

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Детали машин»

В. В. Комраков, Г. П. Тариков, Ю. Е. Кирпиченко

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА
ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ
КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ**

**ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ
по дисциплинам «Детали машин» и «Прикладная
механика» для студентов машиностроительных
и немашиностроительных специальностей дневной
формы обучения**

Гомель 2010

УДК 621.81(075.8)
ББК 34.44я73
К63

*Рекомендовано научно-методическим советом
машиностроительного факультета ГГТУ им. П. О. Сухого
(протокол № 4 от 28.12.2009 г.)*

Рецензент: зав. каф. «Технология машиностроения» ГГТУ им. П. О. Сухого
канд. техн. наук, доц. *М. П. Кульгейко*

Комраков, В. В.
К63 Применение метода электрического моделирования для решения пространственных контактных задач : лаборатор. практикум по дисциплинам «Детали машин» и «Прикладная механика» для студентов машиностр. и немашиностр. специальностей днев. формы обучения / В. В. Комраков, Г. П. Тариков, Ю. Е. Кирпиченко. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2010. – 26 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: <http://lib.gstu.local>. – Загл. с титул. экрана.

Посвящен новому экспериментальному методу решения пространственных контактных задач теории упругости. Дано описание специального электромоделирующего устройства и методик решения с его помощью контактных задач.

Для студентов машиностроительных и немашиностроительных специальностей дневной формы обучения.

**УДК 621.81(075.8)
ББК 34.44я73**

© Учреждение образования «Гомельский
государственный технический университет
имени П. О. Сухого», 2010

Лабораторная работа № 1
СУЩНОСТЬ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЙ АНАЛОГИИ.
РЕШЕНИЕ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ
ЦЕНТРАЛЬНО НАГРУЖЕННОГО ШТАМПА

Цель работы: ознакомление с аналогией между задачами электростатики и пространственными контактными задачами, ознакомление с работой электро моделирующего устройства ЭМУ-КЗ-2. Изучение способа решения задачи о вдавлении штампа в изотропное упругое полупространство под действием центрально приложенной силы.

1. Общие сведения

Контактные задачи — задачи, в которых рассматривается область контакта двух упругих тел. Решить контактную задачу — значит определить форму и размеры области контакта, найти распределение контактных давлений в этой области.

Часто при решении пространственных контактных задач одно из контактирующих тел можно принять за абсолютно твердое (штамп), а второе — за однородное упругое полупространство.

1.1. Сущность электростатической аналогии

Задача для штампа с плоским основанием, имеющего в плане форму Σ , вдавливаемого в однородное упругое полупространство под действием центрально приложенной силы P (рис. 1) сводится к следующему интегральному уравнению:

$$\iint_{\Sigma} \frac{p(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} = \frac{\delta}{\Theta}, \quad (1)$$

где

$$\Theta = \frac{1-\nu^2}{\pi E}.$$

Здесь δ — перемещение штампа,

$p(x, y)$ — контактное давление под штампом.

При этом должно соблюдаться условие:

$$P = \iint_{\Sigma} p(x, y) dx dy. \quad (2)$$

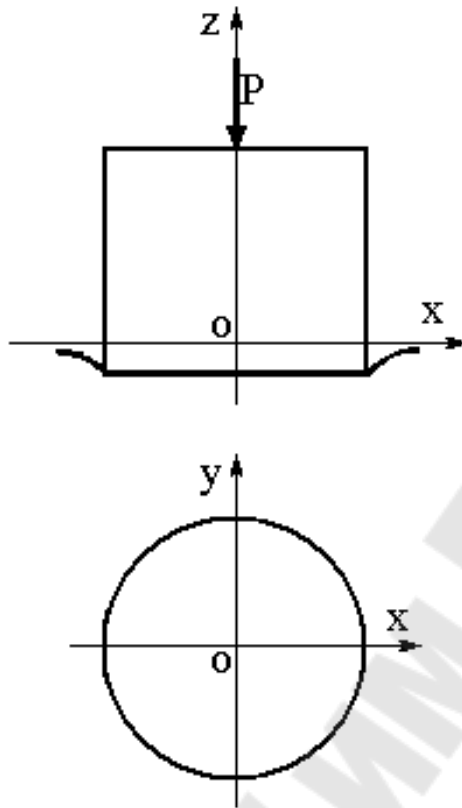


Рис. 2.4. Расчетная схема

Введем обозначение

$$W(x, y) = \frac{\delta}{\Theta}$$

и запишем уравнение (1) в виде:

$$\iint_{\Sigma} \frac{p(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} = W(x, y). \quad (3)$$

Перейдем теперь к задаче электростатики. Допустим, что токопроводящее тело имеет некоторый электрический заряд Q . Этот заряд будет распределяться в весьма тонком слое вблизи поверхности тела. Слой заряда, толщина которого достаточно мала по сравнению с расстоянием от исследуемых точек поля, считают зарядом поверхностным. Плотностью поверхностного заряда q называется заряд, приходящийся на единицу площади данной поверхности.

Если взять токопроводящую пластину, которая обладает некоторым электрическим зарядом Q и имеет форму Σ основания штампа в плане, то выражение для электростатического потенциала можно записать в виде [1]:

$$\psi(x, y) = \frac{1}{4\pi k_0 \varepsilon} \iint_{\Sigma} \frac{q(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}}, \quad (4)$$

где k_0 – диэлектрическая постоянная; ε – диэлектрический коэффициент среды. Общее количество электричества на пластине будет:

$$Q = \iint_{\Sigma} q(x, y) dx dy. \quad (5)$$

Введем обозначение $\Psi(x, y) = \psi(x, y) 4\pi k_0 \varepsilon$ и запишем уравнение (4) следующим образом:

$$\iint_{\Sigma} \frac{q(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} = \Psi(x, y). \quad (6)$$

Таким образом, две рассматриваемые линейные системы описываются математически подобными интегральными уравнениями (6) и (3). Причем их подобие является полным. Впервые на это обратил внимание Л.А. Галин [2]. Сходственными параметрами в данном случае будут $p(x, y)$ и $q(x, y)$, $W(x, y)$ и $\Psi(x, y)$. Токопроводящий элемент, который в рассматриваемом случае представляет собой пластину, при определенных условиях может служить аналоговой моделью объекта – оригинала (площадки контакта).

Электрический потенциал, подаваемый на токопроводящий элемент, является аналогом перемещения штампа, а наблюдаемое при эксперименте распределение электрических зарядов по поверхности токопроводящего элемента будет одновременно являться и решением интегрального уравнения (3), описывающего распределение контактного давления на площадке контакта.

Таким образом, имеется аналогия двух различных по своей физической сущности явлений.

1.2. Устройство для решения пространственных контактных задач

На основе использования квазистационарного электрического поля разработан новый способ решения пространственных контактных задач [3] и создано специальное электромоделирующее устройство для решения пространственных контактных задач теории упругости и термоупругости (ЭМУ-КЗ-2). Устройство защищено авторскими свидетельствами [4, 5, 6] и удостоено медали ВДНХ СССР.

На рис. 2.1 показана блок-схема ЭМУ-КЗ-2.

Устройство состоит из блока питания – 1, генератора сигналов звуковой частоты – 2, распределительного блока – 3, блока питания и управ-

ления координатным столиком – 4, токопроводящего элемента – 5, зонда – 6 и измерительного комплекса – 7. Первые четыре блока конструктивно выполнены в одном корпусе. Распределительный блок имеет 30 выходов и служит для подачи электрического потенциала на токопроводящий элемент. Токопроводящий элемент расположен на координатном столике, что позволяет производить измерения в любой точке электрического поля токопроводящего элемента. Перемещение координатного столика в горизонтальной плоскости осуществляется с помощью электродвигателей МН-7 и механической передачи. Управление электродвигателями осуществляется с помощью блока 4. Зонд и измерительный комплекс служат для измерения плотности заряда на поверхности токопроводящего элемента. Зонд имеет вертикальное перемещение, которое замеряется с помощью индикатора часового типа. Для проведения измерений и обработки результатов используется ПЭВМ.

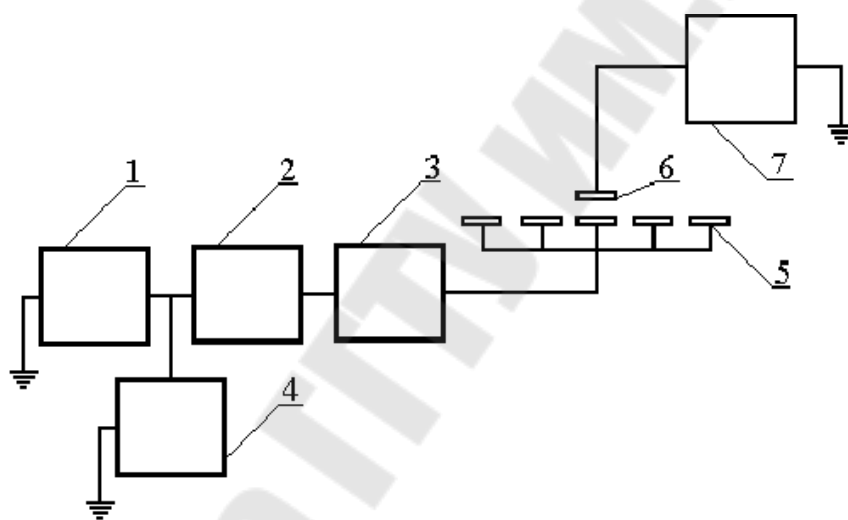


Рис. 2.1. Блок-схема электро моделирующего устройства

1.3. Решение эталонной задачи

Рассмотрим экспериментальное решение задачи о вдавливании штампа с плоским основанием круговой формы в плане в изотропное упругое полупространство под действием центрально приложенной силы P (рис. 1) (аналитическое решение которой известно).

Полагаем, что нагрузка вне штампа и силы трения между штампом и полупространством отсутствуют. Эта задача сводится к интегральным уравнениям (1) и (2).

Под действием центрально приложенной силы, штамп движется поступательно и все точки его основания перемещаются на одну и ту же величину. Поэтому электрический потенциал токопроводящего элемента,

моделирующий правую часть уравнения (1), должен иметь одну и ту же величину во всех его точках. Следовательно, в качестве аналога площадки контакта в данном случае можно взять сплошную токопроводящую пластину, имеющую форму основания штампа в плане, т. е. в виде круга. Таким образом, задаваясь ожидаемым перемещением штампа, на круглую токопроводящую пластину подаем электрический потенциал, моделирующий правую часть уравнения (1). Так как потенциал токопроводящей пластины постоянен, то для определения плотности заряда на её поверхности можно использовать следующую методику:

1. С помощью зонда и измерительного комплекса строятся эквипотенциальные линии электрического поля пластины.

2. Определяется напряженность в исследуемых точках электрического поля по формуле

$$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d_i},$$

где φ_1 – потенциал пластины, φ_2 – потенциал эквипотенциальной линии (зонда), d_i – расстояние между зондом и пластиной.

3. Затем, используя соотношение

$$E = 4\pi q,$$

определяется плотность заряда в соответствующих точках поверхности пластины.

Далее, используя критерии подобия, определяются значения контактных давлений в сходственных точках площади контакта и по формуле (2) – значение силы P .

Ввиду того, что рассматриваемая задача является осесимметричной, то достаточно произвести измерения только по радиальному сечению токопроводящей пластины.

Эта задача имеет аналитическое решение. Для определения контактных давлений используем следующую формулу:

$$p(x, y) = \frac{P}{2\pi R^2 \sqrt{1 - \rho^2}},$$

где R – радиус основания штампа в плане, ρ – отношение ординаты исследуемой точки к радиусу.

2. Оборудование и принадлежности

Электро моделирующее устройство для решения пространственных контактных задач (ЭМУ-КЗ-2), аналоги площадок контакта для штампов имеющих основания круговой и квадратной с вырезом формой в плане.

3. Порядок выполнения работы

3.1. Ознакомиться с теоретическими сведениями по электростатической аналогии.

3.2. Ознакомиться с устройством и работой электро моделирующего устройства ЭМУ-КЗ-2.

3.3. Решение эталонной задачи. Данные, полученные аналитически и результаты эксперимента сводим в таблицу 2.2.

Таблица 2.2

Оценка погрешности результатов эксперимента

ρ	p/p_{cp}		Погрешность, %
	Теоретические значения	Экспериментальные значения	
0			
0,1			
0,2			
0,3			
0,4			
0,5			
0,6			
0,7			
0,8			
0,9			

3.4. Решение задачи о вдавливании штампа сложной формы в упругое полупространство. Результаты решения сводим в таблицу 2.

4. Содержание отчета

4.1. Наименование и цель работы.

4.2. Общие сведения (сущность электростатической аналогии, описание устройства для решения пространственных контактных задач).

4.3. Решение эталонной задачи. Определение погрешности метода.

4.3. Результаты решения задачи о вдавливании штампа сложной формы в упругое полупространство.

5. Контрольные вопросы

- 5.1. Сущность электростатической аналогии.
- 5.2. Принцип действия электро моделирующего устройства ЭМУ-КЗ-2.
- 5.3. Порядок решения эталонной задачи.
- 5.4. Порядок решения задачи о вдавливании штампа сложной формы в упругое полупространство.

Лабораторная работа № 2
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ВДАВЛИВАНИИ ШТАМПА
ПРИ ВНЕЦЕНТРОМ НАГРУЖЕНИИ
МЕТОДОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Цель работы: Изучение способа решения задачи о вдавливании штампа в изотропное упругое полупространство под действием внецентренной силы.

1. Общие сведения

Рассмотрим общую постановку задачи.

Штамп с плоским основанием произвольной формы в плане вдавливается в изотропное упругое полупространство под действием внецентренно приложенной силы P (рис. 1).

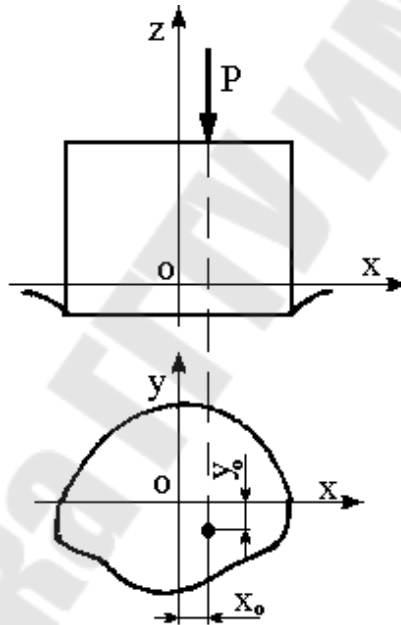


Рис. 1. Расчетная схема

Задача может быть приведена к следующему интегральному уравнению [8]:

$$\iint_{\Sigma} \frac{p(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} = \frac{\delta - \beta_y x + \beta_x y}{\Theta}, \quad (1)$$

где

$$\Theta = \frac{1 - v^2}{\pi E},$$

β_x, β_y – проекции вектора поворота штампа на оси x и y .

Обозначив правую часть уравнения (1) через $W(x, y)$ запишем его в виде:

$$\iint_{\Sigma} \frac{p(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} = W(x, y). \quad (2)$$

При решении задачи, на аналоге площадки контакта необходимо задать электрический потенциал в соответствии с правой частью уравнения (2). В данном случае перемещения различных участков основания штампа будут неодинаковы. Так как задать переменный электрический потенциал на сплошной токопроводящей пластине невозможно, то аналог площадки контакта (в отличие от случая центрально нагруженного штампа) выполняется в виде набора изолированных друг от друга токопроводящих пластин. Каждая из этих пластин является аналогом соответствующего участка площадки контакта. От распределительного блока на пластины токопроводящего элемента подается электрический потенциал, моделирующий правую часть уравнения (2) при заданном перемещении соответствующего участка основания штампа.

Таким образом, непрерывное распределение потенциала заменяется ступенчатым (рис. 2). Это послужило основой для создания модернизированного электро моделирующего устройства, позволившего значительно расширить класс решаемых задач.

Так как в рассматриваемом случае поверхность токопроводящего элемента не будет являться эквипотенциальной, то для определения плотности заряда на его поверхности удобно пользоваться следующей методикой.

Разбиваем токопроводящий элемент на ряд малых участков площадью F_i . Обозначим заряд такого участка через Q_i , потенциал зонда, расположенный над ним, через φ_j и коэффициент потенциала между зондом и участком через $k_{j,i}$. Зависимость между этими величинами выражается следующим уравнением:

$$\varphi_j = k_{j,i} Q_i. \quad (3)$$

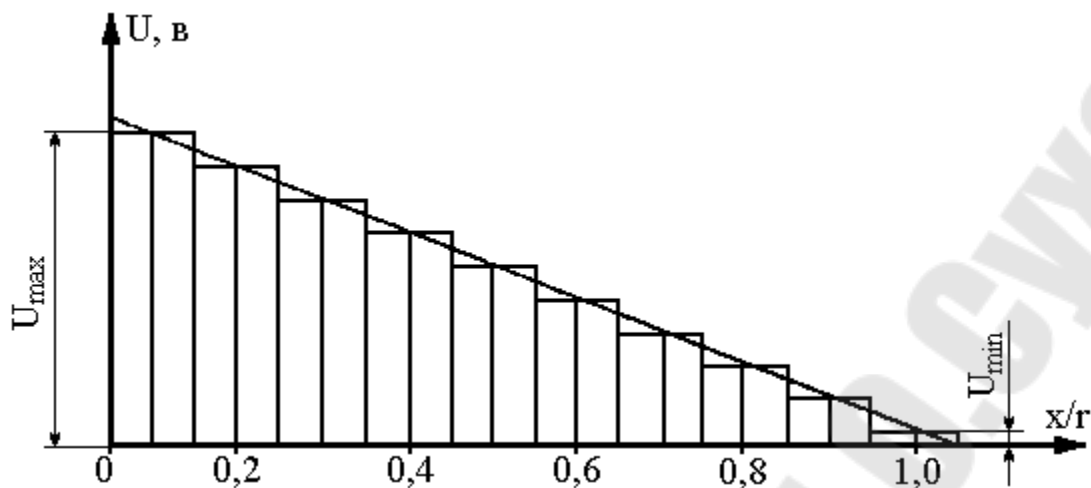


Рис. 2. Дискретная подача электрических потенциалов

Ввиду того что размеры зонда и участков токопроводящего элемента и расстояния между ними не изменяются при проведении эксперимента, то коэффициент потенциала является величиной постоянной. Его значение можно вычислить, определив коэффициент емкости между зондом и участком токопроводящего элемента [7].

Таким образом, измеряя потенциал зонда, из уравнения (3) находим значение Q_i . Затем определяем величину плотности поверхностного заряда рассматриваемого участка

$$q_i = \frac{Q_i}{F_i}. \quad (4)$$

2. Решение эталонной задачи

Для оценки погрешности результатов эксперимента решена задача о вдавливании штампа круговой формы в упругое полупространство при его внецентренном нагружении (рис. 3). При этом полагалось, что отрыва штампа от упругого полупространства не происходит, нагрузка вне штампа и силы трения между штампом и полупространством отсутствуют. Аналог площадки контакта представлял собой набор отдельных параллельно расположенных пластин, изолированных друг от друга (рис. 4).

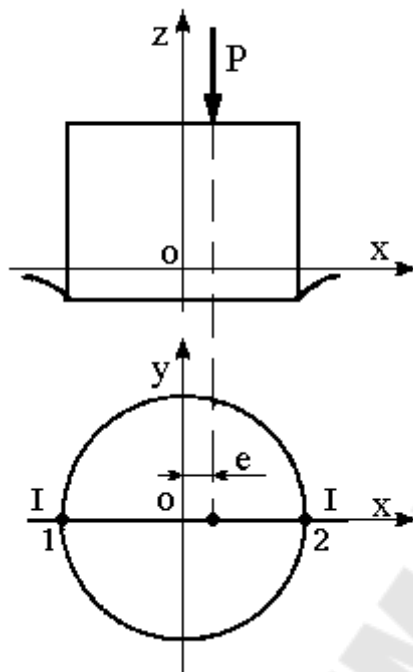


Рис. 3. Расчетная схема

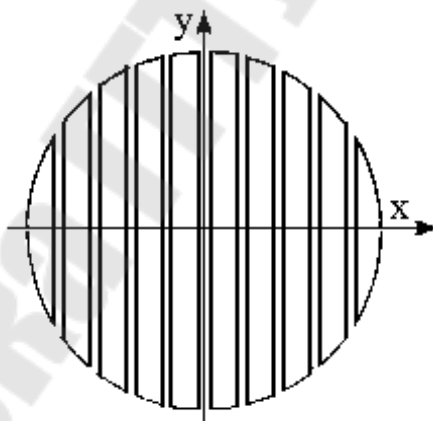


Рис. 4. Токопроводящий элемент

Теоретические значения контактного давления p можно определить по следующей формуле [8]:

$$p = p_{cp} \frac{1 + \frac{3(x_0x + y_0y)}{a^2}}{2\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{a^2}}}, \quad (5)$$

где a – радиус площади контакта; ρ – расстояние от центра окружности до рассматриваемой точки.

При вычислениях, значение y_0 принималось равным нулю, а $x_0 = \frac{1}{6}a$.

Перемещение точек основания штампа можно определить из выражения [8]:

$$w = \frac{P(m-1)}{4maG} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{xx_0 + yy_0}{a^2} \right), \quad (6)$$

где m – число Пуассона.

Решение задачи осуществлялось по следующей методике:

1. Создавался аналог площади контакта, имеющий ее форму в плане, в виде набора изолированных друг от друга параллельно расположенных токопроводящих пластин (3.12).

2. На каждую из пластин токопроводящего элемента подавался электрический потенциал, моделирующий правую часть уравнения (3.12) при заданном перемещении и угле поворота соответствующего участка основания штампа.

3. Токопроводящий элемент разбивался на ряд малых участков ΔF_i , в которых определялась плотность заряда $q(x_i, y_i)$.

4. Вычислялись контактные давления $p(x_i, y_i)$ в соответствующих точках площади контакта и сила P , действующая на штамп.

5. Зная характер распределения и величину контактных давлений, а также значение силы P , определялись момент, вызывающий поворот штампа и эксцентриситет e .

3. Задача для штампа сложной формы в плане

Рассмотрим теперь задачу о вдавливании штампа с плоским основанием квадратной формы в плане с вырезом в упругое полупространство под действием внецентренной силы P , линия действия которой находится в плоскости xoz' (рис. 5) [9]. Полагаем, что эксцентриситет e таков, что отрыва штампа от упругого полупространства не происходит.

Считаем также, что вне штампа поверхность упругого полупространства свободна от нагрузки, а силы трения на площади контакта отсутствуют.

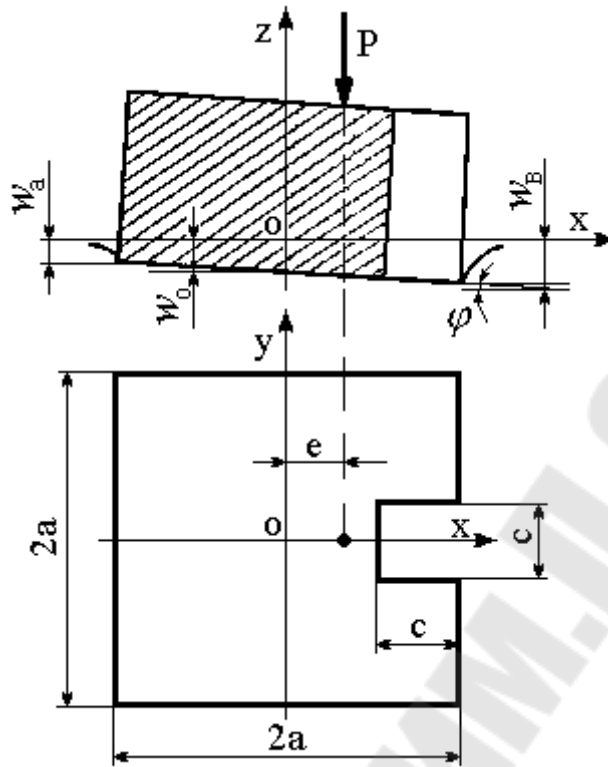


Рис. 5. Расчетная схема

Задача сводится к следующему интегральному уравнению:

$$\iint_{\Sigma} \frac{p(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} = \frac{\delta - \beta_y x}{\Theta}. \quad (7)$$

Введя обозначение $W(x, y) = \frac{\delta - \beta_y x}{\Theta}$, получим интегральное уравнение

$$\iint_{\Sigma} \frac{p(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} = W(x, y). \quad (8)$$

Уравнения равновесия штампа будут иметь вид:

$$\begin{aligned} P &= \iint_{\Sigma} p(x, y) dx dy, \\ x_0 P &= \iint_{\Sigma} xp(x, y) dx dy. \end{aligned} \quad (9)$$

К уравнению (8) можно применить электростатическую аналогию.

Аналог площадки контакта показан на рис. 6. Решение задачи осуществляется по вышеприведенной методике.

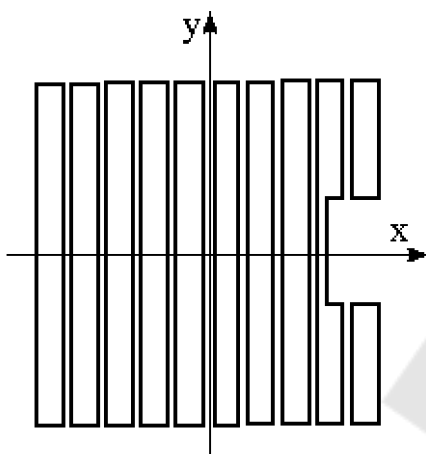


Рис. 6. Токпроводящий элемент

4. Оборудование и принадлежности

Электромоделирующее устройство для решения пространственных контактных задач (ЭМУ-КЗ-2), аналоги площадок контакта для круглого штампа и для квадратного штампа с вырезом.

5. Порядок выполнения работы

5.1. Ознакомиться с особенностями решения задачи вдавливания штампов при их внецентренном нагружении.

5.2. Решение эталонной задачи. В таблицу 3.3 сводим значения отношений контактного давления p , действующего по сечению 1–1 от точки 1 к точке 2 (рис. 3), к p_{cp} ($p_{cp} = P/F$), найденные аналитически и экспериментально.

Таблица 1

Сравнение теоретических и экспериментальных результатов

x/a	Значения p/p_{cp}	
	теоретические	экспериментальные
0,9		
0,7		
0,5		
0,3		

0,1		
0,0		
0,1		
0,3		
0,5		
0,7		
0,9		

5.3. Решение задачи о вдавливании штампа с плоским основанием квадратной формы в плане с вырезом в упругое полупространство под действием внецентренной силы P .

6. Содержание отчета

6.1. Наименование и цель работы.

6.2. Общие сведения (порядок решения задачи о вдавливании штампа с плоским основанием в упругое полупространство под действием внецентренной силы P).

6.3. Решение эталонной задачи. Определение погрешности метода.

6.4. Результаты решения задачи о вдавливании штампа квадратной формы в плане с вырезом в упругое полупространство под действием внецентренной силы P .

7. Контрольные вопросы

7.1. Последовательность решения задачи о вдавливании штампа в упругое полупространство под действием внецентренной силы P .

7.2. Порядок решения эталонной задачи.

7.3. Порядок решения задачи о вдавливании штампа квадратной формы в плане с вырезом в упругое полупространство под действием внецентренной силы P .

Лабораторная работа № 3
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О КОНТАКТЕ ДВУХ УПРУГИХ ТЕЛ
МЕТОДОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Цель работы: Изучение способа решения задачи о контакте двух упругих тел
с помощью метода электрического моделирования.

1. Общие сведения

Рассмотрим задачу о контакте двух упругих тел (рис. 1). Точку O их первоначального касания примем за начало координат. Выразим уравнение поверхностей, ограничивающих каждое из тел в виде:

$$z_1 = f_1(x, y), \quad z_2 = f_2(x, y).$$

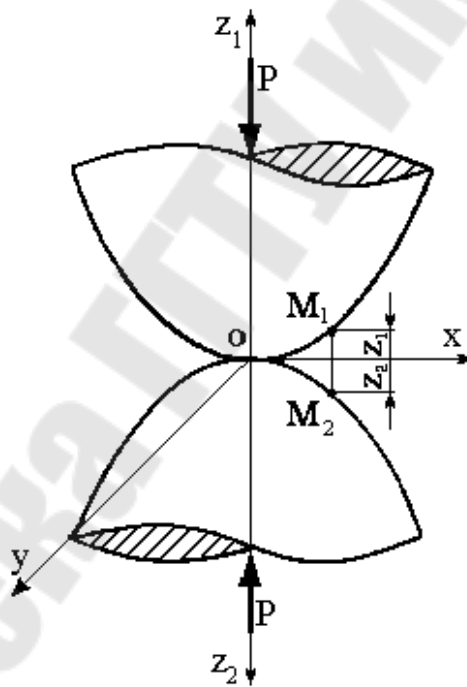


Рис. 1. Расчетная схема

Под действием силы P , линия действия которой перпендикулярна к общей касательной плоскости Π и проходит через точку O , тела сближаются друг с другом на величину δ . Если обозначить перемещения точек первого и второго тела, достаточно удаленных от места контакта, в направлении сил P через δ_1 и δ_2 соответственно, то

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 .$$

Интегральное уравнение для определения $p(x, y)$:

$$\left(\frac{1-v_1^2}{\pi E_1} + \frac{1-v_2^2}{\pi E_2} \right) \iint_{\Sigma} \frac{p(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} = \delta - f_1(x, y) - f_2(x, y) \quad (1)$$

или

$$\iint_{\Sigma} \frac{p(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} = \frac{\delta - f_1(x, y) - f_2(x, y)}{\Theta_1 + \Theta_2}, \quad (2)$$

где $\Theta_1 = \frac{1-v_1^2}{\pi E_1}$, $\Theta_2 = \frac{1-v_2^2}{\pi E_2}$.

Равнодействующую сжимаемых сил, действующих на каждое упругое тело, находим по формуле

$$P = \iint_{\Sigma} p(x, y) dx dy. \quad (3)$$

Запишем уравнение (2) в виде:

$$\iint_{\Sigma} \frac{p(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} = W(x, y), \quad (4)$$

где

$$W(x, y) = \frac{\delta - f_1(x, y) - f_2(x, y)}{\Theta_1 + \Theta_2}.$$

Как рассмотрено ранее, интегральное уравнение электростатики, описывающее закон распределения плотности заряда по поверхности токопроводящей пластины, может быть приведено к виду

$$\iint_{\Sigma} \frac{q(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} = \Psi(x, y). \quad (5)$$

Аналогия уравнений (4) и (5) позволяет использовать способ электрического моделирования для решения рассматриваемой задачи.

При контакте двух упругих тел вертикальные перемещения точек, принадлежащих площадке контакта, неодинаковы.

Так как на сплошной токопроводящей пластине задать переменный электрический потенциал в соответствии с правой частью уравнения (4)

невозможно, то аналог площадки контакта представлял собой набор изолированных друг от друга токопроводящих пластин. В случае осесимметричной задачи токопроводящий элемент целесообразно выполнять в виде концентрично расположенных колец. На каждое кольцо подается электрический потенциал в соответствии с правой частью уравнения (4). Таким образом, так же, как и при решении задач для внецентренно загруженного плоского штампа и задач для неплоского штампа, в данном случае непрерывное распределение потенциала заменяется ступенчатым.

2. Решение эталонной задачи

Для оценки погрешности метода необходимо решить задачи, аналитическое решение которых известно. Например, задачи о контакте двух сферических тел, шара и сферической впадины, двух цилиндров с перпендикулярными осями как с одинаковыми, так и различными радиусами (рис. 2). Как известно, в последнем случае площадка контакта будет эллиптической.

Методика решения задачи. Зная ожидаемое сближение δ упругих тел, выбираем определенный шаг изменения δ от нуля до ожидаемого значения.

Производим автоматическое построение контуров площадок контакта для каждого значения δ . Зная силы, действующие на упругие тела, определяем формы и размеры площадок контакта.

Согласно правой части рассматриваемого интегрального уравнения (4), на каждую из пластин аналога площадки контакта подаем электрический потенциал. С помощью зонда и измерительного комплекса определяем значение плотности заряда на поверхности токопроводящего элемента. Затем, используя критерии подобия, находим значение контактных давлений в соответствующих точках площадки контакта.

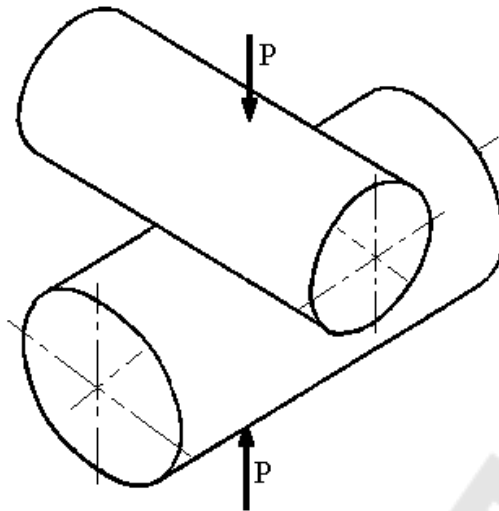


Рис. 4.2. Расчетная схема

3. Решение контактной задачи применительно к зубчатой передаче

При рассмотрении зубчатой передачи считаем, что контактирующие поверхности касаются первоначально в одной точке. Под действием заданной нагрузки происходят упругие деформации и поверхности начинают касаться по некоторой площадке. В процессе зацепления такие площадки появляются во всех точках рабочей линии, образуя так называемое пятно контакта. Его форма главным образом определяется направлением рабочей линии на поверхности зуба, а размеры – величиной мгновенных площадок контакта. Исследования показали, что силы трения, возникающие на контактной площадке, не влияют на нормальные напряжения, возникающие на ней, и на ее размеры [10]. Поэтому размер и форма мгновенных площадок контакта могут быть установлены в результате решения контактной задачи Герца о сжатии двух упругих тел.

Представим контактирующие зубья передачи в виде двух упругих тел, касающихся в точке O (рис. 3), которую примем за начало системы координат x, y, z . Плоскость xOy совместим с общей касательной плоскостью к поверхностям сжимаемых тел в точке их касания. Уравнения поверхностей, ограничивающих сжимаемые тела, имеют вид:

$$z_1 = f_1(x, y), \quad z_2 = f_2(x, y).$$

Положим, что равнодействующие сжимающих сил находятся на оси z и сближение δ тел при сжатии происходит вдоль этой оси. Считаем, что силы трения на площади контакта отсутствуют.

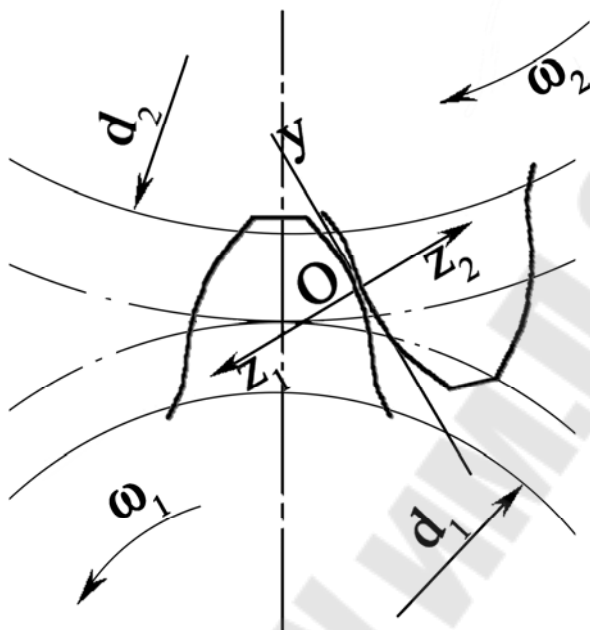


Рис. 3. Расчетная схема

В рассматриваемом случае задача сводится к интегральному уравнению (4) и, следовательно, к нему можно применить электростатическую аналогию.

4. Оборудование и принадлежности

Электро моделирующее устройство для решения пространственных контактных задач (ЭМУ-КЗ-2), аналоги площадок контакта для двух упругих тел и аналоги площадок контакта для зубчатых колес с бочкообразным зубом.

5. Порядок выполнения работы

5.1. Ознакомиться с особенностями решения задачи о контакте двух упругих тел.

5.2. Решение эталонной задачи. В таблицы 1 и 2 сводим результаты данных теории и эксперимента при решении задач о контакте сферических тел и цилиндров различных радиусов с перпендикулярными осями соответственно.

В таблице 1 a – радиус площадки контакта, а в таблице 2 a – длина большей полуоси эллиптической площадки контакта.

Таблица 1

**Результаты теоретических и экспериментальных решений
для круговой площадки контакта**

r/a	Значения p/p_{cp}	
	теоретические данные	экспериментальные данные
0,1		
0,3		
0,5		
0,7		
0,9		

Таблица 2

**Результаты теоретических и экспериментальных решений
для эллиптической площадки контакта**

x/a	Значения p/p_{cp}	
	теоретические данные	экспериментальные данные
0,1		
0,3		
0,5		
0,7		
0,9		

5.3. Решение задачи о контакте бочкообразных зубьев зубчатых колес под действием силы P .

6. Содержание отчета

- 6.1. Наименование и цель работы.
- 6.2. Общие сведения (особенности решения задачи о контакте двух упругих тел под действием силы P).
- 6.3. Решение эталонной задачи. Определение погрешности метода.
- 6.4. Результаты решения задачи о контакте бочкообразных зубьев зубчатых колес под действием силы P .

7. Контрольные вопросы

7.1. Последовательность решения задачи о контакте двух упругих тел под действием силы P .

7.2. Порядок решения эталонной задачи.

7.3. Порядок решения задачи о контакте бочкообразных зубьев зубчатых колес под действием силы P .

ЛИТЕРАТУРА

1. Парселл Э. Электричество и магнетизм. – М.: Наука, 1971. – 447 с.
2. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости. – М.: ГИТТЛ, 1953. – 264 с.
3. Тариков Г.П. и др. Патент РБ. Способ решения пространственных контактных задач теории упругости, № 2200, 1998.
4. Бородачев Н.М., Тариков Г.П. Устройство для решения задач физических полей. Авт. свид. № 434426. Бюл. изобр., 1974. – № 24.
5. Бородачев Н.М., Тариков Г.П. Устройство для моделирования пространственных контактных задач. Авт. свид № 570905. Бюл. изобр., 1977. – № 32.
6. Бородачев Н.М., Тариков Г.П. Устройство для решения пространственных контактных задач. Авт. свид. № 1791829. Бюл. изобр., 1992. – № 32.
7. Нейман Л.Р., Калантаров П.Л. Теоретические основы электротехники. Ч. I. – М., Л.: ГЭИ, 1948. – 355 с.
8. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. – М., 1965. – 491 с.
9. Тариков Г.П. К решению задачи о вдавлении внецентренно нагруженного фундамента в упругое основание с помощью электрического моделирования //Изв. ВУЗов. Строительство и архитектура. – 1985. – № 4. – С. 18–22.
10. Крагельский И. В., Михин Н. М. Узлы трения машин. – Машиностроение, 1984. – 280 с.

Содержание

Лабораторная работа № 1	3
Лабораторная работа № 2	10
Лабораторная работа № 3	18
Литература.....	25

**Комраков Владимир Викторович
Тариков Георгий Петрович
Кирпиченко Юрий Ефремович**

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА
ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ
КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ**

**Лабораторный практикум
по дисциплинам «Детали машин» и «Прикладная
механика» для студентов машиностроительных
и немашиностроительных специальностей дневной
формы обучения**

Подписано к размещению в электронную библиотеку
ГГТУ им. П. О. Сухого в качестве электронного
учебно-методического документа 02.07.10.

Пер. № 7Е.
E-mail: ic@gstu.by
<http://www.gstu.by>