состояний мезонов, как кварк-антикварковых системах, можно рассчитать различные характеристики мезонов, такие как: формфакторы, константы распадов и др.

Процедура извлечения не использует никаких предположений о параметрах релятивистской кварковой модели на основе ПИКМ: кварковые массы, параметры потенциала взаимодействия и др. Основными элементами данного исследования: использование классической схемы смешивания и требования соответствия модельных расчетов и экспериментальных данных, взятых из PDG [14]. Дополнительным моментом такой процедуры – это возможность получения ограничений и для некоторых параметров релятивистской кварковой модели, основанной на точечной форме ПИКМ.

**1. Определения.** Простейшая схема смешивания $SU(3)$-синглетных и октетных состояний

$$\left|\psi_8\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\left\{\left|u\bar{u}\right\rangle + \left|d\bar{d}\right\rangle - 2\left|s\bar{s}\right\rangle\right\}, \quad \left|\psi_1\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left\{\left|u\bar{u}\right\rangle + \left|d\bar{d}\right\rangle + \left|s\bar{s}\right\rangle\right\}, \tag{1}$$

приводит к физическим состояниям $\varphi-\omega$ и $\eta-\eta'$ мезонов:

$$\left|\varphi\right\rangle = \cos\theta_V\left|\psi_8\right\rangle - \sin\theta_V\left|\psi_1\right\rangle, \quad \left|\omega\right\rangle = \sin\theta_V\left|\psi_8\right\rangle + \cos\theta_V\left|\psi_1\right\rangle, \tag{2}$$

$$\left|\eta\right\rangle = \cos\theta_P\left|\psi_8\right\rangle - \sin\theta_P\left|\psi_1\right\rangle, \quad \left|\eta'\right\rangle = \sin\theta_P\left|\psi_8\right\rangle + \cos\theta_P\left|\psi\right\rangle_1, \tag{3}$$

где $\theta_V$ и $\theta_P$ углы смешивания для векторных и псевдоскалярных мезонов соответственно. Предполагая ортогональность физических состояний $\varphi-\omega$ и $\eta$-$\eta'$ состояний и отсутствие смешивания с другими векторными и псевдоскалярными мезонами соотношения (2) и (3) можно записать в виде:

$$\left|\varphi\right\rangle = \cos\delta_V\left|\eta_{NS}\right\rangle - \sin\delta_V\left|\eta_S\right\rangle, \quad \left|\omega\right\rangle = \sin\delta_V\left|\eta_{NS}\right\rangle + \cos\delta_V\left|\eta_S\right\rangle, \tag{4}$$

$$\left|\eta\right\rangle = \cos\delta_P\left|\eta_{NS}\right\rangle - \sin\delta_P\left|\eta_S\right\rangle, \quad \left|\eta'\right\rangle = \sin\delta_P\left|\eta_{NS}\right\rangle + \cos\delta_P\left|\eta\right\rangle_S, \tag{5}$$

где $\left|\eta_{NS}\right\rangle = \left|u\bar{u} + d\bar{d}\right\rangle / \sqrt{2}$ и $\left|\eta_S\right\rangle = \left|s\bar{s}\right\rangle$.

Функции от углов $\delta_a$ ($a = V$ или $a = P$) связаны с углами смешивания $\theta_a$ соотношениями:

$$\cos\delta_a = \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\theta_a - \sqrt{\frac{2}{3}}\sin\theta_a, \quad \sin\phi_a = \sqrt{\frac{2}{3}}\cos\theta_a + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta_a. \tag{6}$$

**2. Методика расчета констант распадов векторных мезонов.** Реакция распада векторного мезона $V$ в лептонную пару $\ell_1$, $\ell_2$

$$V \to \ell_1 + \ell_2, \tag{7}$$

или $M1$ радиационные переходы

$$V \to P + \gamma^*, \quad P \to V + \gamma^*, \tag{8}$$

характеризуется $S$-матричными элементами

$$\left\langle 0\right|S - I\left|\Psi_{\mathbf{Q},M_V,J=1\mu}\right\rangle, \tag{9}$$

$$\left\langle\Psi_{\mathbf{Q}',M_P}\right|S - I\left|\Psi_{\mathbf{Q},M_V,J=1\mu}\right\rangle. \tag{10}$$

Здесь вектор

$$\left|\Psi_{\mathbf{Q},M,J\mu}\right\rangle \tag{11}$$

определяет состояние мезона спина $J$, массы $M$ и импульса $\mathbf{Q}$ в представлении Гейзенберга [15]. Мезон определяют как релятивистскую составную систему кварка $q$ и антикварка $\bar{Q}$ в рамках пуанкаре-инвариантной квантовой механики [13], [16].

Рассмотрим основные этапы вычисления матричных элементов процессов вида (7), (8) с учетом кварковой структуры в самом общем случае:

$$I^h = \left\langle\Psi_{\mathbf{Q}',M',J'\mu'}\right|S - I\left|\Psi_{\mathbf{Q},M,J\mu}\right\rangle. \tag{12}$$

Общая концепция данной методики частично изложена в работах [17], [18]).

Пуанкаре инвариантная квантовая механика дает возможность связать вектор состояния мезона (11) с векторами состояний, входящих в него кварков на основе представлений группы Пуанкаре. Главным требованием пуанкаре инвариантной квантовой механики является условие сохранения пуанкаре-инвариантности как для систем без взаимодействия, так и для взаимодействующих частиц.

Схема решения поставленной задачи состоит в следующем: на первом этапе строится базис прямого произведения двух частиц без учета взаимодействия. В случае системы двух частиц с массами $m_q$ и $m_Q$ и соответственно с 4-импульсами $p_1 = \left(\omega_{m_q}(p_1), \mathbf{p}_1\right)$ и $p_2 = \left(\omega_{m_Q}(p_2), \mathbf{p}_2\right)$ этот базис

$$\left|\mathbf{p}_1,\lambda_1\right\rangle\left|\mathbf{p}_2,\lambda_2\right\rangle \equiv \left|\mathbf{p}_1,\lambda_1;\mathbf{p}_2,\lambda_2\right\rangle \ , \tag{13}$$

определяет приводимое представление группы Пуанкаре.

На втором этапе с помощью разложения Клебша-Гордана для группы Пуанкаре (см., например, [19], [20]) строится базис неприводимого представления, который характеризует систему целиком. Для этого введем полный импульс

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \,, \tag{14}$$

и относительный импульс $\mathbf{k}$ двух частиц. Базис двухчастичного неприводимого представления определяется квантовыми числами полного импульса (14), полного углового момента $J$, его проекцией $\mu$, эффективной массой невзаимодействующих частиц

$$M_0 = \omega_{m_Q}\left(k\right) + \omega_{m_q}\left(k\right),\ \omega_m\left(k\right) = \sqrt{k^2 + m^2}\ , \tag{15}$$

или $k = \left|\mathbf{k}\right|$, а также двумя дополнительными числами, которые снимают вырождение данного базиса.

В зависимости от выбора чисел, снимающих вырождение, различают две схемы: схема с «L-S»связью с квантовыми числами орбитального момента относительного движения $\ell$ и полного спинового момента $S$ и схема «спиральность» с пуанкаре-инвариантными спиральностями $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2$ [20].

При использование схемы с «L–S связью» базисные векторы неприводимого представления выражается через базис приводимого представления посредством:

$$\begin{gathered}\left|\mathbf{P},k,J\mu,\ell,s\right\rangle = \sum_{\lambda_1\lambda_2}\sum_{\nu_1\nu_2}\int d^2\hat{\mathbf{k}}\sqrt{\frac{\omega_{m_1}\left(p_1\right)\omega_{m_2}\left(p_2\right)M_0}{\omega_{m_1}\left(k\right)\omega_{m_2}\left(k\right)\omega_{M_0}\left(P\right)}}Y_{\ell m}\left(\theta_k,\varphi_k\right)\times \\ \times\mathbf{C}\begin{Bmatrix} s_1 & s_2 & s \\ \nu_1, & \nu_2, & \lambda\end{Bmatrix}\mathbf{C}\begin{Bmatrix} \ell & s & J \\ m, & \lambda, & \mu\end{Bmatrix}D^{1/2}_{\lambda_1,\nu_1}\left(\mathbf{n}_{W_1}\right)D^{1/2}_{\lambda_2,\nu_2}\left(\mathbf{n}_{W_2}\right)\left|\mathbf{p}_1,\lambda_1,\mathbf{p}_2,\lambda_2\right\rangle,\end{gathered} \tag{16}$$

где $\mathbf{C}\begin{Bmatrix} s_1 & s_2 & s \\ \nu_1, & \nu_2, & \lambda\end{Bmatrix}$, $\mathbf{C}\begin{Bmatrix} \ell & s & j \\ m, & \lambda, & \mu\end{Bmatrix}$ – коэффициенты Клебша-Гордана группы $SU(2)$, а $Y_{lm}(\theta_k,\varphi_k)$ – сферические функции, определяемые углами вектора $\mathbf{k}$.

Для сокращения записей введем вспомогательную функцию

$$\begin{gathered}\Omega\begin{Bmatrix} \ell & s & J \\ \nu_1, & \nu_2, & \mu\end{Bmatrix}\left(\theta_k,\varphi_k\right) = \mathbf{C}\begin{Bmatrix} s_1 & s_2 & s \\ \nu_1, & \nu_2, & \lambda\end{Bmatrix}\mathbf{C}\begin{Bmatrix} \ell & s & J \\ m, & \lambda, & \mu\end{Bmatrix}Y_{\ell m}\left(\theta_k,\varphi_k\right) = \\ = \mathbf{C}\begin{Bmatrix} s_1 & s_2 & s \\ \nu_1, & \nu_2, & \nu_1+\nu_2\end{Bmatrix}\mathbf{C}\begin{Bmatrix} \ell & s & J \\ \mu-(\nu_1+\nu_2), & \nu_1+\nu_2, & \mu\end{Bmatrix}Y_{\ell\,\mu-(\nu_1+\nu_2)}\left(\theta_k,\varphi_k\right)\end{gathered} \tag{17}$$

Для частных простейших случаев ($s_1 = s_2 = 1/2$) имеем, что

$$\begin{gathered}\Omega\begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \nu_1, & \nu_2, & \mu\end{Bmatrix}\left(\theta_k,\varphi_k\right) = \delta_{\mu,0}\delta_{\nu_1,-\nu_2}\,\frac{\nu_1}{\sqrt{2\pi}}\,, \\ \Omega\begin{Bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \nu_1, & \nu_2, & \mu\end{Bmatrix}\left(\theta_k,\varphi_k\right) = \delta_{\mu,\nu_1+\nu_2}\,\frac{\sqrt{3+4\nu_1\nu_2}}{4\sqrt{\pi}}\,.\end{gathered} \tag{18}$$

Волновая функция связанной системы в мгновенной и точечной форме динамики ПИКМ может быть представлена в виде [16]

$$\begin{gathered}\left\langle\mathbf{P},k,J\mu',\ell,s\right|\Psi_{\mathbf{Q},J,\mu}\rangle = \delta(\mathbf{Q}-\mathbf{P})\delta_{\mu,\mu'}\Psi^J_{\ell s}\left(k\right), \\ \left\langle\mathbf{P},k,J\mu',\ell,s\right|\Psi_{\mathbf{Q},J,\mu}\rangle = \frac{1}{M_0^3}\delta(\frac{\mathbf{Q}}{M}-\frac{\mathbf{P}}{M_0})\delta_{\mu,\mu'}\Psi^J_{\ell s}\left(k\right).\end{gathered}$$

Волновая функция $\Phi^J_{\ell s}\left(k\right)$ нормирована условием

$$\sum_{\ell,s}\int dk\,k^2\left|\Phi^J_{\ell s}\left(k\right)\right|^2 = 1\,,$$

которое следует из условия полноты состояния неприводимого базиса.

Используя (16), находим, что вектор состояния двухчастичной связанной системы определяется как прямое произведение векторов состояний свободных частиц с волновой функцией $\Phi^J_{\ell s}(k)$:

$$\begin{aligned}|\Psi_{\mathbf{Q},J,\mu}\rangle = \sum_{\lambda_1\lambda_2}\sum_{\nu_1\nu_2}\int d\mathbf{k}\sqrt{\frac{\omega_{m_1}(p_1)\,\omega_{m_2}(p_2)\,M_0}{\omega_{m_1}(k)\,\omega_{m_2}(k)\,\omega_{M_0}(P)}}\Phi^J_{\ell s}(k)\times\\ \times\Omega\begin{Bmatrix}\ell & s & J\\ \nu_1, & \nu_2, & \mu\end{Bmatrix}(\theta_k,\varphi_k)\,D^{1/2}_{\lambda_1,\nu_1}(\mathbf{n}_{W_1})\,D^{1/2}_{\lambda_2,\nu_2}(\mathbf{n}_{W_2})\,|\mathbf{p}_1,\lambda_1,\mathbf{p}_2,\lambda_2\rangle.\end{aligned} \tag{19}$$

Использование (19) позволяют свести вычисление матричного элемента (12) к матричному элементу взаимодействия между структурными элементами $|\mathbf{p}_1,\lambda_1,\mathbf{p}_2,\lambda_2\rangle$ связанной системы, т. е.

$$\begin{aligned}\langle\Psi_{\mathbf{Q}',M',J'\mu'}|S-I|\Psi_{\mathbf{Q},M,J\mu}\rangle = \sum_{\lambda_1,\lambda_2}\sum_{\nu_1,\nu_2}\sum_{\lambda_1'\lambda_2'}\sum_{\nu_1',\nu_2'}\sum_{\ell',s'}\sum_{\ell,s}\\ \times\int d\mathbf{k}'\,d\mathbf{k}\sqrt{\frac{\omega_{m_q}(p_1)\,\omega_{m_Q}(p_2)\,M_0}{\omega_{m_q}(k)\,\omega_{m_Q}(k)\,\omega_{M_0}(P)}}\sqrt{\frac{\omega_{m_q'}(p_1')\,\omega_{m_Q'}(p_2')\,M_0'}{\omega_{m_q'}(k')\,\omega_{m_Q'}(k')\,\omega_{M_0'}(P')}}\times\\ \times\Omega\begin{Bmatrix}\ell & s & J\\ \nu_1, & \nu_2, & \mu\end{Bmatrix}(\theta_k,\varphi_k)\,\Omega^*\begin{Bmatrix}\ell' & s' & J'\\ \nu_1', & \nu_2', & \mu'\end{Bmatrix}(\theta_{k'},\varphi_{k'})\times\Phi^{*J'}_{\ell's'}(k')\,\Phi^J_{\ell s}(k)\times\\ \times\langle\mathbf{p}_2',\mathbf{p}_1',\lambda_1',\lambda_2'|S-I|\mathbf{p}_1,\lambda_1,\mathbf{p}_2,\lambda_2\rangle\,D^{*1/2}_{\lambda_1',\nu_1'}(\mathbf{n}_{W_1}')\,D^{*1/2}_{\lambda_2',\nu_2'}(\mathbf{n}_{W_2}')\,D^{1/2}_{\lambda_1,\nu_1}(\mathbf{n}_{W_1})\,D^{1/2}_{\lambda_2,\nu_2}(\mathbf{n}_{W_2}).\end{aligned} \tag{20}$$

Детали методики вычисления (20) можно найти в работах [17], [21].

**3. Константы распадов векторных мезонов.** Постоянная $f_V$ лептонного распада $V(Q\overline{q}) \to \ell + \overline{\ell}$ для векторного мезона $V(Q\overline{q})$ массы $M_V$ обычно определяется следующим соотношением:

$$j^\mu_V \equiv \langle 0|J^\mu_V(0)|\Psi_{\mathbf{P},\lambda,M_V}\rangle = i(1/2\pi)^{3/2}\frac{\varepsilon^\mu_\lambda M_V f_V}{\sqrt{2\,\omega_{M_V}(P)}}? \tag{21}$$

с вектором поляризации $\varepsilon^\mu_\lambda$ векторного мезона.

В рамках ПИКМ, процесс распада $V(Q\overline{q}) \to \ell + \overline{\ell}$ обусловлен электромагнитным взаимодействием кварков, входящих в мезон $V$, поэтому в случае легких мезонов ток $J^\mu_V(0)$ запишется в виде:

$$J^\mu_V(0) = e_u\overline{u}\gamma^\mu u + e_d\overline{d}\gamma^\mu d + e_s\overline{s}\gamma^\mu s\,. \tag{22}$$

Ширина распада $V(Q\overline{q}) \to \ell + \overline{\ell}$ задается выражением

$$\Gamma_V = \frac{4\pi\alpha^2}{3M_V}f_V^2\left(1+\frac{2m_\ell^2}{M_V^2}\right)\sqrt{1-\frac{4\,m_\ell^2}{M_V^2}}\,, \tag{23}$$

где $\alpha$ – постоянная тонкой структуры.

Используя соотношения (21), (22), а также (4) получим, что константы $\rho^0$, $\varphi$ и $\omega$-мезонов в рамках импульсного приближения запишутся в виде

$$f^V_\rho = \frac{W(u)\left(e_u-(1+\Delta)e_d\right)}{\sqrt{2}},\quad f^V_\varphi = \frac{W(u)\left(e_u+(1+\Delta)e_d\right)\cos\delta_V}{\sqrt{2}} - e_sW(s)\sin\delta_V\,,$$

$$f^V_\omega = \frac{W(u)\left(e_u+(1+\Delta)e_d\right)\sin\delta_V}{\sqrt{2}} + e_sW(s)\cos\delta_V\,. \tag{24}$$

В соотношении (24) предполагается «слабое» нарушение изотопической инвариантности между $u$ и $d$ кварками за счет малого параметра $\Delta \approx 0{,}01 \div 0{,}02$. Функция $g$ представляет интеграл вида [22], [23]:

$$W(q) = \frac{\sqrt{3}\,m_q}{\pi}\int_0^\infty dk\,\frac{k^2}{(k^2+m_q^2)^{3/4}}\Psi_V(k,\beta_{qq}),\quad q = u,d,\ldots. \tag{25}$$

Таким образом, в рамках ПИКМ, на основе требования соответствия модельных расчетов экспериментальным данным появляется возможность определить углы смешивания $\varphi-\psi$ мезонов с помощью системы уравнений (24). Результаты вычисления углов смешивания представлены в таблице 1 в зависимости от параметра $\Delta$.

Таблица 1 – Угол смешивания $\theta_V$ в зависимости от параметра $\Delta$ и экспериментальные значения лептонных констант

| Распад | $f^V_{exp}$, ГэВ | $\Delta$ | $\theta_V,^\circ$ |
|---|---|---|---|
| $\rho^0 \to e^+e^-$ | $0,1564 \pm 0,0007$ | $0,00$ | $(30,4 \pm 0,7)^\circ$ |
| $\varphi \to e^+e^-$ | $0,0762 \pm 0,0012$ | $0,01$ | $(31,0 \pm 0,7)^\circ$ |
| $\omega \to e^+e^-$ | $0,0459 \pm 0,0008$ | $0,02$ | $(31,5 \pm 0,7)^\circ$ |

**4. Радиационные распады** $V \to P\gamma$ **и** $P \to V\gamma$. Методика вычисления констант радиационных распадов $V \to P\gamma$ и $P \to V\gamma$ аналогична расчету распада векторного мезона в лептонную пару.

Параметризация матричного элемента для перехода $V \to P\gamma$ в виде

$$\left\langle \Psi_{\mathbf{Q},M_P} \left| J_V^\alpha(0) \right| \Psi_{\mathbf{P},\mu,M_V} \right\rangle = i\frac{g_{VP\gamma}}{(2\pi)^3}\frac{\varepsilon^{\alpha\nu\rho\sigma}\varepsilon_\nu(\mu)P_\rho Q_\sigma}{\sqrt{4\omega_{M_V}(P)\omega_{M_P}(Q)}}, \quad (26)$$

где $g_{VP\gamma}$ -константа радиационного распада, приводит к ширинам радиационных распадов:

$$\Gamma(V \to P\gamma) = \frac{\alpha}{24} g^2_{VP\gamma} (\frac{m_V^2 - m_P^2}{m_V})^3, \quad \Gamma(P \to V\gamma) = \frac{\alpha}{8} g^2_{VP\gamma} (\frac{m_P^2 - m_V^2}{m_P})^3. \quad (27)$$

Используя соотношения (27), (22) и (21), а также формулы (4), (5) можно найти интегральные представления константы $g_{VP\gamma}$ для различных переходов (таблица 2).

Для легких мезонов константа $g_{VP\gamma}$ представляет линейную комбинацию функций

$$X_{ud} = e_d I_v(d) + e_u I_v(u), \quad Z_{ud} = e_u I_v(u) - e_d I_v(d), \quad X_s = e_s I_v(s), \quad (28)$$

где $I_v(q)$ в рамках точечной формы ПИКМ (в отсутствие аномальных магнитных моментов кварков) может быть записана в виде [24]:

$$I_v(q) = -\frac{1}{2}\int_0^\infty dk k^2 \Psi_V(k,\beta_{qq})\Psi_P(k,\beta_{qq})\frac{1}{\omega_{m_q}(k)}\left(\frac{1}{3} + \frac{m_q}{\omega_{m_q}(k)}\right). \quad (29)$$

Таблица 2 – Модельные представления для константы распада $V \to P\gamma$ вместе с извлеченными из соотношений (27) экспериментальными значениями $|g_{VP\gamma}|$

| $n$ | Распад | Представление $g_{VP\gamma}$ в ПИКМ | $\lvert g_{VP\gamma}\rvert$(exp.), ГэВ$^{-2}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $\rho^0 \to \pi^0\gamma$ | $X_{ud}$ | $0,830 \pm 0,056$ |
| 2 | $\rho^0 \to \eta\gamma$ | $Z_{ud}\cos\delta_P$ | $1,586 \pm 0,055$ |
| 3 | $\omega \to \pi^0\gamma$ | $Z_{ud}\sin\delta_V$ | $2,298 \pm 0,040$ |
| 4 | $\omega \to \eta\gamma$ | $X_{ud}\sin\delta_V\cos\delta_P - 2X_s\sin\delta_P\cos\delta_V$ | $0,449 \pm 0,020$ |
| 5 | $\varphi \to \pi^0\gamma$ | $Z_{ud}\cos\delta_V$ | $0,133 \pm 0,003$ |
| 6 | $\varphi \to \eta\gamma$ | $X_{ud}\cos\delta_P\cos\delta_V + 2X_s\sin\delta_P\sin\delta_V$ | $0,694 \pm 0,006$ |
| 7 | $\varphi \to \eta'\gamma$ | $X_{ud}\sin\delta_P\cos\delta_V - 2X_s\sin\delta_V\cos\delta_P$ | $0,716 \pm 0,012$ |
| 8 | $\eta' \to \rho^0\gamma$ | $Z_{ud}\sin\delta_P$ | $1,323 \pm 0,025$ |
| 9 | $\eta' \to \omega\gamma$ | $2X_s\cos\delta_P\cos\delta_V + X_{ud}\sin\delta_P\sin\delta_V$ | $0,429 \pm 0,025$ |

Соотношения из таблицы 2 позволяют провести анализ возможных значений углов смешивания путем сравнения с экспериментальными данными. Так из распадов $\omega \to \pi^0\gamma$, $\varphi \to \pi^0\gamma$ и $\eta' \to \rho^0\gamma$, $\rho^0 \to \eta\gamma$ путем решения системы уравнений находим, что

$$\theta_V = \left(31,94 \pm 0,30\right)^\circ,\ \theta_P = \left(-8,29 \pm 1,10\right)^\circ \tag{30}$$

Минимизация функционала как функции от углов смешивания $\theta_P$ и $\theta_V$

$$\chi^2(\theta_P, \theta_V) = \sum_{n=2}^{9} \frac{g^2_{exp}(n) - g^2_{model}(n)}{\delta g^2_{exp}(n)}, \tag{31}$$

с использованием всех распадов (номера 2–9 в таблице 2) и в предположении, что $X_{ud} = 0,830 \pm 0,056$ (номер 1 в таблице 2) дает, что $\chi^2_{min}$ достигается при значениях

$$\theta_V = \left(31,94 \pm 0,29\right)^\circ,\ \theta_P = \left(-18,83 \pm 2,94\right)^\circ. \tag{32}$$

Углы смешивания $\varphi$ и $\omega$ мезонов (30), (32) и в таблице 1 согласуются друг с другом в пределах $0,6^\circ$. В работе [5] на основе анализа распадов векторных мезонов предлагается использовать значение $\delta_V = -3,3^\circ$, что с учетом определения углов смешивания в данной работе приводит к значению $\theta_V = 31,96^\circ$, что практически совпадает с (30) и (32).

Угол смешивания псевдоскалярных мезонов (32) коррелирует со значением $\theta_P = -18,2^\circ \pm 1,4^\circ$, полученное в [1] и значением $\theta_P = -18,5^\circ \pm 1,0^\circ$, используемое в рамках релятивистской кварковой модели [5] для радиационных распадов $V \to P\gamma$ и $P \to V\gamma$.

Отметим, что в частных случаях (см. (30)), значения $\theta_P$ могут отличаться от величины (32). Аналогичный вывод сделан и в работах [4], [5], где показано, что для различных комбинаций наблюдаемых величин оптимальные с точки зрения экспериментальных данных значения $\theta_P$ могут изменяться в пределах от $-8,0^\circ$ до $-19,0^\circ$.

**Заключение**. На основе общей структуры констант лептонных и радиационных распадов легких мезонов, возникающих в ПИКМ, и современных экспериментальных данных проведен анализ углов смешивания для $\varphi$, $\omega$ и $\eta$, $\eta'$-мезонов. Результаты согласуются в пределах ошибок с работами [1], [4], [5].

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского Республиканского Фонда Фундаментальных Исследований (г. Минск, Беларусь) и Самарского университета (г. Самара, Россия).

## Литература

1. Bramon, A. The eta – eta-prime mixing angle revisited/ A. Bramon, R. Escribano, M.D. Scadron // Eur. Phys. J. – 1999. – Vol. C7. – P. 271–278.

2. Durand, L. Light meson masses and mixings [Electronic resource] / L. Durand. – Mode of access : http://arxiv.org/pdf/hep-ph/0105310. – Date of access : 14.01.2002.

3. Avakian, E.Z. Mixing parameters of $\eta$ and $\eta'$ mesons / E.Z. Avakian, S.L. Avakian // Phys. Part. Nucl. Lett. – 2010. – Vol. 7. – P. 391–396.

4. Pham, T.N. $\eta - \eta'$ Mixing angle from vector meson radiative decays/ T.N. Pham // Nucl. Part. Phys. Proc. – 2016. – Vol. 270–272. – P. 73–77.

5. Jaus, W. Relativistic constituent quark model of electroweak properties of light mesons / W. Jaus // Phys. Rev. – 1991. – Vol. D44. – P. 2851–2859.

6. Bramon, A. Radiative $VP\gamma$ transitions and $\eta - \eta'$ mixing/ A. Bramon, R. Escribano, M.D. Scadron // Phys. Lett. – 2001. – Vol. B503. – P. 271–276.

7. Feldmann, T. Mixing and decay constants of pseudoscalar mesons : The sequel/ T. Feldmann, P. Kroll, B. Stech // Phys. Lett. – 1999. – Vol. B449. – P. 339–346.

8. Chen, Y.-H. Study of $\eta - \eta'$ mixing from radiative decay processes / Y.-H. Chen, Z.-H. Guo, H.-Q. Zheng// Phys. Rev. – 2012. – Vol. D85. – P. 054018.

9. Maltman, K. Isospin breaking vector meson decay constants from continuous families of finite energy sum rules / K. Maltman, C.E. Wolfe // Phys. Rev. – 1999. – Vol. D59. – P. 096003.

10. Bharucha, A. $B \to V\ell^+\ell^-$ in the Standard Model from light-cone sum rules/ A. Bharucha, D.M. Straub, R. Zwicky// JHEP. – 2016. – Vol. 08. – P. 098.

11. Qian, W. Tri-meson-mixing of $\pi$-$\eta$-$\eta'$ and $\rho$-$\omega$-$\varphi$ in the light-cone quark model / W. Qian, B.-Q. Ma // Eur. Phys. J. – 2010. – Vol. C65. – P. 457–465.

12. Mini review of Poincaré invariant quantum theory / W.N. Polyzou, Y. Huang, C. Elster [et al.] // Few Body Syst. – 2011. – Vol. 49. – P. 129–147.

13. Крутов, А.Ф. Мгновенная форма пуанкаре-инвариантной квантовой механики и описание структуры составных систем / А.Ф. Крутов, В.Е. Троицкий // ЭЧАЯ. – 2009. – Т. 40, 2. – С. 268–318.

14. Olive, K.A. Review of Particle Physics / K.A. Olive // Chin. Phys. – 2016. – Vol. C40, 10. – P. 100001.

15. Биленький, С.М. Введение в диаграммы Фейнмана и физику электрослабого взаимодействия / С.М. Биленький. – Москва : Энергоатомиздат, 1990. – 327 с.

16. Keister, B.D. Relativistic Hamiltonian dynamics in nuclear and particle physics / B.D. Keister, W.N. Polyzou // Adv. Nucl. Phys. – 1991. – Vol. 20. – P. 225–479.

17. Андреев, В.В. Электромагнитные формфакторы мезонов / В.В. Андреев, А.Ф. Крутов // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 1 (6). – С. 7–19.

18. Андреев, В.В. Электромагнитные формфакторы псевдоскалярных мезонов / В.В. Андреев, А.Ф. Крутов // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. – 2011. – № 2 (83). – С. 148–163.

19. Широков, Ю.М. Релятивистская теория поляризационных эффектов / Ю.М. Широков // ЖЭТФ. – 1958. – Т. 34, № 4. – С. 1005–1011.

20. Верле, Ю. Релятивистская теория реакций / Ю. Верле. – Москва : Атомиздат, 1969. – 442 с.

21. Андреев, В.В. Электрослабые характеристики квантовых систем в пуанкаре-ковариантных моделях / В.В. Андреев. – Lap Lambert Academic Publishing, 2017. – 320 с.

22. Андреев, В.В. Область константы КХД ниже 1 ГэВ в пуанкаре-ковариантной модели / В.В. Андреев // Письма в ЭЧАЯ. – 2011. – Т. 8, № 4 (167). – С. 581–596.

23. Krutov, A.F. The radius of the rho meson determined from its decay constant / A.F. Krutov, R.G. Polezhaev, V.E. Troitsky // Phys. Rev. – 2016. – Vol. D93, 3. – P. 036007.

24. Андреев, В.В. Константа радиационного распада векторного мезона в пуанкаре-инвариантной квантовой механике / В.В. Андреев, В.Ю. Гавриш // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2013. – № 6 (81). – С. 162–166.

[1]Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

[2]Гомельский государственный технический
университет им. П.О. Сухого

[3]Самарский университет

Поступила в редакцию 29.08.2017