УДК 539.12

*ЛАШКЕВИЧ В. И., СОЛОВЦОВ И. Л.*

# ОПИСАНИЕ ФОРМФАКТОРА $\pi$-МЕЗОНА В КОВАРИАНТНОЙ ГАМИЛЬТОНОВОЙ ФОРМУЛИРОВКЕ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Получено выражение формфактора $\pi$-мезона через квазипотенциальные волновые функции. В качестве примера рассмотрена система кварков с кулоновским потенциалом взаимодействия.

Настоящая работа посвящена описанию формфактора $\pi$-мезона в рамках трехмерного формализма квазипотенциального типа [1]. В основе нашего рассмотрения лежит гамильтонова формулировка квантовой теории поля, предложенная в работе [2]. Этот подход позволяет получить отличные от четырехмерного уравнения Бете — Солпитера динамические уравнения квазипотенциального типа [3, 4], обладающие рядом важных преимуществ, в частности, существованием точных решений для ряда модельных квазипотенциалов [5—7].

Для описания формфакторов составных систем квазипотенциальный формализм был использован в ряде работ [8—13]. В данной статье рассмотрен случай спиновых кварков с учетом псевдоскалярной и псевдовекторной спинорных структур в вершинной функции $\pi$-мезона. При этом мы используем отличную от фейнмановской шпурионную диаграммную технику [14]. Ее отличительной чертой является тот факт, что она оперирует лишь с реальными частицами, импульсы которых находятся на массовом гиперболоиде $p_0^2 - \mathbf{p}^2 = m^2$. Такой гиперболоид реализует трехмерное пространство Лобачевского, группой движения которого является группа Лоренца.

Применение трехмерного релятивистского фурье-анализа, основанного на использовании полного набора функций, реализующих бесконечномерные унитарные представления группы Лоренца, позволяет ввести трехмерное конфигурационное пространство [5]. Как будет показано в данной работе, выражение для формфактора в конфигурационном представлении имеет наиболее простой вид. Настоящая работа с точки зрения применения гамильтоновой формулировки квантовой теории поля логически примыкает к работам [15—19].

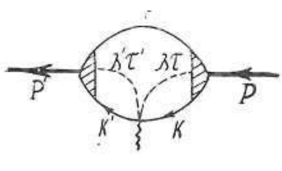

Рис. 1

Отметим, что уравнения квазипотенциального типа являются трехмерными и имеют тесную аналогию с нерелятивистскими квантовомеханическими уравнениями, в которые они переходят в нерелятивистском пределе, и что несмотря на трехмерность используемых в данном формализме величин, наше рассмотрение носит ковариантный характер [20].

Получим выражение для электромагнитного формфактора $\pi$-мезона. Электромагнитный ток $\pi$-мезона будем рассматривать в приближении, которое отвечает шпурионным диаграммам, изображенным на рисунке. Соответствующее аналитическое выражение следующее:

$$
\begin{aligned}
< P' | J_\mu(0) | P > = \frac{l_q}{(2\pi)^3} \int d\tau \cdot d\tau' \cdot dp \cdot d\kappa \cdot d\kappa' \cdot \Delta^{(+)}(\kappa'; m) \times \\
\times \Delta^{(+)}(p; m) \cdot \Delta^{(+)}(\kappa; m) \cdot \delta^4 (P + \lambda\tau - \kappa - p) \times \\
\times \delta^4 (P' + \lambda'\tau' - \kappa' - p) \cdot \frac{1}{\tau - i0} \cdot \frac{1}{\tau' + i0} \times \\
\times \mathrm{Sp} [\hat{\bar{\Gamma}}_{P'} (\kappa', p | \lambda'\tau') (\hat{\kappa}' + m) \gamma_\mu (\hat{\kappa} + m) \times \\
\times \hat{\Gamma}_P (\kappa, p | \lambda\tau) (\hat{p} - m)] + (q \leftrightarrow \bar{q}),
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где $l_q$ — заряд кварка; $\Delta^{(+)}(\kappa; m) = \theta(\kappa_0)\delta(\kappa^2 - m^2)$; $P$ и $P'$ — импульсы $\pi$-мезона до и после поглощения фотона; $\kappa$, $\kappa'$, $p$ — импульсы кварков; $\lambda\tau$ и $\lambda'\tau'$ — импульсы шпурионов, где $\lambda$ и $\lambda'$ — единичные времениподобные векторы, которые мы выберем следующим образом: $\lambda = P/M$, $\lambda' = P'/M$, $m$ — масса кварка; $M$ — масса $\pi$-мезона; $\hat{\Gamma}_P(\kappa, p|\lambda\tau)$ — вершинная функция $\pi$-мезона, которая с учетом псевдоскалярной и псевдовекторной спинорных структур имеет вид [19]

$$
\hat{\Gamma}_P (\kappa, p | \lambda\tau) = \gamma_5 \left[ \Gamma^{(1)} (\kappa, p | \lambda\tau) + \frac{\hat{P}}{M} \Gamma^{(2)} (\kappa, p | \lambda\tau) \right],
\tag{2}
$$

$\Gamma^{(1)}$, $\Gamma^{(2)}$ — скалярные функции.

Формфактор $\pi$-мезона $F_\pi(q^2)$ определим стандартным образом:

$$
< P' | J_\mu (0) | P > = (P + P')_\mu \cdot F_\pi (q^2); \; q^2 = (P + P')^2.
\tag{3}
$$

Тогда из (6) получим:

$$
\begin{aligned}
F_\pi (q^2) = \frac{1}{(P + P')^2} \cdot \frac{1}{(4\pi)^2} \int \frac{dp}{\sqrt{m^2 + p^2}} \times \\
\times [\Gamma^{(1)*}(\Delta_{p, m\lambda'}) \cdot \Gamma^{(1)} (\Delta_{p, m\lambda}) \cdot \mathrm{Sp}_1 - \Gamma^{(1)*} (\Delta_{p, m\lambda'}) \cdot \Gamma^{(2)} (\Delta_{p, m\lambda}) \cdot \mathrm{Sp}_2 + \\
+ \Gamma^{(2)*} (\Delta_{p, m\lambda'}) \cdot \Gamma^{(1)} (\Delta_{p, m\lambda}) \cdot \mathrm{Sp}_3 - \Gamma^{(2)*} (\Delta_{p, m\lambda'}) \cdot \Gamma^{(2)} (\Delta_{p, m\lambda}) \cdot \mathrm{Sp}_4] \times \\
\times \frac{1}{\Delta^0_{p, m\lambda'} \cdot [M - 2\Delta^0_{p, m\lambda'}]} \cdot \frac{1}{\Delta^0_{p, m\lambda} \cdot [M - 2\Delta^0_{p, m\lambda}]},
\end{aligned}
\tag{4}
$$

где $\mathrm{Sp}_1 = \mathrm{Sp}\,[(\hat{\kappa}' + m)(\hat{P} + \hat{P}')(\hat{\kappa} + m)(\hat{p} + m)] =$
$$= 16M\cdot(\Delta^0_{p,\,m\lambda'} + \Delta^0_{p,m\lambda})\cdot\Delta^0_{p,\,m\lambda'}\cdot\Delta^0_{p,\,m\lambda}; \tag{5}$$

$$\mathrm{Sp}_2 = \mathrm{Sp}\,[(\hat{\kappa}' + m)(\hat{P} + \hat{P}')(\hat{\kappa} + m)\hat{P}/M\cdot(\hat{p} + m)] = 16Mm\cdot\Delta^0_{p,\,m\lambda'}\cdot(\Delta^0_{p,\,m\lambda'} + \Delta^0_{p,\,m\lambda}); \tag{6}$$

$$\mathrm{Sp}_3 = \mathrm{Sp}\,[P'/M\cdot(\hat{\kappa}' + m)(\hat{P} + \hat{P}')(\hat{\kappa} + m)(\hat{p} + m) = 16Mm\cdot\Delta^0_{p,m\lambda}\cdot(\Delta^0_{p,m\lambda'} + \Delta^0_{p,m\lambda}); \tag{7}$$

$$\mathrm{Sp}_4 = \mathrm{Sp}\,[P'/M\cdot(\hat{\kappa}' + m)(\hat{P} + \hat{P}')(\hat{\kappa} + m)\times \times\hat{P}/M\cdot(\hat{p} + m)] = 16m^2M\cdot(\Delta^0_{p,\,m\lambda'} + \Delta^0_{p,m\lambda}). \tag{8}$$

В результате квадратная скобка в (8) запишется следующим образом:

$$16mM\cdot(\Delta^0_{p,\,m\lambda'} + \Delta^0_{p,m\lambda})\cdot\left[\frac{\Delta^0_{p,\,m\lambda'}}{m}\cdot\Gamma^{(1)*}(\Delta_{p,\,m\lambda'}) + \Gamma^{(2)*}(\Delta_{p,\,m\lambda'})\right]\cdot\left[\frac{\Delta^0_{p,m\lambda}}{m}\cdot\Gamma^{(1)}(\Delta_{p,m\lambda}) - \Gamma^{(2)}(\Delta_{p,m\lambda})\right] =$$
$$= 16mM\cdot(\Delta^0_{p,\,m\lambda'} + \Delta^0_{p,\,m\lambda})\cdot\tilde{\Gamma}^{(1)*}(\Delta_{p,\,m\lambda'})\cdot\tilde{\Gamma}^{(2)}(\Delta_{p,\,m\lambda}), \tag{9}$$

здесь $\Delta_{\kappa,\,m\lambda}$ — вектор пространства Лобачевского

$$\boldsymbol{\Delta}_{\kappa,m\lambda} = (\overrightarrow{\Lambda_\lambda^{-1}\kappa}) = \boldsymbol{\kappa}\,(-)\,m\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\lambda}\cdot\left[\kappa_0 - \frac{\boldsymbol{\kappa\lambda}}{1 + \lambda_0}\right];$$
$$\Delta^0_{\kappa,m\lambda} = (\Lambda_\lambda^{-1}\kappa)^0 = \kappa_0\lambda_0 - \boldsymbol{\kappa\lambda} = \kappa\lambda, \tag{10}$$

$\Lambda_\lambda$ — чисто лоренцево преобразование, соответствующее 4-скорости $\lambda$: $\Lambda_\lambda^{-1}P = (M,\ 0)$.

Заметим, что $\Delta^0_{\kappa,m\lambda}$ является инвариантом, а вектор $\boldsymbol{\Delta}_{\kappa,m\lambda}$ при преобразованиях Лоренца испытывает лишь трехмерный поворот. Из (9) следует, что формфактор определяется функциями $\tilde{\Gamma}^{(1)}$ и $\tilde{\Gamma}^{(2)}$.

$$\tilde{\Gamma}^{(1)}(\Delta_0) = \frac{\Delta_0}{m}\cdot\Gamma^{(1)}(\Delta_0) + \Gamma^{(2)}(\Delta_0);\ \tilde{\Gamma}^{(2)}(\Delta_0) = \frac{\Delta_0}{m}\cdot\Gamma^{(1)}(\Delta_0) - \Gamma^{(2)}(\Delta_0), \tag{11}$$

для которых система уравнений записывается следующим образом [19]:

$$\tilde{\Gamma}^{(1)}(\Delta_0) = \int\frac{d\Omega_{\Delta'}}{(2\pi)^3}\cdot\frac{V(\Delta;\ \Delta')}{\frac{\Delta_0'}{m}\cdot[M - 2\Delta_0']}\times\left[2\frac{\Delta_0}{m}\cdot\frac{\Delta_0'}{m} - 1\right]\cdot\tilde{\Gamma}^{(1)}(\Delta_0); \tag{12}$$

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(\Delta_0) = \int\frac{d\Omega_{\Delta'}}{(2\pi)^3}\cdot\frac{V(\Delta;\ \Delta')}{\frac{\Delta_0'}{m}\cdot[M - 2\Delta_0']}\cdot\left[2\frac{\Delta_0}{m}\cdot\frac{\Delta_0'}{m} + 1\right]\cdot\Gamma^{(1)}(\Delta_0),$$

где $d\Omega_{\Delta'} = d\boldsymbol{\Delta}'/\sqrt{1+\boldsymbol{\Delta}'^2/m^2}$ — инвариантная мера на массовом гиперболоиде $\Delta_0^2 - \boldsymbol{\Delta}^2 = m^2$, $\Delta \equiv \Delta_{\kappa,m\lambda}$, $\Delta' = \Delta_{\kappa',m\lambda}$.

Следуя [16], определим волновые функции

$$\widetilde{\Psi}^{(i)} = \widetilde{\Gamma}^{(i)} \sqrt{\frac{\Delta_0}{m}} \cdot [M - 2\Delta_0], \tag{13}$$

тогда (12) перепишется в виде системы двух уравнений квазипотенциального типа:

$$\frac{\Delta_0}{m} [M - 2\Delta_0] \widetilde{\Psi}^{(1)}(\Delta_0) = \int \frac{d\Omega_{\Delta'}}{(2\pi)^3} \cdot V(\boldsymbol{\Delta}; \boldsymbol{\Delta}') \times$$

$$\times \left[ 2\frac{\Delta_0}{m} \cdot \frac{\Delta_0'}{m} - 1 \right] \widetilde{\Psi}^{(1)}(\Delta_0'); \tag{14}$$

$$\frac{\Delta_0}{m} [M - 2\Delta_0] \widetilde{\Psi}^{(2)}(\Delta_0) = \int \frac{d\Omega_{\Delta'}}{(2\pi)^3} \cdot V(\boldsymbol{\Delta}; \boldsymbol{\Delta}') \times \left[ 2\frac{\Delta_0}{m} \cdot \frac{\Delta_0'}{m} + 1 \right] \widetilde{\Psi}^{(1)}(\Delta_0').$$

Выражение для формфактора $\pi$-мезона через волновые функции (13) имеет вид

$$F_\pi(q^2) = \frac{1}{4M^2 - q^2} \cdot \int \frac{d\Omega_p}{(2\pi)^3} \times \tag{15}$$

$$\times \widetilde{\Psi}^{(1)*}(\Delta_{p,m\lambda'}) \cdot [\Delta^0_{p,-m\lambda'} + \Delta^0_{p,m\lambda}] \cdot \Psi^{(2)}(\Delta_{p,m\lambda}).$$

Получим теперь выражение для формфактора в релятивистском конфигурационном представлении. Это понятие было введено в [5]. Роль плоских волн в нем играют функции [21]

$$\xi(\boldsymbol{\Delta}, \boldsymbol{r}) = \left( \frac{\Delta_0 - \boldsymbol{\Delta n}}{m} \right)^{-1-imr};$$

$$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{n}^2 = 1,\ n = (1, \boldsymbol{n}), \tag{16}$$

реализующие бесконечномерные унитарные представления группы Лоренца. Таким образом, для перехода к релятивистскому координатному представлению используется разложение по основной серии унитарных неприводимых представлений группы Лоренца. В нерелятивистском пределе функции $\xi(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r})$ переходят в $\exp(i\boldsymbol{pr})$. В работе [5] был определен оператор свободного гамильтониана $\hat{H}_0$, удовлетворяющий условию

$$\hat{H}_0 \xi(\boldsymbol{\Delta}, \boldsymbol{r}) = \Delta_0 \xi(\boldsymbol{\Delta}, \boldsymbol{r}), \tag{17}$$

который согласно [5] имеет следующий вид:

$$\hat{H}_0 = m\,\mathrm{ch}\left(\frac{i}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\right) = \frac{i}{r} \cdot \mathrm{sh}\left(\frac{i}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{\Delta_{\theta,\varphi}}{2mr^2} \cdot \exp\left(\frac{i}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\right), \tag{18}$$

где $\Delta_{\theta,\varphi}$ — оператор Лапласа на сфере. Предположим, что квазипотенциал $V(\boldsymbol{\Delta}; \boldsymbol{\Delta}')$ является локальным в пространстве Лобачевского, то есть $V(\boldsymbol{\Delta}; \boldsymbol{\Delta}') \equiv V(\boldsymbol{\Delta}(-)\boldsymbol{\Delta}')$, что приводит к локальному в релятивистском конфигурационном представлении потенциальному уравнению. Так система (14) запишется следующим образом:

$$\frac{\hat{H}_0}{m} [M - 2\hat{H}_0] \widetilde{\Psi}^{(1)}(r) = \tag{19}$$

$$= \left[ 2\frac{\hat{H}_0}{m}\cdot V(r)\cdot \frac{\hat{H}_0}{m} - V(r)\right]\tilde{\Psi}^{(1)}(r);$$

$$\frac{\hat{H}_0}{m_0}[M - 2\hat{H}_0]\tilde{\Psi}^{(2)}(r) = \tag{20}$$

$$= \left[ 2\frac{\hat{H}_0}{m}\cdot V(r)\cdot \frac{\hat{H}_0}{m} + V(r)\right]\Psi^{(1)}(r),$$

где $\tilde{\Psi}^{(1)}(r)$, $\tilde{\Psi}^{(2)}(r)$, $V(r)$ — образы

$$\tilde{\Psi}^{(1)}(\Delta),\ \tilde{\Psi}^{(2)}(\Delta),\ V(\boldsymbol{\Delta}(-)\boldsymbol{\Delta}') \text{ в РКП,}$$

определенные по формулам:

$$f(r) = \int \frac{d\Omega_\Delta}{(2\pi)^3}\cdot \xi(\boldsymbol{\Delta}, \boldsymbol{r})\cdot f(\Delta);$$

$$f(\Delta) = \int d\boldsymbol{r}\cdot \xi^*(\boldsymbol{\Delta}, \boldsymbol{r})\cdot f(r). \tag{21}$$

Заметим, что модуль относительной релятивистской координаты параметризует собственные значения оператора Казимира группы Лоренца и является релятивистским инвариантом [5]. В релятивистском конфигурационном представлении выражение для формфактора (15) принимает вид

$$F_\pi(q^2) = \frac{1}{4M^2 - q^2}\cdot \int d\boldsymbol{r}\cdot \xi^*\left(\frac{m}{M}\cdot \boldsymbol{\Delta}_{P',P},\ \boldsymbol{r}\right)\times$$

$$\times \{[\hat{H}_0\tilde{\Psi}^{(1)}(r)]^*\,\tilde{\Psi}^{(2)}(r) + \Psi^{(1)*}(r)\,\hat{H}_0\Psi^{(2)}(r)\}, \tag{22}$$

где $\Delta_{P',P}$ связан с передачей импульса $q^2$ соотношением

$$q^2 = 2M^2 - 2M\sqrt{M^2 + \boldsymbol{\Delta}^2_{P',P}} = 2M(M - \Delta^0_{P',P}). \tag{23}$$

Для сферически-симметричного случая (22) перепишется в виде

$$F_\pi(q^2) = \frac{4\pi}{4M^2 - q^2}\cdot \frac{\chi}{\operatorname{sh}\chi}\cdot \int dr\cdot \frac{\sin\chi mr}{\chi mr}\times$$

$$\times [\tilde{\varphi}^{(1)*}(r)\,\hat{h}_0\tilde{\varphi}^{(2)}(r) + (\hat{h}_0\varphi^{(1)}(r))^*\cdot \varphi^{(2)}(r)], \tag{24}$$

где
$$\hat{h}_0 = m\operatorname{ch}\left(\frac{i}{m}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\right),\quad \tilde{\varphi}^{(i)}(r) = r\,\Psi^{(i)}(r); \tag{25}$$

$$\chi = \operatorname{Arch}(1 - q^2/2M^2) - \tag{26}$$

быстрота, отвечающая передаче импульса $q^2$.

В случае $\Delta_0 \gg 1$ мезон описывается одной функцией, удовлетворяющей уравнению:

$$(M - 2\hat{H}_0)\,\Psi(r) = 2V(r)\frac{\hat{H}_0}{m}\Psi(r). \tag{27}$$

Для потенциала

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r}, \tag{28}$$

воспроизводящего, как показано в [11, 12], характерное для хромодинамики взаимодействие кварков на малых расстояниях, решения этого уравнения могут быть найдены методом, изложенным в [16]. Для основного состояния получаем

$$\Psi(\rho) = \frac{c}{\rho}(\alpha - \rho)\, e^{-\chi_0 \rho}, \qquad (29)$$

здесь $\rho = mr$, $M = 2m\cos\chi_0$, $c$ — нормировочная константа.

Подставив (29) в (24), получим окончательное выражение для формфактора $\pi$-мезона:

$$F_\pi(q^2) = \frac{8\pi c^2}{4M^2 - q^2} \cdot \frac{\chi}{m^2 \operatorname{sh}\chi} \times \left[\frac{4\chi_0\cos\chi_0}{(\chi^2 + 4\chi_0^2)^2} - \frac{\sin\chi_0}{\chi^2 + 4\chi_0^2}\right]. \qquad (30)$$

Отметим здесь интересную особенность решения (29) — наличие нуля у волновой функции $\pi$-мезона на конечном расстоянии. Этот факт связан с видом уравнения (27), которое, как показано в [16], может быть переписано в стандартной форме, если ввести эффективный потенциал

$$V_{\text{эфф}}(r) = \frac{MV(r)}{m + V(r)}. \qquad (31)$$

Для $V(r) = -\alpha/r$ потенциал (31) будет иметь точку разрыва при $r = \alpha/m$, в которой волновая функция основного состояния $\pi$-мезона (29) обращается в ноль. Подробное рассмотрение этого вопроса можно найти в [16]. Здесь мы ограничимся замечанием, что наличие нуля на конечном расстоянии у волновой функции (29) фактически приводит к тому, что формфактор (30) не является положительно определенным. Вопрос о том, сохранится ли такая ситуация для неасимптотических решений, а также при учете запирающей части потенциала взаимодействия кварков, остается пока открытым.

Авторы глубоко признательны В. Г. Кадышевскому, Н. Б. Скачкову и Ф. И. Федорову за интерес к работе и полезные замечания.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Logunov A. A., Tavkhelidze A. N. Nuovo Cim., 1963, **29**, 380.
2. Кадышевский В. Г. ЖЭТФ, 1964, **46**, 654.
3. Kadyshevsky V. G. Nucl Phys., 1968, **36**, 125.
4. Kadyshevsky V. G., Mateev M. D. Nuovo Cim., 1968, **55A**, 275.
5. Kadyshevsky V. G., Mir-Kasimov R. M., Skachkov N. B. Nuovo Cim., 1968, **55A**, 233.
6. Кадышевский В. Г., Мир-Касимов Р. М., Скачков Н. Б. ЭЧАЯ, 1972, **2**, 635.
7. Kapshay V. N., Skachkov N. B. Preprints JINR E 2-81-618, Dubna, 1981; P 2-82-163, Dubna, 1982.
8. Faustov R. N. Ann. of Phys., 1973, **78**, 176.
9. Гарсеванишвили В. Р., Квинихидзе А. Н. и др. ТМФ, 1975, **23**, 310.
10. Хелашвили А. А. Сообщение ОИЯИ, Р2-8750, Дубна, 1975.
11. Savrin V. I., Skachkov N. B. Nuovo Cim., 1982, **65A**, I.
12. Саврин В. И., Скачков Н. Б. Труды Межд. семинара по проблемам физики высоких энергий и квантовой теории поля. Протвино, 1982, т. 2, с. 229.
13. Скачков Н. Б., Соловцов И. Л. ЯФ, 1979, **30**, 1079.
14. Кадышевский В. Г., ЖЭТФ, 1964, **46**, 872.
15. Скачков Н. Б., Соловцов И. Л. ТМФ, 1980, **43**, 330.
16. Скачков Н. Б., Соловцов И. Л. ТМФ, 1983, **54**, 183.
17. Соловцов И. Л. Труды Межд. семинара по проблемам физики высоких энергий и квантовой теории поля. Протвино, 1982, т. 2, с. 275.
18. Соловцов И. Л. Изв. вузов, Физика, 1983, № 4, 26.
19. Соловцов И. Л. Изв. вузов, Физика, 1984, № 4, 100.
20. Скачков Н. Б., Соловцов И. Л. ТМФ. 1979, **41**, 205.
21. Шапиро И. С. ДАН СССР, 1956, **106**, 647.


Гомельский политехнический институт

Поступила в редакцию
21 декабря 1983 г.