Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Электроснабжение»

Т. В. Алферова, О. М. Попова

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИКИ

ПРАКТИКУМ

по одноименному курсу для студентов специальности
1-43 01 03 «Электроснабжение (по отраслям)»
дневной и заочной форм обучения

Гомель 2012

УДК 621.31(075.8)
ББК 31.2я73
А53

Рекомендовано научно-методическим советом энергетического факультета ГГТУ им. П. О. Сухого (*протокол № 8 от 08.05.2012 г.*)

Рецензент: канд. техн. наук, доц. каф. «Автоматизированный электропривод» ГГТУ им. П. О. Сухого *В. В. Тодарев*

Алферова, Т. В.

А53 Математические задачи электроэнергетики : практикум по одноим. курсу для студентов специальности 1-43 01 03 «Электроснабжение (по отраслям)» днев. и заоч. форм обучения / Т. В. Алферова, О. М. Попова. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2012. – 50 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: http://alis.gstu.by/StartEK/. – Загл. с титул. экрана.

Исследуются вопросы прикладной (инженерной) математики для решения конкретных технических задач. Приведены теоретические сведения, необходимые для решения задач, а также примеры расчетов.

Для студентов специальности 1-43 01 03 «Электроснабжение (по отраслям)» дневной и заочной форм обучения.

УДК 621.31(075.8)
ББК 32.2я73

ВВЕДЕНИЕ

Современное электроснабжение промышленных предприятий, городов и сельскохозяйственных районов представляет собой сложную систему кибернетического типа, отличающуюся большим числом взаимосвязанных элементов и подсистем. Исследование таких систем не представляется возможным без применения достаточно мощного математического аппарата и вычислительной техники.

Все возрастающие темпы электрификации народного хозяйства и энерговооруженности труда приводят к необходимости массового проектирования систем электроснабжения и их развития. Объем этой работы столь велик, что снижение трудозатрат на эту работу становится совершенно необходимым. Это удается решить за счет автоматизации проектирование систем электроснабжения, в свою очередь за счет использования современных математических методов и вычислительной техники.

Народно-хозяйственные затраты на сооружение и эксплуатацию системы электроснабжения большие. Это обуславливает необходимость принимать в каждом конкретном случае наивыгоднейшее инженерное решение, поскольку многократно повторенная неточность может привести к существенному народно-хозяйственному ущербу. Основой для принятия наилучших решений является математическое исследование операций.

Содержание курса «Математические задачи энергетики» не является изложением всех математических вопросов, необходимых для решения электроэнергетических задач. Эта дисциплина является лишь «мостиком» между теоретической (чистой) математикой, закладывающей основы математического мышления инженера, и прикладной (инженерной) математикой, служащей аппаратом для решения конкретных технических задач. Такая заблаговременная подготовка студентов позволяет, с одной стороны, разгрузить специальные предметы и сделать их более компактными, а с другой стороны, обеспечить сознательно-критическое применение студентами математики в специальных дисциплинах.

1 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СЛОЖНЫХ СОБЫТИЙ

Решение задач данного типа предполагает знание теоретического материала «теоремы теории вероятностей» и «Модель повреждаемости однотипного оборудования».

1.1 ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТИ

1.1.1 Основные понятия

Случайным событием называется всякий факт, который в результате опыта может произойти или не произойти.

Вероятностью события называется численная мера степени объективной возможности этого события. Вероятность события A обозначается $P(A)$.

Достоверным называется событие U, которое в результате опыта непременно должно произойти.

$$P(U) = 1.$$

Невозможным называется событие, которое в результате опыта не может произойти.

$$P(V) = 0.$$

Вероятность любого события A заключена между нулем и единицей:

$$0 \le P(A) \le 1.$$

Полной группой событий называется несколько событий, таких, что в результате опыта непременно должно произойти хотя бы одно из них.

Несколько событий в данном опыте называются **несовместными**, если никакие два из них не могут появиться вместе.

Несколько событий в данном опыте называются **равновозможными**, если по условиям симметрии опыта нет оснований считать какое-либо из них более возможным, чем любое другое.

Если несколько событий: 1) образуют полную группу; 2) несовместны; 3) равновозможны, то они называются **случаями**.

1.1.2 Теоремы сложения и умножения вероятностей

Суммой двух событий *A* и *B* называется событие *C*, состоящее в появлении хотя бы одного из событий *A* или *B*.

Суммой нескольких событий называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий.

Произведением двух событий *A* и *B* называется событие *C*, состоящее в совместном появлении события *A* и события *B*.

Произведением нескольких событий называется событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий.

Теорема сложения вероятностей

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

В случае, когда события *A* и *B* совместны, вероятность их суммы выражается формулой

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB),$$

где AB – произведение событий *A* и *B*.

Теорема сложения вероятностей для нескольких событий

Вероятность суммы нескольких несовместных событий равна сумме их вероятностей:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

В случае, когда события A_i совместны, вероятность их суммы выражается формулой

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i} P(A_i)-\sum_{i,j} P(A_i A_j)+\sum_{i,j,k} P(A_i A_j A_k)-\ldots$$
$$+(-1)^{\mathrm{n-1}}\cdot P\left(A_1 A_2 A_3 \ldots A_{\mathrm{n}}\right),$$

где суммы распространяются на все возможные комбинации различных индексов i, j, k, …, взятых по одному, по два, по три и т.д.

Если события A_1, A_2, …, A_n несовместны и образуют полную группу, то сумма их вероятностей равна единице:

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1.$$

Событие $\overline{A}$ называется **противоположным** событию A, если оно состоит в не появлении события A.

Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

Условной вероятностью события *A* при наличии *B* называется вероятность события, вычисленная при условии, что событие B произошло. Эта вероятность обозначается $P(A \mid B)$.

События A и B называются **независимыми**, если появление одного из них не меняет вероятности появления другого. Для независимых событий

$$P(A \mid B) = P(A); \quad P(A \mid B) = P(B).$$

Теорема умножения вероятностей

Вероятность произведения двух событий равна вероятности одного из них, умноженной на условную вероятность другого при наличии первого:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B \mid A)$$

или

$$P(AB) = P(B) \cdot P(A \mid B).$$

Для независимых событий A и B

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Теорема умножения вероятностей для нескольких событий

$$P(A_1 A_2 A_3 ... A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 A_2) \cdot ... \cdot P(A_n \mid A_1 A_2 ... A_{n-1}).$$

В случае, когда события независимы, т.е. появление любого числа из них не меняет вероятностей появления остальных,

$$P\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Схема независимых испытаний

Опыты называются **независимыми**, если вероятность того или иного исхода каждого опыта не зависят от того, какие исходы имели другие опыты.

Независимые опыты могут производиться как в одинаковых условиях, так и в различных. В первом случае вероятность появления какого-либо события A во всех опытах одна и та же, во втором случае она меняется от опыта к опыту.

Если в одинаковых условиях производится n независимых опытов и в каждом из них с вероятностью p появляется событие A, то вероятность $P_{m,n}$ того, что событие A произойдет в этих опытах ровно m раз выражается формулой

$$P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m}, \ (m = 0, 1, 2, 3, ..., n),$$

где $q = 1 - p$.

Эта формула отражает биномиальное распределение вероятностей. Если условия опытов различны и вероятность события A в i-том опыте равна $p_i \ (i = 1, 2, ..., n)$, то вероятность $P_{m,n}$ того, что событие A появится в этих опытах ровно m раз, равна коэффициенту при z_m – в разложении по степеням z производящей функции:

$$f(z) = \prod_{i=1}^{n} (q_i + p_i z_i),$$

где $q_i = 1 - p_i$; z – произвольный параметр.

1.2 ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ НЕЗАВИСИМЫХ ИСПЫТАНИЙ КАК МОДЕЛЬ ПОВРЕЖДАЕМОСТИ ОДНОТИПНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ СИСТЕМЫ. ФОРМУЛА БЕРНУЛЛИ

Последовательность независимых испытаний представляет собой производство многократных независимых испытаний в одних и тех же условиях, при этом в каждом из испытаний возможно одно и тоже число несовместных событий. Например, станок выпускает детали с различными допусками. Оценка работы станка производится следующим образом: из партии деталей берётся 100 штук и оценивается количество деталей с различными отклонениями. Опыты повторяются не однократно. Из 10 тысяч деталей (изделий) брак будет постоянным числом.

При большом числе однотипных агрегатов в системе электроснабжения вероятности повреждения различного количества числа агрегатов могут быть определены по биноминальной формуле для схемы независимых испытаний (схема Бернулли).

Во многих практических случаях при многократных независимых испытаниях могут быть только два исхода: случайное событие А произойдет или не произойдет. Пусть вероятность того, что в каждом из этих независимых испытаний событие A произойдет, равна p, где p – статистическая вероятность. Тогда вероятность противоположного события (событие A не происходит)

$$q = 1 - p.$$

Зная p или q, можно определить вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A, например, повреждение агрегата, случится m раз. Обозначим эту вероятность через P_n^m. Она равна произведению числа комбинаций из n по m на вероятность события в степени m и на противоположную вероятность в степени $(n-m)$:

$$P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}. \tag{1.1}$$

Выражение (1.1) называют формулой биномиального распределения. Очевидно, что

$$\sum_{m=0}^{n} P_n^m = 1, \tag{1.2}$$

т. к. эта сумма охватывает все возможные события (m варьируется от 0 до n).

Если число однотипных агрегатов n, вероятность не рабочего состояния q, то можно найти:

1) Вероятность повреждения ровно m элементов из n

$$P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m};$$

2) Вероятность повреждения элементов от m_1 до m_2 из n

$$P_n^{m_1 \le m \le m_2} = \sum_{m_1}^{m_2} C_n^m p^m q^{n-m};$$

3) Вероятность повреждения не более k элементов из n

$$P_n^{0<m \le k} = \sum_{0}^{k} C_n^m p^m q^{n-m};$$

4) Вероятность повреждения более k элементов из n

$$P_n^{m>k} = \sum_{k+1}^{n} C_n^m p^m q^{n-m};$$

5) Вероятность того, что m элементов находятся в рабочем состоянии из n

$$P_n^m = C_n^m p^{n-m} q^m;$$

6) Вероятность того, что все элементы находятся в рабочем состоянии ($m = 0$)

$$P_n^0 = C_n^0 p^0 q^{n-0} = q^n.$$

ЗАДАЧА 1.1

На рис. 1.1 приведена схема питания приёмников от силовых шкафов по магистральной схеме.

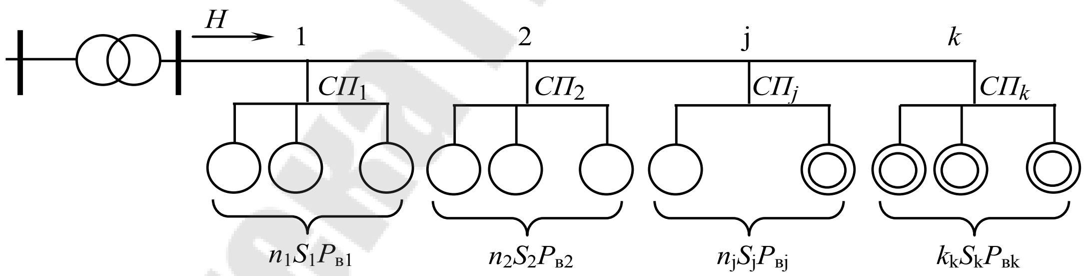

Рис. 1.1

где СП$_j$ – j-ый силовой пункт, к которому присоединено n_j приёмников мощностью S_j каждый и вероятностью включения p_j, $j = 1, ..., k$.

Определить вероятность нагрузки (H) головного участка магистральной схемы.

<u>*Решение.*</u> Математически задача может быть записана следующим выражением: $P(H \ge S1)$, где $S1$ – численное значение. Нагрузка головного участка зависит от количества включенных приёмников в

каждом СП. Численное значение $S1$ определяется $\sum_{1}^{k} n_j \cdot S_j$, $j = 1, k$.

Предполагается, что мощности приемников S_j однотипны. Вычисление вероятности выполним по выражению

$$P(H \geq S1) = \sum_{1}^{M} \prod_{1}^{K} C_{n_j}^{m_j} p_j^{m_j} q_j^{n_j - m_j},$$

где m_j – количество включенных приемников в *j*-ом СП; М – количество случаев удовлетворяющих условию $H \geq S1$; K – количество групп электродвигателей (СП). Приведем численный пример.

Пусть $K = 3$; $n_1 = 3$; $S_1 = 10\ \text{кВ} \cdot \text{А}$; $p_1 = 0{,}7$;
$n_2 = 2$; $S_2 = 15\ \text{кВ} \cdot \text{А}$; $p_2 = 0{,}6$;
$n_3 = 4$; $S_3 = 5\ \text{кВ} \cdot \text{А}$; $p_3 = 0{,}5$.

Определить $P(H > 15\ \text{кВ} \cdot \text{А})$ – ?

Число случаев с нагрузкой более 15 кВ·А очень велико, поэтому выявляем все случаи, когда нагрузка головного участка $\leq 15\ \text{кВ} \cdot \text{А}$.

$$\begin{aligned} P(H \leq 15) = {} & P(m_1 = 0, m_2 = 0, m_3 = 0) + P(m_1 = 1, m_2 = 0, m_3 = 0) + \\ & + P(m_1 = 0, m_2 = 0, m_3 = 1) + P(m_1 = 0, m_2 = 1, m_3 = 0) + \\ & + P(m_1 = 1, m_2 = 0, m_3 = 1) + P(m_1 = 0, m_2 = 0, m_3 = 2) + \\ & + P(m_1 = 0, m_2 = 0, m_3 = 3) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = C_3^0 p_1^0 q_1^3 \cdot C_2^0 p_2^0 q_2^2 \cdot C_4^0 p_3^0 q_3^4 + C_3^1 p_1^1 q_1^2 \cdot C_2^0 p_2^0 q_2^2 \cdot C_4^0 p_3^0 q_3^4 + \\ & + C_3^0 p_1^0 q_1^3 \cdot C_2^0 p_2^0 q_2^2 \cdot C_4^1 p_3^1 q_3^3 + C_3^0 p_1^0 q_1^3 \cdot C_2^1 p_2^1 q_2^1 \cdot C_4^0 p_3^0 q_3^4 + \\ & + C_3^1 p_1^1 q_1^2 \cdot C_2^0 p_2^0 q_2^2 \cdot C_4^1 p_3^1 q_3^3 + C_3^0 p_1^0 q_1^3 \cdot C_2^0 p_2^0 q_2^2 \cdot C_4^2 p_3^2 q_3^2 + \\ & + C_3^0 p_1^0 q_1^3 \cdot C_2^0 p_2^0 q_2^2 \cdot C_4^3 p_3^3 q_3^1 = \\ & = 0{,}3^3 \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}5^4 + 3 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}5^4 + 0{,}3^3 \cdot 0{,}4^2 \cdot 4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5^3 + \\ & + 0{,}3^3 \cdot 2 \cdot 0{,}6^1 \cdot 0{,}4^1 \cdot 0{,}5^4 + 3 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}4^2 \cdot 4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5^3 + \\ & + 0{,}3^2 \cdot 0{,}4^2 \cdot 6 \cdot 0{,}5^2 \cdot 0{,}5^2 + 0{,}3^3 \cdot 0{,}4^2 \cdot 4 \cdot 0{,}5^3 \cdot 0{,}5 = 1{,}431 \cdot 10^{-2}. \end{aligned}$$

$$P(H > 15) = 1 - P(H \leq 15) = 1 - 0{,}01431 = 0{,}98569.$$

ЗАДАНИЕ

Определить вероятности нагрузок головного участка от нуля до максимальных значений, используя программу «WEROT», по заданному варианту исходных данных. Для $H = S1$ выполнить численные расчеты (задается преподавателем).

Таблица 1.1. Варианты исходных данных

Варианты № п/п	СП 1			СП 2			СП 3		
	n_1	S_1	p_1	n_2	S_2	p_2	n_3	S_3	p_3
1	2	3,0	0,5	3	4,0	0,4	5	5,0	0,3
2	3	15,0	0,4	4	10,0	0,3	6	5,0	0,6
3	4	10,0	0,3	5	5,0	0,6	7	3,0	0,8
4	5	5,0	0,6	6	3,0	0,8	2	15,0	0,7
5	6	5,0	0,8	7	5,0	0,7	3	10,0	0,5
6	7	3,0	0,7	2	10,0	0,5	4	15,0	0,4
7	3	15,0	0,5	7	5,0	0,4	5	4,0	0,3
8	2	10,0	0,4	5	5,0	0,3	7	5,0	0,6
9	7	4,0	0,3	8	3,0	0,6	2	10,0	0,8
10	5	5,0	0,6	4	5,0	0,8	4	5,0	0,7
11	8	3,0	0,8	5	4,0	0,7	2	15,0	0,3
12	4	10,0	0,7	6	5,0	0,3	5	3,0	0,6
13	5	10,0	0,3	7	5,0	0,6	3	10,0	0,4
14	6	4,0	0,6	2	3,0	0,4	7	5,0	0,8
15	7	5,0	0,4	4	5,0	0,8	4	10,0	0,5
16	2	15,0	0,8	3	10,0	0,5	8	5,0	0,4

ЗАДАЧА 1.2

По двухцепной линии потребитель получает электроэнергию (см. рис. 1.2). Обе линии находятся в одинаковых условиях эксплуатации. Пропускная способность каждой линии равна 100 %. Вероятность отключения одной линии равна 0,001. Вероятность отключения второй линии при отключенной первой – 0,1.

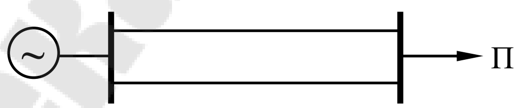

Рис. 1.2

Определить вероятность прекращения питания потребителя по данным исходным условиям.

Решение. Обозначим:

А – событие повреждения одной из линий, а событие повреждения другой линии, при поврежденной первой, – *Б*; *С* – событие бесперебойного электроснабжения потребителя.

События *А* и *Б* взаимозависимы и совместны (линии находятся на одной опоре). Прекращение электроснабжения произойдет только тогда, если произойдет и событие *А* и событие *Б*, т.е. событие их произведения – $A \cdot Б$. Событие прекращения электроснабжения и событие сохранения его – это противоположные события, поэтому можно записать: $C + A \cdot Б = U$.

Вероятность данного соотношения будет:

$$P(C) + P(A \cdot Б) = P(U).$$

Т.к. $P(U) = 1$, то

$$P(C) = 1 - P(A \cdot Б) = 1 - P(A) \cdot P(Б \mid A).$$

Подставив численные значения соответствующих событий, получим: $P(C) = 1 - 0{,}001 \cdot 0{,}1 = 0{,}9999$.

ЗАДАЧА 1.3

Электрическая связь между двумя энергосистемами осуществляется по схеме, показанной на рис. 1.3.

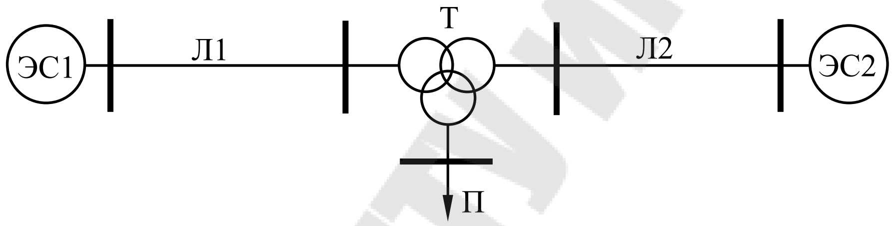

Рис. 1.3

Вероятность отключения линий Л1 соответствует $p_1 = 0{,}01$; Л2 – $p_2 = 0{,}005$; а трансформатора – $p_3 = 0{,}0005$.

Определить вероятность нарушения параллельной работы энергосистем.

Решение. Параллельная работа энергосистем имеет место только в том случае, если в работе одновременно находятся обе линии и трансформатор. Нарушение параллельной работы энергосистем обозначим событие *A*, тогда параллельная работа энергосистем – событие $\overline{A}$.

Обозначим: события отключение линии Л1 через A_1; линии Л2 – A_2 и трансформатора – A_3. Тогда, событие *A*, выраженное через A_i, можно представить $A = A_1 + A_2 + A_3$, а выраженное через $\overline{A}$ – $A = 1 - \overline{A}$. Событие $\overline{A}$, выраженное через рабочее состояния линий и трансформатора будет представлено как $\overline{A} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$.

Вероятности событий A и $\overline{A}$ будут:

$$P(A) = p(A_1) + p(A_2) + p(A_3);$$

$$P(\overline{A}) = p(\overline{A_1}) \cdot p(\overline{A_2}) \cdot p(\overline{A_3});$$

$$P(A) = P(\overline{A}).$$

Студентам предлагается выполнить подстановки и вычисления. Выполнить вычисления, приняв события A_1, A_2, A_3 – совместными.

Следующие задачи решить самостоятельно

ЗАДАЧА 1.4

По условию задачи 3 определить: а) вероятность бесперебойного электроснабжения потребителя. б) вероятность нарушения питания потребителя.

ЗАДАЧА 1.5

Потребитель получает питание от энергосистемы по схеме (рис. 1.4). Определить вероятность прекращения электроснабжения потребителя, если вероятности отключения одной из линий равна 0,01; а трансформаторов Т1 иТ2 равны 0,0005 и 0,001 соответственно. Определить погрешность расчетов вероятностей, если пренебречь совместностью событий.

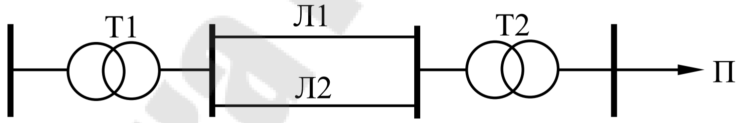

Рис. 1.4

ЗАДАЧА 1.6

Потребитель получает питание по трем линиям различной пропускной способности (рис. 1.5). Вероятности отключения линий в некотором аварийном режиме имеют следующие значения: $p(\text{Л}1) = 0{,}4$; $p(\text{Л}2) = 0{,}5$ и $p(\text{Л}3) = 0{,}7$. Вероятность возможного недоотпуска энергии потребителю при отключении одной линии составляет 0,2; двух – 0,6, а трех – 1.

Определить вероятность того, что в результате аварийного отключения линий будет наблюдаться недоотпуск электроэнергии.

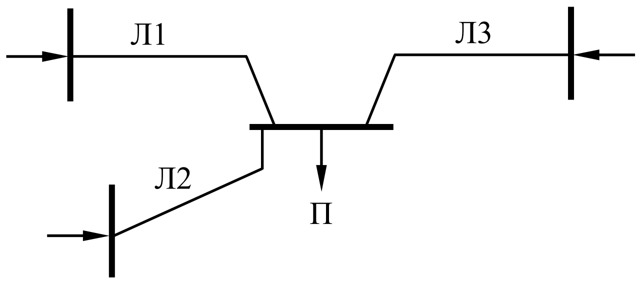

Рис. 1.5

2 ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

К случайным величинам в энергетике относятся такие важные параметры режима, как спрос электрической мощности и энергии, отклонение частоты и напряжения в электрических сетях от номинальных значений, располагаемая мощность электростанций, мощности агрегатов в аварийном ремонте, длительности безаварийной работы и аварийного ремонта отдельных агрегатов, напор на гидростанциях и т.д. Знание закономерностей изменения этих случайных величин необходимо как при проектировании, так и при эксплуатации энергетических систем.

Случайные величины можно разделить на два класса: дискретные и непрерывные. Дискретная случайная величина может принимать только дискретные (разрозненные) значения, например число агрегатов, вышедших аварийно из работы. Это число в ограниченном интервале является конечным. Значение непрерывных случайных величин могут изменяться непрерывно, т.е. даже в ограниченных интервалах такие величины могут иметь бесконечно большое число значений, например ошибка прогнозирования суммарного спроса мощности. К числовым характеристикам случайных величин относятся: математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение.

Математическое ожидание $M(\eta)$ для дискретной случайной величины определим по выражению:

$$M(\eta) = \sum_k x_k p_k ,$$

причем суммирование происходит по всем значениям дискретной величины x_k, имеющим вероятности p_k.

Аналогично для непрерывной случайной величины

$$M(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)dx$$

где $\varphi(x)$ - плотность вероятности.

В качестве меры отклонения случайной величины от ее математического ожидания принимают величину, равную математическому ожиданию (м.о.) квадрата отклонения случайной величины от ее м.о., которую называют дисперсией случайной величины η и обозначают через $D(\eta)$:

$$D(\eta) = M[\eta - M(\eta)]^2.$$

Определение дисперсии для дискретных случайных величин

$$D(\eta) = \sum_k [x_k - M(x)]^2 p_k,$$

где суммирование распространяется на все значения случайной величины x_k, имеющие соответствующие вероятности p_k.

Определение дисперсии для непрерывной случайной величины

$$D(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} [x_k - M(x)]^2 \varphi(x)dx.$$

Квадратный корень из величины дисперсии называется средним квадратичным отклонением или стандартным отклонение случайной величины

$$\sigma(\eta) = \pm\sqrt{D(\eta)}.$$

Пример

Пусть в энергосистеме возможны дефициты мощности 50, 100 и 150 МВт, причем вероятности этих дефицитов соответственно равен 0,001, 0,0004, 0,0002. Требуется определить м.о. недоотпуска энергии за год.

<u>Решение.</u> При постоянном дефиците 50 МВт недоотпуск энергии за год составил бы $50 \cdot 8760$ МВт·ч, при дефиците 100 МВт - $100 \cdot 8760$ МВт·ч и т.д. Поэтому м.о. недоотпуска.

$$M(\eta) = 50 \cdot 8760 \cdot 0{,}01 + 100 \cdot 8760 \cdot 0{,}0004 + 150 \cdot 8760 \cdot 0{,}0002 = 1051\,\text{МВт}\cdot\text{ч}$$

Показатели вариации

Средние величины дают обобщающую характеристику совокупности по варьирующим признакам. Но наряду со средними величинами большое практическое и теоретическое значение имеет изучение отклонений от средних. Поэтому средние характеристики дополняют показателями измерениями отклонения от средних, т.е. показателями вариации признака.

Наиболее простым из этих показателей является показатель размаха вариации R. Его исчисляют как разность между наибольшим и наименьшим значениями варьирующего признака:

$$R = x_{\max} - x_{\min}.$$

Относительной мерой вариации, позволяющей сравнивать степень варьирования признаков в вариационных рядах с разным уровнем средних является коэффициент вариации, определяемый по выражению

$$\upsilon = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100,$$

где σ – среднее квадратическое отклонение;
$\bar{x}$ – среднее значение (математическое ожидание).

Пример

Для заданного вариационного ряда вычислить дисперсию, среднее квадратическое отклонение и коэффициент вариации.

Решение. Решение целесообразно представить в виде таблицы.

Таблица 2.1. Вычисление дисперсии, среднего квадратического отклонения и коэффициента вариации

Группа рабочих по размеру месячной платы, тыс.ден.ед.	Варианты (x)	Число рабочих (f)	$(x-\bar{x})$	$(x-\bar{x})^2$	$(x-\bar{x})^2 \cdot f$
130-140	135	10	-30,8	948,64	9486,4
140-150	145	50	-20,8	432,64	21632
150-160	155	100	-10,8	116,64	11664
160-170	165	115	-0,8	0,64	73,6
170-180	175	180	9,2	84,64	15235,2
180-190	185	45	19,2	386,64	16588,8
Сумма	-	500	-	-	74680

Среднее арифметическое (математическое ожидание) вычислялось по формуле:

$$\bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f} = 165{,}8 \text{ руб.}$$

Дисперсия:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2 f}{\sum f} = \frac{74580}{500} = 149{,}36 \text{ руб.}$$

Среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma = \sqrt{149{,}36} = 12{,}22 \text{ руб.}$$

Коэффициент вариации:

$$\upsilon = \frac{\sigma}{x} \cdot 100 = \frac{12{,}22}{165{,}8} = 7{,}4\,\%$$

ЗАДАНИЕ

По исходным данным работы программы «WEROT» определить:

1- числовые характеристики нагрузки H и количество повторов $M[x]$; $D[x]$; $\sigma[x]$ и $\upsilon[x]$.

2 – построить многоугольник и функцию распределения вероятностей нагрузки и количества повторов.

3 ВЫРАВНИВАНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ РЯДОВ

Во всяком статистическом распределении присутствуют элементы случайности, связанные с количеством наблюдений, качеством опытов, полученными результатами. Только при очень большом числе наблюдений эти элементы случайности сглаживаются, и случайное явление обнаруживает в полной мере присущую ему закономерность. На практике число наблюдений ограничено и мы вынуждены считаться с тем, что любому статистическому распределению свойственны в большей или меньшей мере черты случайности. Поэтому при обработке статистического материала приходится решать вопрос о том, как подобрать для данного статистического ряда теоретическую кривую распределения, выражающую лишь существенные черты статистического материала, а не случайности, связанные с недостаточным объемом экспериментальных данных. Такая задача называется задачей **выравнивания (сглаживания) статистических рядов**.

Задача выравнивания заключается в подборе теоретической плавной кривой распределения, с той или иной точки зрения наилучшим образом описывающую данное статистическое распределение (рис. 3.1).

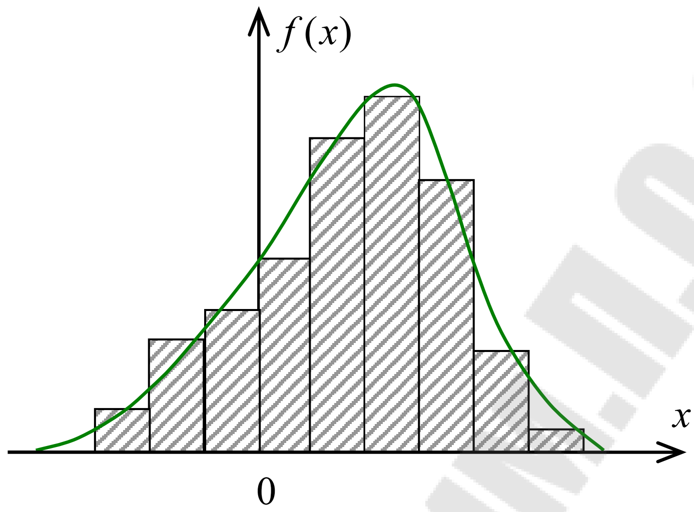

Рис. 3.1

Задача о наилучшем выравнивании статистических рядов есть задача в значительной мере неопределенная и решение ее зависит от того, что условиться считать «наилучшим». При сглаживании эмпирических зависимостей часто исходят из так называемого принципа или метода наименьших квадратов, считая, что наилучшим приближением к эмпирической зависимости в данном классе функций является такое, при котором сумма квадратов отклонений обращается в минимум. При этом вопрос о том, в каком именно классе функций следует искать наилучшее приближение, решается из соображений, связанных с физикой решаемой задачи, с учетом характера полученной эмпирической кривой и степени точности произведенных наблюдений. Часто принципиальный характер функции, выражающей исследуемую зависимость, известен заранее из теоретических соображений, из опыта же требуется получить лишь некоторые численные параметры, входящие в выражение функции; именно эти параметры подбираются с помощью метода наименьших квадратов.

В задачах выравнивания статистических рядов, как правило, принципиальный вид теоретической кривой выбирается заранее из соображений, связанных с существом задачи, а в некоторых случаях просто с внешним видом статистического распределения. Аналитическое выражение выбранной кривой распределения зависит от некоторых параметров; задача выравнивания статистического ряда переходит в задачу рационального выбора тех значений параметров, при которых соответствие между статистическим и теоретическим распределениями оказываются наилучшим.

Предположим, что исследуемая величина X есть ошибка измерения, возникающая в результате суммирования множества независимых элементарных ошибок; тогда из теоретических соображений можно считать, что величина X подчиняется нормальному закону:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2 \cdot \sigma^2}},$$

и задача выравнивания переходит в задачу о рациональном выборе параметров m и σ в данном выражении.

Когда заранее известно, что величина X распределяется статистически приблизительно равномерно на некотором интервале, тогда можно поставить задачу о рациональном выборе параметров того закона равномерной плотности

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha} & \text{при } \alpha < x < \beta, \\ 0 & \text{при } x < \alpha; \ x > \beta, \end{cases}$$

которым можно наилучшим образом заменить (выровнять) заданное статистическое распределение.

Следует иметь в виду, что любая аналитическая функция $f(x)$, с помощью которой выравнивается статистическое распределение, должна обладать основными свойствами плотности распределения:

$$f(x) \geq 0;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \partial x = 1.$$

Предположим, что, исходя из тех или иных соображений, нами выбрана функция $f(x)$, удовлетворяющая последним условиям, с помощью которой мы хотим выровнять данное статистическое распределение; в выражение этой функции входят несколько параметров a, b, …..; требуется подобрать эти параметры так, чтобы функция $f(x)$ наилучшим образом описывала данный статистический материал.

Один из методов, применяемых для решения этой задачи, – это так называемый **метод моментов**.

Согласно методу моментов, параметры *a*, *b*, … выбираются с таким расчетом, чтобы несколько важнейших числовых характеристик (моментов) теоретического распределения были равны соответствующим статистическим характеристикам. Например, если теоретическая кривая $f(x)$ зависит только от двух параметров *a* и *b*, эти параметры выбираются так, чтобы математическое ожидание m_x и дисперсия D_x теоретического распределения совпадали с соответствующими статистическими характеристиками m_x^* и D_x^*. Если кривая $f(x)$ зависит от трех параметров, можно подобрать их так, чтобы совпали первые три момента, и т.д. При выравнивании статистических рядов может оказаться полезной специально разработанная система *кривых Пирсона,* каждая из которых зависит в общем случае от четырех параметров. При выравнивании эти параметры выбираются так, чтобы сохранить первые четыре момента статистического распределения (математическое ожидание, дисперсию, третий и четвертый моменты).

ЗАДАЧА 3.1

В таблице приведено статистическое распределение величины X. Требуется выровнять это распределение с помощью нормального закона.

Таблица 3.1. Статистическое распределение величины X

Границы x_i	-4; -3	-3; -2	-2; -1	-1; 0	0; 1	1; 2	2; 3	3; 4
x_i'	- 3,5	- 2,5	- 1,5	- 0,5	0,5	1,5	2,5	3,5
m_i	6	25	72	133	120	88	46	10
p_i^*	0,012	0,050	0,144	0,266	0,240	0,176	0,092	0,020

Здесь x_i – интервалы измерений; x_i' – середины интервалов; m_i – число наблюдений в данном интервале; $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$, $p_i^* = \frac{m_i}{n}$ – соответствующие частоты.

Решение. Нормальный закон распределения вероятностей зависит от двух параметров *m* и σ, которые входят в формулу плотности распределения вероятностей

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\cdot\sigma^2}}.$$

Подберём эти параметры так, чтобы сохранить первые два момента статистического распределения – математическое ожидание и дисперсию.

Вычислим приближенно статистическое среднее параметра *X* по формуле

$$m_x^* \approx M^*[X] = \sum_{i=1}^{k} x_i' \cdot p_i^* = \sum_{i=1}^{k} x_i' \cdot \frac{m_i}{n},$$

где x_i' – середина каждого интервала.

$$m_x^* = (-3{,}5)\cdot 0{,}012 + (-2{,}5)\cdot 0{,}05 + (-1{,}5)\cdot 0{,}144 + (-0{,}5)\cdot 0{,}266 +$$
$$+ 0{,}5\cdot 0{,}240 + 1{,}5\cdot 0{,}176 + 2{,}5\cdot 0{,}092 + 3{,}5\cdot 0{,}020 = 0{,}168.$$

Для определения статистической дисперсии D_x^* вычислим второй начальный момент α_s^* по формуле:

$$\alpha_s^* = \sum_{i=1}^{k} (x_i')^s \cdot p_i^*.$$

При $s = 2$ и $k = 8$ последняя формула примет вид:

$$\alpha_2^* = \sum_{i=1}^{k=8} (x_i')^2 \cdot p_i^*.$$

Выполним численные подстановки:

$$\alpha_2^* = (-3{,}5)^2\cdot 0{,}012 + (-2{,}5)^2\cdot 0{,}05 + (-1{,}5)^2\cdot 0{,}144 + (-0{,}5)^2\cdot 0{,}266 +$$
$$+ 0{,}5^2\cdot 0{,}240 + 1{,}5^2\cdot 0{,}176 + 2{,}5^2\cdot 0{,}092 + 3{,}5^2\cdot 0{,}020 = 2{,}126.$$

Тогда $D_x^* = \alpha_2^* - (m_x^*)^2 = 2{,}126 - 0{,}128^2 = 2{,}098$.

Определение D_x^* через второй начальный момент можно рекомендовать только в случае, когда математическое ожидание m_x^* исследуемой случайной величины *X* сравнительно невелико.

Статистическая дисперсия D_x^* может быть определена и по выражению: $D_x^* = \sum_{i=1}^{k} (x_i' - m_x^*)^2 \cdot p_x^*$. Выполним численные подстановки:

$$D_2^* = (-3{,}5 - 0{,}168)^2 \cdot 0{,}012 + (-2{,}5 - 0{,}168)^2 \cdot 0{,}05 + (-1{,}5 - 0{,}168)^2 \cdot 0{,}144 +$$
$$+ (-0{,}5 - 0{,}168)^2 \cdot 0{,}266 + (0{,}5 - 0{,}168)^2 \cdot 0{,}240 + (1{,}5 - 0{,}168)^2 \cdot 0{,}176 +$$
$$+ (2{,}5 - 0{,}168)^2 \cdot 0{,}092 + (3{,}5 - 0{,}168)^2 \cdot 0{,}020 = 2{,}098.$$

Выбираем параметры m и σ^2 нормального закона распределения так, чтобы выполнялись условия: $m = m_x^*$ и $\sigma^2 = D_x^*$, то есть примем: $m = 0{,}168$; а $\sigma = \sqrt{2{,}098} = 1{,}448$.

Напишем выражение нормального закона:

$$f(x) = \frac{1}{1{,}448 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-0{,}168)^2}{2 \cdot 1{,}448^2}}.$$

Пользуясь справочными таблицами, вычислим значения $f(x)$ на границах разрядов

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	0,004	0,025	0,090	0,199	0,274	0,234	0,124	0,0041	0,008

Построим на одном графике гистограмму и выравнивающую её кривую распределения.

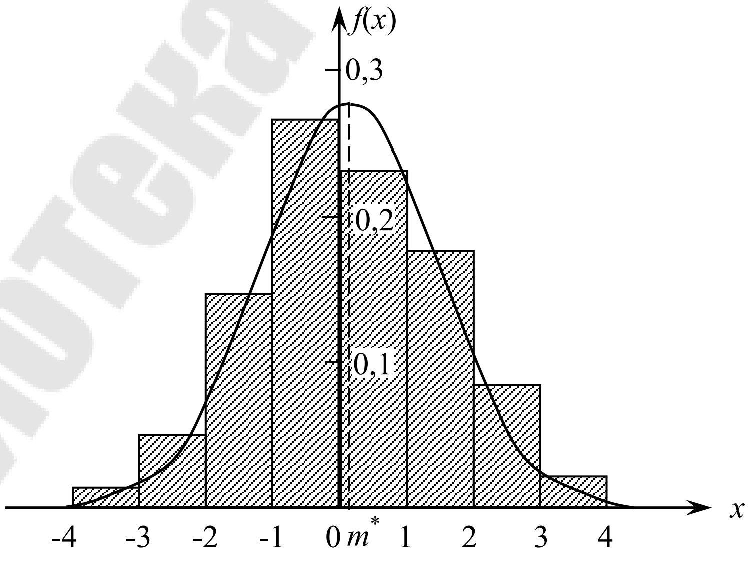

Рис. 3.2

Из графика видно, что теоретическая кривая распределения $f(x)$ сохраняет существенные особенности статистического распределения.

ЗАДАЧА 3.2

Пусть произведено 400 измерений параметра *X*. Результаты измерений представлены в виде статистического ряда:

Границы x_i	20; 30	30; 40	40; 50	50; 60	60; 70	70; 80	80; 90	90; 100
m_i	21	72	66	38	51	56	64	32
p^*_i	0,052	0,180	0,165	0,095	0,128	0,140	0,160	0,080

Выровнять статистический ряд с помощью закона равномерной плотности.

Решение. Закон равномерной плотности выражается формулой

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta-\alpha} & \text{при } \alpha<x<\beta,\\ 0 & \text{при } x<\alpha;\ x>\beta,\end{cases}$$

и зависит от двух параметров α и β. Эти параметры следует выбрать так, чтобы сохранить первые два момента статистического распределения – математическое ожидание m_x^* и дисперсию D_x^*. Выражения математического ожидания и дисперсии для закона равномерной плотности:

$$m_x=\frac{\alpha+\beta}{2}; \qquad D_x=\frac{(\beta-\alpha)^2}{12}.$$

Для того чтобы упростить вычисления, связанные с определением статистических моментов, перенесем начало отсчета в точку $x_0=60$ и примем за x_i' каждого разряда его середину. Ряд распределения примет вид:

x_i'	- 35	- 25	- 15	- 5	5	15	25	35
p_i^*	0,052	0,180	0,165	0,095	0,128	0,140	0,160	0,080

Приближенное значение статистического среднего X' равно

$$m_x^* = \sum_{i=1}^{k=8} x_i' \cdot p_i^* = (-35) \cdot 0{,}052 + (-25) \cdot 0{,}180 + \ldots + 35 \cdot 0{,}080 = 0{,}26\,.$$

Второй статистический момент величины X' равен:

$$\alpha_2^* = \sum_{i=1}^{k=8} (x_i')^2 \cdot p_i^* = (-35)^2 \cdot 0{,}052 + (-25)^2 \cdot 0{,}180 + \ldots + (35)^2 \cdot 0{,}080 = 447{,}8,$$

откуда статистическая дисперсия: $D_x^* = \alpha_2^* - (m_x^*)^2 = 447{,}7$.

Переходя к прежнему началу отсчета, получим новое статистическое среднее: $m_x^* = m_x^* + 60 = 60{,}26$ и ту же статистическую дисперсию: $D_x^* = D_{x'}^* = 447{,}7$. Параметры закона равномерной плотности определяются уравнениями: $\dfrac{\alpha + \beta}{2} = 60{,}26$; $\dfrac{(\beta - \alpha)^2}{12} = 447{,}7$.

Решая эти уравнения относительно α и β, имеем: $\alpha \approx 23{,}6$; $\beta \approx 96{,}9$; откуда $f(x) = \dfrac{1}{\beta - \alpha} = \dfrac{1}{73{,}3} \approx 0{,}0136$. На рис. 3.3 показаны гистограмма и выравнивающий ее закон равномерной плотности $f(x)$.

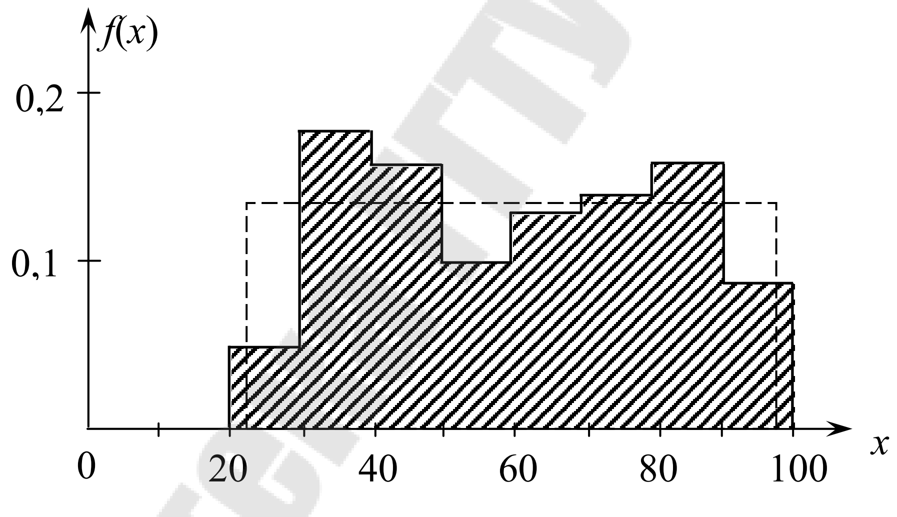

Рис. 3.3

ЗАДАНИЕ

По результатам работы программы «WEROT» составить ряд распределения, используя графы «мощность» и «количество повторов». Количество групп определить по формуле: $k = \sqrt{i} \geq 5$. Ряд распределения представить гистограммой. Выполнить выравнивание статистического ряда по нормальному закону и по закону равномерной плотности.

4 ПРИМЕНЕНИЕ КРИТЕРИЕВ СОГЛАСИЯ ПРИ ПРОВЕРКЕ ГИПОТЕЗ

Рассмотрим вопросы, связанные с проверкой правдоподобия гипотез, о согласованности теоретического и статистического распределения.

Пусть данное статистическое распределение выравнено с помощью некоторой теоретической кривой $f(x)$ (рис.4.1). Как бы хорошо ни была подобрана теоретическая кривая, между нею и статистическим распределением неизбежны некоторые расхождения. Возникает вопрос: эти расхождения объясняются только случайными обстоятельствами, связанными с ограниченным числом наблюдений, или они являются существенными и связаны с тем, что подобранная кривая плохо выравнивает данное статистическое распределение. Для ответа на такой вопрос служат «критерии согласия».

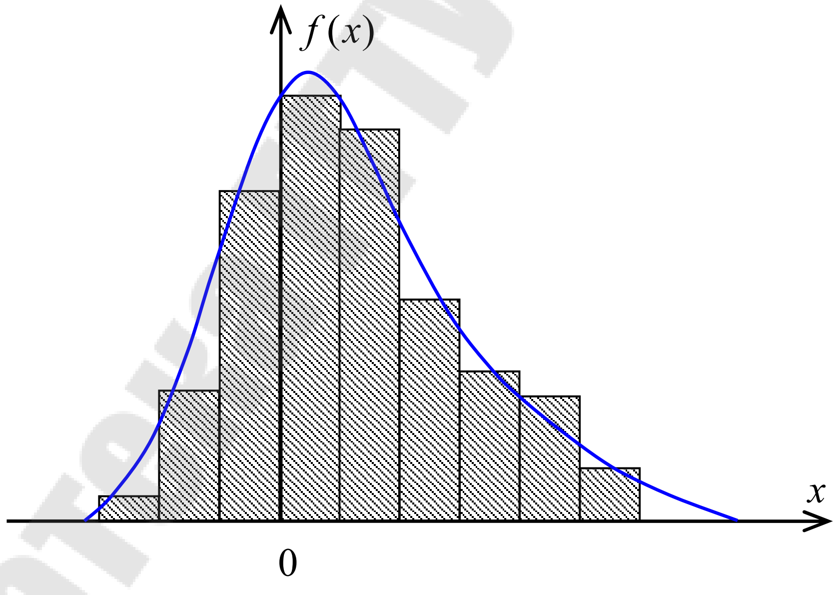

Рис. 4.1

Идея применения критериев согласия заключается в следующем. На основании данного статистического материала необходимо проверить гипотезу H, состоящую в том, что случайная величина X подчиняется некоторому закону распределения. Закон может быть задан в той или иной форме: например, в виде функции распределения $F(x)$ или в виде плотности распределения $f(x)$, или же в виде совокупности вероятностей p_i, где p_i – вероятность того, что величина X попадает в пределы i – го разряда.

Поскольку функция распределения $F(x)$ является наиболее общей и определяет собой любую другую, будем формулировать гипотезу *H*, как состоящую в том, что величина *X* имеет функцию распределения $F(x)$.

Чтобы принять или опровергнуть гипотезу *H*, рассмотрим некоторую величину *U,* характеризующую степень расхождения теоретического и статистического распределений. Величина *U* может быть выбрана различными способами; например, в качестве *U* можно взять сумму квадратов отклонений теоретических вероятностей p_i от соответствующих частот p_i^* или же максимальное отклонение статистической функции распределения $F^*(x)$ от теоретической $F(x)$ и т.д. Если величина *U* выбрана тем или иным способом, значит это некоторая **случайная величина**. Закон распределения этой случайной величины зависит от закона распределения случайной величины *X,* над которой проводились опыты, и от числа опытов *n.* Если гипотеза *H* верна, то закон распределения величины *U* определяется законом распределения величины X (функцией $F(x)$) и числом n .

Пусть закон распределения нам известен. В результате данной серии опытов обнаружено, что выбранная мера расхождения *U* приняла некоторое значение *u.* Спрашивается, можно ли объяснить это случайными причинами или это расхождение слишком велико и указывает на наличие существенной разницы между теоретическим и статистическим распределениями и, следовательно, на непригодность гипотезы H ? Для ответа на этот вопрос предположим, что гипотеза *H* верна, и вычислим в этом предположении вероятность того, что за счет случайных причин, связанных с недостаточным объемом опытных данных, мера расхождения *U* окажется не меньше, чем наблюденное нами в опыте значение *u,* т.е. вычислим вероятность события:

$$U \geq u .$$

Если эта вероятность весьма мала, то гипотезу *H* следует отвергнуть как мало правдоподобную; если же эта вероятность значительна, следует признать, что экспериментальные данные не противоречат гипотезе *H*.

Каким же способом следует выбирать меру расхождения U ? Оказывается, что при некоторых способах ее выбора закон распределения величины *U* обладает простыми свойствами и при достаточно большом n практически не зависит от функции $F(x)$. Такими мерами расхождения и пользуются в статистике в качестве критериев согласия.

Один из наиболее применяемых критериев согласия – так называемый «критерий χ^2 » Пирсона.

Пусть произведено n независимых опытов, в каждом из которых случайная величина X приняла определенное значение. Результаты опытов сведены в k разрядов и представлены статистическим рядом:

Границы X_i	$x_1; x_2$	$x_2; x_3$	$x_3; x_4$	…….	$x_k; x_{k+1}$
p_i^*	p_1^*	p_2^*	p_3^*	……..	p_k^*

Требуется проверить, согласуются ли экспериментальные данные с гипотезой о том, что случайная величина X имеет данный закон распределения (заданный функцией распределения $F(x)$ или плотностью $f(x)$). Назовем этот закон распределения «теоретическим».

Зная теоретический закон распределения, можно определить теоретические вероятности попадания случайной величины в каждый разряд:

$$p_1; p_2; p_3; \dots p_k.$$

Проверяя согласованность теоретического и статистического распределений, будем исходить из расхождений между теоретическими вероятностями p_i и наблюдаемыми частотами p_i^*. Выбираем в качестве меры расхождения между теоретическим и статистическим распределениями сумму квадратов отклонений ($p_i^* - p_i$), взятых с некоторыми коэффициентами c_i:

$$U = \sum_{i=1}^{k} c_i \cdot \left(p_i^* - p_i\right)^2.$$

К.Пирсон показал, что если принять $c_i = \dfrac{n}{p_i}$, то при больших n закон распределения величины U практически не зависит от функции распределения $F(x)$ и от числа опытов n, а зависит только от числа разрядов k, а именно, этот закон при увеличении n приближается к так называемому «распределению χ^2».

При таком выборе коэффициентов c_i мера расхождения обозначается χ^2:

$$\chi^2 = n\sum_{i=1}^{k}\frac{\left(p_i^* - p_i\right)^2}{p_i}.$$

Для удобства вычислений можно ввести n под знак суммы и, учитывая, что $p_i^* = \dfrac{m_i}{n}$, где m_i – число значений в i-м разряде, привести формулу к виду:

$$U = \chi^2 = \sum_{i=1}^{k}\frac{\left(m_i - np_i\right)^2}{np_i}. \tag{4.1}$$

Распределение χ^2 зависит от параметра r, называемого числом «степеней свободы» распределения. Число «степеней свободы» r равно числу разрядов k минус число независимых условий («связей»), наложенных на частоты p_i^*. Примерами таких условий могут быть:

$$\sum_{i=1}^{k} p_i^* = 1, \quad (1) \qquad \sum_{i=1}^{k} x_i' p_i^* = m_x, \quad (2) \qquad \sum_{i=1}^{k}\left(x_i' - m_x^*\right)^2 p_i^* = D_x, \quad (3)$$

если требуется, чтобы сумма частот была равна единице (требование накладывается во всех случаях) – (1); если подбираем условие совпадения теоретического и статистического средних значений – (2) и, если требуется совпадения теоретической и статистической дисперсий (3) и т.д.

Для распределения χ^2 составлены специальные таблицы, которые дают возможность оценить степень согласованности теоретического и статистического распределений. Если величина X *действительно* распределена по закону $F(x)$, то вероятность p, определенная по таблице, есть вероятность того, что за счет чисто случайных причин мера расхождения теоретического и статистического распределений (4.1) будет не меньше, чем фактически наблюденное в данных опытах значение χ^2. Если эта вероятность p весьма мала, то результаты опыта следует считать *противоречащим* гипотезе H о том, что закон распределения величины X есть $F(x)$. Если вероятность p сравнительно велика, можно признать расхождения между теоретическим и статистическим распределениями несущественными и отнести их за счет случайных причин. Гипотезу H о том, что величина X распределена по закону $F(x)$, можно считать правдоподобной.

Последовательность применения критерия χ^2 к оценке согласованности теоретического и статистического распределений сводится к следующему:

1) Определяется мера расхождения χ^2 по формуле (4.1).

2) Определяется число степеней свободы r как число разрядов k минус число наложенных связей s: $r = k - s$.

3) По r и χ^2 с помощью справочных таблиц определяется вероятность того, что величина, имеющая распределение χ^2 с r степенями свободы, превзойдет данное значение χ^2. Если эта вероятность весьма мала (0,1 менее), гипотеза отбрасывается как неправдоподобная. Если эта вероятность относительно велика, гипотезу можно признать не противоречащей опытным данным.

Следует заметить, что при пользовании критерием χ^2 достаточно большим должно быть общее количество опытов n и числа наблюдений m_i в отдельных разрядах.

ЗАДАЧА 4.1

Проверить согласованность теоретического и статистического распределения для выровненного статистического ряда по нормальному закону (см. пример 1 предыдущей темы).

Решение. Пользуясь теоретическим нормальным законом распределения с параметрами $m = 0{,}168$, $\sigma = 1{,}448$, находим вероятности попадания в разряды по формуле

$$p_i = \Phi^*\left(\frac{x_{i+1} - m}{\sigma}\right) - \Phi^*\left(\frac{x_i - m}{\sigma}\right),$$

где x_i, x_{i+1} – границы i-го разряда.

$$p_{-4;-3} = \Phi^*\left(\frac{-3 - 0{,}168}{1{,}448}\right) - \Phi^*\left(\frac{-4 - 0{,}168}{1{,}448}\right) = 0{,}0124 \text{ и т.д.}$$

Составляем сравнительную таблицу чисел попаданий в разряды m_i и соответствующих значений np_i $(n = 500)$.

X_i	-4;-3	-3;-2	-2;-1	-1; 0	0;1	1;2	2;3	3;4
m_i	6	25	72	133	120	88	46	10
np_i	6,2	26,2	71,2	122,2	131,8	90,5	38,2	10,5

Определим значение меры расхождения по выражению

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{8} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}$$

$$\chi^2 = \frac{(6-6{,}2)^2}{6{,}2} + \frac{(25-26{,}2)^2}{26{,}2} + \frac{(72-71{,}2)^2}{71{,}2} + \frac{(133-122{,}2)^2}{122{,}2} +$$

$$+ \frac{(120-131{,}8)^2}{131{,}8} + \frac{(88-90{,}5)^2}{90{,}5} + \frac{(46-38{,}2)^2}{38{,}2} + \frac{(10-10{,}5)^2}{10{,}5} = 3{,}94.$$

Определяем число степеней свободы как число разрядов минус число наложенных связей s (в данном случае $s = 3$):

$$r = 8 - 3 = 5.$$

По таблицам χ^2 (справочных приложений) находим для $r = 5$:

при $\chi^2 = 3{,}00$ $p = 0{,}70$;
при $\chi^2 = 4{,}35$ $p = 0{,}50$.

Следовательно, искомая вероятность p при $\chi^2 = 3{,}94$ приближенно равна 0,56. Эта вероятность малой не является; поэтому гипотезу о том, что величина X распределена по нормальному закону, можно считать правдоподобной.

ЗАДАЧА 4.2

Проверить согласованность теоретического и статистического распределения для выровненного статистического ряда по закону равномерной плотности (см. пример 2 предыдущей темы).

<u>*Решение.*</u> Значения p_i вычисляем как вероятности попадания на участки (20; 30), (30; 40), и т.д. для случайной величины, распределенной по закону равномерной плотности на отрезке (23,6; 96,9), по выражению:

$$P(a < X < b) = \frac{b-a}{\beta - a}.$$

Значения вероятности p_i на отрезке (23,6; 96,9) равна 0,136 (вычислено по статистическому ряду).

Составляем сравнительную таблицу чисел попаданий в разряды m_i и соответствующих значений np_i ($n = 400$).

Интервал	20;30	30;40	40;50	50;60	60;70	70;80	80;90	90;100
m_i	21	72	66	38	51	56	64	32
$n \cdot p_i$	34,9	54,57	54,57	54,57	54,57	54,57	54,57	37,7

Определим значение меры расхождения χ^2 по выражению

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{8} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}$$

$$\chi^2 = \frac{(21-34,9)^2}{34,9} + \frac{(72-54,57)^2}{54,57} + \frac{(66-54,57)^2}{54,57} + \frac{(38-54,57)^2}{54,57} +$$

$$+ \frac{(51-54,57)^2}{54,57} + \frac{(56-54,57)^2}{54,57} + \frac{(64-54,57)^2}{54,57} + \frac{(32-37,7)^2}{37,7} = 21,282.$$

Определяем число степеней свободы как число разрядов минус число наложенных связей s (в данном случае $s = 3$):

$$r = 8 - 3 = 5$$

По таблицам χ^2 (справочных приложений) находим для $r = 5$:

при $\chi^2 = 20,50 \quad p = 0,001$.

Следовательно, наблюдаемое нами расхождение между теоретическим и статистическим распределениями могло бы за счет чисто случайных причин появиться лишь с вероятностью $p \approx 0,001$. Так как эта вероятность очень мала, следует признать экспериментальные данные *противоречащими* гипотезе о том, что величина X распределена по закону равномерной плотности.

ЗАДАНИЕ

Проверить согласованность теоретического и статистического распределения для выровненных статистических рядов по нормальному закону и закону равномерной плотности.

Исходными выровненными рядами принять – см. решенные задачи предыдущей темы.

5 ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Линейное программирование – раздел математического программирования, применяемый при разработке методов отыскания экстремума линейных функций нескольких переменных при линейных дополнительных ограничениях, налагаемых на переменные.

Особенностью задач линейного программирования является то, что экстремума целевая функция достигает на границе области допустимых решений.

Общей задачей линейного программирования называют задачу, которую математически представляют в виде следующих линейных соотношений:

целевая функция $$W=\sum_{j=1}^{n}C_jX_j\to\max(\min) \qquad (5.1)$$

ограничения $$\begin{cases}\sum\limits_{i,j=1}^{i=m_1,j=n}a_{ij}\cdot X_j\le b_i;\\ \sum\limits_{i=m_1+1,j=1}^{i=m_2,j=n}a_{ij}\cdot X_j=b_i;\\ \sum\limits_{i=m_{2+1},j=1}^{i=m_{2+1},j=n}a_{ij}\cdot X_j=b_i,\end{cases} \qquad (5.2)$$

где – C_j, a_{ij}, b_i – заданные действительные числа;

$X_j\ge 0 \quad (j=1,n)$ – искомые неотрицательные переменные параметры, удовлетворяющие условию задачи и ограничениям.

Геометрическая интерпретация задачи позволяет наглядно определить структуру, выявить особенности и открыть пути исследования более сложных свойств. Задачи линейного планирования с двумя переменными можно решить графически. В трехмерном пространстве графическое решение усложняется, а в *n*-мерном пространстве графическое решение невозможно.

Случай двух переменных не имеет особого практического значения, однако его рассмотрение проясняет свойства общей задачи линейного планирования, приводит к идее ее решения, делает геометрически наглядными способы решения и пути их практической реализации.

Пусть дана задача: определить параметры $X_1\ge 0$, $X_2\ge 0$, обеспечивающие максимум целевой функции и удовлетворяющие условиям ограничений

$$\max Z=c_0+c_1x_1+c_2x_2 \qquad (5.3)$$

$$\left.\begin{array}{l}a_{11}x_1+a_{12}x_2\le b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2\le b_2\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2\le b_m\end{array}\right\} \qquad (5.4)$$

Дадим геометрическую интерпретацию элементов этой задачи. Каждое из ограничений (5.4) задаёт на плоскости x_1Ox_2 некоторую полуплоскость. Полуплоскость – выпуклое множество. Пересечение любого числа выпуклых множеств является выпуклым множеством. Отсюда следует, что область допустимых решений задачи (5.3) – (5.4) есть выпуклое множество.

Представим на рис. 5.1 возможные ситуации, когда область допустимых решений (ОДР) задачи линейного планирования (ЗЛП): а) выпуклый многоугольник; б) неограниченная выпуклая многоугольная область; в) единственная точка; г) луч; д) отрезок; е) пустое множество.

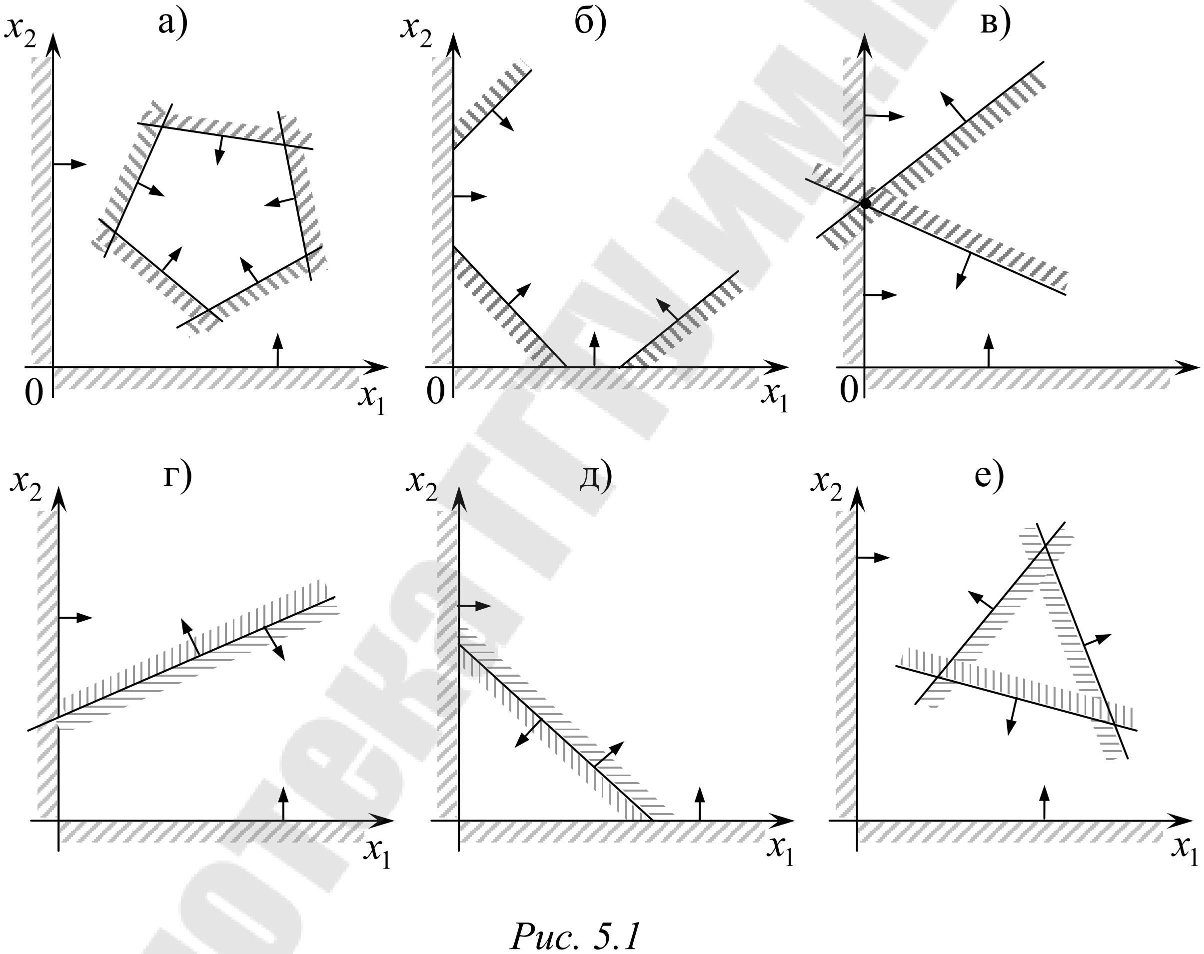

Рис. 5.1

Перейдем к геометрической интерпретации целевой функции. Пусть область допустимых решений ЗЛП – непустое множество, например многоугольник *АВСДЕ* (рис.5.2). Выберем произвольное значение целевой функции $Z = Z_0$. Получим $c_0 + c_1x_1 + c_2x = Z_0$. Это уравнение прямой линии. В точках прямой *MN* целевая функция сохраняет одно и то же постоянное значение Z_0. Считая в равенстве (5.3) *Z* параметром, получим уравнение семейства параллельных прямых, называемых **линиями уровня целевой функции** (**линиями постоянного значения**).

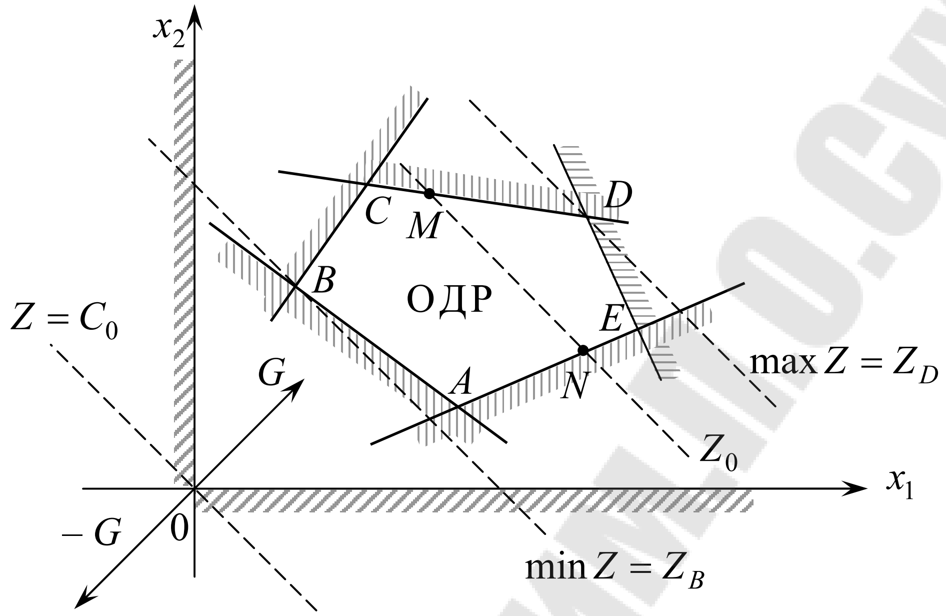

Рис.5.2

Возникает вопрос: как установить направление возрастания (убывания) целевой функции? Найдём частные производные целевой функции по x_1 и x_2:

$$\frac{\partial Z}{\partial x_1} = c_1, \quad \frac{\partial Z}{\partial x_2} = c_2 \tag{5.5}$$

Частные производные (5.5) функции показывают скорость ее возрастания вдоль осей. Следовательно, c_1 и c_2 – скорость возрастания Z соответственно вдоль осей Ox_1 и Ox_2. Вектор $G = (c_1; c_2)$ называется **градиентом функции**. Он показывает направление наискорейшего возрастания целевой функции:

$$G = (\partial Z/\partial x_1, \partial Z/\partial x_2).$$

Вектор $-G$ показывает направление наискорейшего убывания целевой функции. Его называют **антиградиентом**.

Вектор $G = (c_1; c_2)$ перпендикулярен к прямым $Z = \text{const}$ семейства $c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 = Z$.

Из геометрической интерпретации элементов ЗЛП следует порядок её графического решения.

1. С учетом системы ограничений строим область допустимых решений.

2. Строим вектор $G=(c_1;c_2)$ наискорейшего возрастания целевой функции – вектор градиентного направления.

3. Проводим произвольную линию уровня $Z = Z_0$ (проще всего провести линию $Z = c_0$, перпендикулярную к вектору G).

4. При решении задачи на максимум перемещаем линию уровня $Z = Z_0$ в направлении вектора G так, чтобы она касалась ОДР в её крайнем положении (крайней точке) (на рис.5.2 – до точки D). В случае решения задачи на минимум линию уровня $Z = Z_0$ перемещаем в направлении антиградиента (на рис.5.2 – до точки B).

5. Определяем оптимальное решение, т.е. значения $X^* = (x_1^*; x_2^*)$ и экстремальное значение целевой функции $Z^* = z(x^*)$.

При количестве переменных более трех ЗЛП теряет геометрическую наглядность, но идея получения решения (графического) сохраняет смысл и для случая многомерного пространства.

Для решения ЗЛП в аналитической форме применяют один из методов решения – симплекс метод (метод последовательного улучшения решения), который предполагает: 1) умение находить начальный опорный план; 2)наличие признака оптимальности плана; 3) умение переходить к не худшему опорному плану. Для построения начального опорного плана исходные данные задачи должны быть представлены в канонической форме. **Канонической формой записи ЗЛП** называют задачу

$$Z = c_0 - \left(\sum_1^n c_j x_j\right) \to \min; \tag{5.6}$$

$$\sum_{i,j=1}^{m,n} a_{ij} x_j = b_i. \tag{5.7}$$

При необходимости задачу максимизации можно заменить задачей минимизации, и наоборот. Для функции одной переменной это утверждение очевидно. В самом деле, если x^* – точка максимума функции $y = f(x)$, то для функции $y = -f(x)$ она является точкой минимума, так как графики функции $f(x)$ и $-f(x)$ – симметричны относительно оси абсцисс (рис.5.3).

Итак, $\max f(x^*) = -\min(-f(x^*))$.

То же самое имеет место и в случае функции многих переменных (n):

$$\max f(x_1^*, \ldots, x_n^*) = -\min(-f(x_1^*, \ldots, x_n^*)).$$

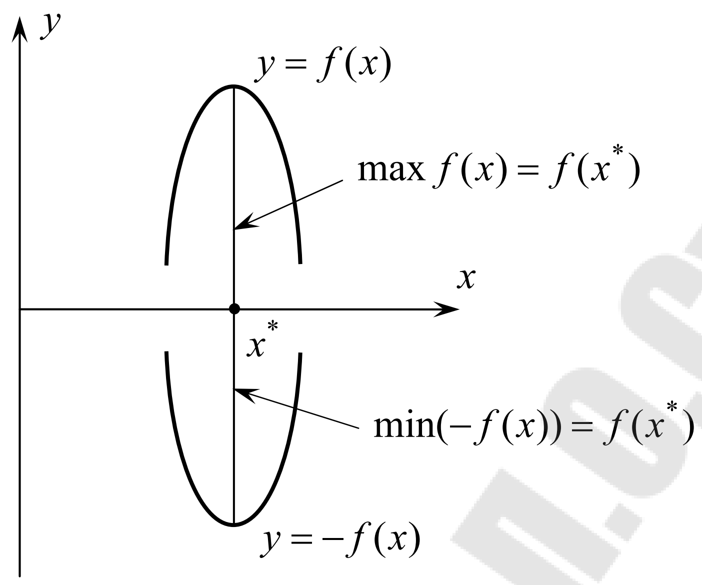

Рис. 5.3

Пусть исходная ЗЛП имеет вид:

$$\max Z = C_0 + \sum_{1}^{n} C_j x_j \tag{5.8}$$

$$\sum_{i,j=1}^{m_1,n} a_{ij} x_j \le b_i \ \ (i = \overline{1, m_1}) \tag{5.9}$$

$$\sum_{i,j=1}^{m,n} a_{ij} x_j \ge b_i \ \ (i = \overline{m_1 + 1, m}) \tag{5.10}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1, n}) \tag{5.11}$$

Преобразуем ее к каноническому виду. Введем m дополнительных неотрицательных переменных $x_{n+i} \ge 0$ $(i = \overline{1, m})$. Для того чтобы неравенства типа $\le$ (5.9) преобразовались в равенства, к их левым частям прибавим дополнительные переменные $x_{n+i} \ge 0$ $(i = \overline{1, m_1})$, после чего система неравенств (5.9) примет вид:

$$\sum_{i,j}^{m_1;n} a_{ij} x_n + x_{n+i} = b_i \, . \tag{5.12}$$

Для того чтобы неравенства типа $\ge$ (5.10) преобразовать в равенства, из их левых частей вычтем дополнительные переменные $x_{n+1} \ge 0$ $(i = \overline{m_1 + 1, m})$. Получим

$$\sum_{m_1+1,1}^{m,n} a_{ij}x_n - x_{n+i} = b_i. \qquad (5.13)$$

Дополнительные переменные x_{n+i} $(i = \overline{1,m})$ в целевую функцию вводятся с коэффициентами, равными нулю. Целевую функцию умножаем на минус единицу. Получим задачу:

$$\min(-Z) = -\left(c_0 + \sum_1^n c_j x_j + \sum_n^1 0 \cdot x_{n+i}\right); \qquad (5.14)$$

$$\sum_{i,j1}^{m_1;n} a_{ij}x_n + x_{n+i} = b_i; \qquad (5.15)$$

$$\sum_{i=m_1+1,\, j=1}^{m,n} a_{ij}n - x_{n+i} = b_i; \qquad (5.16)$$

$$x_j \geq 0 \ \ (j = \overline{1,n}) \qquad x_{n+i} \geq 0 \ \ (i = \overline{1,m}). \qquad (5.17)$$

Задача (5.14) – (5.17) имеет каноническую форму. Задачи (5.8) – (5.11) и (5.14) –(5.17) тесно связаны между собой.

Если каждое ограничение-равенство ЗЛП в каноническом виде содержит переменную, входящую в левую часть с коэффициентом, равным единице, а во все остальные с коэффициентом, равным нулю (при не отрицательности правых частей), то говорят, что система ограничений представлена в предпочтительном виде. В этом случае легко найти ее опорное решение (базисное с не отрицательными координатами): все переменные X_j – свободные переменные нужно приравнять нулю, тогда X_{n+1} – базисные переменные (БП) выраженные через свободные из соотношений (5.15) будут равны свободным членам. Следовательно, начальный опорный план примет вид: $X_0 = (\underbrace{0;0;\ldots;0}_{n};\underbrace{b_1;b_2;\ldots;b_m}_{m})$. В целевую функцию дополнительные переменные вводятся с коэффициентами, равными нулю. Если БП выражены из соотношения (5.16), то начальный опорный план примет вид: $X_0 = (\underbrace{0;0;\ldots;0}_{n};\underbrace{-b_1;-b_2;\ldots;-b_m}_{m})$. Данный базисный план является недопустимым. В практических задачах всегда имеются условия ограничений, которые в каноническом виде преобразуются из соотношений (5.15), поэтому можно перейти к улучшенному решению.

Приведем последовательность шагов при решении задачи оптимизации:

шаг первый: Приводим задачу к канонической форме

$$Z = c_0 - \left(\sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \right) \to \min;$$

$$x_i = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \to \min \text{ – БП};$$

$$x_j \geq 0 \text{ – свободные переменные.}$$

шаг второй: Находим начальный опорный план, приравняв $x_j = 0$, тогда $Z = c_0$, $x_i = [b_i]$.

шаг третий: Проверяем, оптимально ли найденное решение. Если решение оптимально, то вычисления окончены, в противном случае необходим переход к следующему опорному плану.

Выполнение этого шаг требует анализа коэффициентов в функции цели при свободных переменных и проверки неотрицательности значений БП. Если значения БП удовлетворяют условию неотрицательности, то решение одно из допустимых (т.е. это одна из вершин ОДР). На оптимальность решения будут указывать отрицательные значения коэффициентов c_j в целевой функции. В случае наличия положительных коэффициентов c_j решение может быть улучшено.

шаг четвертый: Переход к новой вершине ОДР, в которой значение целевой функции меньше начального. Наибольшее из положительных коэффициентов c_j будет указывать на ту свободную переменную x_j, которая может изменяться от нуля до значений, не нарушающих условия ограничений.

Приравнивают БП к нулю для всех ограничений на данном шаге. Находят отношения $\left\{ \frac{b_i}{a_{ij}} \right\}$ для *j*-ой свободной переменной при условии равенства нулю других свободных переменных $(a_{ij} > 0)$. Наименьшее из положительных $\left\{ \frac{b_i}{a_{ij}} \right\}$ укажет ту БП, которая станет свободной, т.е. укажет уравнение ограничений, из которого определится новая БП, выраженная через новые свободные переменные. Все остальные БП и функция цели нужно пересчитать через новые свободные переменные. Т. о. будет получен очередной опорный план. Далее повторение шагов 3 и 4. Выполнение шагов один – четыре предполагает последовательные преобразования условий ограничений и функции цели. Поэтому, в дальнейшем будем говорить о решениях, полученных методом симплекс-преобразований.

Все преобразования симплекс-метода можно выполнить в табличной форме. **Табличная форма** симплекс-метода предполагает представления исходной задачи в канонической форме (см. выше). Для внесения исходных данных в таблицу запишем условие задачи следующим образом:

$$Z = c_0 - \left(\sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \right) \to \min;$$

$$x_i = b_i - \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \right) \to \min \text{ – БП};$$

$$x_j \geq 0 \text{ – свободные переменные.}$$

Коэффициенты при свободных переменных в уравнениях БП и функции цели внесем в таблицу, причем разместим их в верхние левые части клеток со знаками, указанными в скобках соответствующих уравнений.

Таблица 5.1

БП	Свободный член b_i	Свободные переменные					
		x_1	x_2	…	x_j	…	x_n
x_{n+1}	b_1 $b_i \cdot (-\lambda a_{1j})$	a_{11} $a_{i1} \cdot (-\lambda a_{1j})$	a_{12} $a_{i2} \cdot (-\lambda a_{1j})$	…	a_{1j} $-\lambda \cdot a_{1j}$	…	a_{1n} $-a_{in}\lambda a_{1j}$
x_{n+2}	b_2 $b_i \cdot (-\lambda a_{2j})$	a_{21} $a_{i1} \cdot (-\lambda a_{2j})$	a_{22} $a_{i2} \cdot (-\lambda a_{2j})$	…	a_{2j} $-\lambda \cdot a_{2j}$	…	a_{2n} $-a_{in}\lambda a_{2j}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
x_i	b_i $\lambda \cdot b_i$	a_{i1} $\lambda \cdot a_{i1}$	a_{i2} $\lambda \cdot a_{i2}$	…	a_{ij} $\lambda = \frac{1}{a_{ij}}$	…	a_{in} $\lambda \cdot a_{in}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
x_m	b_m $b_i \cdot (-\lambda a_{mj})$	a_{m1} $a_{i1} \cdot (-\lambda a_{mj})$	a_{m2} $-a_{i2}\lambda a_{mj}$	…	a_{mj} $-\lambda \cdot a_{mj}$	…	a_{mn} $-a_{in}\lambda a_{mj}$
Z_1	c_0 $b_i \cdot (-\lambda c_j)$	c_1 $a_{i1} \cdot (-\lambda c_j)$	c_2 $-a_{i2}\lambda c_j$	…	c_j $-\lambda \cdot c_j$	…	c_n $-a_{in}\lambda c_j$

Столбец «свободные члены» определяет первое начальное решение при равенстве нулю свободных переменных:

$$Z_1(x_j, x_i) = c_0 \quad \left[0;0;\ldots;0;b_1;b_2;\ldots;b_m\right].$$

Далее выполняем шаги 3 и 4 симплекс-преобразований. Наибольший коэффициент при свободных переменных в функции цели определяет разрешающий столбец (пусть это будет x_j). Находим наименьшее положительное отношение $\left\{\dfrac{b_i}{a_{ij}}\right\}$, которое определяет разрешающую строку. Элемент, стоящий на пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки, называют генеральным (обведем его кружком). Разрешающая строка показывает: какая базисная переменная поменяется со свободной переменной $x_i \leftrightarrow x_j$.

Для пересчета коэффициентов базисных переменных и функции цели через новые свободные переменные выполним следующее:

1) находим $\lambda = 1/a_{ij}; a_{ij}$ – генеральный элемент;

2) все коэффициенты разрешающей строки умножим на λ (кроме генерального), а коэффициенты разрешающего столбца - на "-λ" и запишем в нижней правой части клеток;

3) выделим старые значения коэффициентов разрешающей строки (┘) и новые значения коэффициентов разрешающего столбца (╭);

4) числа, вводимые в нижнюю часть клетки на пересечении строки l и столбца S находим перемножением старого значения коэффициентов разрешающей строки и нового значения коэффициентов разрешающего столбца.

После заполнения, всех клеток таблицы осуществляют ее преобразование в новую таблицу 5.2.

Во все верхние отделения клеток разрешающей строки и разрешающего столбца заполняются значения из нижних отделений предыдущей таблицы; в остальные клетки помещают алгебраическую сумму значений данной клетки.

Анализируя полученную таблицу, видим, что решение «улучшено», т.е. $Z_1 > Z_2$. Далее выполняем действия, аналогичные вышеописанным.

Таблица 5.2

Базисные переменные	Свободный член b_i	Свободные переменные					
		x_1	x_2	…	x_j	…	x_n
x_{n+1}	b'_1	a'_{11}	a'_{12}	…	$-\lambda a_{1j}$	…	a'_{1n}
x_{n+2}	b'_2	a'_{21}	a'_{22}	…	$-\lambda a_{2j}$	…	a'_{2n}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
x_j	λb_i	λa_{i1}	λa_{i2}	…	λ	…	λa_{in}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
x_m	b'_m	a'_{m1}	a'_{m2}	…	$-\lambda a_{mj}$	…	a'_{mn}
Z_2	C'_0	C'_1	C'_2	…	$-\lambda C_j$	…	C'_n

Задача 5.1

Решить задачу линейного программирования: 1) графически; 2) симплекс-методом; 3) в табличной форме симплекс-метода при следующих условиях.

$$Z(x_j) = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

при условиях ограничений:

$$x_1 + 2x_2 \le 4$$
$$2x_1 + x_2 \le 4$$
$$-x_1 - x_2 \le -1$$
$$x_j \ge 0$$

Решение. Решить задачу линейного программирования – значит определить параметры x_j, обращающие целевую функцию в максимум (или минимум) и не нарушающие условия ограничений.

1) графический метод

Условия ограничений определяют ОДР задачи линейного планирования. Строим в осях координат (прямоугольные) x_1 и x_2 прямые, соответствующие условиям ограничений

$$x_1 + 2x_2 = 4 \quad (5.18)$$
$$2x_1 + x_2 = 4 \quad (5.19)$$
$$-x_1 - x_2 = -1 \quad (5.20)$$

Каждое уравнение строим по двум координатам, определяемым исходя из пересечения осей. Ограничение при четком равенстве делит плоскость на две полуплоскости: содержащие и не содержащие решение. Нужно взять любую точку, например (0,0), и ее подставить в условия неравенств. Если неравенство выполняется, то эта полуплоскость содержит решение, в противном случае – нет. Объединение полуплоскостей, содержащих решения, определит ОДР - это многоугольник *ABCDE*.

Находим значение градиента $G = \left(\partial Z/\partial x_1, \partial Z/\partial x_2\right)$ для определения направления возрастания целевой функции, начало которого в точке (0,0). $G = (2;3)$ и его представляем на плоскости x_1Ox_2.

Поскольку градиент – это вектор, перпендикулярный к функции, то можно нанести линию целевой функции $Z_0 = 0$, проходящей через точку (0,0). Из построений видно, что линия целевой функции $Z_0 = 0$ располагается вне ОДР. Линию уровня $Z_0(x_j)$ перемещаем в направлении градиента до тех пор, пока она не достигнет точки *C*, в которой значение целевой функции будет максимальным Координата точки *C* определяется решением системы равенств (5.18) и (5.19): $C\left(4/3; 4/4\right)$, т.е. $x_1 = 4/3$; $x_2 = 4/3$. $Z_c = 20/3 = \max$.

Студентам предлагается определить значения целевой функции в точках *A*, *B*, *D*, *E* (Z_A; Z_B; Z_D; Z_E). .Все графические построения представлены на рис.5.4.

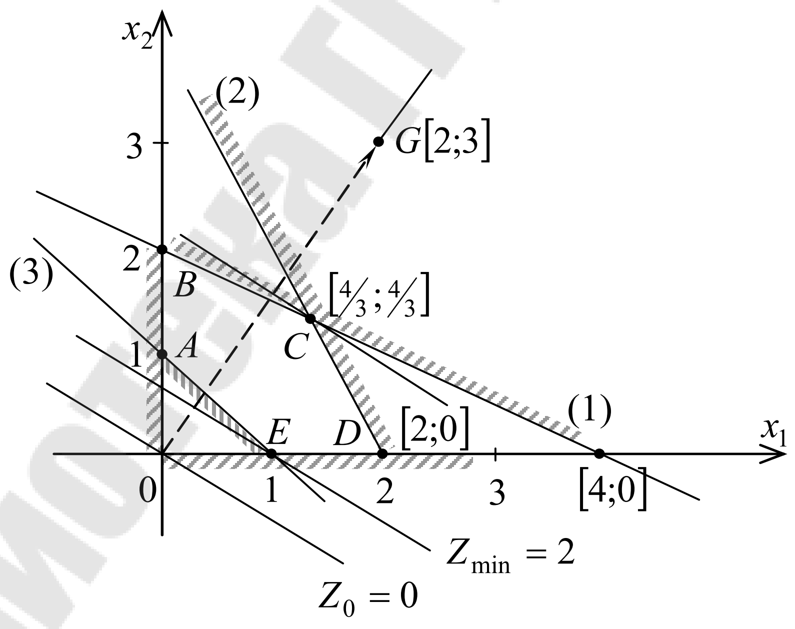

Рис. 5.4.

<u>*2)симплекс-метод*</u>

Запишем целевую функцию и условия ограничений в каноническом виде

$$-Z = -2x_1 - 3x_2 \to \min$$
$$-Z = 0 - (2x_1 + 3x_2) \to \min$$
$$\begin{array}{ll} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 & x_3 = 4 - (x_1 + 2x_2) \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 4 & x_4 = 4 - (2x_1 + x_2) \\ -x_1 - x_2 + x_5 = -1 & x_5 = -1 - (-x_1 - x_2), \end{array}$$

где x_3, x_4 и x_5 – дополнительно введенные неотрицательные переменные – базисные, выраженные через свободные переменные – x_1, x_2.

Найдем значения базисных переменных и значение функции цели при равенстве нулю свободных переменных: $x_1 = 0$; $x_2 = 0$.

$-Z_0(x_j) = 0$, $x_3 = 4$, $x_4 = 4$; $\underline{x_5 = -1}$ – это начальное решение, недопустимое, т.к. одно из найденных значений отрицательное. Решение находится вне ОДР. Задача заключается в том, чтобы переходя от одного решения к следующему (опорному плану), функция цели уменьшалась.

Поскольку можно изменять свободные переменные x_1 или x_2 для изменения целевой функции, то наибольшее воздействие окажет, если мы изменим x_2, т.к. у него коэффициент больше, чем при x_1; x_2 будем увеличивать до тех пор, пока базисные переменные не обратятся в нуль.

$$\begin{array}{llll} x_3 = 0 & \text{при} & x_2 = 2 & \left(\dfrac{b_1}{a_{12}}\right) = \dfrac{4}{2} \\ x_4 = 0 & & x_2 = 4 & \left(\dfrac{b_2}{a_{22}}\right) = \dfrac{4}{1} \\ x_5 = 0 & & x_2 = 1 & \left(\dfrac{b_3}{a_{32}}\right) = \dfrac{-1}{-1} \end{array}$$

Находим наименьшее значение x_2, исключая определение x_2 при $a_{ij} < 0$, и определяем базисную переменную x_3, которая станет свободной, а x_2 – базисной.

Выразим базисные переменные и функцию цели $-Z(x_j)$ через новые свободные переменные:

$$x_2 = 0{,}5[4 - (x_1 + x_3)] = 2 - (0{,}5x_1 + 0{,}5x_3)$$
$$x_4 = 4 - (2x_1 + 2 - 0{,}5x_1 - 0{,}5x_3) = 2 - (1{,}5x_1 - 0{,}5x_3)$$
$$x_5 = -1 - (-x_1 - 2 + 0{,}5x_1 + 0{,}5x_3) = 1 - (-0{,}5x_1 + 0{,}5x_3)$$

$$-Z_1 = 0 - \left[2x_1 + 3(2 - 0{,}5x_1 - 0{,}5x_3)\right] = -6 - (0{,}5x_1 - 0{,}5x_3)$$

Найдем значения базисных переменных и значение функции цели при равенстве нулю свободных переменных: $x_1 = 0$; $x_3 = 0$.

$-Z_1 = -6$; $[0; 2; 0; 2; 1]$; $-Z_1 < -Z_0$; получено новое решение, принадлежащее ОДР, т.к. все переменные положительны.

Наличие положительного коэффициента при свободной переменной x_1 в функции цели указывает на то, что решение можно еще улучшить.

x_1 будем увеличивать до тех пор, пока базисные переменные не обратится в нуль.

$$x_2 = 0 \quad \text{при} \quad x_1 = 4 \quad \left(\frac{b_1}{a_{11}}\right) = \frac{2}{0{,}5}$$

$$x_4 = 0 \quad x_1 = 1{,}333 \quad \left(\frac{b_2}{a_{21}}\right) = \frac{2}{1{,}5}$$

$$x_5 = 0 \quad x_1 = -2 \quad \left(\frac{b_3}{a_{31}}\right) = \frac{1}{-0{,}5}$$

Находим наименьшее значение x_1, исключая отрицательное x_1, и определим, что базисная переменная x_4, которая станет свободной, а x_1 – базисной (мы выполнили преобразования аналогичные переходу от $-Z_1$ к $-Z_2$). Студентам предлагается эти преобразования выполнить самостоятельно. Выразим базисные переменные и функцию цели $-Z(x_j)$, через новые свободные переменные x_3 и x_4:

$$x_1 = 1{,}333 - (-0{,}333x_3 + 0{,}666x_4)$$
$$x_2 = 1{,}333 - (-0{,}666x_3 - 0{,}666x_4)$$
$$x_5 = 1{,}666 - (0{,}333x_3 + 0{,}333x_4)$$
$$-Z_2 = -6{,}666 - (-0{,}333x_3 - 0{,}333x_4)$$

Приравниваем свободные переменные x_3 и x_4 к нулю, получим новое решение, принадлежащее ОДР:

$-Z_2 = -6{,}666$; $[1{,}333; 1.333; 0; 0; 1{,}666]$; $-Z_2 < -Z_1$;все найденные переменные – положительны. Данное решение удовлетворяет условию задачи, коэффициенты при свободных переменных в функции цели меньше нуля, а это означает, что изменения x_3 и x_4 будут увеличивать значения целевой функции, что противоречит задаче перехода от одной вершины к другой ОДР.

$Z_{\max} = 6{,}666$; при параметрах $x_j\,[\underline{1{,}333; 1{,}333}; 0; 0; 1{,}666]$.

3) табличная форма симплекс-метода

При решении задачи исходные данные необходимо представить в канонической форме и в виде, удобной для табличной формы:

$$-Z = 0 - (2x_1 + 3x_2) \to \min; \qquad \begin{aligned} x_3 &= 4 - (x_1 + 2x_2) \\ x_4 &= 4 - (2x_1 + x_2) \\ x_5 &= -1 - (-x_1 - x_2) \quad x_i \geq 0 \;\; j = \overline{1,5} \end{aligned}$$

Коэффициенты при свободных переменных в уравнениях БП и функции цели внесем в таблицу, причем разместим их в верхние части клеток со знаками, указанными в скобках соответствующих уравнений.

Таблица 5.3

Базисные переменные	Свободные члены b_i	Свободные переменные x_1	x_2
x_3	4 $\frac{1}{2}\cdot 4$	1 $\frac{1}{2}\cdot 1$	2 $\lambda = \frac{1}{2}$
x_4	4 $-\frac{1}{2}\cdot 4$	2 $-\frac{1}{2}\cdot 1$	1 $-\frac{1}{2}\cdot 1$
x_5	-1 $\frac{1}{2}\cdot 4$	-1 $\frac{1}{2}\cdot 1$	-1 $-\frac{1}{2}\cdot(-1)$
$-Z_0$	0 $-\frac{3}{2}\cdot 4$	2 $-\frac{3}{2}\cdot 1$	3 $-\frac{1}{2}\cdot 3$

Столбец «свободные члены» определяет первое начальное решение при равенстве нулю свободных переменных:

$-Z_0 = 0$; $x_j\,[0; 0; 4; 4; -1]$ – это начальное решение – недопустимо, т.к. одно из найденных значений отрицательное. Решение находится вне ОДР.

Наибольший положительный коэффициент при свободных переменных в функции цели определяет разрешающий столбец – x_2. Находим наименьшее положительное отношение $\left\{\frac{b_i}{a_{ij}}\right\}=\left\{\frac{4}{2};\frac{4}{1};\frac{-1}{-1}\right\}$, исключая $\frac{-1}{-1}$, которое определяет разрешающую строку. Элемент, стоящий на пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки, называют генеральным (обведем его кружком). Разрешающая строка показывает: какая базисная переменная поменяется со свободной переменной $x_2 \leftrightarrow x_3$.

Для пересчета коэффициентов базисных переменных и функции цели через новые свободные переменные выполним следующее:

1) находим $\lambda = 1/a_{ij}$; a_{ij} – генеральный элемент;

2) все коэффициенты разрешающей строки умножим на λ (кроме генерального), а коэффициенты разрешающего столбца – на "$-\lambda$" и запишем в нижней части клеток;

3) выделим старые значения коэффициентов разрешающей строки (┘) и новые значения коэффициентов разрешающего столбца (◜);

4) числа, вводимые в нижнюю часть клетки на пересечении строки l и столбца S находим перемножением старого значения коэффициентов разрешающей строки и нового значения коэффициентов разрешающего столбца.

После заполнения, всех клеток таблицы осуществляют ее преобразование в новую таблицу:

Таблица 5.4

Базисные переменные	Свободные члены b_i	Свободные переменные	
		x_1	x_3
x_2	2 $-\frac{0,5}{1,5}\cdot 2$	0,5 $-\frac{1}{1,5}\cdot 0,5$	0,5
x_4	2 $\frac{1}{1,5}\cdot 2$	1,5 $\lambda=\frac{1}{1,5}$	$-0,5$ $-\frac{1}{1,5}\cdot 0,5$
x_5	1 $\frac{1}{2}\cdot 4$	$-0,5$ $-\frac{1}{1,5}\cdot(-0,5)$	0,5
$-Z_1$	-6 $-\frac{0,5}{1,5}\cdot 2$	0,5 $-\frac{1}{1,5}\cdot 0,5$	$-1,5$

Во все верхние отделения клеток разрешающей строки и разрешающего столбца заполняются значения из нижних отделений предыдущей таблицы; в остальные клетки помещают алгебраическую сумму значений данной клетки.

Столбец «свободные члены» определяет новое решение при равенстве нулю свободных переменных:

$-Z_1 = -6$; $x_j = [0; 2; 0; 2; 1]$ – это решение, принадлежащее ОДР, т.к. все переменные положительны, $-Z_2 < -Z_1$, но не является оптимальным, так как наличие положительного коэффициента при свободной переменной x_1 в функции цели указывает на то, что решение можно еще улучшить. Поэтому данный столбец будет разрешающим. Далее производя операции, аналогичные вышеописанным, получим таблицу 5.5, в которой приведено оптимальное решение:

Таблица 5.5

Базисные переменные	Свободные члены b_i	Свободные переменные	
		x_1	x_3
x_2	1,333	0,666	– 0,666
x_1	1,333	0,666	$-0{,}333$
x_5	1,66	0,333	0,333
$-F_2$	– 6,666	$-0{,}333$	$-0{,}333$

$-Z_2 = -6{,}666$; $x_j = [1{,}333; 1{,}333; 0; 0; 1{,}666]$.

Так как необходимо было найти максимум, то $Z = 6{,}666$.

Затемненные значения в таблицах 5.3 и 5.4 соответствуют преобразованиям на соответствующем шаге

ЗАДАНИЕ

Решить задачу линейного программирования, графически, симплекс-методом и в табличной форме симплекс-метода при следующих условиях.

$$Z = c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 = \to \max\ (\min)$$

$$\text{при} \sum_{i,j=1}^{i=3,\,j=2} a_{ij} \cdot x_j \begin{cases} \le \\ \ge \end{cases} b_i \ ; \ \ x_j \ge 0 .$$

Значения коэффициентов приведены в таблицах 4 и 5.

Таблица 5.6 Коэффициенты условий ограничений

Вариант	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_{11}	-1	-1	-2	-2	-2	-2	-8	1	-2	-1
a_{12}	2	2	5	-1	2	1	3	5	1	-1
b_1	8	10	1	1	1	-2	3	3	1	-10
a_{21}	3	-1	-1	2	-1	1	1	-2	-1	1
a_{22}	-1	5	10	8	-1	2	2	5	2	4
b_2	6	7	2	2	8	10	10	-4	8	28
a_{31}	-2	1	1	1	3	1	1	1	1	1
a_{32}	-9	5	3	3	2	-9	-10	-10	2	-2
b_3	-1	5	6	6	5	-3	-3	4	6	-2

Таблица 5.7 Коэффициенты целевой функции

Вариант	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
C_0	3	6	-5	4	-1	10	-7	8	3	-2
C_1	-5	-2	4	-5	6	4	-2	12	-2	4
C_2	8	-3	8	2	9	-1	8	-6	-1	-1

Примечание: вид экстремума и знак неравенств задается преподавателем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Электрические системы. Математические задачи электроэнергетики: Учебник для студентов вузов / Под ред. Веникова – М.: Высшая школа, 1981. – 288 с.
2. Е.С.Вентцель Теория вероятностей: Учебник для высших технических учебных заведений. – М.: «Наука», 1969. – 576 с., с илл.
3. Кузнецов А.В. Высшая математика: математическое программирование: Учеб. / Под общ. ред. А.В.Кузнецова. – Мн.: Выш.шк., 2001. – 351 с., с илл.

Алферова Тамара Викторовна
Попова Ольга Михайловна

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИКИ

Практикум
по одноименному курсу для студентов специальности 1-43 01 03 «Электроснабжение (по отраслям)» дневной и заочной форм обучения

Подписано к размещению в электронную библиотеку
ГГТУ им. П. О. Сухого в качестве электронного
учебно-методического документа 8.11.12.
Рег. № 29Е.
http://www.gstu.by