

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Гидропневмоавтоматика»

В. В. Пинчук

ОСНОВЫ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ И ИННОВАЦИОННОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

**УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
по одноименной дисциплине для студентов
специальности 1-36 01 07 «Гидропневмосистемы
мобильных и технологических машин»
дневной и заочной форм обучения**

Гомель 2017

УДК 62-33(075.8)
ББК 34.447я73
ПЗ2

*Рекомендовано научно-методическим советом
машиностроительного факультета ГГТУ им. П. О. Сухого
(протокол № 10 от 13.06.2016 г.)*

Рецензент: доц. каф. «Теоретическая механика» ГГТУ им. П. О. Сухого
канд. техн. наук, доц. *С. Ф. Андреев*

Пинчук, В. В.

ПЗ2 Основы научных исследований и инновационной деятельности : учеб.-метод. пособие по одноим. дисциплине для студентов специальности 1-36 01 07 «Гидропневмосистемы мобильных и технологических машин» днев. и заоч. форм обучения / В. В. Пинчук. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2017. – 69 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: <https://elib.gstu.by>. – Загл. с титул. экрана.

Приведены сведения, пригодные для научных исследований при испытаниях регулирующих и направляющих клапанов.

Для студентов специальности 1-36 01 07 «Гидропневмосистемы мобильных и технологических машин» дневной и заочной форм обучения.

УДК 62-33(075.8)
ББК 34.447я73

© Учреждение образования «Гомельский
государственный технический университет
имени П. О. Сухого», 2017

Глава 1. ЭКСПЕРИМЕНТ И ОШИБКИ ИЗМЕРЕНИЙ

1.1 Роль и разновидности эксперимента

Эксперимент является главным орудием научного метода познания, на котором основывается наука. Лишь эксперимент, дающий повторяющиеся результаты и поддающийся воспроизведению разными исследователями, позволяет установить или подтвердить научную истину.

ГОСТ 24026—80 «Исследовательские испытания. Планирование эксперимента. Термины и определения» характеризует эксперимент как систему операций, воздействий и (или) наблюдений, направленных на получение информации об объекте при исследовательских испытаниях. Эксперимент включает в себя ряд опытов, в процессе каждого из которых происходит воспроизведение исследуемого явления в определенных условиях проведения эксперимента при возможности регистрации его результатов. Условия опытов определяются уровнями факторов, или значениями независимых переменных величин X_1, \dots, X_n , по предположению влияющих на объект исследования. В результате опыта устанавливается значение отклика, или зависимой переменной y , по предположению зависящей от факторов. По данным эксперимента определяется зависимость математического ожидания отклика от факторов — функция отклика:

$$E\{y/x\} = \eta = f(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$$

Здесь $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$ — параметры модели. Геометрическое представление функции отклика называется поверхностью отклика. В технологических исследованиях все факторы можно разделить на три группы:

1) факторы, которые характеризуют качество сырья или промежуточных продуктов и не допускают целенаправленного изменения в ходе исследования. К ним относятся, например, физико-механические (твердость, структура материалов и др.) и технологические (припуск, точность меров и пр.) характеристики заготовок и деталей на промежуточных операциях механической обработки;

2) управляемые факторы, с помощью которых реализуются заданные условия работы объекта: режимы обработки, точностные и прочностные характеристики оборудования и оснастки при обработке резанием и др. (факторы двух первых групп образуют

совокупность контролируемых входных или независимых переменных процесса, учитываемых обычно при определении функции отклика);

3) неконтролируемые входные или независимые факторы. Они характеризуют действующие на объект возмущения, которые не могут быть измерены количественно в каждом опыте (неконтролируемые изменения химического состава материала заготовок и полуфабрикатов, колебания напряжения в электрической сети и температуры среды, изменения свойств оборудования и оснастки во времени и др.). Воздействие неконтролируемых факторов приводит к временному дрейфу (изменению во времени) характеристик объекта (его выходных переменных, значений отклика).

По числу переменных эксперименты могут быть классифицированы на одно- и многофакторные: при однофакторных изменениям и регистрации подлежит один фактор (одна независимая переменная), при многофакторных — несколько факторов, или независимых переменных.

Объекты исследований в экспериментах можно разделить на статистические и детерминированные, управляемые и неуправляемые.

В статистических объектах отклик (случайная зависимая переменная y) находится в стохастической связи со случайными или неслучайными факторами x_1, x_2, \dots, x_k . Примером связи первого вида является зависимость характеристик качества готовых деталей от характеристик качества заготовок при их обработке, а связи второго вида — зависимость характеристик качества готовых деталей от режимов обработки. Стохастическая связь проявляется в том, что изменение независимой величины приводит к изменению закона распределения зависимой случайной величины. Простейшим ее видом является корреляционная связь, при которой с изменением независимой переменной изменяется математическое ожидание или среднее значение отклика.

Для детерминированных объектов характерны функциональные связи между неслучайными величинами, когда каждому значению аргумента соответствует строго определенное значение функции.

Управляемость объекта определяется возможностью воспроизведения на нем результатов опыта. Для проверки этого

свойства можно провести эксперимент при некоторых выбранных уровнях исследуемых факторов, а затем повторить его несколько раз через неравные промежутки времени и сравнить результаты. Воспроизводимость результатов характеризуется разбросом их значений. Если он не превышает некоторой заранее заданной величины (требований к точности эксперимента), то объект удовлетворяет требованию воспроизводимости результатов эксперимента.

Ниже будут рассмотрены методы планирования эксперимента применительно к статистическим, управляемым объектам.

В зависимости от способа выбора уровней факторов (значений независимых переменных) эксперименты делятся на пассивные и активные. Эксперимент, в котором уровни факторов в каждом опыте задаются исследователем, называется *активным*. Эксперимент, при котором уровни факторов в каждом опыте регистрируются исследователем, но не задаются, называется *пассивным*.

Экспериментальные исследования классифицируют также на качественные (с целью установления только факта существования явления) и количественные, лабораторные и промышленные. В последнее время все большее распространение получают автоматизированные экспериментальные исследования.

Экспериментальное исследование включает ряд следующих друг за другом этапов: формулирование цели, выдвижение гипотезы об исследуемом объекте, планирование эксперимента, проведение эксперимента, обработка и анализ результатов, проверка правильности выдвинутой гипотезы, выдвижение новой гипотезы, проверка условий окончания эксперимента, планирование нового эксперимента. Из этой схемы ясно, что исследование объекта состоит из повторяющихся циклов, причем от цикла к циклу растет объем знаний об объекте, а выдвигаемые гипотезы все более приближаются к действительности.

1.2. Основные сведения об измерениях

Термины и определения основных понятий метрологии установлены ГОСТ 16263—70.

Сущность понятия «измерение» раскрывает следующее определение. Измерить какую-либо величину — значит узнать, сколько раз заключается в ней однородная с ней величина, принятая

за единицу меры. Единицы меры устанавливаются действующей системой единиц (в СССР — ГОСТ 8.417—81).

Для измерений различных величин используются специальные приборы и установки. Приборы подбирают в соответствии с желаемой точностью измерений и устанавливают согласно рекомендациям по их нормальной технической эксплуатации. При этом должно быть исключено возможное влияние на работу установки различных внешних факторов (электромагнитных полей, тепловых воздействий, вибраций и т.п.). Затем выполняется ряд контрольных измерений, чтобы убедиться в том, что установка работает в режиме нормальной эксплуатации. С этой целью измеряют заранее известные характеристики эталонных веществ, амплитуды сигналов и т.д. Одновременно (если требуется) проводят тарировку аппаратуры, т.е. определяют показания приборов, соответствующие известным значениям измеряемого фактора. После этого приступают к выполнению запланированных измерений.

Непосредственный процесс измерения состоит из наблюдения и отсчета. Цель наблюдения — фиксация факта наступления какого-либо определенного события. События могут быть самыми разнообразными: иногда требуется совместить две риски, риску — с какой-либо частью измеряемого объекта, заметить момент, когда мениск, образуемый жидкостью в капилляре, становится плоским при изменении давления, и т.д. После наступления ожидаемого события производится считывание показания прибора со шкалы лимба или цифрового табло, определение массы эталонного вещества (гирь) и т.д.

Очевидно, что отсчет по шкале прибора и значение величины, которая измеряется, не одно и то же. Процесс измерения имеет смысл, если между ними существует определенная связь. Наличие такой связи характеризуется уравнением измерения. По виду этих уравнений измерения можно разделить на три группы: прямые, косвенные, совместные. При прямом измерении соответствующее уравнение имеет вид:

$$y = Cx,$$

где y — значение измеряемой величины в принятых для нее единицах; C — цена деления шкалы или единичного показания цифрового табло, переводной коэффициент от единицы меры свойства эталонного вещества к значению измеряемой величины в единицах измеряемой величины; x — отсчет по измерительному

устройству (в делениях шкалы или непосредственно на цифровом табло) или количественная характеристика какого-либо свойства эталонного вещества (например, масса гирь при взвешивании).

Таким образом, при прямых измерениях искомое значение величины находят непосредственно из опытных данных (измерение длины линейкой, углов — транспортиром или измерение какой-либо величины прибором, шкала которого проградуирована в единицах измеряемой величины).

Для косвенного измерения характерно уравнение

$$z = f(x, y, \dots; a, b, \dots),$$

где z — значение измеряемой величины в принятых для нее единицах; x, y, \dots — результаты прямых измерений; a, b, \dots — физические константы и постоянные приборов.

Например, площадь прямоугольника находится измерением длины l_1 и l_2 двух его сторон по соотношению $S = l_1 l_2$. При этом измерение длины сторон будет прямым, а площади прямоугольника — косвенным.

Совместные измерения — это одновременные измерения двух или нескольких неоднородных величин, уравнения, измерения которых образуют систему линейно независимых уравнений. В случае двух измеряемых величин такие уравнения имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} F_1(\alpha, \beta, x_1, y_1, \dots; a_1, b_1, \dots) &= 0; \\ F_2(\alpha, \beta, x_2, y_2, \dots; a_2, b_2, \dots) &= 0, \end{aligned} \right\}$$

где α, β — измеряемые величины; x_1, y_2, \dots — результаты прямых или косвенных измерений; a_1, b_2, \dots — физические константы или постоянные приборов.

Примером совместных измерений может служить оценка параметров некоторой прямой $y = a + \beta x$: тангенса угла ее наклона к оси абсцисс и значения ординаты a при нулевом значении абсциссы ($x=0$).

Аналогичные измерения одноименных величин называются совокупными.

Если число уравнений превышает число неизвестных (в случае многих опытов), то получается система так называемых условных уравнений, которую решают методом наименьших квадратов.

Измерения, при которых число опытов и соответственно число уравнений измерений равно числу измеряемых величин, называют

однократными, если же число опытов и соответственно число уравнений измерения превышает число измеряемых величин — многократными. Измерения проводятся многократно, когда необходимо уменьшить случайную ошибку измерений.

В зависимости от точности результатов можно выделить три класса измерений: 1) эталонные, результат которых должен иметь максимально возможную точность при достигнутом уровне техники и науки {измерения физических констант — скорости света, заряда электрона и т.д.); 2) контрольно-поверочные, при которых ошибка результата не превышает заранее заданного допуска. Такие измерения выполняются в поверочных или контрольно-измерительных лабораториях при поверке приборов; 3) технические, ошибка результатов которых определяется характеристиками измерительного комплекса.

Измерение, основанное на прямых измерениях одной или нескольких основных величин и (или) использовании значений физических констант и функциональных зависимостей, называется *абсолютным*. Размерность результата абсолютных измерений та же, что и измеряемой величины (например, измерение плотности тела $\rho = m/V$, где m — масса, а V — объем тела).

Относительным называется измерение отношения величины к одноименной величине, играющей роль единицы. Такое сравнение позволяет установить, во сколько раз (k) одна величина больше другой. Уравнение относительных измерений — $y = kx$. Примеры относительных измерений: измерение массы тела на весах, длины различного рода линейками, микрометрами, штангенциркулями; разности потенциалов — вольтметрами; силы тока — амперметрами и т.д.

В случае относительных измерений используются приборы, которые предварительно калибруются с помощью эталона единицы соответствующей величины. Таким образом, чтобы были возможны относительные измерения некоторых величин, необходимо создать эталоны единиц этих величин и с их помощью произвести калибровку приборов.

1.3. Типы ошибок измерений

На результат измерения могут оказывать влияние различные факторы. Появляются ошибки, которые накладываются на измеренное значение величины так, что оно представляет собой сумму истинного значения измеряемой величины и ошибок. Поэтому определим ошибку Δx : как разность между результатом измерения x и истинным значением измеряемой величины μ :

$$\Delta x = x - \mu.$$

Такая ошибка называется абсолютной. Ее значение мало говорит о действительной точности измерения, если не сопоставить значения ошибки и самой измеряемой величины. Относительная ошибка обычно выражается в процентах:

$$\varepsilon = \Delta x_{\text{отн}} = \frac{\Delta x}{x} 100$$

Действительно, если какая-либо длина измеряется с точностью до 1 см, то в случае, когда определяется длина карандаша, это будет очень низкая точность (около 10%), если же находится расстояние от Москвы до Ленинграда,— чрезмерно высокая точность (1,6-10⁻⁵%). В последнем случае нет необходимости в такой точности измерения.

Ошибки измерения принято подразделять на систематические, случайные и грубые (промахи).

Систематическая ошибка ν — та, которая остается постоянной на протяжении одной серии измерений или изменяется по какому-либо закону. Такая ошибка возможна при взвешивании на чашечных весах с помощью неточных гирь. Если масса гири отличается от эталона, например, на 0,1 г, то масса тела будет соответственно завышена или занижена. Чтобы получить верное значение массы тела, необходимо учесть эту ошибку, прибавляя к полученному результату или вычитая из него 0,1 г.

Случайная ошибка ψ изменяется от одного измерения к другому самым различным образом и в равной степени может быть как положительной, так и отрицательной. Случайная ошибка возникает в результате совместного влияния различных случайных факторов. Для оценки случайных ошибок используется аппарат теории вероятностей и математической статистики. С увеличением числа измерений случайная ошибка эксперимента уменьшается.

Грубая ошибка (промахи) обусловлена часто недостаточным вниманием экспериментатора. Например, результат взвешивания может быть записан как 1020,0 г вместо 1000,20 г. При измерении длины линейкой промах может появиться в результате того, что один из концов измеряемого предмета окажется не совмещенным с нулем линейки, и т. п.

Систематические ошибки в свою очередь классифицируются по их источникам и свойствам.

Источниками систематических погрешностей могут быть метод измерения, средства измерений и экспериментатор. Соответственно принято различать систематические погрешности методические, инструментальные и личные.

По свойствам систематические погрешности делят на постоянные и закономерно изменяющиеся. Последние в свою очередь подразделяются на прогрессирующие, периодические и изменяющиеся по сложному закону.

Пример постоянных погрешностей приводился выше. Прогрессирующие погрешности — это погрешности, монотонно возрастающие или убывающие в процессе измерений. Такие погрешности вызывает, например, изменение рабочего тока потенциометра из-за падения напряжения на клеммах питающего его аккумулятора. Периодические погрешности — погрешности, изменяющиеся с определенным периодом.

В тех случаях, когда измеряются какие-либо свойства готовой продукции (диаметр детали, состав и свойства материала и т. п.), задача измерений обычно состоит не в получении точного значения измеряемой величины, а в необходимости установить, укладывается ли значение величины, по которой оценивается это свойство, в определенное поле допуска, установленное для данной продукции. Если это не достигается, изделия являются браком.

Но следствием ошибок измерений могут быть два обстоятельства: 1) хорошее изделие бракуется (такая ошибка называется ошибкой первого рода); 2) брак пропускается (ошибка второго рода). Поясним это примером. Диаметр отверстия по чертежу равен 60 мм с допуском $+0,013$ мм. При измерении диаметра получено значение 60,012 мм. Ошибка измерительного устройства 0,002 мм. С учетом погрешности измерительного устройства действительный диаметр может составлять 60,014 мм. Признавая отверстие годным, мы можем совершить ошибку второго рода. Если при той же точности из-

мерений оказалось, что диаметр равен 60,014 мм, деталь бракуется, хотя в действительности размеры отверстия могут находиться внутри поля допуска (скажем, составлять 60,012 мм). В этом случае была бы сделана ошибка первого рода. Очевидно, что когда размеры изделия находятся вблизи границ поля допуска, всегда есть вероятность сделать ошибку первого или второго рода.

Казалось бы, что наиболее опасна ошибка второго рода — пропуск брака. Это действительно так, когда мы имеем дело с очень ответственными изделиями (например, в авиа- или автомобилестроении). В этом случае иногда лучше забраковать 100 хороших изделий, чем пропустить одно бракованное. Чем вернее хотим мы застраховать себя от ошибок второго рода, тем больше (при неизменной точности измерений) делаем ошибок первого рода. Однако для менее ответственных изделий чересчур жесткий контроль, исключающий ошибки второго рода, нецелесообразен. Выбор экономически целесообразной системы измерений и браковки во всех случаях чрезвычайно важен.

1.4. Методы оценки случайных ошибок измерений

В отличие от систематических погрешностей измерений случайные погрешности исключить нельзя, но с помощью методов теории вероятностей и математической статистики можно учесть их влияние при определении истинного значения измеряемой величины.

Случайные погрешности результатов эксперимента можно рассматривать как разновидность случайных величин (событий).

Полностью свойства случайной величины X описываются функцией распределения $F(x)$, которая определяет вероятность того, что случайная величина X будет меньше x :

$$F(x) = P\{X < x\}.$$

Наряду с функцией распределения $F(x)$, называемой интегральной, применяется и дифференциальная, обычно называемая плотностью распределения:

$$f(x) = dF(x)/dx$$

В практике точных измерений чаще всего имеет место нормальное, или равномерное, распределение случайных величин.

Функции распределения являются полными характеристиками случайных величин, но они не всегда удобны для практического использования. Поэтому при описании случайных величин применяют и их числовые характеристики — моменты случайных величин: начальные и центральные.

Начальный m_k и центральный μ_k моменты k -го порядка определяются по формулам:

$$m_k = M[X^k] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx$$

$$m_k = M[X^k] = \sum_{i=1}^n x_i^k p_i;$$

$$\mu_k = M[X - M(X)]^k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M[X])^k f(x) dx;$$

$$\mu_k = M[X - M(X)]^k = \sum_{i=1}^n (x_i - M[X])^k p_i.$$

Здесь и в соотношениях (1.1), (1.2) первые формулы относятся к непрерывным, а вторые — к дискретным случайным величинам.

Чаще используется начальный момент первого порядка ($k=1$) — математическое ожидание случайной величины:

$$\left. \begin{aligned} m_1 = M[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx; \\ m_1 = M[X] &= \sum_{i=1}^n x_i p_i. \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

В указанных соотношениях p_i — относительная частота появления дискретной величины x_i в выборке.

Из центральных моментов особенно важен момент второго порядка ($k=2$) — дисперсия случайной величины:

$$\left. \begin{aligned} \mu_2 = D[X] &= M[(X - m_1)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_1)^2 f(x) dx \\ \mu_2 = D[X] &= M[(X - m_1)^2] = \sum_{i=1}^n (x_i - m_1)^2 p_i. \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

Положительный корень квадратный из дисперсии

$$\sigma = \sqrt{D[X]}$$

носит название среднего квадратического отклонения случайной величины.

Значение σ , характеризующее разброс случайных величин относительно их математического ожидания, наиболее часто используется для оценки случайной ошибки измерения.

Формулы (1.1) и (1.2) пригодны для оценки $M[X]$ и $D[X]$ генеральной совокупности, т. е. множества всех рассматриваемых единиц.

При измерениях обычно имеют дело с конечным подмножеством генеральной совокупности ($n=1...30$), которое называют выборкой. Выборочные значения $M[X]$ и $D[X]$, обозначаемые обычно \bar{x} (среднее арифметическое значение) и s^2 , рассчитывают по формулам:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1} \quad (1.3)$$

Если $n > 30$,

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} \quad (1.4)$$

где n — число измерений или объем выборки.

Для оценки случайных ошибок измерений используют иногда коэффициент вариации w и среднюю арифметическую ошибку r_n :

$$w = \frac{s}{\bar{x}}; \quad r_n = \frac{\sum_{i=1}^n |\bar{x} - x_i|}{n}$$

При достаточно большом числе наблюдений (практически при $n > 30$) имеют место соотношения: $s = 1,25r_n$ или $r_n = 0,8s$.

По значениям s и \bar{x} можно проверить, принадлежат резко выделяющиеся результаты измерений к данной генеральной совокупности или же вызваны грубыми погрешностями и их следует отбросить. Для этого используется критерий Груббса. Определяется величина

$$\theta = \frac{|x^* - \bar{x}|}{S},$$

где x^* — наибольшее или наименьшее значение x_i в выборке.

Найденное значение θ сравнивается с критическим θ_k , приводимым в специальной литературе [13]. Если при данном количестве измерений и уровне значимости α $\theta > \theta_k$, то с вероятностью $1-\alpha$ резко выделяющееся значение x^* можно считать грубой погрешностью и его следует исключить из дальнейшей обработки результатов измерений. После этого значения \bar{x} и s следует пересчитать.

1.5. Методы учета и исключения систематических ошибок

При проведении измерений одной из основных является задача учета и исключения систематических ошибок, которые в ряде случаев могут быть так велики, что существенно искажают результаты измерений. Методы учета систематических ошибок зависят от природы, характера последних. Систематические ошибки по характеру их проявления можно разделить на четыре группы [12].

1. Ошибки, природа которых известна, а величина может быть достаточно точно определена. Они могут быть устранены введением соответствующих поправок.

Источники таких ошибок нужно тщательно анализировать, поправки точно определять и учитывать в окончательном результате. Однако здесь требуется разумный подход. Если поправка на порядок (в 10 раз) и более меньше точности измерений, то учитывать ее нет смысла.

Величина учитываемых поправок устанавливается в зависимости от величины других ошибок, сопровождающих измерение. Часто принимают, что если поправка не превышает 0,005 от средней квадратической ошибки s результата измерений, то ее следует пренебречь. Эта рекомендация чрезмерно жесткая, обычно можно пренебречь поправками, имеющими большее значение.

2. Ошибки известного происхождения, но неизвестной величины. К их числу относится погрешность измерительных приборов, которая определяется иногда классом точности прибора.

Электроизмерительные приборы характеризуются обычно классом точности в пределах 0,05 до 4. Менее точные приборы обозначения класса не имеют.

Если на приборе указан класс точности 0.5 , то это значит, что показания прибора правильны с точностью до 0,5% от всего диапазона измерений по шкале прибора. Если вольтметр имеет шкалу, градуированную до 150 В, класс точности 0.5 , то он дает абсолютную основную погрешность не более $\pm 0,75$ В.

Максимальные погрешности, даваемые измерительными линейками, микрометрами и некоторыми другими приборами, иногда наносятся на самом приборе или указываются в прилагаемом к нему паспорте. Если таких указаний нет, точность измерений составляет не менее 0,2 цены деления шкалы прибора.

Систематические ошибки данного типа не могут быть исключены. Если при измерении напряжения описанным выше вольтметром получено $U = 65,3$ В, то можно принять $U = (65,3 \pm 0,75)$ В. Это означает, что действительное значение напряжения находится в пределах от 64,55 до 66,05 В.

3. Неявные ошибки, о существовании которых можно и не подозревать, хотя они могут быть весьма значительными и потому опасными..

Так, например, при определении плотности какого-то металла измерением объема и массы образца можно получить грубую ошибку, если образец содержит внутри пустоты, например пузыри воздуха, образовавшиеся при отливке.

Один из наиболее надежных способов исключения таких погрешностей — проведение измерений той же величины другими методами и в других условиях. Совпадение полученных результатов служит известной, хотя и не абсолютной гарантией их правильности.

4. Ошибки, обусловленные свойствами объекта и не связанные непосредственно с измерительными операциями.

Поясним это на примере. Измеряется диаметр цилиндра, который считается круглым, но в действительности имеет форму овала (эллипса). Диаметр, измеренный вдоль большой оси эллипса, будет больше измеренного вдоль его малой оси. Если измерить диаметр один раз и считать цилиндр круглым, то вычисленная по результатам этого измерения площадь сечения цилиндра будет содержать систематическую ошибку, определяемую степенью овальности цилиндра и выбранным для измерения диаметром. Наилучшим образом действительный диаметр цилиндра будет характеризовать его среднее значение, полученное по результатам ряда измерений в раз-

личных плоскостях. При этом систематическая ошибка будет переведена в разряд случайных.

Из множества специальных методов устранения постоянных систематических ошибок рассмотрим метод двойного измерения и метод компенсации.

Метод двойного измерения применяется при проведении экспериментов с помощью устройств, имеющих симметричную структуру (например, весов). Этот метод состоит в том, что проводятся два измерения, при которых роли левой и правой частей установки последовательно меняются.

Метод компенсации предполагает проведение измерений два раза таким образом, чтобы ошибка вошла в результаты один раз с одним знаком, а другой раз — с другим. Этот метод должен применяться, например, при работах с термопарами для исключения паразитных термотоков.

Простейшим, но частным случаем прогрессирующей погрешности является погрешность, изменяющаяся по линейному закону, например, во времени. Для предупреждения такой погрешности можно использовать два наблюдения, выполненных с фиксацией времени.

Если результаты наблюдений E_1 и E_2 удовлетворяют зависимостям

$$E_1 = x + Kt_1, \quad E_2 = x + Kt_2$$

где x — истинное значение измеряемой величины; K — коэффициент пропорциональности, учитывающий изменение погрешности измерения во времени; t_1, t_2 — моменты времени выполнения наблюдений, то

$$x = \frac{E_1 t_2 - E_2 t_1}{t_2 - t_1}.$$

Существуют и другие методы исключения систематических закономерно изменяющихся погрешностей [33].

Даже если учтены все систематические ошибки, в результатах измерений все же возможны случайные ошибки, правила вычисления которых будут рассмотрены ниже. Если случайная ошибка принятого метода измерений известна заранее и является определяющей, т. е. существенно больше (в 3 и более раз) систематической ошибки, измерение следует производить несколько раз. В качестве оценки исследуемой величины принимают обычно среднее ариф-

метическое результатов ряда измерений. Случайная ошибка этого среднего будет меньше, чем ошибка единичного измерения. Если же определяющей является систематическая ошибка, измерение достаточно выполнить один раз.

1.6. Математическая обработка результатов эксперимента при прямых измерениях

Рассмотрим наиболее распространенный в практике случай, когда для уменьшения влияния случайных погрешностей производятся равноточные многократные измерения исследуемой величины. Результат каждого наблюдения x'_i отличается от истинного значения исследуемой величины A вследствие погрешности, в которой можно выделить случайную ψ_i и систематическую θ составляющие: $x'_i = A + \psi_i + \theta$. Информация о случайной погрешности получается из повторных наблюдений. О систематической погрешности из самих наблюдений информацию извлечь нельзя. Чтобы оценить эту погрешность, необходимо учесть свойства используемых средств измерений, метод измерения и условия измерения. Математически обоснованное решение задачи нахождения оценки $A = f(x')$ можно найти, зная вид распределения значений x'_i . При нормальном распределении погрешностей и результатов наблюдений оптимальной оценкой центра распределения A является среднее арифметическое результатов наблюдений.

Если систематические погрешности постоянны ($\theta = \theta_0$), то вначале определяют среднее арифметическое результатов наблюдений, а затем уточняют его с помощью поправки $C = -\theta_0$:

$$\tilde{A} = \frac{\sum_{i=1}^n x'_i}{n} + C \quad (1.5)$$

Если систематическая погрешность каждого измерения известна или изменяется закономерно, ее учитывают с помощью поправки и вместо группы результатов наблюдений x'_i получают группу исправленных результатов x_i , которые подвергают дальнейшей обработке.

Значение \tilde{A} является точечной оценкой истинного значения A некоторой величины. Точечные оценки всегда приближительны, поскольку их получают из отдельной выборки результатов измерений, поэтому необходимо найти доверительный интервал для \tilde{A} , внутри которого с определенной вероятностью $1 - \alpha$ находится A (α — уровень значимости критерия при оценке достоверности различных величин).

Уровень значимости α , выраженный в процентах, показывает, сколько раз в ста испытаниях мы рискуем ошибиться, изучаемое событие неслучайным. Обычно $\alpha = 0,01; 0,02; 0,05$.

Уровню значимости α соответствует доверительная вероятность $1 - \alpha = P$. С вероятностью P выполняется неравенство $\hat{\theta} - \varepsilon < \theta < \hat{\theta} + \varepsilon$, где $\hat{\theta}$ — точечная оценка неизвестного параметра θ ; ε — характеризует точность оценки истинного значения A не более чем на Δ , то

$$P(\tilde{A} - \Delta < A < \tilde{A} + \Delta) = 1 - \alpha \quad (1.6)$$

Где

$$\Delta = t_{\alpha, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}; \quad (1.7)$$

$t_{\alpha, n-1}$ — коэффициент Стьюдента, который зависит от значений α и $n - 1$ и приводится в различных работах [25, 37, 32, 33]; n — число измерений.

Оценка (1.6) называется доверительной или интервальной. Зависимость (1.7) записывают также в виде

$$\Delta = t_{\alpha, n-1} S_{\bar{x}}$$

Где

$$S_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}. \quad (1.8)$$

Отсюда видно, что s — в \sqrt{n} раз меньше, чем s i -го измерения в выборке. Таким образом, если необходимо, например, в 2 раза уменьшить s случайной ошибки измерений, нужно выполнить четыре измерения и в качестве оценки измеряемой величины принять среднее арифметическое \bar{x} результатов этих измерений.

Выше описана схема отдельного учета влияния систематических и случайных ошибок на результат наблюдения (влияние случайной ошибки — в интервальной оценке (1.6), а систематической

— в точечной оценке (1.5)), Однако возможно [33] суммирование систематических и случайных ошибок и учет этой суммарной ошибки в интервальной оценке (1.6). Это обусловлено тем, что систематические и случайные ошибки, хотя и имеют разную природу, проявляются совместно. Полная величина случайной ошибки выявляется сразу в результате многократных наблюдений. При оценке систематической ошибки различными методами, описанными в § 1.5, определяют вначале предельные значения V_j ее различных составляющих. В качестве основных составляющих обычно рассматривают систематические ошибки прибора, округления, субъективные, методические. Если принять, что эти погрешности имеют равномерное распределение, то доверительные границы систематической погрешности результата измерения можно найти по формуле

$$\theta = k \sqrt{\sum_{i=1}^m \theta_i^2} \quad (1.9)$$

Где: k — поправочный коэффициент; m — число элементарных систематических погрешностей.

Значение k зависит от доверительной вероятности $1-\alpha$ и числа слагаемых m . При $1-\alpha \leq 0,99$ k мало зависит от m .

При малом числе слагаемых, т. е. когда $m \leq 4$, может оказаться, что вычисленное по формуле (1.9) значение θ превышает арифметическую сумму θ_j , что невозможно. В этом случае в качестве θ принимают

$$\sum_{i=1}^m \theta_j .$$

Если найденные значения θ и Δ сопоставимы, т. е. не отличаются более чем на порядок, то определяется граница общей погрешности. Для этого часто используют формулу

$$\Delta_{\Sigma} = \theta + t_{\alpha, n-1} s_{\bar{x}} \quad (1.10)$$

Зависимость (1.10) проста, но дает заведомо завышенную оценку. Более точную оценку Δ_{Σ} можно найти по формуле [33]

$$\Delta_{\Sigma} = t_{\Sigma} s_{\Sigma}$$

Где

$$t_{\Sigma} = \frac{\Delta + \theta}{s_{\bar{x}} + s_v}; s_{\Sigma} = \sqrt{s_{\bar{x}}^2 + s_v^2};$$

$$s_v = \sqrt{\frac{1}{3} \sum_{j=1}^m \theta_j^2}.$$

Значения Δ и θ необходимо определять при одном и том же значении a . Результаты измерений в этом случае запишутся так: $A = \tilde{A}' \pm As$, вероятность $P = 1 - a$, где значение A' находится из ряда результатов наблюдений x_i . Если Δ или θ несущественно, то вместо Δ_Σ записывают существенную величину.

1.7. Математическая обработка результатов эксперимента при косвенных измерениях

Напомним, что при косвенных измерениях искомое значение исследуемой величины вычисляется по уравнению измерения, в которое входят результаты прямых измерений:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_m). \quad (1.11)$$

По виду функциональной зависимости (1.11) различают линейные и нелинейные косвенные измерения.

В случае линейных косвенных измерений справедлива зависимость

$$\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_j, \dots, \bar{x}_m). \quad (1.12)$$

При расчете оценки результата косвенных измерений y можно применить два способа: 1) вычислить значения x_1, x_2, \dots, x_m и, подставив их в уравнение (1.12), получить y , 2) для каждого из значений x_i ; x_j , ... , x_n вычислить y_j , а затем определить $y \sim \bar{y} = \sum y_j / n$, где n — число прямых измерений. Соответственно двумя способами вычисляют и погрешность оценки величины y .

В первом случае дисперсия функции (1.11) случайных независимых аргументов

$$D(y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 D(x_1) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 D(x_2) + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_m} \right)^2 D(x_m). \quad (1.13)$$

По этой формуле можно найти и среднее квадратическое отклонение случайных и систематических погрешностей измерения y , подставляя в нее соответствующие значения по результатам прямых измерений. Суммарная погрешность косвенного измерения

$$s_{y\Sigma} = \sqrt{s_y^2 + s_{y\theta}^2}, \quad (1.14)$$

где s_y^2 характеризует случайную составляющую ошибки косвенного измерения, а $s_{y,g}^2$ -неисключаемую систематическую его составляющую.

Во втором случае вычисляют ряд значений y_i и по формулам (1.3) или (1.4) находят s_y .

Если погрешности измерений малы по сравнению с измеряемым значением величины (это условие положено в основу всех формул), то оба способа дают одинаковые результаты. Однако в силу меньшей трудоемкости вычислений и больших возможностей первый способ предпочтительней (он позволяет определять и s_y и s_{yi}). Доверительный интервал для оценки результата косвенного измерения рассчитывается по s_{yZ} [13]:

$$\Delta = t_{\alpha, n-1} \frac{s_{yZ}}{\sqrt{n}} \quad (1.15)$$

Если одно из значений S_y или $S_{y,g}$ на порядок больше другого, его и подставляют в формулу (1.15). Окончательные результаты измерения записывают так: $y = \bar{y} \pm \Delta$ вероятность

$$P = 1 - \alpha$$

При нелинейных косвенных измерениях формулы (1.12) ... (1.14) правомерно использовать лишь в том случае, если функцию (1.11) можно разложить в ряд Тейлора в окрестностях точки x_1, x_2, \dots, x_m

и ограничиться линейным членом разложения. Использование линейного разложения справедливо, когда остаточный член разложения существенно меньше линейного. Различные методы проверки этого условия приведены в работе [33]. В случае его соблюдения доверительный интервал для \bar{y} определяется по формуле (1.13), так как при малом числе измерений он имеет тот же физический смысл, что и σ_y при большом числе измерений [13]. Значения $D(x_1), \dots, D(x_m)$ в формуле (1.13) представляют собой дисперсии при измерении величин x_1, x_2, \dots, x_m

Рассмотрим пример вычисления доверительного интервала при нелинейных косвенных измерениях [13].

Предположим, что получена следующая зависимость пути L от времени t движения некоторого тела:

$$L = v_0 t + at^2 / 2 \quad (1,16)$$

Пусть $v_0 = 12 \text{ м/с}$, $a = 2,5 \text{ м/с}^2$, $t = 30 \text{ с}$, а доверительные оценки величин v_0 , a , t : $\Delta_{v_0} = 1 \text{ м/с}$, $\Delta_a = 0,2 \text{ м/с}^2$, $\Delta_t = 2 \text{ с}$. Для оценки погрешности Δ_L , при определении пути L воспользуемся формулой (1.13) с учетом приближения $\Delta^2 = D$. Тогда

$$\Delta_L = \sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial v_0} \Delta_{v_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial a} \Delta_a\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial t} \Delta_t\right)^2}. \quad (1.17)$$

Подставив выражение (1.16) в формулу (1.17), получим

$$\Delta_L = \sqrt{(t \Delta_{v_0})^2 + \left(\frac{t^2}{2} \Delta_a\right)^2 + [(v_0 + at) \Delta_t]^2}. \quad (1.18)$$

Подставив значения величин в формулу (1.18), найдем

$$\Delta_L = \sqrt{(30 \cdot 1)^2 + \left(\frac{30^2}{2} \cdot 0,2\right)^2 + [(12 + 2,5 \cdot 30) \cdot 2]^2} = 198 \text{ м}$$

Среднее значение пути $\bar{L} = 12 \cdot 30 + 2,5 \cdot 30^2 / 2 = 1485 \text{ м}$. Таким образом, окончательный результат $L = \bar{L} \pm \Delta_L = (1485 \pm 198) \text{ м}$, надежность которого является неизвестной.

1.8. Ошибки измерений и организация исследований

Рассмотрим те вопросы организации исследований, которые решаются с учетом ошибок измерений: выбор средств измерений и числа наблюдений.

Точность измерений при выполнении экспериментального исследования в значительной степени определяет глубину проникновения в природу изучаемого явления.

Конкретных рекомендаций по выбору точности средств измерений при выполнении различных научных исследований дать нельзя. Часто стараются произвести измерения с наибольшей достижимой точностью. Однако чем точнее это необходимо сделать, тем труднее осуществить. Поэтому не следует проводить измерения с большей точностью, чем необходимо для решения поставленной задачи.

При статистических исследованиях точности и стабильности обработки измерять размеры деталей необходимо с помощью измерительного устройства, погрешность которого составляет не более 0,2 допуска на контролируемый размер детали [23].

Выбор средств измерений производится в соответствии с ГОСТ 8.401—80 «Государственная система обеспечения единства измерений. Классы точности, средства измерений. Общие требования».

При выборе необходимого числа измерений n можно исходить из зависимости (1.8), причем случайную ошибку целесообразно уменьшать лишь до тех пор, пока общая погрешность измерений не будет полностью определяться систематической ошибкой. При этом доверительный интервал D для истинного значения исследуемой величины от случайных ошибок должен быть существенно меньше доверительного интервала B от неучтенных систематических погрешностей, т.е. $D < C\delta$. Это условие можно считать выполненным, когда $D < 0,19$ или даже $LO/3$. Учитывая зависимость (1.8), n можно определить по формуле

$$n = \frac{t_{\alpha, n-1}^2 s^2}{\Delta^2}. \quad (1.19)$$

Применение формулы (1.19) затруднено, поскольку нужно заранее знать значение s , определяемое лишь на основе результатов испытаний. Поэтому пользуются относительными показателями точности измерений. На основании формулы (1.19) n можно определить в зависимости от $\epsilon = A/s$ и доверительной вероятности $1 - \alpha$ [12].

Можно пойти и по другому пути. Преобразуем формулу (1.19). Пусть $A = kx$, а $s = wx$, где k — заданный коэффициент, показывающий долю предельной ошибки от среднего арифметического значения величины; x — среднее арифметическое значение исследуемой величины; w — коэффициент вариации. Тогда

$$n = \frac{t_{\alpha, n-1}^2 \omega^2}{k^2}.$$

По этой формуле можно найти необходимое число наблюдений независимо от размерности того или иного объекта измерений. Значение k можно определить исходя из практических соображений. В частности, для испытания стойкости режущего инструмента целесообразно принимать среднее значение $k = 0,2$. При меньших значениях k существенно увеличивается объем испытаний. Значениями w также можно задаваться исходя из имеющегося опыта подобных испытаний. Например, значения w при стойкостных испытаниях режущих инструментов в зависимости от их вида и условий применения приведены в работе В. М. Башкова, П. Г. Кацева «Испытания режущего инструмента на стойкость» (М., 1985).

Глава 2. ОСНОВЫ КОРРЕЛЯЦИОННО-РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА

2.1. Основные понятия, задачи, предпосылки

Для технологических экспериментов, как указывалось в гл. 1, характерны статистические объекты исследований, в которых имеют место стохастические или корреляционные взаимосвязи между зависимыми и независимыми переменными. Найти математическое описание этих взаимосвязей— значит получить математическую модель объекта. В задачу корреляционно-регрессионного анализа входит получение на основании экспериментальных данных математической модели объекта (процесса) и ее анализ. Ценность математической модели заключается в том, что с ее помощью можно решать задачи оптимизации процесса и предсказания результатов при изменении условий его протекания (вторую задачу называют интерполяционной).

Методы корреляционно-регрессионного анализа применимы только для таких параметров, которые при изучении физической природы объекта являются взаимосвязанными. На первом этапе применения этих методов обычно оценивают степень тесноты взаимосвязи значений функции отклика с одной или несколькими независимыми переменными. В первом случае используется коэффициент парной корреляции r_{yx} , во втором— коэффициент множественной корреляции $R_{y, X_1, X_2, \dots, X_m}$

Коэффициент парной корреляции

$$r_{yx} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{n s_y s_x},$$

где y, x — средние арифметические значения y_i и x_i в рассматриваемой выборке; s_y, s_x — их средние квадратические отклонения; n — объем выборки (обычно n — 50 ... 200). Обозначим зависимую переменную цифрой 1, а независимые цифрами 2, 3, ..., m , тогда коэффициенты парной корреляции запишутся как r_{12}, r_{13}, \dots ,

$r_{1m}, r_{23}, r_{24}, \dots$, а коэффициент множественной корреляции между y и x_1, x_2, \dots, x_m $R_{1.23\dots m}$.

Коэффициент множественной корреляции с использованием метода определителей находится по формуле

$$R_{1.23\dots m} = \sqrt{1 - D/D_{11}},$$

где D — определитель, составленный из всех коэффициентов парной корреляции:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1m} \\ r_{21} & 1 & r_{23} & \dots & r_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{m1} & r_{m2} & r_{m3} & \dots & 1 \end{vmatrix},$$

D_{11} — определитель, получающийся из D исключением нулевого (первого слева) столбца и нулевой (верхней) строки;

$$D_{11} = \begin{vmatrix} 1 & r_{23} & \dots & r_{2m} \\ r_{32} & 1 & \dots & r_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{m2} & r_{m3} & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

В случае трех переменных

$$R_{1.23} = \sqrt{\frac{r_{12}^2 + r_{13}^2 - 2r_{12}r_{13}r_{23}}{1 - r_{23}^2}}.$$

Значения r_{yx} и $R_{y.x_1x_2\dots x_m}$ находятся в пределах от -1 до $+1$. Если они достоверны, т. е. существенно отличаются от нуля, значит между исследуемыми факторами имеется линейная корреляционная зависимость. В противном случае эта зависимость отсутствует либо является существенно нелинейной. Если r_{yx} или $R_{y.x_1x_2\dots x_m}$ равны $+1$ или -1 , что встречается крайне редко, между исследуемыми факторами существует функциональная взаимосвязь. Знаки r_{yx} и $R_{y.x_1x_2\dots x_m}$ говорят о прямом (+) или обратном (—) характере взаимосвязей между исследуемыми факторами.

Для оценки степени тесноты нелинейных одно- и многофакторных взаимосвязей используются корреляционные отношения η .

Если корреляционным анализом подтверждено наличие взаимосвязей между исследуемыми факторами, то на следующем этапе обработки экспериментальных данных с помощью регрессионного анализа выбирают математическую модель, в наилучшей степени

описывающую указанные взаимосвязи. Уравнение, по которому могут быть найдены числовые значения выборочных средних функций отклика при соответствующих значениях независимых переменных, называется *уравнением регрессии*. В общем случае оно может быть записано в виде

$$\bar{y} = f(x_1, x_2, \dots, x_m).$$

Операция замены одной функции другой, в каком-то смысле эквивалентной, называется аппроксимацией. При аппроксимации неизвестных функций отклика в математической статистике наиболее часто используют полиномиальные модели. Степень полинома определяется максимальной степенью входящих в него переменных.

Выпишем полиномы различных степеней для случая двух факторов: полином нулевой степени

$$y = b_0, \quad (2.1)$$

первой степени

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2, \quad (2.2)$$

второй степени

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2, \quad (2.3)$$

третьей степени

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{112}x_1^2x_2 + b_{122}x_1x_2^2 + b_{111}x_1^3 + b_{222}x_2^3. \quad (2.4)$$

Уравнения регрессии вида (2.1) и (2.2) называются линейными, а вида (2.3) и (2.4) — нелинейными. Линейные уравнения регрессии можно использовать на первом этапе исследований нелинейных корреляционных связей, с тем чтобы в дальнейшем ввести в них необходимые поправки.

С позиций статистики полиномиальная модель удобна, так как позволяет увеличить степень точности аппроксимации за счет повышения порядка полинома. При этом аппроксимирующая функция остается линейной по параметрам, что облегчает все статистические операции (применение метода наименьших квадратов для оценки параметров, выбор оптимального расположения уровней факторов в области их изменения и т.д.).

При определении параметров уравнения регрессии все переменные и соотношения между ними иногда выгодно выражать в стандартизованном масштабе, где за начало отсчета для каждой пе-

ременной принимается ее среднее значение, а за единицу масштаба - ее же среднее квадратическое отклонение. В стандартизованном масштабе упрощаются соотношения между переменными, что удобно при анализе многомерных связей. Значения переменных t_{Xi} в стандартизованном масштабе определяются по формуле

$$t_{x_i} = \frac{x_i - \bar{x}}{s_x}$$

где X_i — значения переменных (зависимой или независимой) в натуральном масштабе.

Если в качестве модели процесса используется полином первой степени, то после перевода переменных в стандартизованный масштаб значительно упрощается формула для расчета коэффициента множественной корреляции:

$$R_{1.23\dots m} = \sqrt{\beta_1 r_{12} + \beta_2 r_{13} + \dots + \beta_m r_{1m}}.$$

Здесь $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ — коэффициенты уравнения регрессии в стандартизованном масштабе.

Соответствие математической модели процесса экспериментальным данным называют адекватностью. Уравнение адекватно описывает результаты опытов, если квадратическое отклонение значений зависимой переменной y_{pb} , рассчитанных по уравнению регрессии, от экспериментальных данных y_i обусловлено только ошибкой воспроизведения, т. е. случайным характером этого параметра.

Применение корреляционно-регрессионного анализа правомерно и эффективно при соблюдении следующих условий:

- 1) параметр оптимизации y есть случайная величина с нормальным законом распределения;
- 2) дисперсия y не зависит от абсолютных значений величины y — остается постоянной или однородной при различных наблюдениях y ;
- 3) значения независимых переменных x_1, x_2, \dots, x_m измеряются с пренебрежимо малыми ошибками по сравнению с ошибкой в определении y ;
- 4) переменные x_1, x_2, \dots, x_m линейно независимы;
- 5) процесс изменения зависимой переменной y является стационарным случайным;
- 6) экспериментальные данные получены из ряда независимых испытаний, наблюдений и образуют случайную выборку из данной генеральной совокупности.

Пятое и шестое условия характерны для пассивного эксперимента, остальные — как для пассивного, так и для активного.

Рассмотрим методы проверки соблюдения указанных предположений. Соответствие y нормальному закону распределения устанавливается либо по большим выборкам с помощью критериев Пирсона или Колмогорова [37, 32, 8], либо на основании анализа природы величины y .

Для оценки однородности дисперсий y в B условиях планирования эксперимента проводят параллельные опыты в различных точках матрицы плана, т. е. при различных значениях $x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{lm}$. При пассивном эксперименте s^2 определяют по результатам отдельных выборок, взятых в примерно одинаковых условиях работы объекта. Если сравниваются два значения s^2_{yx} и $s^2_{yг}$ при разных числах степеней их свобод $f_1 (f_1 = N - 1, N — \text{число параллельных опытов или объем выборки})$, то используется критерий Фишера, рассчитываемый как отношение большей дисперсии к меньшей:

$$F_p = \frac{s_{y_1}^2}{s_{y_2}^2} (s_{y_1}^2 > s_{y_2}^2).$$

Если наблюдаемое значение F_p меньше критического F_{Kp} для соответствующих чисел степеней свободы и принятого уровня значимости, то опыты считаются воспроизводимыми, а дисперсии однородными [32, 8, 37].

Однородность ряда дисперсий при одинаковом числе опытов для определения каждой из них оценивают с помощью критерия Кохрена — отношения максимальной дисперсии к сумме всех дисперсий ряда:

$$G = \frac{s_{y_{\max}}^2}{s_{y_1}^2 + s_{y_2}^2 + \dots + s_{y_N}^2} = \frac{s_{y_{\max}}^2}{\sum_{j=1}^N s_{y_j}^2}, \quad (2.5)$$

где N — число параллельных опытов или различных выборок (обычно $N = 2 \dots 5$).

Дисперсии однородны, если расчетное значение G_p не превышает критического G_{Kp} [37, 32, 38].

При неравном числе степеней свободы для каждой из дисперсий ряда их однородность проверяют с помощью критерия Бартлетта. Вначале определяют средневзвешенную дисперсию

$$s_y^2 = \frac{\sum_{j=1}^N f_j s_{yj}^2}{f}, f = \sum_{j=1}^N f_j \quad (2.6)$$

а затем вычисляют

$$B = 2,303(f \lg s_y^2 - \sum_{j=1}^N f_j \lg s_{yj}^2); \quad (2.7)$$

Доказано, что в случае, когда все s_{yj}^2 соответствуют одной генеральной дисперсии, отношение B/C распределено приближенно как χ^2 с $N-1$ степенями свободы независимо от f_j , если все $f_j > 5$ (χ^2 — критерий Пирсона). Это значит [37, 32, 8, 38], что при $B/C \leq \chi^2_{1-p}$, данном числе степеней свободы $N-1$ и заданном уровне значимости p дисперсии однородны. Очевидно, что $C > 1$. Поэтому вначале вычисляют только B и сравнивают его с χ^2_{1-p} . Если окажется, что $B \leq \chi^2_{1-p}$, то гипотезу однородности дисперсий нужно принять, ибо $B/C < B \leq \chi^2_{1-p}$.

Если дисперсии не однородны, необходимо выполнить такое преобразование y , чтобы они стали однородными. Довольно часто помогает замена y на $\ln y$.

Воспроизводимость опытов и однородность дисперсий достигается, когда выявлены и устранены источники нестабильности эксперимента, а также с помощью более точных методов и средств измерений.

Проверку достаточной точности измерения значений независимых переменных можно произвести, сопоставив ее с диапазоном изменения последних. Считается, что ошибки определения независимых переменных не должны превышать 5...7% интервала их варьирования. Ошибки в определении значения зависимой переменной не влияют столь значительно на точность регрессионного анализа (они могут составлять до 30% интервала варьирования).

Отсутствие коррелированности независимых переменных проверяется расчетом парных коэффициентов корреляции между ними (см. выше).

Стационарным называют такой случайный процесс, основные характеристики которого ($M[x]$, σ^2) постоянны или однородны во времени. Поскольку при пассивном эксперименте свойства процесса определяются по одной представительной выборке, распространить полученные результаты на весь процесс в целом можно лишь при условии его стационарности.

Проверка стационарности процесса производится в следующем порядке.

По результатам измерений параметра строится случайная последовательность значений этого параметра, соответствующая порядку проведения измерений. Полученную реализацию разбивают на несколько (5...10) равных отрезков, для каждого отрезка устанавливают дисперсию s_{vj} и с помощью критерия Кохрена по формуле (2.5) определяют, являются ли значения s^2 на каждом из отрезков оценками одной и той же генеральной дисперсии.

Затем на каждом из отрезков производится сравнение средних арифметических x_1, x_2, \dots, x_N , соответствующих выборочным дисперсиям $s_1^2, s_2^2, \dots, s_N^2$, числам степеней свободы f_1, f_2, \dots, f_N (обычно $f_j = n_j - 1$, где n_j — объем соответствующей выборки, отрезка). Всем выборкам соответствует единая генеральная дисперсия σ^2 , в качестве ее оценки можно взять средневзвешенную дисперсию s^2 которая рассчитывается по формуле (2.6).

Если справедлива нулевая гипотеза о равенстве всех генеральных средних, то в качестве оценки единого генерального среднего можно взять общее среднее всех элементов, отрезков, как бы объединенных в одну выборку.

Обозначим это среднее через \bar{y} . Для дисперсии σ^2 можно теперь дать другую оценку

$$\bar{s}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N n_j (\bar{y}_j - \bar{y})^2,$$

которой соответствует $N-1$ степеней свободы. Чтобы нулевая гипотеза была справедлива, должно соблюдаться условие

$$\bar{s}_y^2 / s_y^2 \leq F_{1-p(N-1, f)},$$

где значение критерия Фишера $F_{1-p(N-1, f)}$ берется по таблицам [37, 32, 8].

Проверку гипотезы о случайности выборки, необходимую при пассивном эксперименте, можно произвести методом последовательных разностей. Этот метод заключается в следующем: по значениям x выборки, расположенным в последовательности их наблюдения $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$, образуется $n-1$ разностей между соседними членами: $a_1 = x_2 - x_1, a_2 = x_3 - x_2, \dots, a_{n-1} = x_n - x_{n-1}$. Затем определяются

$$C^2 = \frac{1}{2(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2, s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

Для оценки случайности выборки используется критерий $\tau = C^2/s^2$. Если $\tau < \tau_q$, где τ_q — критическое значение критерия при уровне значимости q , то гипотеза «случайности» верна [37].

2.2. Метод наименьших квадратов

Метод наименьших квадратов (МНК) — универсальный и наиболее распространенный метод обработки результатов экспериментов. Его используют в регрессионном анализе для вычисления коэффициентов уравнений регрессии.

Сущность МНК сводится к определению коэффициентов регрессии, обеспечивающих минимум суммы квадратов отклонений опытных данных y_i от значений, вычисленных по уравнению регрессии y_h т. е. минимум функции

$$\Phi = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad (2.9)$$

где $\xi_i = y_i - \hat{y}_i$

Рассмотрим однофакторную задачу для линейной зависимости

$$y = b_0 + b_1 x \quad (2.10)$$

В этом случае

$$\xi_i = y_i - b_0 - b_1 x_i \quad (2.11)$$

Обычно стремятся провести больше опытов, чем число неизвестных коэффициентов уравнения регрессии. Поэтому система линейных уравнений (2.11) оказывается переопределенной и часто несовместной (т. е. она может иметь бесконечно много решений или не иметь совсем). Переопределенность возникает, когда число уравнений больше числа неизвестных, несовместность — когда нет ни одного решения, обращающего все уравнения в тождества.

Только если все экспериментальные точки лежат на прямой, система становится определенной и имеет единственное решение. МНК обладает тем замечательным свойством, что делает определенной любую произвольную систему уравнений (число уравнений становится равным числу неизвестных их коэффициентов).

В уравнении (2.10) два неизвестных коэффициента. Определим их.

Соотношение (2.9) можно записать иначе:

$$\Phi = \sum_{i=1}^n (y_i - b_0 - b_1 x_i)^2 = \min.$$

Минимум некоторой функции, если он существует, достигается при одновременном равенстве нулю частных ее производных по всем неизвестным, в нашем случае $\partial\Phi/\partial b_0=0$ $\partial\Phi/\partial b_1=0$

Выполнение этой процедуры дает возможность составить систему, число уравнений в которой равно числу неизвестных коэффициентов. Такая система носит название системы нормальных уравнений. Для линейной зависимости с одной переменной (2.10) после дифференцирования и простейших алгебраических преобразований имеем:

$$\begin{cases} b_0 \sum_{i=1}^n x_{i0}^2 + b_1 \sum_{i=1}^n x_{i0} x_{i1} = \sum_{i=1}^n x_{i0} y_i; \\ b_1 \sum_{i=1}^n x_{i0} x_{i1} + b_1 \sum_{i=1}^n x_{i1}^2 = \sum_{i=1}^n x_{i1} y_i, \end{cases} \quad (2.12)$$

где x_{i0} — фиктивная переменная, равная единице во всех точках факторного пространства.

Решение системы (2.12) при $x_{i0}=1$ дает следующие формулы для вычисления коэффициентов:

$$b_0 = \frac{\sum_{j=1}^n y_j \sum_{j=1}^n x_{j1}^2 - \sum_{j=1}^n x_{j1} \sum_{i=1}^n x_{i1} y_i}{n \sum_{i=1}^n x_{i1}^2 - \left(\sum_{j=1}^n x_{j1} \right)^2};$$

$$b_1 = \frac{n \sum_{i=1}^n x_{i1} y_i - \sum_{j=1}^n x_{j1} \sum_{i=1}^n x_{i1} y_i}{n \sum_{j=1}^n x_{j1}^2 - \left(\sum_{j=1}^n x_{j1} \right)^2}.$$

Таблица 2.1

Номер точки	X_0	X_1	X_2	X_3	y
1	1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	y_1
2	1	x_{21}	x_{22}	x_{23}	y_2
3	1	x_{31}	x_{32}	x_{33}	y_3
...
n	1	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}	y_n

Система нормальных уравнений (например, (2.12)) имеет особенности: по диагонали матрицы коэффициентов уравнений под знаками суммы последовательно записываются квадраты значений независимых переменных; другие элементы матрицы симметричны относительно этой диагонали; правую часть системы составляют произведения, полученные последовательным умножением членов колонки параметра оптимизации на члены колонки факторов. Эти свойства дают возможность использовать очень простой метод составления системы нормальных уравнений при любом числе факторов.

Расположим опытные данные в виде таблицы, например для случая трех переменных — табл. 2.1.

Первое уравнение системы получаем умножением элементов первого столбца (X_0) сначала на самих себя, а затем на элементы всех остальных столбцов по очереди. Второе уравнение получают умножением элементов из второго столбца на все элементы из остальных столбцов по очереди, начиная со столбца X_0 , и т.д.

Во всех уравнениях системы расположим коэффициенты b_j в порядке возрастания индекса:

$$b_0 \sum x_0^2 + b_1 \sum x_0 x_1 + b_2 \sum x_0 x_2 + b_3 \sum x_0 x_3 = \sum x_0 y;$$

$$b_0 \sum x_1 x_0 + b_1 \sum x_1^2 + b_2 \sum x_1 x_2 + b_3 \sum x_1 x_3 = \sum x_1 y;$$

$$b_0 \sum x_2 x_0 + b_1 \sum x_2 x_1 + b_2 \sum x_2^2 + b_3 \sum x_2 x_3 = \sum x_2 y;$$

$$b_0 \sum x_3 x_0 + b_1 \sum x_3 x_1 + b_2 \sum x_3 x_2 + b_3 \sum x_3^2 = \sum x_3 y.$$

В уравнениях системы суммирование производится по всем n опытным точкам. Составление системы нормальных уравнений для полиномов выше первого порядка осуществляют аналогичным способом. При этом нелинейные члены уравнения регрессии рассматривают как самостоятельные переменные.

Таблица 2.2

Номер точки	X_0	X_1	X_2	$X_1 X_2$	X^2_1	X^2_2	y
1	1	X_{11}	X_{12}	$X_{11} X_{12}$	X^2_{11}	X^2_{12}	y_1
2	1	X_{21}	X_{22}	$X_{21} X_{22}$	X^2_{21}	X^2_{22}	y_2
...
n	1	X_{n1}	X_{n2}	$X_{n1} X_{n2}$	X^2_{n1}	X^2_{n2}	y_n

Например, в случае двух факторов (табл. 2.2) система нормальных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} b_0 \sum x_0^2 + b_1 \sum x_0 x_1 + b_2 \sum x_0 x_2 + b_{12} \sum x_0 x_1 x_2 + b_{11} \sum x_0 x_1^2 + b_{22} \sum x_0 x_2^2 = \sum x_0 y \\ b_0 \sum x_1 x_0 + b_1 \sum x_1^2 + b_2 \sum x_1 x_2 + b_{12} \sum x_1^2 x_2 + b_{11} \sum x_1^3 + b_{22} \sum x_1 x_2^2 = \sum x_1 y; \\ \dots \\ b_0 \sum x_2 x_0 + b_1 \sum x_2 x_1 + b_2 \sum x_2^2 + b_{12} \sum x_1 x_2^3 + b_{11} \sum x_1^2 x_2^2 + b_{22} \sum x_2^4 = \sum x_2^2 y; \end{cases}$$

2.3. Оценка достоверности результатов

Поскольку результаты корреляционно-регрессионного анализа, полученные на базе ограниченного числа экспериментальных данных, являются случайными величинами, необходимо оценить их достоверность, определить доверительные интервалы, в которых находятся их истинные значения. Для этого последовательно производятся следующие операции: 1) оценка достоверности коэффициентов корреляции; 2) оценка значимости коэффициентов регрессии; 3) оценка адекватности уравнения регрессии.

1. При любом объеме выборки и многомерном нормальном распределении рассматриваемых факторов вычисляется статистика

$$t = r \sqrt{(n-2)/(1-r^2)} \quad (2.13)$$

имеющая распределение Стьюдента с $f = n - 2$ степенями свободы. Для проверки нулевой гипотезы $H_0: \rho = 0$ (ρ — коэффициент корреляции генеральной совокупности) находят по соответствующим таблицам [8] при фиксированном уровне значимости α и числе степеней свободы $f = n - 2$ критическое значение $t_{\alpha/2, n-2}$, удовлетворяющее условию $P(|t| \geq t_{\alpha/2, n-2}) = \alpha$. Если наблюдаемое значение $t_B > t_{\alpha/2, n-2}$, то нулевую гипотезу об отсутствии линейной зависимости между переменными x и y следует отвергнуть. Этот метод часто применяют при малых объемах выборок.

Пример [8]. Пусть по выборке объема $n=10$, извлеченной из двумерной нормальной совокупности, вычислен выборочный (эмпирический) коэффициент корреляции $r=0,76$. Требуется проверить нулевую гипотезу $H_0: \rho = 0$ против альтернативной гипотезы $H_a: \rho \neq 0$ при уровне значимости $\alpha=0,01$.

Решение. Вычисляем статистику

$$t_n = 0,76 \sqrt{\frac{11-2}{1-(0,76)^2}} = 3,5$$

По таблице распределения Стьюдента при $\alpha = 0,01$ и числе степеней свободы $f = n - 2 = 9$ находим $t_{\alpha/2, n-2} = t_{0,005; 9} = 3,25$. Так как $3,5 > 3,25$, то r значимо отличается от нуля, т. е. переменные x и y являются коррелированными.

При числе наблюдений $n > 50$ надежность коэффициента корреляции можно оценить по его среднему квадратическому отклонению

$$s_r = (1-r^2)/\sqrt{n} \quad (2.14)$$

и нормированному отклонению

$$t_r = |r|/s_r. \quad (2.15)$$

Достоверность коэффициента корреляции считается доказанной с вероятностью 0,997, если $t_r \geq 3$; с вероятностью 0,990 при $t_r \geq 2,58$; с вероятностью 0,95 при $t_r \geq 1,96$. Если n достаточно велико, а ρ близко к 0,5, границы доверительного интервала для коэффициента корреляции ρ той генеральной совокупности, из которой взята выборка, можно определить обычным способом:

$$r - t_{кр} s_r \leq \rho \leq r + t_{кр} s_r. \quad (2.16)$$

Значение $t_{кр}$ устанавливается по таблице функции Лапласа для выбранной вероятности. Если левая и правая части неравенства (2.16) имеют одинаковый знак, т. е. ρ не принимает нулевого значения, то ρ имеет достоверный знак и является значимым.

В случае выборок малых объемов доверительный интервал для ρ можно определить по номограмме [8].

Формулы (2.13)... (2.16) справедливы и при оценке достоверности коэффициента множественной корреляции и корреляционных отношений.

2. Проверку значимости коэффициентов регрессии можно производить двумя способами: сравнением абсолютного значения коэффициента с доверительным интервалом; с помощью критерия

Стьюдента. В первом случае доверительный интервал для коэффициента b^* вычисляют по формуле

$$\Delta b_i = \pm t_T s_{b_i}, \quad (2.17)$$

где t_T — табличное значение критерия Стьюдента при уровне значимости и числе степеней свободы, для которых определялось S_{b_i} ; S_{b_i} — среднее квадратическое отклонение b_i .

Коэффициент значим, если его абсолютное значение больше доверительного интервала.

При проверке значимости коэффициентов вторым способом вычисляют

$$t_p = |b_i| / s_{b_i} \quad (2.18)$$

и сравнивают его с критическим значением этого критерия $t_{кр}$. Коэффициент значим, если $t_p > t_{кр}$ для принятого уровня значимости и числа степеней свободы, при которых определялось S_{b_i} .

Статистически незначимые коэффициенты могут быть исключены из уравнения регрессии. Причем, если уравнение получено с помощью методов планирования эксперимента, остальные коэффициенты пересчитывать не надо.

Методика определения S_{b_i} зависит от способа получения уравнения регрессии. В случае применения планирования эксперимента

$$s_{b_i}^2 = \frac{s_{(y)}^2}{nN}, \quad (2.19)$$

где $s_{(y)}^2$ — дисперсия воспроизводимости эксперимента; n — число параллельных опытов в каждой точке матрицы при равномерном дублировании опытов (при отсутствии дублирования опытов $n = 1$); N — общее число опытов в матрице плана.

При равномерном дублировании опытов во всех строках матрицы плана чисто параллельных опытов одинаково. Для каждой строки этой матрицы вычисляют дисперсию s_j^2 результатов по данным n параллельных опытов:

$$s_j^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{u=1}^n (y_{ju} - \bar{y}_j)^2, \quad (2.20)$$

где y_{ju} — значение функции отклика в u -й строке для j -го опыта.

Если s_j^2 результатов опытов однородны, то дисперсия $s_{(y)}^2$ воспроизводимости эксперимента

$$s_{(y)}^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N s_j^2 \quad (2.20)$$

где N — число опытов или число строк матрицы плана. При отсутствии дублирования опытов для определения дисперсии воспроизводимости эксперимента выполняют n_0 параллельных опытов при средних уровнях всех независимых факторов (в нулевой точке плана). По результатам этих опытов вычисляют

$$s_{(y)}^2 = \frac{1}{n_0 - 1} \sum_{u=1}^{n_0} (y_u - \bar{y})^2, \quad (2.21)$$

где y_u — значение функции отклика в i -м параллельном опыте.

При равномерном дублировании опытов число степеней свободы для расчета $s_{(y)}^2$ и, следовательно, s_{bi} находится как $f = N(n - 1)$, при отсутствии дублирования опытов $f = n_0 - 1$. Если коэффициенты уравнения регрессии получены без планирования эксперимента (по результатам пассивного эксперимента), средние квадратические отклонения коэффициентов регрессии определяются следующим образом.

Для парной регрессии $y = a + bx$

$$s_b = \frac{s_y \sqrt{1 - r_{xy}^2}}{s_x \sqrt{n}};$$

регрессии трех переменных $y = a + bx + cz$

$$s_b = \frac{s_y \sqrt{1 - r_{xy}^2}}{s_x \sqrt{1 - r_{xz}^2} \sqrt{n}}, \quad s_c = \frac{s_y \sqrt{1 - R_{y.xz}^2}}{s_z \sqrt{1 - r^2} \sqrt{n}};$$

многих переменных $y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_k x_k$

$$s_{b_1} = \frac{s_y \sqrt{1 - R_{y.x_1 x_2 \dots x_k}^2}}{s_{x_1} \sqrt{1 - R_{x_1 x_2 \dots x_k}^2} \sqrt{n}}.$$

Аналогичные формулы могут быть записаны для расчета $s_{b_0}, s_{b_2}, \dots, s_{b_k}$. Дальнейшая проверка значимости коэффициентов регрессии выполняется по формулам (2.17) и (2.18).

3. В зависимости от наличия сведений о дисперсии воспроизводимости эксперимента $s_{(y)}^2$ проверку адекватности уравнения регрессии можно производить по двум схемам. Первая из них приме-

няется при отсутствии оценки дисперсии воспроизводимости, что характерно для пассивного эксперимента, и состоит из следующих этапов:

а) вычисление дисперсии относительно среднего значения параметра оптимизации (остаточной дисперсии для уравнения нулевого порядка)

$$s_{y_0}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}{N-1};$$

б) расчет дисперсии, характеризующей отклонение экспериментальных значений величин от найденных по уравнению регрессии. Если порядок уравнения заранее неизвестен, то в случае многофакторного пространства имеет смысл начинать с уравнения первого порядка

$$s_{y_1}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y}_i)^2}{f}, \quad (2.22)$$

где t/i — значение параметра оптимизации, вычисленное по уравнению регрессии для условий 1-го опыта; $f = ЛГ - g$ — число степеней свободы; g — число коэффициентов регрессии; для линейного уравнения $g = \kappa + 1$; для неполного квадратного уравнения, включающего члены типа $b_j X_j$ и $b^i X_i X_j$, $g = k(k+1)/2 - f + 1$; для полного квадратного уравнения $g = \kappa(\kappa+3)/2 + 1$; κ — число факторов;

б) вычисление опытного значения отношения дисперсий

$$F_0 = \frac{s_{y_0}^2}{s_{y_1}^2}; \quad (2.23)$$

которое затем сравнивают с критическим $F_{кр}$. Если пользоваться уравнением регрессии первого порядка не имеет смысла, так как в изученном интервале изменения уровней факторов оно описывает исследуемую систему (процесс) не лучше, чем уравнение нулевого порядка. Затем составляют уравнение второго порядка, рассчитывают $s_{(y)}^2$ и $F_t = s_{y_1}^2 / s_{y_2}^2$. Далее проверяют значимость этого отношения по F-критерию. Процедуру повторяют до тех пор, пока не будет выполнено условие $F_T \geq F_{кр}(f_1, f_2)$. Индекс z соответствует степени предпоследнего полинома.

Если известна дисперсия воспроизводимости s_{iy} эксперимента, для оценки адекватности модели вначале рассчитывают дисперсию адекватности по формуле (2.22), а затем вычисляют опытное значение F-критерия (вторая схема): $F_p = s_{ao}^2 / s_{(y)}^2$.

Глава 3. ПЛАНИРОВАНИЕ ОДНОФАКТОРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

3.1. Выбор интервалов между экспериментальными уровнями факторов и порядка проведения опытов

Для сокращения продолжительности и повышения эффективности эксперимента необходимо до его проведения установить интервалы между значениями факторов. Вначале определяют общие пределы изменения независимых факторов, обусловленные их физической природой или возможностями оборудования (примерами таких ограничений являются: температура плавления или предел прочности исследуемого металла, предельные значения частот вращения и подачи станка и др.). Затем определяют, как следует изменять уровни факторов внутри этих областей.

Существует два основных критерия, на основе которых производится выбор точек, отвечающих условиям проведения опыта: 1) относительная точность данных на различных участках области планирования; 2) характер экспериментальной функции.

Во многих случаях получаемые данные имеют неодинаковую точность на различных участках области экспериментирования. Можно ожидать, например, что для многих механических систем испытания, проводимые при пониженной мощности или малом давлении, напоре, будут наименее точными.

Если анализ ошибок показывает, что на каком-то участке области экспериментирования данные вызывают наибольшие сомнения, то, естественно, стараются заполнить этот участок большим числом опытных точек. Нельзя установить какое-либо твердое правило, указывающее, сколько дополнительных отсчетов следует сделать при получении сомнительных данных. Однако можно считать, что в этом случае справедливо общее правило, связывающее повышение точности с числом дополнительных отсчетов. Четыре измерения дают вдвое большую, а девять — втрое большую точность, чем одно, и т. д. (см. § 1.6).

Если точность измерений одинакова для всех факторов и отклика желательно, чтобы расстояние между точками на экспериментальной кривой было постоянным на всей ее длине. Зная заранее

характер рассматриваемой функции $y=f(x)$, этого можно добиться приведением

функции к линейному виду с помощью различных алгебраических преобразований. Рассмотрим примеры таких преобразований.

На графике величины $y = (A + B)/x^2$, являющейся функцией $1/x^2$, равномерное расположение точек получится, если взять в опытах одинаковые приращения $1/x^2$.

Для функции $y=Aexp(-bx)$, или $\ln y = \ln A - bx$, следует построить график $\ln y = f(x)$ по точкам, соответствующим одинаковым приращениям x , а для функции $y = A \ln(bx)$, или $y = A (\ln b + \ln x)$, — график $y = f(\ln x)$, взяв одинаковые приращения $\ln x$.

Выбор необходимых интервалов между точками производится не для того, чтобы получить симметричную или удобную кривую, а чтобы обеспечить на всех участках кривой или карты одинаковую точность экспериментальных данных.

Теперь перейдем к выяснению того, каким должен быть порядок проведения эксперимента при выбранных условиях. Во многих экспериментах возможность выбора последовательности работы мала или вообще отсутствует.

В технике часто встречаются так называемые невоспроизводимые эксперименты. Такой эксперимент протекает во времени необратимо, без возможности его изменения или повторения. Многие эксперименты, связанные с испытаниями материалов, являются невоспроизводимыми. Допустим, что при испытании стального образца на растяжение предполагается прикладывать заранее выбранные нагрузки случайным образом, например, в следующей последовательности: 30 000, 5000, 4500, 75 000 Н и т. д. Безусловно, такой план будет неправильным, если первоначально приложенная нагрузка вызывает напряжения, превышающие предел упругости материала. Образец приобретает остаточную деформацию и все последующие измерения будут производиться на деформированном образце.

Можно утверждать, что по существу все эксперименты невоспроизводимы в том смысле, что ни один образец или прибор после использования не возвращается к исходному состоянию. Но изменения в них в процессе эксперимента настолько малы, что их невозможно обнаружить. В этом смысле эксперимент считается воспроизводимым и допускает выбор последовательности условий его

выполнения. Имеется два основных типа однофакторного эксперимента: последовательный и рандомизированный (случайный).

Суть последовательного эксперимента заключается в том, что уровень фактора изменяется скачкообразно, т. е. используется последовательная, шаговая стратегия. После каждого шага производится анализ результатов, и на основании этого анализа принимается решение о ходе дальнейшей работы.

Последовательный эксперимент целесообразен в следующих случаях: 1) если известно, что он невоспроизводим; 2) когда испытываемая система (объект) имеет некоторые особенности, которые можно обнаружить лишь при получении данных в регулярной последовательности; 3) если продолжительность, стоимость или сложность экспериментов таковы, что рандомизированный эксперимент нецелесообразен. Первый случай описан выше. Вторым имеет место, например, при анализе стабильности технологического процесса механической обработки. В процессе эксперимента строят точечную диаграмму в координатах: измеряемый размер (ордината) — время или номер выборки (абсцисса). Когда хотя бы одна опытная точка попадает на контрольную границу или за ее пределы, необходимо произвести под наладку станка. Здесь для исключения возможного брака также необходимо выборки для измерений брать в определенной последовательности, а не произвольно. Третий случай характерен, в частности, для экспериментального изучения работы металлургических или термических печей, установок для ХТО и других агрегатов, время достижения теплового равновесия которых составляет несколько дней и поэтому изменение рабочих условий в процессе эксперимента должно быть как можно меньшим.

Если уровень фактора меняется случайным образом, принимая то меньшие, то большие значения, план эксперимента называется рандомизированным. Основной целью рандомизации является сведение эффекта некоторого неслучайного фактора к случайной ошибке.

Наиболее распространенные систематические погрешности эксперимента обусловлены:

1) изменением внешних условий в процессе эксперимента. К последним можно отнести как атмосферные условия (температура среды, влажность, давление и т. п.), так и связанные с состоянием испытываемой системы (например, нагревом) или влиянием рядом расположенных систем (вибрации от соседних станков и т. п.);

2) снижением работоспособности оператора;

3) изменением характеристик аппаратуры или оборудования при работе их в различных диапазонах изменения исследуемой величины. Допустим, что в регуляторе или измерительном приборе наблюдается «заедание». Если предыдущий отсчет производился в верхней части диапазона, то при последующем отсчете прибор покажет завышенное значение величины, если же предыдущий отсчет находился в нижней части диапазона, то «заедание» прибора приводит к заниженному показанию. При последовательном переходе к более высоким показаниям каждый отдельный отсчет будет заниженным, а общий результат эксперимента будет иметь систематическую ошибку постоянной величины, которую трудно обнаружить. Допустим теперь, что выбор опытных точек производится случайным образом. При переходе от больших значений величины к меньшим будет произведено почти столько же отсчетов, сколько и при переходе от меньших к большим. Полученные данные могут иметь некоторый разброс, но они будут группироваться вокруг точных значений величины.

Рандомизация плана эксперимента может быть достигнута с помощью: 1) таблицы случайных чисел, приводимой во многих работах, в частности [38]; 2) «игрового» метода; 3) введения специальных блоков.

Пусть, например, требуется рандомизировать во времени 6 опытов, обозначенных цифрами I...VI. Поставим им в соответствие любые 6 последовательных чисел, взятых в любой строке или в любом столбце таблицы случайных чисел. Если при этом встретятся повторяющиеся числа, то их следует отбросить. Например, могут быть получены следующие группировки: I — 60, II—12, III—05, IV—15, V—34, VI—30. Расположив случайные числа в порядке возрастания (убывания), получаем искомую последовательность реализации опытов: III, II, IV, VI, V, I (или I, V, VI, IV, II, III).

«Игровой» метод предполагает, что выбранные комбинации условий можно пронумеровать, а номера вытаскивать, как при жеребьевке. Если имеются две или большее число игральных костей различного цвета, то можно, например, вытянуть номера 36, 216 и т. д. Если красная кость дает единицы, а зеленая — десятки, то при выпадении трех очков на зеленой кости и одного очка на красной получается номер 31. Комбинации условий можно пронумеровать от II до 16, от 21 до 26 и так далее и план эксперимента составлять путем последовательного бросания игральных костей.

Принципы и пример построения блочных планов будут рассмотрены ниже.

3.2. Рандомизация внешних условий в однофакторном эксперименте с помощью рандомизированных блоков

Даже если рассматривается всего один регулируемый фактор, было бы неправильно не учитывать влияние различных других, нерегулируемых (внешних) условий, состояние испытываемой системы, работоспособность оператора и т. д. Уровни внешних факторов такого рода изменяются непрерывно во времени, и их влияние лучше всего компенсировать путем простой рандомизации плана эксперимента, как показано выше.

Внешние факторы могут быть также дискретными (группы людей, станков или приборов, производственные периоды, размеры партии материалов, различные дни недели или времена года и т. д.) и оказывать определенные непрогнозируемые воздействия на исход эксперимента.

Поскольку невозможно исключить влияние многих внешних факторов или вычислить поправку на их воздействие, можно путем рандомизации свести к минимуму их эффект за счет более равномерного распределения уровней этих факторов в течение всего эксперимента. В тех случаях, когда дискретные внешние факторы могут быть идентифицированы, выделены, возможно использование рандомизированных блоков [44].

Допустим, требуется проверить работу нового резца в производственных условиях. Необходимо определить оптимальную скорость обработки, обеспечивающую максимальный выход продукции, чтобы при этом доля брака не превышала некоторой заданной. Это однофакторный эксперимент, в котором фактором является скорость обработки, а откликом — выход продукции R . В таком эксперименте один явный внешний фактор — рабочий, обслуживающий станок. Каким образом следовало бы выбрать типичного или среднего представителя для проведения эксперимента из группы, скажем, 20 рабочих? У рабочих могут в значительной мере отличаться уровень мастерства, характер, физическая сила, поэтому выбор един-

ственного «среднего» рабочего для проведения эксперимента не имеет смысла. Тогда каким-либо способом выберем случайным образом четырех рабочих. Предположим, что каждый из них будет работать полную смену при заданной скорости обработки. Чтобы сбалансировать эксперимент, выберем четыре различные скорости обработки, с тем чтобы каждый рабочий за четыре дня опробовал каждую из них. Результаты, полученные для каждой скорости обработки, можно усреднить. Обозначив скорости цифрами 1, 2, 3 и 4, а рабочих — буквами *A*, *B*, *C* и *D*, можно получить следующий план (табл. 3.1).

Таблица 3.1

Рабочий	День недели			
	понедельник	вторник	среда	четверг
A	1	2	3	4
B	1	2	3	4
C	1	2	3	4
D	1	2	3	4

Такой план, безусловно, является несовершенным, так как в нем не учтена последовательность изменения условий эксперимента. Энтузиазм, интерес, которые вызывает работа с новым инструментом вначале, могут затем ослабнуть, и по этой причине снизится выработка рабочего. И наоборот, может появиться натренированность рабочего, выработка увеличится.

Произведем полную рандомизацию плана эксперимента таким образом, чтобы только один из рабочих производил в данный день обработку деталей на одной из скоростей, используя ее только один день в рассматриваемый период. Такой план может иметь вид табл. 3.2.

В первой строке цифры расположены в порядке возрастания, а в столбцах — через строку.

Построен так называемый латинский квадрат, представляющий собой частный план в общем семействе планов факторных экспериментов, хотя последний термин предполагает не только рандомизацию условий эксперимента, но и анализ результатов с использованием статистических методов. Данный план позволяет в принципе оценить влияние внешних факторов на выход продукции.

Можно еще более усовершенствовать эксперимент, связанный с испытанием резцов. Если каждый рабочий в течение всего эксперимента будет работать на одном станке (а станки могут значительно отличаться друг от друга), то вследствие различий между станками может появиться систематическая ошибка в результатах эксперимента. Обозначая станки буквами W, X, Y, Z , зададим условия их работы таким образом, чтобы каждый рабочий обслуживал данный станок только один день и чтобы на каждой скорости обработки каждый станок работал только один день. В этом случае план имеет вид табл. 3.3

Такой план носит название греко-латинского квадрата, он позволяет усреднить влияние трех факторов: день недели, станок, рабочий. Здесь имеет место попарное чередование W, X, Y и Z по столбцам и по строкам.

Для многих экспериментов квадрат не всегда является наиболее удобным планом. Например, скорость обработки можно изменять шесть раз при наличии трех рабочих (станков). В литературе описано большое число частично сбалансированных и несбалансированных планов эксперимента [44].

Часто для обычного инженерного эксперимента вполне достаточно построить план по методу греко-латинского квадрата типа 3×3 . Например, при скоростях резания 1, 2, 3, 4, 5 и 6, рабочих W, X и Y и станках W, X и Z можно построить два квадрата 3×3 (табл. 3.4).

Таблица 3.2

Рабочий	День недели			
	понедельник	вторник	среда	четверг
A	1	2	3	4
B	3	4	1	2
C	2	1	4	3
D	4	3	2	1

Таблица 3.3

Рабочий	День недели			
	понедельник	вторник	среда	четверг
A	1W	2X	3Z	4Y
B	3X	4W	1Y	2Z
C	2Y	1Z	4X	3W
D	4Z	3Y	2W	1X

Таблица 3.4

Рабочий	День недели			День недели		
	понедельник	вторник	среда	четверг	пятница	суббота
А	1X	3Z	5Y	2X	4Z	6Y
В	3Y	5X	1Z	4Y	6X	2Z
С	5Z	1Y	3X	6Z	2Y	4X

Построение по столбцам идет путем перестановок цифр и букв. Шесть скоростей обработки распределены равномерно между первым и вторым блоками (по три дня недели) в целях обеспечения как можно большего их перекрытия. Этот план не является столь же рандомизированным, как квадрат с 36 ячейками (6 рабочих, 6 станков, 6 дней недели), но вполне удовлетворителен.

Глава 4. ПЛАНИРОВАНИЕ МНОГОФАКТОРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

4.1. Полный факторный план

4.1.1. Основные преимущества и условия выполнения

Недостатками математических моделей, полученных с помощью классического регрессионного анализа, являются корреляционная связь между коэффициентами уравнений и трудность оценки ошибки расчетного значения параметра оптимизации и интерпретации физического смысла уравнений регрессии. Но регрессионный анализ весьма эффективен и удобен, так как позволяет представлять всю информацию об изучаемом процессе в компактной форме.

Недостатки классического регрессионного анализа во многом устраняются с помощью статистического планирования эксперимента. Кроме того, планирование эксперимента позволяет значительно сократить его объем и повысить точность получаемых результатов.

Основа методов статистического планирования эксперимента — использование упорядоченного плана расположения опытных точек в факторном пространстве и переход к новой системе координат.

Пусть в линейной задаче (линейный регрессионный анализ) рассматриваются k факторов X_1, x_2, \dots, x_k , образующих k -мерное факторное пространство (к ним нужно добавить еще одну фиктивную переменную для оценки свободного члена в уравнении регрессии). Уравнение регрессии записывается следующим образом:

$$\eta = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_k x_k$$

Задачу получения выборочных оценок b_i коэффициентов регрессии β_i ($b_i \rightarrow \beta_i$) можно решать традиционным (однофакторным) методом, варьируя уровень каждого фактора по очереди. Если факторы варьируются только на двух уровнях (+1 и -1) при числе повторных опытов n , дисперсия оценки коэффициента регрессии $\sigma^2\{b_i\} = \sigma^2\{(y_1 - y_0)/2\}/n = \sigma^2\{y\}/(2n)$, где $b_i = (y_i - y_0)/2$ (рис. 4.1). Эта величина не зависит от общего числа учитываемых факторов, по-

сколько каждый из них изучается отдельно; значение b_i определяется результатами всего двух усредненных измерений, которыми и задается значение дисперсии коэффициента регрессии.

Можно принять другую стратегию, варьируя уровни сразу всех факторов так, чтобы роль каждого фактора оценивалась по всей совокупности опытов. В благоприятном случае дисперсия оценки коэффициента уравнения регрессии по сравнению с единственным измерением уменьшается в $(k+1)n$ раз, так как оценка будет производиться по результатам всех $(k+1)n$ опытов. Таким образом, эффективность многофакторного эксперимента возрастает с увеличением числа факторов. Однако даже в случае линейной регрессии не всегда удастся построить хороший план эксперимента, позволяющий столь резко уменьшать дисперсии в оценках параметров. В случае нелинейной регрессии вводится сложная система критериев оптимальности плана эксперимента и на базе соответствующих математических методов оптимизируется использование факторного пространства [2].

Планы эксперимента, цель которого — отыскание модели процесса в виде полинома первой или второй степени (см. гл. 2), называют планами соответственно первого или второго порядка.

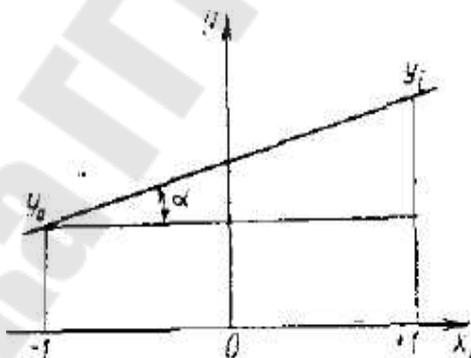


Рис. 4.1. К определению коэффициента регрессии $b_i = tg \alpha$ по двум опытам, каждый из которых повторяется n раз.

Полный факторный план и дробный факторный план, которые рассмотрены ниже, относятся к планам первого порядка.

Первым этапом составления плана эксперимента является выбор его условий. К числу основных условий эксперимента следует отнести: область экспериментирования; основной уровень исследуемых факторов и интервал их варьирования; точность фиксирования факторов.

Напомним (см. гл. 3), что при выборе области экспериментирования необходимо учитывать принципиальные ограничения уровней факторов, обусловленные их физической природой, технико-экономическими соображениями, применяемыми оборудованием и приборами, а также имеющуюся априорную информацию, полученную в подобных, ранее выполненных исследованиях.

Основной уровень (нулевая точка) представляет собой центр изучаемой области изменения данного фактора. Если задачей эксперимента является оптимизация некоторого параметра, нулевую точку нужно располагать как можно ближе к положению, обеспечивающему оптимум параметра. В этом случае за нулевой уровень фактора принимают тот, при котором во время предварительных опытов получено наилучшее значение параметра оптимизации. Если задача эксперимента — получение модели данного процесса, то за нулевую точку принимается середина интервала изменения данного фактора.

На выбор интервалов варьирования уровня фактора накладываются ограничения «сверху» и «снизу». Интервал варьирования не может быть меньше той ошибки, с которой экспериментатор фиксирует уровень фактора, иначе его верхний и нижний уровни окажутся неразличимыми. С другой стороны, интервал не может включать такие уровни фактора, при которых его верхний и нижний уровни оказываются за пределами области определения. Если интервал составляет не более 10% от области определения фактора, его считают узким, не более 30% — средним и в остальных случаях — широким.

При решении задачи оптимизации для первой серии опытов стремятся выбрать такую подобласть изменения уровня фактора, которая давала бы возможность наискорейшего движения к оптимуму. В задачах интерполяции (описания процесса) интервал варьирования уровней факторов охватывает всю область экспериментирования.

Уровни фактора, как правило, выбирают симметричными относительно нулевой точки (будем называть один из этих уровней верхним, а второй — нижним). В этом случае интервал варьирования — это расстояние на координатной оси между основными верхним (нижним) уровнями фактора. Для упрощения записи условий эксперимента и обработки экспериментальных данных масштабы по осям выбирают так, чтобы верхний уровень фактора соответствовал + 1,

нижний —1, а основной — нулю. Для факторов с непрерывной областью определения это всегда можно сделать, перейдя к новой системе координат.

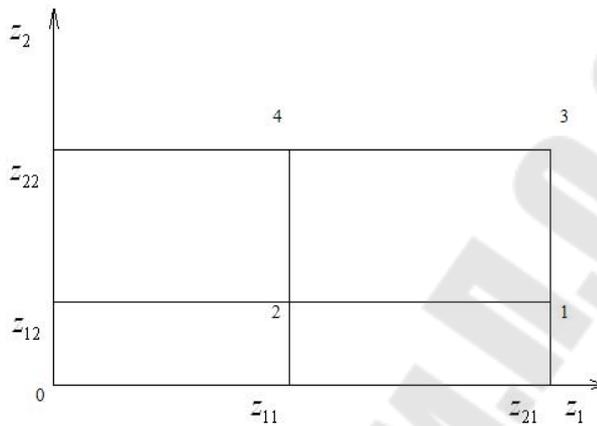


Рис. 4.2. Расположение исследуемой области факторного пространства в системе натуральных координат

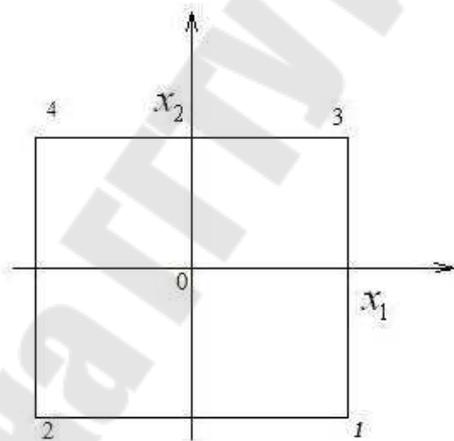


Рис. 4.3. Расположение исследуемой области факторного пространства в системе координат

Обозначим через z_{1j} и z_{2j} соответственно нижнюю и верхнюю границы изменения уровня j -го фактора, y — параметр оптимизации. Тогда, например, для двухфакторной задачи область факторного пространства, подлежащая изучению, будет иметь вид прямоугольника (рис. 4,2) с координатами угловых точек: 1 ($z_{21}; z_{12}$), 2 ($z_{11}; z_{12}$), 3 ($z_{21}; z_{22}$), 4 ($z_{11}; z_{22}$). Координаты центра изучаемой области обозна-

чим z_{0j} , а координаты любой точки — z_{ij} . Представим уровень фактора в кодированном (безразмерном) виде:

$$x_{ij} = \frac{z_{ij} - z_{0j}}{J_j} = \frac{z_{ij} - \frac{z_{1j} + z_{2j}}{2}}{\frac{z_{1j} - z_{0j}}{2}} = \frac{2z_{ij} - z_{1j} - z_{2j}}{z_{1j} - z_{2j}}, \quad (4.1)$$

где J_j — интервал варьирования уровня j -го фактора.

Подставив в формулу (4.1) вместо z_{ij} координаты точек 1...4, получим их в новой системе безразмерных координат с началом в центре исследуемой области (рис. 4.3).

Точность фиксирования уровней фактора определяется стабильностью их в ходе опыта и точностью приборов: высокая, если измерение производится с погрешностью не более 1%, средняя — не более 5, низкая — более 10%.

4.1.2. Полный факторный план типа 2^h

План эксперимента, содержащий все возможные комбинации всех факторов на определенном числе уровней равное число раз, называется *полным факторным планом*. Если число факторов известно, можно сразу найти число опытов, необходимых для реализации всех возможных сочетаний уровней факторов:

$$N = p^h,$$

где p — число уровней фактора; h — число факторов.

Если число уровней каждого фактора равно двум, то имеем полный факторный план эксперимента типа 2^h . Геометрической интерпретацией полного факторного плана 2^k является квадрат (см. рис. 4.3), центр которого — основной уровень фактора, а стороны параллельны осям координат и равны удвоенному интервалу его изменения.

Если координаты точек 1...4 записать в виде таблицы, то получим так называемую матрицу плана (каждый столбец в матрице плана называют вектор-столбцом, а каждую строку — вектор-строкой), которая при включении в нее результатов опытов имеет вид, представленный в табл. 4.1.

В случае двух факторов все возможные комбинации их уровней можно найти прямым перебором, но с ростом числа факторов возникает необходимость в знании некоторых приемов построения матриц. Обычно используются три основных приема, основанных на переходе от матриц меньшей размерности к матрицам большей размерности.

При добавлении нового фактора каждая комбинация факторов в исходном плане встречается дважды — в сочетании с нижним и верхним уровнями нового фактора. Поэтому первый прием состоит в записи исходного плана для одного уровня нового фактора, а затем повторении его для другого уровня. При переходе от плана 2^2 к 2^3 построение матрицы показано в табл. 4.2

Таблица 4.1

Номер опыта	X_1	X_2	y
1	+1	-1	y_1
2	-1	-1	y_2
3	+1	+1	y_3
4	-1	+1	y_4

Таблица 4.2

Номер опыта	x_1	x_2	x_3	y
1	-	-	+	y_1
2	+	-	+	y_2
3	-	+	+	y_3
4	+	+	+	y_4
5	-	-	-	y_5
6	+	-	-	y_6
7	-	+	-	y_7
8	+	+	-	y_8

Второй прием основан на правиле чередования знаков. В первом столбце матрицы знаки меняются поочередно, во втором они

чередуются через 2, в третьем — через 4, в четвертом — через 8 и т. д. (соответственно возрастают степени числа 2). Табл. 4.2 является примером реализации и этого приема.

Рассмотрим третий прием. Для этого введем правило перемножения столбцов матрицы. При построчном перемножении элементов двух столбцов матрицы произведение единиц с одноименными знаками дает +1, а с разноименными — 1. Воспользовавшись этим правилом, для рассматриваемого случая получим вектор-столбец произведений $X_1 X_2$ в исходном плане. Повторим еще раз исходный план, а у столбца произведений знаки поменяем на обратные. Этот прием можно перенести на построение матриц любой размерности, однако он сложнее, чем первые два.

Планы эксперимента типа 2^k независимо от числа факторов обладают некоторыми общими свойствами. При этом имеются в виду те из них, которые определяют качество модели. Ведь эксперимент и планируется для того, чтобы получить модель, обладающую некоторыми оптимальными свойствами. Это значит, что оценки (значения) коэффициентов модели должны быть наиболее точными, а точность предсказания значения оптимизируемого параметра не должна зависеть от направления движения в факторном пространстве.

Два свойства плана 2^{ft} следуют непосредственно из построения его матрицы. Первое из них — симметричность относительно центра эксперимента — формулируется следующим образом: алгебраическая сумма элементов каждого вектор-столбца матрицы (уровней каждого фактора) равна нулю:

$$\sum_{i=1}^N x_{ij} = 0,$$

где x_{ij} — уровень j -го фактора в i -м опыте; N — число опытов; $j=1, 2, \dots, k$.

Второе свойство — так называемое условие нормировки: сумма квадратов элементов каждого столбца равна числу опытов:

$$\sum_{i=1}^N x_{ij}^2 = N.$$

Это следствие того, что уровни факторов в матрице задаются +1 и —1.

Равенство нулю скалярных произведений всех вектор-столбцов называется свойством ортогональности матрицы планирования:

$$\sum_{i=1}^N x_{ui}x_{ji} = 0; u \neq j; u, j=0, 1, \dots, k.$$

Это свойство способствует резкому уменьшению трудностей, связанных с расчетом коэффициентов уравнения регрессии.

Свойство плана, при котором точность предсказания значений функции отклика зависит только от расстояния от центра плана, называется ротатабельностью.

4.1.3. Расчет параметров математической модели

Линейная модель двухфакторного эксперимента имеет вид:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2. \quad (4.2)$$

По результатам эксперимента необходимо найти значения неизвестных коэффициентов модели. Эксперимент, содержащий конечное число опытов, позволяет получать не истинные значения неизвестных коэффициентов, а лишь их выборочные оценки. Точность этих оценок зависит от свойств выборки и нуждается в статистической проверке (см. гл. 2).

Оценки коэффициентов можно вычислить по простой формуле

$$b_j = \frac{\sum_{i=1}^N x_{ji}y_i}{n}, j=0, 1, \dots, k. \quad (4.3)$$

Для определения коэффициента b_1 в зависимости (4.2) используется вектор-столбец x_1 , а для b_2 — x_2 . При расчете b_0 вводится, как и в МНК, вектор-столбец значений фиктивной переменной x_0 , которая принимает во всех опытах значение +1 (это учтено в записи формулы (4.3), где j , принимает значения от 0 до k). Таким образом, $b_0=y$.

Поскольку коэффициенты регрессии для каждого фактора определяются независимо от других факторов, по их значениям можно судить о силе влияния данного фактора. Чем больше числовое значение коэффициента, тем большее влияние на оптимизи-

руемый параметр оказывает фактор. Если коэффициент положителен, с повышением уровня фактора параметр оптимизации увеличивается, и наоборот. Значение коэффициента соответствует вкладу данного фактора в значение параметра оптимизации при переходе фактора с нулевого уровня на верхний или нижний.

Иногда удобно оценивать вклад фактора при переходе его от нижнего к верхнему уровню. Вклад фактора в значение параметра оптимизации, определенный таким образом, называется эффектом фактора (иногда его называют основным или главным эффектом). Он численно равен удвоенному коэффициенту уравнения регрессии. Для качественных факторов, варьируемых на двух уровнях, основной уровень не существует. Поэтому понятие «эффект фактора» является здесь естественным. Примерами качественных факторов могут быть: оператор, станок, сорт металла, СОЖ и т. н.

Планируя эксперимент, на первом этапе стремятся получить линейную модель, хотя и нет гарантии, что в выбранных интервалах варьирования уровней факторов процесс описывается линейной моделью.

Один из часто встречающихся видов нелинейности системы связан с тем, что эффект одного фактора зависит от уровня другого фактора. В этом случае говорят, что имеет место эффект взаимодействия факторов.

Полный факторный план эксперимента позволяет количественно оценивать эффекты взаимодействия факторов. Для этого надо, пользуясь правилом перемножения столбцов матрицы плана, получить столбец произведений уровней двух факторов, с которым можно обращаться так же, как с вектор-столбцом уровней любого фактора. Очень важно, что при добавлении столбцов, отражающих эффекты взаимодействия факторов, все рассмотренные выше свойства плана сохраняются.

Матрица полного факторного плана 2^2 , учитывающего эффект взаимодействия факторов, представлена в табл. 4.3.

Таблица 4.3

Номер опыта	x_0	x_1	x_2	$x_1 - x_2$	y
1	+1	+1	+1	+1	y_1
2	+1	-1	+1	-1	y_2
3	+1	-1	-1	+1	y_3
4	+1	+1	-1	-1	y_4

Теперь модель выглядит следующим образом:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2,$$

а коэффициент b_{12} вычисляется обычным путем:

$$b_{12} = \frac{(+1)y_1 + (-1)y_2 + (+1)y_3 + (-1)y_4}{4}.$$

Вектор-столбцы x_1 и x_2 непосредственно определяют условия эксперимента, а x_0 и x_1x_2 служат только для расчета коэффициентов b_0 и b_{12} .

Эффект взаимодействия двух факторов называется эффектом первого порядка, трех факторов — второго порядка и т. д. Часто применяются термины: парные эффекты взаимодействия факторов (x_1x_2, x_2x_3, \dots), тройные ($x_1x_2x_3, x_2x_3x_4, \dots$) и т. д. Вообще максимальный порядок эффекта взаимодействия факторов при полном факторном плане на единицу меньше числа факторов, а сумма числа всех возможных эффектов, включая b_0 , линейные эффекты и взаимодействия всех порядков, равна числу опытов.

Чтобы найти число возможных взаимодействий некоторого порядка, можно воспользоваться обычной формулой числа сочетаний

$$C_k^m = \frac{k!}{m!(k-m)!},$$

где k — число факторов; m — число элементов взаимодействия.

Так, для плана 2^4 число парных взаимодействий

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = 6.$$

4.2. Дробный факторный план

С увеличением числа факторов резко возрастает количество опытов полного факторного плана, а также число степеней свободы $f=N-q$ (N — число опытов; q — число неизвестных коэффициентов регрессии). Для линейного уравнения регрессии $q = k+1$, где k — число факторов. Так, при $k=3$ $N=8$, $q = 4$, $f = 4$; при $k=5$ $N=32$, $q = 6$, $f = 26$. Для расчета неизвестных коэффициентов регрессии достаточно, чтобы $f=1$.

Возникает вопрос: как сократить число опытов, чтобы сохранить все или хотя бы большую часть выгод, получаемых при ортогональном плане эксперимента? Иначе, как построить ортогональный план, содержащий меньшее число опытов, чем полный факторный план? Для этого и используется метод дробных реплик.

Рассматриваемый метод заключается в том, что для нахождения математического описания процесса используется определенная часть полного факторного плана ($1/2$, $1/4$ и т. д.), называемая дробным факторным планом (дробной репликой полного факторного плана). Расчет коэффициентов регрессии, проверка их значимости и адекватности математической модели в данном случае производятся так же, как и при полном факторном плане.

Например, полный факторный план 2^4 (для случая $k = 4$) включает 16 точек. Для получения линейной модели требуется, как минимум, 6 точек ($q = 5$, $f=1$). Существует ортогональный план, для которого число точек $6 \leq m \leq 16$, — это план для случая $k = 3$. Поскольку для линейной модели эффекты взаимодействия принимаются равными нулю, можно воспользоваться любым из вектор-столбцов, характеризующих эффекты взаимодействия, для четвертого фактора ($x_1x_2x_3$ или $-x_1x_2x_3$). Приняв для фактора x_4 вектор-столбец $x_1x_2x_3$, получим план 2^3 (табл. 4.4). Этот план содержит половину опытов полного факторного плана, т. е. является полурепликой плана 2^4 . Символически дробные реплики записываются следующим образом:

$$N=2^{k-l},$$

где k — общее число факторов; l — число линейных эффектов, приравненных к эффектам взаимодействия; $k-l$ — число факторов в полном факторном плане, к которому приравнивается дробная реплика.

Рассмотренный план обозначают 2^{4-1} .

Перед постановкой эксперимента по дробным репликам необходимо решить, каким эффектом взаимодействия можно пренебречь без излишнего риска. Приняв в рассмотренном примере

$$x_4 = x_1 x_2 x_3, \quad (4.4)$$

получим так называемое генерирующее соотношение, на основе которого генерируется (создается) дробная реплика. После умножения обеих частей соотношения (4.4) на x_4

$$x_4^2 = x_1 x_2 x_3 x_4,$$

получим в левой его части единичный вектор-столбец:

$$1 = x_1 x_2 x_3 x_4 \quad (4.5)$$

Это произведение называют определяющим контрастом.

Соотношение (4.5) дает возможность установить разрешающую способность дробной реплики, т. е. найти, какие из коэффициентов уравнения регрессии являются несмешанными оценками для соответствующих генеральных коэффициентов.

При выборе полуреплики 2^{4-1} возможно 8 решений: 1) $x_4 = x_1 x_2$; 2) $x_4 = -x_1 x_2$; 3) $x_4 = x_2 x_3$; 4) $x_4 = -x_2 x_3$; 5) $x_4 = x_1 x_3$; 6) $x_4 = -x_1 x_3$; 7) $x_4 = x_1 x_2 x_3$; 8) $x_4 = -x_1 x_2 x_3$.

Разрешающая способность полуреplik, полученных с помощью этих генерирующих соотношений, различна. Так, полуреплики по соотношениям 1...6 имеют по 3 фактора в определяющем контрасте, а 7 и 8 — по 4. Полуреплики по соотношениям 7 и 8 имеют максимальную разрешающую способность и называются главными. Разрешающая способность дробных реplik тем выше, чем больше символов входит в соотношение (4.4).

Проведем последовательное умножение определяющего контраста (4.5) на x_j ($j=1, 2, 3, 4$), имея в виду, что вектор x^2 содержит только + 1:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_1^2 x_2 x_3 x_4 = x_2 x_3 x_4; x_2 = x_1 x_3 x_4; \\ x_3 &= x_1 x_2 x_4; x_4 = x_1 x_2 x_3; \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

Соотношения (4.6) указывают на равенство определенных вектор-столбцов в матрице плана, что приводит к получению смешанных оценок коэффициентов модели, рассчитанных с их помощью:

$$b_1 \rightarrow \beta_1 + \beta_{234}, b_2 \rightarrow \beta_2 + \beta_{134}, b_3 \rightarrow \beta_3 + \beta_{124}, b_4 \rightarrow \beta_4 + \beta_{123},$$

где b_i — выборочная оценка i -го коэффициента регрессии; β_i — его истинное значение (математическое ожидание).

Поскольку тройные эффекты обычно равны нулю, можно считать, что коэффициенты уравнения регрессии, оценивающие линейные эффекты и смешанные с коэффициентами при тройных взаимодействиях, практически являются несмешанными оценками соответствующих истинных значений коэффициентов при линейных эффектах. Умножив обе части соотношения (4.5) на $x_i x_j$, получим:

$$x_1 x_2 = x_3 x_4, x_1 x_3 = x_2 x_4 \text{ и т.д.} \quad (4.7)$$

Из соотношений (4.7) следует, что коэффициенты уравнения регрессии при парных эффектах взаимодействия факторов являются смешанными оценками. Это значит, что, например, коэффициент b_{12} может входить в уравнение регрессии совместно с эффектами $x_1 x_2$ или $x_3 x_4$. Оба эти эффекта оказывают равное влияние на параметр оптимизации в изученной области факторного пространства. В этом случае выбор того или иного эффекта производится с учетом физико-химической природы исследуемого процесса, технологических факторов и задач исследования.

При отсутствии априорной информации об эффектах взаимодействия факторов стремятся выбрать реплику с наибольшей разрешающей способностью, так как, например, тройные эффекты взаимодействия факторов обычно менее важны, чем парные, четверные — чем тройные и т. д. Рассмотренные здесь дробные реплики, содержащие 2^{k-l} опытных точек, называются регулярными. Возможны также нерегулярные дробные реплики с количеством точек, не равным 2^{k-l} (например, $3/4 (2^k)$ [2]).

4.3. Порядок составления плана первого порядка и обработка результатов эксперимента

Перед проведением опытов необходимо, исходя из априорной информации о процессе, возможностей аппаратуры и целей эксперимента, установить граничные уровни каждого фактора (z_{1j} и z_{2j}), координаты центра плана (или основного уровня факторов) и интервал варьирования уровней факторов.

Основной уровень j -го фактора и интервал варьирования его уровня рассчитывают по формулам:

$$z_{oi} = \frac{z_{2j} + z_{1j}}{2}; J_j = \Delta_j = \frac{z_{2j} - z_{1j}}{2}.$$

Кодирование переменных производят по формуле (4.1).

Все сведения, необходимые для постановки эксперимента по статистическому плану, заносят в специальную таблицу (табл. 4.5). Затем составляют план эксперимента, в который вносят также результаты n ($n=2...5$) параллельных опытов (табл. 4.6).

На практике обычно оказывается достаточным проведение двух параллельных опытов, так как для проверки адекватности уравнения регрессии используют среднюю дисперсию воспроизводимости (см. § 2.3). При проведении исследований возможны три варианта дублирования опытов: 1) равномерное дублирование опытов, когда во всех строках матрицы плана число параллельных опытов одинаково; 2) неравномерное дублирование, при котором число параллельных опытов в разных строках матрицы плана не одинаково; 3) дублирование опытов отсутствует. Математическая обработка результатов наблюдений зависит от характера дублирования опытов. С учетом вида дублирования опытов она производится по следующей схеме.

1. Для каждой строки матрицы плана вычисляют среднее арифметическое значение \bar{y}_j параметра оптимизации и его дисперсию s_j^2 .

Таблица 4.4

Характеристики факторов	z_1	z_2	z_3	...	z_k
Основной уровень	z_{01}	z_{02}	z_{03}	...	z_{0k}
Интервал варьирования	Δ_1	Δ_2	Δ_3	...	Δ_k
Верхний уровень(+1)	z_{21}	z_{22}	z_{23}	...	z_{2k}
Нижний уровень(-1)	z_{11}	z_{12}	z_{13}	...	z_{1k}

Таблица 4.5

Номер опыта	x_1	x_2	x_3	...	x_k	Параллельные опыты			
1	+1	+1	+1	...	+1	y_{11}	y_{12}	...	y_{1n}
2	+1	- 1	+1	...	+1	y_{21}	y_{22}	...	y_{2n}
...
m	- 1	- 1	- 1	...	- 1	y_{m1}	y_{m2}	...	y_{mn}

2. Проверяют однородность дисперсий s_i^2 результатов опытов. При равномерном дублировании опытов для этого используют критерий Кохрена (формула (2.5)), при неравномерном дублировании — критерий Бартлета (формулы (2.6) ... (2.8)). При отсутствии дублирования опытов первые два этапа отсутствуют.

3. Если дисперсии результатов опытов однородны, вычисляют дисперсию воспроизводимости эксперимента: при равномерном дублировании опытов — по формуле (2.20), при неравномерном — (2.6), а при отсутствии дублирования опытов — по формуле (2.21).

4. Вычисляют коэффициенты уравнения регрессии (формула (4.3)), их дисперсии (формула (2.19)) и оценивают их значимость (формулы (2.17), (2.18)).

5. Проверяют гипотезу об адекватности модели (формулы (2.22), (2.23)).

Если линейная модель адекватна, переходят к поиску уровней факторов, обеспечивающих экстремальное значение (минимум или максимум в зависимости от постановки задачи) функции отклика, т. е. переходят к решению задачи оптимизации. Среди эксперимен-

тальных методов оптимизации наиболее развитым и распространенным является метод крутого восхождения.

Крутое восхождение эффективно тогда, когда все коэффициенты уравнения регрессии значимы. Незначимость некоторых коэффициентов может быть обусловлена: 1) неудачным выбором интервалов варьирования уровней факторов; 2) включением факторов, не влияющих на параметр оптимизации; 3) большой ошибкой в результатах опытов. Принятие решения о методах достижения значимости всех коэффициентов в уравнении регрессии в определенной ситуации зависит от того, какая из трех приведенных причин признана основной. Если принята первая причина, то изменяют интервалы варьирования уровней незначимых факторов и ставят новую серию опытов. Если принята вторая, то невливающие факторы стабилизируют и тем самым исключают из анализа результатов опытов. При третьей гипотезе увеличивают число параллельных опытов.

4.4. Крутое восхождение по поверхности отклика

При этом методе движение к оптимуму совершается по кратчайшему пути. Наиболее короткий путь к вершине поверхности отклика — движение в направлении градиента функции отклика. На рис. 4.4 это направление AB , перпендикулярное к линиям постоянных значений уровня фактора. Градиент непрерывной однозначной функции φ есть вектор

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} \vec{j} + \dots + \frac{\partial\varphi}{\partial x_k} \vec{k},$$

где $\nabla\varphi$ — обозначение градиента; $\vec{i}, \vec{j}, \dots, \vec{k}$, — единичные векторы в направлении координатных осей факторного пространства.

Оценками частных производных функции отклика являются коэффициенты регрессии. Изменяя уровни факторов пропорционально значениям коэффициентов регрессии, можно осуществлять движение в направлении градиента функции отклика по самому крутому пути. Поэтому процедура движения к почти стационарной области и называется крутым, восхождением.

Технику расчета методом крутого восхождения рассмотрим на примере задачи с одним фактором x_1 (рис. 4.5). Предположим, что

кривая l представляет собой график неизвестной функции отклика. В результате реализации плана эксперимента с центром в точке O получено уравнение регрессии $y = b_0 + b_1 x_1$ (прямая 2), адекватно описывающее функцию отклика в области изменения уровня фактора x_1 от -1 до $+1$. Значение коэффициента регрессии b_1 равно тангенсу угла наклона линии регрессии к оси абсцисс (оси $O_1 X_1$). Если шаг движения по этой оси принять равным $\Delta x'$, то, умножив его на b_1 получим координаты $(\Delta x'$ и $b_1 \Delta x')$ точки A , лежащей на прямой 2 (направлении градиента). После второго шага координаты новой точки B на той же прямой будут $2\Delta x'$ и $2 b_1 \Delta x'$ и т. д.

В случае k факторов крутое восхождение по каждому из факторов производят аналогичным образом, так как коэффициенты b_i определяются независимо друг от друга. При этом движение по градиентам всех факторов осуществляют одновременно.

Если определяется минимум функции y , то на каждом последующем шаге новые уровни факторов находят путем вычитания из предыдущих Δx_i . Такой способ оптимизации называют методом наискорейшего спуска.

В найденных точках факторного пространства проводят новые опыты, часть которых являются «мысленными», «расчетными». Они заключаются в вычислении значений функции отклика в точках факторного пространства, лежащих по пути к оптимуму («мысленное» движение к оптимуму). Некоторые из «мысленных» опытов реализуют для проверки соответствия найденной модели исследуемому процессу.

Движение к оптимуму прекращают в следующих случаях: уровень одного (нескольких) факторов или значение функции отклика превысили допустимые; достигнут экстремум

параметра оптимизации. В первом случае процесс оптимизации заканчивают, во втором — в области экстремума функции y ищут новое математическое описание исследуемого процесса, используя планы первого порядка. Если удастся получить адекватное описание этой функции с помощью полинома первой степени, продолжают оптимизацию методом крутого восхождения. Очевидно, что •оптимум, найденный в результате первого крутого восхождения, был локальным. Если же в области оптимума не удастся получить адекватной модели с помощью планов первого порядка, используют планы второго порядка. Некоторые вопросы, связанные с проведением таких экспериментов, рассмотрены в следующем параграфе.

Движение по градиенту начинается для каждого фактора от его основного уровня x_{0i} - Координата первой расчетной точки по направлению градиента функции отклика по i -му фактору рассчитывается по формуле

$$x_{1i} = x_{0i} + \lambda(b_i \Delta x_i),$$

где λ — некоторый коэффициент, одинаковый для всех факторов; b_i — коэффициент уравнения регрессии; Δx_i — интервал варьирования фактора в натуральных единицах.

Коэффициент λ может быть найден различными способами. Один из них состоит в следующем: вычисляют произведения $b_i \Delta x_i$ для всех факторов; находят фактор, для которого абсолютная величина произведения $b_i \Delta x_i$ наибольшая (его называют базовым); для базового фактора выбирают шаг изменения его уровня в направлении крутого восхождения $b_i \Delta x_i$ с таким условием, чтобы он был равен интервалу варьирования Δx_i или части этого интервала, т. е. $\Delta x_i = \mu \Delta x_i$ ($0 \leq \mu < 1$). Это условие выражается соотношением $\lambda |b_i| \Delta x_i = \mu \Delta x_i$, откуда $\lambda = \mu / |b_i|$. Чаще всего $\mu = 0,3 \dots 0,9$.

Шаги изменения уровней факторов и координаты последующих расчетных точек находят по уравнениям:

$$x_{hi} - x_{0i} = h \lambda (b_i \Delta x_i); \quad x_{hi} = x_{0i} + h \lambda (b_i \Delta x_i),$$

где $h = 1, 2, 3, 4, \dots$ — номер шага в направлении крутого восхождения.

Более подробно вопросы оптимизации в технологических исследованиях рассмотрены в работах [38, 2, 24].

4.5. Планы второго порядка

4.5.1. Композиционный план

Если с помощью полного факторного плана эксперимента не удастся получить адекватного математического описания исследуемого процесса в форме многочлена первой степени, его ищут в виде многочлена второй степени. С этой целью используются, в частности, композиционные планы

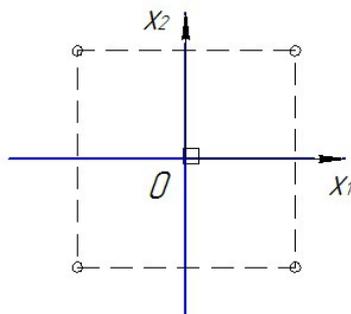


Рис. 4.4. Схема опытов композиционного плана для двух факторов: 0 - полный факторный эксперимент; * — опыты в звездных точках; □ — опыт в центре плана

Бокса — Уилсона. Различают ортогональные и ротатабельные планы второго порядка.

Планы эксперимента второго порядка могут быть получены в результате достройки планов первого порядка (добавлением некоторого числа опытов в звездных точках и в центре плана), поэтому их называют композиционными.

Схема опытов композиционного плана в случае двух факторов показана на рис. 4.6. Количество их определяется по формуле

$$N = 2^k + 2k + 1,$$

где k — число факторов; 2^k — количество опытов полного факторного плана; $2k$ — число звездных точек в факторном пространстве, имеющих координаты $(\pm a; 0; 0; \dots, 0)$; $(0; \pm a; \dots, 0)$; ..., $(0; 0; \dots \pm a)$; a — звездное плечо (звездный шаг). Последним слагаемым учтен опыт в центре плана, т. е. в точке факторного пространства с координатами $(0; 0; \dots, 0)$.

Значения звездного шага a , выбранные из условия ортогональности матрицы плана, находят в зависимости от числа факторов k :

Коэффициенты регрессии при применении ортогонального плана оцениваются с разными ошибками, а предсказанные значения параметра оптимизации также имеют различные дисперсии, сложным образом изменяющиеся от точки к точке. Эти недостатки ортогональных планов второго порядка заставляют во многих случаях отказываться от них и применять ротатабельные планы. Однако простота всех вычислений обуславливает их применение,

например при ручных методах обработки результатов эксперимента.

Уравнение регрессии при применении композиционного ортогонального плана эксперимента записывается в виде:

$$y = b_0^* + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_kx_k + b_{12}x_1x_2 + \dots + b_{(k-1)k}x_{k-1}x_k + b_{11}x_1^2 + \dots + b_{kk}x_k^2,$$

где переменные

$$x_{ji}^* = x_{ji}^2 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{ji}^2$$

введены для того, чтобы матрица плана была ортогональна и коэффициенты регрессии определялись независимо друг от друга по результатам опытов (i —номер фактора, j — номер опыта).

Уравнение регрессии, записанное в обычной форме:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_kx_k + b_{12}x_1x_2 + \dots + b_{(k-1)k}x_{k-1}x_k + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + \dots + b_{kk}x_k^2.$$

Для его получения находят

$$b_0 = b_0^* - \frac{b_{11}}{N} \sum_{j=1}^N x_{ji}^2 - \dots - \frac{b_{kk}}{N} \sum_{j=1}^N x_{jk}^2.$$

4.5.2. Ротатабельный план

Ротатабельный план эксперимента позволяет получать более точное математическое описание поверхности отклика по сравнению с ортогональным планом, что достигается благодаря увеличению числа опытов в центре плана и об основанному выбору звездного плеча a . В табл. 4.8 приведены основные характеристики ротатабельных планов.

Главное свойство ротатабельных планов — независимость дисперсий предсказанного значения y от вращения координат плана. При этом дисперсии одинаковы на равных расстояниях от центра плана.

В табл. 4.9 приведен пример ротатабельного плана для двух факторов.

Методики обработки результатов при использовании ортогональных и ротатабельных планов приведены в литературе [38]. Под-

робные библиографические указатели по вопросам планирования и обработки результатов экспериментов имеются в работах [2, 18].

Таблица 4.6

Число факторов	Число опытов по схеме ПФЕ	Число опытов в звездных точках плана	Число опытов в центре плана	Общее число опытов	α
2	4	4	5	13	1,414
3	8	6	6	20	1,68
4	16	8	7	31	2,0
5*	32	10	10	52	2,378
5**	16	10	6	32	2,0

*— полный факторный план, **—дробный факторный план.

Список литературы

1. Кане М. М. Основы научных исследований в технологии машиностроения. М-н. Высшая школа, 1987, 240 с.

Содержание

Глава 1. ЭКСПЕРИМЕНТ И ОШИБКИ ИЗМЕРЕНИЙ	3
1.1 Роль и разновидности эксперимента	3
1.2. Основные сведения об измерениях	5
1.3. Типы ошибок измерений	9
1.4. Методы оценки случайных ошибок измерений	11
1.5. Методы учета и исключения систематических ошибок	14
1.6. Математическая обработка результатов эксперимента при прямых измерениях	17
1.7. Математическая обработка результатов эксперимента при косвенных измерениях	20
1.8. Ошибки измерений и организация исследований	22
Глава 2. ОСНОВЫ КОРРЕЛЯЦИОННО-РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА	24
2.1. Основные понятия, задачи, предпосылки	24
2.2. Метод наименьших квадратов	31
2.3. Оценка достоверности результатов	34
Глава 3. ПЛАНИРОВАНИЕ ОДНОФАКТОРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА	39
3.1. Выбор интервалов между экспериментальными уровнями факторов и порядка проведения опытов	39
3.2. Рандомизация внешних условий в однофакторном эксперименте с помощью рандомизированных блоков	43
Глава 4. ПЛАНИРОВАНИЕ МНОГОФАКТОРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА	47
4.1. Полный факторный план	47
4.1.1. Основные преимущества и условия выполнения	47
4.1.2. Полный факторный план типа 2^h	51
4.1.3. Расчет параметров математической модели	54
4.2. Дробный факторный план	57
4.3. Порядок составления плана первого порядка и обработка результатов эксперимента	60
4.4. Крутое восхождение по поверхности отклика	62
4.5. Планы второго порядка	64
4.5.1. Композиционный план	64
4.5.2. Ротатабельный план	66
Список литературы	68

Пинчук Владимир Владимирович

ОСНОВЫ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ И ИННОВАЦИОННОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

**Учебно-методическое пособие
по одноименной дисциплине для студентов
специальности 1-36 01 07 «Гидропневмосистемы
мобильных и технологических машин»
дневной и заочной форм обучения**

Подписано к размещению в электронную библиотеку
ГГТУ им. П. О. Сухого в качестве электронного
учебно-методического документа 03.11.17.

Рег. № 94Е.
<http://www.gstu.by>