ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 519.21

Н.Н. Бородин, Ю.В. Малинковский

ХАРАКТЕРИСТИКИ СУММАРНОГО ОБЪЁМА ТРЕБОВАНИЙ В СеМО ДЖЕКСОНА

Исследуется сеть массового обслуживания (СеМО) Джексона с неоднородными требованиями, т.е. требование характеризуется некоторым случайным признаком (длиной) ζ_k. Для такой сети определяются числовые характеристики функции распределения суммарного объёма в случаях, когда время обслуживания зависит от длины и независимых времени обслуживания и длины.

Ключевые слова: *СеМО, длина требования, суммарный объём.*

В обширной литературе по классической теории массового обслуживания рассматриваются методы определения статистических характеристик случайных процессов, описывающих поведение СеМО. Основным анализируемым при этом процессом является количество требований $\upsilon(t)$, находящихся в СеМО в состоянии обслуживания и ожидания в момент времени t. В данной работе с введением новой случайной величины, называемой длиной требования, оцениваются характеристики суммарного объема требований $\sigma(t)$ СеМО Джексона. Задачи определения характеристик процесса $\sigma(t)$ возникают там, где нужно рассчитать объём потребляемой буферной памяти сети со случайным потоком на входе. Рассматривается случай, когда время обслуживания в узлах зависит от длины требования. Неучёт зависимости времени обслуживании от длины может привести к ошибкам при определении объёмов буферной памяти таких сетей.

1. Постановка задачи

Сеть состоит из m перенумерованных узлов. На вход поступает пуассоновский поток неоднородных требований с параметром λ. Неоднородность означает, что требование кроме момента его поступления в сеть характеризуется ещё некоторым случайным признаком ζ_k, $k = 1,\ldots,\infty$, который в дальнейшем будем называть длиной требования или просто длиной. Пусть известна функция распределения $L(x)$ случайной величины ζ_k, длины требований независимы. Поступившее требование с вероятностью P_{0i} поступает на обслуживание в i-й узел, сумма P_{0i} по всем i равна единице. Длительность обслуживания в i-м узле является случайной величиной ξ_i, вообще говоря, зависящей от длины, с функцией распределения $B_i(t)$.

В общем случае зависимость между случайными величинами ζ_k и ξ_i задаётся с помощью совместной функции распределения

$$F_i(x,t) = P\{\zeta_k < x,\ \xi_i < t\},\quad i = 1,\ldots,m.$$

Далее это требование поступает на обслуживание в j-й узел с вероятностью P_{ij} и с вероятностью P_{i0} покидает сеть

$$\sum_{j=1}^{m} P_{ij} + P_{i0} = 1, \quad i = 1,\dots,m.$$

Матрица $(P_{ij})_{m\times m}$ неразложима.

Назовём суммарным объёмом $\sigma(t)$ полную сумму длин требований, находящихся в СеМО в момент времени t в состоянии ожидания и обслуживания. Будем считать, что объём памяти, содержащий информацию о требованиях, бесконечен ($V = \infty$). Требуется определить статистические характеристики суммарного объёма $\sigma(t)$.

Пусть длины распределены экспоненциально, а время обслуживания в i-м узле пропорционально длине $\xi_i = c_i\,\zeta_k$, $i = 1,\dots,m$. Тогда

$$L(x) = 1 - e^{-fx}, \; B_i(t) = L\left(\frac{t}{c_i}\right) = 1 - e^{-\mu_i t},$$

где f – параметр распределения длин, $\mu_i = f/c_i$ – параметр распределения времени обслуживания.

Пусть
$$\alpha_i(s,q) = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-sx-qu}\,dF_i(x,u)$$

преобразование Лапласа – Стильтьеса функции $F_i(x,t)$, $\varphi(s) = \alpha_i(s,0)$ и $\beta_i(s) = \alpha_i(0,s)$ – соответственно преобразования Лапласа – Стильтьеса функций $L(x)$ и $B_i(t)$.

В нашем случае

$$F_i(x,t) = P\{\zeta_k < x, \xi_i < t\} = P\left\{\zeta_k < x, \zeta < \frac{t}{c_i}\right\} = P\left\{\zeta_k < \min\left\{x, \frac{t}{c_i}\right\}\right\},$$

$$\alpha_i(s,q) = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-sx-qu}\,dF_i(x,u) = \int_0^\infty e^{-sx}\,d\int_0^{c_i x} e^{-qu}\,\frac{f}{c_i}e^{-\frac{f}{c_i}u}\,du = f\int_0^\infty e^{-(s+qc_i+f)x}\,dx = \frac{f}{f+s+qc_i}.$$

Таким образом,

$$\alpha_i(s,q) = \frac{f}{f+s+qc_i},$$

$$\varphi(s) = \frac{f}{f+s} = \frac{\mu_i}{\mu_i + \frac{s}{c_i}}, \; \beta_i(s) = \frac{f}{f+sc_i} = \frac{\mu_i}{\mu_i + s}, \; i = 1,\dots,m. \tag{1}$$

Режим функционирования СеМО будем считать стационарным.

Пусть $D(x) = P\{\sigma < x\}$ функция распределения суммарного объёма. Введём преобразование Лапласа – Стильтьеса для $D(x)$:

$$\delta(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\,dD(x).$$

2. Нахождение преобразования Лапласа – Стильтьеса $\delta(s)$ суммарного объёма требований

Если предположить, что в СеМО время обслуживания в i-м узле имеет показательное распределение с параметром $\mu_i = f/c_i$ и не зависит от длины требования, то определение характеристик суммарного объёма оказывается простым.

Рассмотрим случайный процесс $\upsilon(t) = (\upsilon_1(t),\upsilon_2(t),\ldots,\upsilon_m(t))$, где $\upsilon_i(t)$ – число требований в i-м узле в момент времени t, $i = 1,\ldots,m$. Пусть

$$P(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \lim_{t\to\infty} P\{\upsilon_1(t) = k_1, \upsilon_2(t) = k_2, \ldots, \upsilon_m(t) = k_m\}.$$

Введём следующее векторное обозначение:

$$\bar{k} = (k_1, \ldots, k_m), \ \left|\bar{k}\right| = \sum_{i=1}^{m} k_i .$$

Тогда стационарное распределение вероятностей $P(k_1,k_2,\ldots,k_m)$ определяется по следующим известным формулам [2, с. 104]:

$$P\left(\bar{k}\right) = \prod_{i=1}^{m} P_i(0) P_i^*(k_i),$$

где
$$P_i^*(k_i) = \left(\frac{\lambda y_i}{\mu_i}\right)^{k_i}, \ P_i(0) = \left(\sum_{l=0}^{\infty} P_i^*(l)\right)^{-1},$$

а y_i, $i = 1,\ldots,m$, определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$y_i = \sum_{j=1}^{m} y_j P_{ji} + P_{0i}, \ i = 1, \ldots, m.$$

Условие эргодичности процесса $\upsilon(t)$:

$$P\left(\bar{0}\right) = \prod_{i=1}^{m} P_i(0) > 0, \ \text{что эквивалентно} \ \max_{1\le i\le m}\left\{\frac{\lambda y_i}{\mu_i}\right\} < 1.$$

Обозначим

$$\rho_i = \frac{\lambda y_i}{\mu_i}, \ i = 1, \ldots, m.$$

Тогда для $\delta(s)$ имеем

$$\delta(s) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_m=0}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{m} P_i(0) P_i^*(k_i)\right)(\varphi(s))^{\left|\bar{k}\right|} = P\left(\bar{0}\right)\left(\sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_m=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{m} (\rho_i \varphi(s))^{k_i}\right) =$$

$$= P\left(\bar{0}\right) \prod_{i=1}^{m} \sum_{k_i=0}^{\infty} (\rho_i \varphi(s))^{k_i} = P\left(\bar{0}\right) \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{1-\rho_i \varphi(s)} = \prod_{j=1}^{m}\left[\sum_{l=0}^{\infty} (\rho_j)^l\right]^{-1} \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{1-\rho_i \varphi(s)} =$$

$$= \prod_{j=1}^{m} (1-\rho_j) \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{1-\rho_i \varphi(s)} = \prod_{i=1}^{m} \frac{1-\rho_i}{1-\rho_i \varphi(s)}.$$

Таким образом,

$$\delta(s) = \prod_{i=1}^{m} \frac{1-\rho_i}{1-\rho_i \varphi(s)} = \prod_{i=1}^{m} \frac{(1-\rho_i)(s+f)}{s+f-f\rho_i}. \tag{2}$$

Из формулы (2) можно получить числовые характеристики функции распределения общего объёма памяти. Например, математическое ожидание m_1 и дисперсия d_1 вычисляются по следующим формулам:

$$m_1 = \frac{1}{f} \sum_{i=1}^{m} \frac{\rho_i}{1-\rho_i}; \quad d_1 = \frac{1}{f^2} \sum_{i=1}^{m} \frac{\rho_i (2-\rho_i)}{(1-\rho_i)^2}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда в СеМО время обслуживания зависит от длины требования.

Пусть $\chi(t)$ – длина обслуживаемого в момент времени t требования на некотором узле, $x(t)$ – время, прошедшее от начала обслуживания до момента t, $F(x,t)$ – совместная функция распределения длины и времени обслуживания, $B(t) = F(\infty,t)$.

Лемма 1. Пусть $E_y(x) = P\{\chi(t) < x / x(t) = y\}$ – условная функция распределения случайной величины $\chi(t)$ при условии, что от начала обслуживания до момента t прошло y единиц времени. Тогда

$$dE_y(x) = (1 - B(y))^{-1} \int_y^\infty dF(x,u),$$

где интегрирование выполняется по переменной u.

Доказательство леммы можно найти в [1, с. 19].

Следствие 1. Преобразование Лапласа – Стильтьеса функции $E_y(x)$ имеет вид

$$e_y(s) = \int_0^\infty e^{-sx} (1 - B(y))^{-1} \int_y^\infty dF(x,u) = (1 - B(y))^{-1} \int_0^\infty e^{-sx} \int_y^\infty dF(x,u).$$

В силу независимости функционирования узлов в сети, рассмотрим i-й узел.

Пусть $\sigma_j(i,t)$ – длина j-го требования, находящегося в i-м узле в момент времени t. Тогда преобразование Лапласа – Стильтьеса условной функции распределения случайной величины $\sigma_1(i,t)$ при условии, что от начала обслуживания до момента t прошло x_1 единиц времени, будет иметь вид

$$e_{x_1}(i,s) = \frac{\mu_i}{\frac{s}{c_i} + \mu_i} e^{-\frac{s}{c_i} x_1}. \tag{3}$$

Действительно, в силу следствия 1, получим

$$e_{x_1}(i,s) = e^{\mu_i x_1} \int_{x_1/c_i}^\infty e^{-sx} d \int_{x_1}^{xc_i} \frac{f}{c_i} e^{-\frac{f}{c_i} u} du = e^{\mu_i x_1} \int_{x_1/c_i}^\infty f e^{-(s+f)x} dx = \frac{\mu_i}{\frac{s}{c_i} + \mu_i} e^{-\frac{s}{c_i} x_1}.$$

Введём дополнительные обозначения. Пусть $P_k(i,t,x_1)dx_1$ – вероятность того, что в момент t в i-м узле находится k требований и длительность обслуживания того из них, которое находится на обслуживании, составляет к моменту t время χ_1, лежащее в промежутке $[x_1, x_1 + dx_1)$. Так как $\rho_i < 1$, то существует предел

$$\lim_{t\to\infty} P_k(i,t,x_1) = p_k(i,x_1).$$

Лемма 2. Функции $p_k(i,x_1)$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\frac{dp_1(i,x_1)}{dx_1} = -(\lambda y_i + \mu_i) p_1(i,x_1); \;\; p_1(i,0) = p_0(i)\mu_i(\rho_i + \rho_i^2);$$

$$\frac{dp_k(i,x_1)}{dx_1} = -(\lambda y_i + \mu_i) p_k(i,x_1) + \lambda y_i p_{k-1}(i,x_1); \;\; p_k(i,0) = \mu_i p_0(i) \rho_i^{k+1}, \;\; k > 1;$$

$$\int_0^\infty p_k(i,u) du = \rho_i^k p_0(i), \;\; k \ge 1; \;\; p_0(i) = P_i(0) = 1 - \rho_i; \tag{4}$$

Доказательство. В стационарном режиме имеем

$$p_0(i) \quad \text{и} \quad \int_0^{\infty} p_k(i,u)du$$

– вероятности того, что в i-м узле находится 0 и k требований соответственно. Поэтому соотношения (4) очевидны.

Рассматривая изменение состояний узла за малый промежуток времени Δt, получаем

$$P_1(i,t+\Delta t,x_1+\Delta t) = P_1(i,t,x_1)[1-(\lambda y_i + \mu_i)\Delta t] + o(\Delta t); \tag{5}$$

$$\begin{gathered} P_k(i,t+\Delta t,x_1+\Delta t) = P_k(i,t,x_1)[1-(\lambda y_i + \mu_i)\Delta t] + \\ +\lambda y_i \Delta t P_{k-1}(i,t,x_1) + o(\Delta t), \quad k>1; \end{gathered} \tag{6}$$

$$\int_0^{\Delta t} P_1(i,t+\Delta t,u)du = \lambda y_i \Delta t P_0(i,t) + \mu_i \Delta t \int_0^t P_2(i,t,u)du; \tag{7}$$

$$\int_0^{\Delta t} P_k(i,t+\Delta t,u)du = \mu_i \Delta t \int_0^t P_{k+1}(i,t,u)du, \quad k>1. \tag{8}$$

Разделив левую и правую части соотношений (5) – (8) на Δt, в пределе при $\Delta t \to 0$ получим

$$\frac{\partial P_1(i,t,x_1)}{\partial t} + \frac{\partial P_1(i,t,x_1)}{\partial x_1} = -(\lambda y_i + \mu_i)P_1(i,t,x_1); \tag{9}$$

$$\frac{\partial P_k(i,t,x_1)}{\partial t} + \frac{\partial P_k(i,t,x_1)}{\partial x_1} = -(\lambda y_i + \mu_i)P_k(i,t,x_1) + \lambda y_i P_{k-1}(i,t,x_1), \quad k>1; \tag{10}$$

$$P_1(i,t,0) = \lambda y_i P_0(i,t) + \mu_i \int_0^t P_2(i,t,u)du; \tag{11}$$

$$P_k(i,t,0) = \mu_i \int_0^t P_{k+1}(i,t,u)du, \quad k>1. \tag{12}$$

Переходя к пределу при $t \to \infty$, из (9) – (12) получаем утверждение леммы.

Следствие 2. Функции $p_k(i,x_1)$, $k \geq 1$, имеют вид

$$p_k(i,x_1) = p_0(i)e^{-\mu_i(1+\rho_i)x_1}\left[\mu_i \rho_i^{k+1} \sum_{s=0}^{k-2} \frac{\mu_i^{\,s}}{s!} x_1^{\,s} + \frac{(\mu_i\rho_i)^k}{(k-1)!}(1+\rho_i)x_1^{\,k-1}\right]. \tag{13}$$

Пусть $\sigma_i(t)$ – суммарный объём требований, находящихся в i-м узле в момент времени t, $\delta_i(s)$ –преобразование Лапласа – Стильтьеса стационарной функции распределения случайной величины σ_i.

Теорема 1. Функция $\delta_i(s)$ вычисляется по формуле

$$\delta_i(s) = (1-\rho_i)\left[1 + \frac{f^2\rho_i(s+f+s\rho_i)}{(s+f-f\rho_i)((s+f)^2+sf\rho_i)}\right].$$

Доказательство.

$$\delta_i(t) = p_0(i) + \sum_{k=1}^{\infty}(\varphi(s))^{k-1}\int_0^{\infty} e_{x_1}(i,s)p_k(i,x_1)dx_1.$$

Воспользовавшись (1), (3) и (13), получим

$$\delta_i(s) = p_0(i) + \int_0^\infty \frac{\mu_i}{s/c_i + \mu_i} e^{-(\frac{s}{c_i} + \mu_{i(1+\rho_i)})x_1} \mu_i \rho_i (1+\rho_i) p_0(i) dx_1 +$$

$$+ p_0(i) \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{\mu_i}{s/c_i + \mu_i} \right)^k \int_0^\infty e^{-(\frac{s}{c_i} + \mu_i (1+\rho_i))x_1} \times$$

$$\times \left[\mu_i \rho_i^{k+1} \sum_{l=0}^{k-2} \frac{\mu_i^{\,l}}{l!} x_1^{\,l} + \frac{(\mu_i \rho_i)^{k-1}}{(k-1)!} \mu_i \rho_i (1+\rho_i) x_1^{k-1} \right] dx_1 =$$

$$= p_0(i) \left(1 + \frac{\mu_i^2 \rho_i (1+\rho_i)}{(s/c_i + \mu_i)(s/c_i + \mu_i(1+\rho_i))} \right) +$$

$$+ p_0(i) \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{\mu_i}{s/c_i + \mu_i} \right)^k \mu_i \rho_i^{k+1} \sum_{l=0}^{k-2} \frac{\mu_i^{\,l}}{(s/c_i + \mu_i(1+\rho_i))^{l+1}} +$$

$$+ p_0(i) \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{\mu_i}{s/c_i + \mu_i} \right)^k \frac{(\mu_i \rho_i)^{k-1}}{(s/c_i + \mu_i(1+\rho_i))^k} \mu_i \rho_i (1+\rho_i) =$$

$$= p_0(i) \left(1 + \frac{\mu_i^2 \rho_i (1+\rho_i)}{(s/c_i + \mu_i)(s/c_i + \mu_i(1+\rho_i))} \right) +$$

$$+ \frac{(\mu_i \rho_i)^3 p_0(i)}{(s/c_i + \mu_i - \mu_i \rho_i)((s/c_i + \mu_i)^2 + s\mu_i \rho_i / c_i)} +$$

$$+ \frac{\mu_i^4 \rho_i^2 (1+\rho_i) p_0(i)}{(s/c_i + \mu_i)(s/c_i + \mu_i(1+\rho_i))((s/c_i + \mu_i)^2 + s\mu_i \rho_i / c_i)},$$

откуда после некоторых преобразований следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

Так как
$$\sigma = \sum_{i=1}^{m} \sigma_i$$

и σ_i независимы, то преобразование Лапласа – Стильтьеса функции распределения суммарного объёма в стационарном режиме будет иметь вид

$$\delta(s) = \prod_{i=1}^{m} \delta_i(s) = \prod_{i=1}^{m} \left((1-\rho_i) \left[1 + \frac{f^2 \rho_i (s + f + s\rho_i)}{(s + f - f\rho_i)[(s+f)^2 + sf\rho_i]} \right] \right). \qquad (5)$$

Из формулы (5) математическое ожидание и дисперсия функции распределения общего объёма памяти вычисляются по формулам

$$m_2 = \frac{1}{f} \sum_{i=1}^{m} \frac{\rho_i (2-\rho_i)}{1-\rho_i}; \quad d_2 = \frac{1}{f^2} \sum_{i=1}^{m} \frac{\rho_i (\rho_i^3 + 2\rho_i^2 - 8\rho_i + 6)}{(1-\rho_i)^2}.$$

3. Сравнительный анализ некоторых СеМО

Проведём сравнительный анализ некоторых СеМО для различных значений m. При этом будем считать, что длины требований распределены экспоненциально: $L(x) = 1 - e^{-fx}$, где $f = 1$, т.е. средняя длина требования равна единице. Для каждого значения m будем рассматривать две сети. В первой сети будем считать время обслуживания не зависящим от длины и экспоненциально распределённым с параметром $\mu_i = 1$, т.е. среднее время обслуживания во всех узлах равно единице. Во второй сети время обслуживания полагается пропорциональным длине ($\xi_i = c_i\zeta_k$) с коэффициентами пропорциональности $c_i = 1$ для всех i. Очевидно, что функции распределения времени обслуживания таких сетей одинаковы. Для каждой сети при различных значениях m и λ будем рассчитывать средние значения суммарного объёма (m_1 и m_2), а также дисперсии (d_1 и d_2).

1) $m = 2$. Пусть

$$\begin{bmatrix} P_{01} \\ P_{02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} P_{10} \\ P_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2/3 \\ 1/3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Полученные результаты сведены в табл. 1. Зависимость величины среднего суммарного объёма и дисперсии обеих сетей от величины интенсивности входного потока показаны на рис. 1 и 2.

Таблица 1

λ	m_1	m_2	d_1	d_2
0,10	0,2138	0,4066	0,4507	1,2409
0,20	0,4796	0,8653	1,0764	2,6946
0,30	0,8198	1,3984	1,9839	4,4676
0,40	1,2717	2,0432	3,3782	6,7651
0,80	8,1818	9,7247	57,1240	64,5003
0,84	11,5714	13,1914	110,7551	118,5635

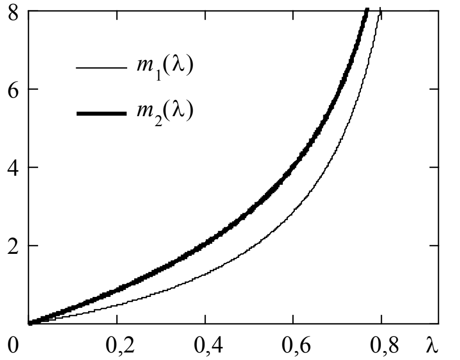

Рис. 1. Зависимость величины среднего суммарного объёма от интенсивности входного потока λ в сети с двумя узлами и не зависимым от длины временем обслуживания (m_1) и временем обслуживания, пропорциональным длине (m_2)

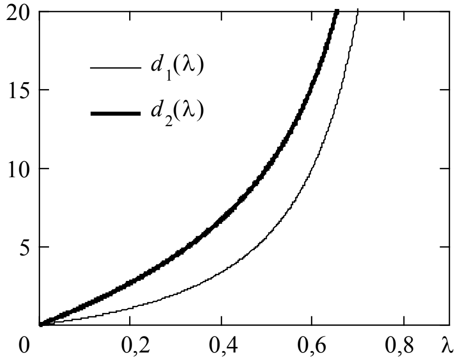

Рис. 2. Зависимость величины дисперсии суммарного объёма от интенсивности входного потока λ в сети с двумя узлами и не зависимым от длины временем обслуживания (d_1) и временем обслуживания, пропорциональным длине (d_2)

2) $m = 3$. Пусть

$$\begin{bmatrix} P_{01} \\ P_{02} \\ P_{03} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} P_{10} \\ P_{20} \\ P_{30} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Полученные результаты сведены в табл. 2. Зависимость величины среднего суммарного объёма и дисперсии обеих сетей от величины интенсивности входного потока показаны на рис. 3 и 4.

Таблица 2

Λ	m_1	m_2	d_1	d_2
0,10	0,3240	0,6161	0,6835	1,8806
0,20	0,7277	1,3120	1,6348	4,0866
0,30	1,2454	2,1218	3,0187	6,7826
0,50	2,9027	4,3633	8,7304	15,2908
0,80	13,0427	15,3795	99,3785	110,5648
0,85	22,4760	24,9589	310,9230	322,9305

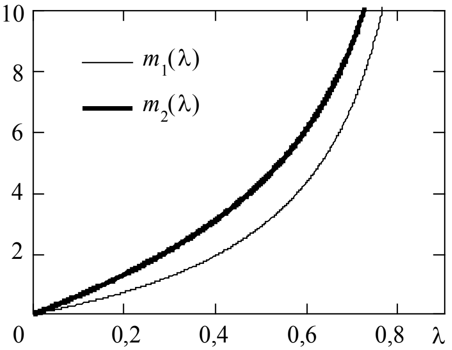

Рис. 3. Зависимость величины среднего суммарного объёма от интенсивности входного потока λ в сети с тремя узлами и не зависимым от длины временем обслуживания (m_1) и временем обслуживания, пропорциональным длине (m_2)

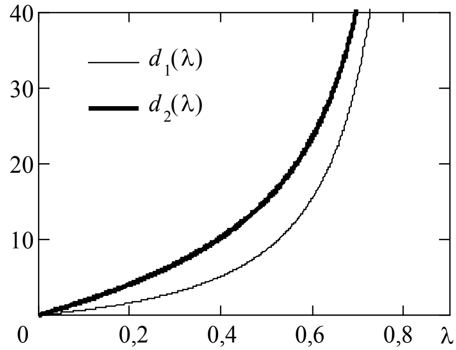

Рис. 4. Зависимость величины дисперсии суммарного объёма от интенсивности входного потока λ в сети с тремя узлами и не зависимым от длины временем обслуживания (d_1) и временем обслуживания, пропорциональным длине (d_2)

Заключение

Как показывают расчёты, для сети, в которой время обслуживания в узлах зависит от длины требования, значения математического ожидания и дисперсии суммарного объёма больше, чем для сети, в которой время обслуживания не зависит от длины. Следовательно, зависимость времени обслуживания от длины требования оказывает сильное влияние на характеристики суммарного объёма требований.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тихоненко О.М.* Модели массового обслуживания в системах обработки информации. Мн.: Университетское, 1990. 191 с.
2. *Ивницкий В.А.* Теория сетей массового обслуживания. М.: Издательство физико-математической литературы, 2004. 772 с.

Бородин Николай Николаевич
Малинковский Юрий Владимирович
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины. (Беларусь)
E-mail: borodin1979@yandex.ru; maliynkovsky@gsu.by
Поступила 23 сентября 2009 г.