Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Техническая механика»

О. Н. Шабловский, М. И. Лискович

МОДЕЛИРОВАНИЕ В МЕХАНИКЕ

ПОСОБИЕ
по курсу «Теоретическая механика»
для студентов инженерно-технических специальностей
дневной и заочной форм обучения

Гомель 2010

УДК 531.3(075.8)
ББК 30.12я73
Ш13

*Рекомендовано научно-методическим советом
машиностроительного факультета ГГТУ им. П. О. Сухого*
(*протокол № 1 от 28.09.2009 г.*)

Рецензент: зав. каф. «Технология машиностроения» ГГТУ им. П. О. Сухого
канд. техн. наук, доц. *М. П. Кульгейко*

Шабловский, О. Н.

Ш13 Моделирование в механике : пособие по курсу «Теоретическая механика» для студентов инженер.-техн. специальностей днев. и заоч. форм обучения / О. Н. Шабловский, М. И. Лискович. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2010. – 28 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: http://lib.gstu.local. – Загл. с титул. экрана.

Даны основные положения норм размерностей и подобия; способы решения задач техники методами размерности; подобие и моделирование явлений; примеры моделирования механических явлений.

Для студентов инженерно-технических специальностей дневной и заочной форм обучения.

УДК 531.3(075.8)
ББК 30.12я73

ВВЕДЕНИЕ

Цель работы - дать основные положения и методы теорий размерности и подобия и продемонстрировать их возможности на примерах решения задач из разных областей механики.

Вопросы теории размерности сконцентрированы вокруг П - теоремы и её приложений. Рассмотрено значение моделирования в конструкторско-исследовательской практике как средства установления соответствия между теорией и действительностью.

Идейной основой изложения являются фундаментальные монографии [4,5]. Некоторые задачи заимствованы из [1,2].

1. КРАТКИЕ ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Историки науки обнаружили первые упоминания о различии численного значения величины от её размерности в работах древних ученых Андрастоса и его последователя Теона Смирненского (II век н.э.). Наряду с понятием геометрического подобия делались попытки ввести исходные понятия кинематического подобия.

Теорема о динамическом подобии была доказана И.Ньютоном (1643-1727) и сыграла большую роль не только в механике, но и в других областях физики. Английский физик У.Томсон (лорд Кельвин) (1824-1907) говорил, что он не в состоянии разобраться ни в одном явлении, пока не представит себе его механической модели.

Центральная теорема теории размерностей - П - теорема - была доказана впервые преподавателем Петербургского Политехнического института А. Федерманом в 1911 г.

В 1921 г. было предложено именовать фундаментальные безразмерные комплексы в теории подобия по именам выдающихся ученых, применяя для обозначений первые буквы фамилии этих исследователей. Такая традиция сохранилась по настоящее время.

Большой вклад в развитие теории подобия и размерности в механике внесли такие известные ученые как В.Я.Кирпичев, Л.И.Седов, С.С.Кутателадзе и другие.

2. РАЗМЕРНЫЕ И БЕЗРАЗМЕРНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. ФОРМУЛА РАЗМЕРНОСТИ.

Определение 1. Б е з р а з м е р н ы м и величинами называются величины, для которых единицы измерения одинаковы во всех принятых системах единиц измерения.

Определение 2. Р а з м е р н ы м и называются величины, для которых в научных исследованиях допускаются различные единицы измерения, т.е. их численное значение зависит от принятой системы единиц измерения.

Например, угол можно считать безразмерной величиной, если во всех системах единиц измерения измерять углы только в радианах. Напротив, для длин фиксирование единицы измерения неудобно. Это видно из рассмотрения геометрически подобных фигур, для которых имеет место равенство соответствующих углов и пропорциональность соответствующих сторон.

С точки зрения современной физики, универсальными формами существования материи является движение и пространство - время. Физической мерой этих качеств являются масса, энергия, расстояние, время.

Вследствие фундаментальной связи $E = mc^2$, где c - скорость света в вакууме, масса и энергия могут измеряться в одних и тех же единицах. Поэтому существует не более трех основных (первичных) единиц измерения. Единицы измерения для других механических величин (вторичные единицы измерения) получаются простыми вычислениями из их определения.

Определение 3. Р а з м е р н о с т ь ю называется выражение вторичной единицы измерения через первичные единицы измерения.

Формула размерности записывается с помощью символа единицы массы M, единицы длины L и единицы времени T. Например, для силы формула размерности есть MLT^{-2}.

Единая Международная система единиц СИ (System international) содержит в качестве основных механических единиц измерения метр, килограмм-массу и секунду. В соответствии с современными стандартами допускаются к применению основные единицы СИ, производные единицы СИ, десятичные кратные и дольные единицы СИ, а также некоторые не входящие в СИ единицы.

Создание СИ (1960 г.) открыло перспективу всеобщей унификации и упрощения единиц и имело следствием принятие многими странами решений о переходе к этой системе или ее преимущественном использовании.

В физической системе единиц СГС основные единицы измерения: сантиметр, грамм-масса и секунда.

Формулу размерности для механических величин можно представить в виде одночлена $[a] = [L^l T^t M^m]$, где: показатели l, m, t могут иметь положительные и отрицательные значения, быть целыми и дробными числами. Для безразмерных величин принимается такая запись: $[a]=[L^0T^0M^0]=[1]$.

Допустим, от единиц измерения M, L ,T требуется перейти к другим единицам измерения αM, βL, γT, где α,β,γ - положительные действительные числа. Тогда новая единица измерения для величины a изменится в $\alpha^m\beta^l\gamma^t$ раз. Это простое правило позволяет вычислять переходные масштабные множители для вторичных единиц измерения в случае изменения величин первичных единиц измерения.

Формулы размерности применяют также для проверки правильности формул, полученных в результате теоретических исследований, а именно: в установленном математическом равенстве формулы размерности обеих частей должны быть одинаковыми. Очевидно, что совпадение размерностей еще не является гарантией того, что полученное уравнение верно.

3. *П* - ТЕОРЕМА

П - теорема гласит: связь между $n+1$ размерными величинами $a,a_1,\ldots,a_n$, не зависящая от выбора системы единиц измерения, может быть представлена в виде соотношения между $n-k+1$ безразмерными комбинациями, составленными из $n+1$ размерных величин, среди которых k величин ($k\le n$) имеют независимые размерности.

Доказательство. Допустим, имеется размерная величина a, зависящая от совокупности n размерных параметров:

$$a=f(a_1,a_2,\ldots,a_k,a_{k+1},\ldots,a_n) \tag{1}$$

Основным свойством функции (1) является, по предположению, то, что она определяет физический закон, не зависящий от выбора систем единиц измерения. Перенумеруем аргументы функции (1) и первые k индексов отдадим наибольшему числу параметров с независимыми размерностями:

$$[a_1]=A_1,[a_2]=A_2,\ldots,[a_k]=A_k, k\le n \tag{2}$$

Применим (2) и запишем формулы размерности для остальных величин в таком виде:

$$[a]=A_1^{m_1}A_2^{m_2}\dots A_k^{m_k},[a_{k+1}]=A_1^{P_1}A_2^{P_2}\dots A_k^{P_k},\dots,[a_n]=A_1^{q_1}A_2^{q_2}\dots A_k^{q_k}$$

Единицы измерения первых k аргументов в (1) изменим следующим образом: $a_1'=\alpha_1 a_1, a_2'=\alpha_2 a_2,\dots,a_k'=\alpha_k a_k$ и получим такие численные значения:

$$a'=\alpha_1^{m_1}\alpha_2^{m_2}\alpha_k^{m_k}a, a_{k+1}'=\alpha_1^{P_1}\alpha_2^{P_2}\alpha_k^{P_k}a_{k+1},\dots,a_n'=\alpha_1^{q_1}\alpha_2^{q_2}\alpha_k^{q_k}a_n.$$

Это дает возможность записать (1) в виде

$$\begin{aligned}&a'=\alpha_1^{m_1}\alpha_2^{m_2}\dots\alpha_k^{m_k}f(a_1,a_2,\dots,a_n)=\\&=f\left(\alpha_1 a_1,\dots,\alpha_k a_k;\alpha_1^{P_1}\alpha_2^{P_2}\dots\alpha_k^{P_k}a_{k+1},\dots,\alpha_1^{q_1}\alpha_2^{q_2}\dots\alpha_k^{q_k}a_n\right),\end{aligned} \quad (3)$$

где: $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_k$ - произвольные положительные числа. Распорядимся этим произволом так, чтобы первые k аргументов в правой части (3), равнялись единице: $\alpha_1=a_1^{-1},\alpha_2=a_2^{-1},\dots,\alpha_k=a_k^{-1}$. При таком выборе масштабов $\alpha_i, i=\overline{1,k}$ соотношение (3), а, следовательно, и (1), можно представить в виде:

$$\Pi=f(1,1,\dots,1;\Pi_1,\dots,\Pi_{n-k}) \quad (4)$$

где: $\Pi=\dfrac{a}{a_1^{m_1}a_2^{m_2}\dots a_k^{m_k}}$, $\Pi_1=\dfrac{a_{k+1}}{a_1^{p_1}a_2^{p_2}\dots a_k^{p_k}},\dots,$ $\Pi_{n-k}=\dfrac{a_n}{a_1^{q_1}a_2^{q_2}\dots a_k^{q_k}}$,
причем правые части записанных дробей составлены из численных значений рассматриваемых величин в первоначальной системе единиц измерения. Ясно, что по отношению к единицам измерения (2) имеем $[\Pi]=1,[\Pi_j]=1, j=\overline{1,n-k}$. Значит, по определению 1, все $n-k+1$ комбинации, входящие в (4), являются безразмерными: они не зависят от выбора системы тех единиц измерения, через которые выражаются k единиц измерения для a_1, a_2, a_k. Теорема доказана.

В частном случае, когда $n=k$, из аргументов функции (1) нельзя составить безразмерную комбинацию, поэтому зависимость (4) может быть представлена в виде:

$$a = Ca_1^{m_1} a_2^{m_2} a_n^{m_n} \qquad (4')$$

где: C - безразмерная постоянная, которую можно определить экспериментально или из теоретических расчетов; показатели степени в (4') легко определяются по формуле размерности для величины a.

4. МЕТОДИКА СОСТАВЛЕНИЯ ТАБЛИЦЫ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ПАРАМЕТРОВ

Определение 4. Определяющими параметрами задачи называются аргументы в функциях вида (1).

Отметим, что некоторые из этих параметров могут быть переменными, другие - постоянными. Важно то, что они могут принимать различные численные значения в разных системах единиц измерения.

При математической постановке задачи первым этапом является выбор модели. Далее необходимо выбрать систему координат и учесть условия симметрии, записать уравнения, описывающие исследуемый процесс.

В таблицу определяющих параметров включаются следующие величины:

1) независимые переменные (например, декартовы координаты x, y, z и время t);

2) физические постоянные типа коэффициентов теплопроводности, вязкости, диффузии, модулей упругости, сдвига и т.п.;

3) задаваемые размерные и безразмерные характеристики области, занятой движущейся средой;

4) величины, характеризующие значения функций, содержащихся в граничных и начальных условиях задачи.

При экспериментальном решении проблемы ставится строгое требование: все определяющие параметры должны быть явно указаны и перечислены в таблице. Это обеспечивает возможность повторения опыта и сравнения различных экспериментов.

Определение 5. Система определяющих параметров называется полной, если среди них имеются величины с размерностями, через которые можно выразить размерности всех искомых величин.

Система определяющих параметров должна быть полной; если постановка задачи такова, что свойству полноты удовлетворить нельзя, то искомая величина - нулевая либо равна бесконечности.

5. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ МЕТОДАМИ ТЕОРИИ РАЗМЕРНОСТИ

Задача 1.

Рассмотрим плоское движение математического маятника, пренебрегая силами сопротивления. Определяющие параметры: l - длина маятника, m - масса груза, g - ускорение силы тяжести, которая определяет сущность данного явления, φ_0 - угол крайнего отклонения (начальное значение угловой координаты), t - время (независимая переменная).

Искомыми величинами являются: угол φ между нитью и вертикалью, натяжение R нити:

$$\varphi = \varphi(t, \varphi_0, l, g, m), R = mgf(t, \varphi_0, l, g, m) \quad (5)$$

где; φ, f - безразмерные функции, численные значения которых не должны зависеть от системы единиц измерения.

В данном случае $n = 5, k = 3$ и, согласно *П* - теореме, пять аргументов в (5) можно преобразовать к двум безразмерным

$$\varphi_0, t\sqrt{g/l} \quad (6)$$

составленным из определяющих параметров. Получаем:

$$\varphi = \varphi\left(\varphi_0, t\sqrt{g/l}\right), R = mgf\left(\varphi_0, t\sqrt{g/l}\right) \quad (7)$$

Следует отметить, что любые другие безразмерные комбинации, составленные из t, l, g, m, φ_0 можно выразить через (6). Формулы (7) показывают, что закон колебательного движения не зависит от массы груза, а натяжение нити прямо пропорционально массе груза.

Многочисленные опыты показывают, что движение маятника - периодическое. Обозначим Θ - период колебания. Учитывая, что $[\Theta] = T$, запишем $\Theta = \sqrt{l/g}\, f_1(\varphi_0, l, g, m)$, где f_1 - безразмерная функция. Далее: из l, g, m нельзя составить безразмерную комбинацию, поэтому f_1 от этих параметров не зависит. Значит, имеем:

$$\Theta = \sqrt{l/g}\, f_1(\varphi_0) \quad (8)$$

В этой зависимости найти $f_1(\varphi_0)$ с помощью теории размерности нельзя, для этого надо применить математическую модель явления:

$$\ddot{\varphi} + (g/l)\sin\varphi = 0, t = 0, \varphi = \varphi_0, \dot{\varphi} = 0$$

или провести эксперимент.

Задача 2.

На пружине подвешен груз массой *m*. При удлинении пружины на *h* возникает упругая сила, равная по абсолютной величине *F*, стремящаяся вернуть пружину в исходное положение. Кроме силы *F,* на груз никакие другие силы не действуют. Определить время *t* возвращения груза в исходное положение.

Для решения задачи необходимо представить время как функцию известных величин: $t = t(F, m, h)$. При трех основных единицах – длине, массе и времени – имеем: $n = k = 3$, поэтому справедлива формула (4'). Получаем $t = CF^{m_1} h^{m_2} m^{m_3}$, где: *C* - неизвестный безразмерный коэффициент пропорциональности. Приравняем формулы размерностей левой и правой частей:

$$T = L^{m_1+m_2} M^{m_1+m_3} T^{-2m_1}$$

и получим уравнения для показателей степени $m_1 + m_2 = 0$, $m_1 + m_3 = 0$, $1 = -2m_1$.

Значит, $m_1 = -\frac{1}{2}$, $m_2 = \frac{1}{2}$, $m_3 = \frac{1}{2}$ и решение дается формулой

$$t = C\sqrt{\frac{mh}{F}} \tag{9}$$

Если, $F = kh$, где: k - коэффициент упругости пружины, то $t = C\sqrt{\frac{m}{k}}$, и время не зависит от удлинения пружины.

В случае силы тяжести $F = mg$ формула (9) превращается в формулу для времени свободного падения $t = C\sqrt{\frac{h}{g}}$.

С помощью теории размерности искомое время определяется с точностью до постоянного множителя *C*.

Задача 3.

Требуется определить скорость υ, с которой падает шарик в вязкой жидкости. Даны диаметр шарика *d*, его плотность ρ_1, плотность ρ_2 жидкости и её вязкость μ.

Очевидно, что в число величин, определяющих процесс, входит ускорение силы тяжести. Значит, имеем $\upsilon = \upsilon(\rho_1, \rho_2, d, \mu, g)$, $n = 5$. Мы уже видели, что задача становится тем более определенной, чем меньше разность $n - k$ между числом определяющих параметров и числом основных единиц. В данном случае целесообразно ввести одну дополнительную основную единицу – единицу силы; размерности входящих в задачу величин будут при этом следующие:

$$[\upsilon] = LT^{-1}, [d] = L, [\rho_1] = [\rho_2] = ML^{-3}, [\mu] = TFL^{-2}, [g] = FM^{-1}.$$

Тогда $k = 4$ и, согласно *П* – теореме, можем составить всего две безразмерные комбинации. Одна из них есть ρ_2 / ρ_1, а вторая комбинация $\upsilon\mu\rho_1^{-1}d^{-2}g^{-1}$ получается после составления уравнений для показателей степени в размерностях остальных величин. По формуле (4) для искомой скорости падения найдем:

$$\upsilon = C\frac{\rho_1 g d^2}{\mu}\varphi\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right) \qquad (10)$$

Функция $\varphi\left(\rho_2/\rho_1\right)$ данными задачи не определяется. Разумеется, задача была бы ещё более неопределенной, если бы мы сохранили лишь три ($k = 3$) основные единицы.

Интересно заметить, что почти такая же задача о скорости всплывания в жидкости воздушного пузырька (плотностью которого можно пренебречь $\rho_1 \approx 0$) становится вполне определенной, т. к. число входящих величин при этом уменьшается на единицу: $n = k = 4$. Легко увидеть, что в этом случае безразмерная комбинация есть $\upsilon\mu\left(d^2\rho_2 g\right)^{-1}$ и, по формуле (4'), скорость всплывания пузырька:

$$\upsilon = C\rho_2 g d^2 / \mu \qquad (11)$$

Сопоставляя (10) и (11), можно заключить, что $\varphi\left(\rho_2/\rho_1\right) = 1 - \rho_2/\rho_1$, так что формула (10) превращается в $\upsilon = Cd^2 g(\rho_1 - \rho_2)/\mu$.

Теоретический расчет дает $C = 1/18$. Последняя формула описывает все случаи движения шарика в вязкой жидкости как при $\rho_1 > \rho_2$, так и при $\rho_1 < \rho_2$, вплоть до $\rho_1 = 0$, поскольку υ может принимать как положительное, так и отрицательное значение.

Задача 4.

Рассмотрим движение вязкой жидкости в трубе постоянного круглого сечения. Движение жидкости происходит на достаточно длинном участке, так что концевыми эффектами можно пренебречь; все параметры течения считаются установившимися во времени (стационарный режим).

Определяющие параметры: плотность $\rho = const$ характеризует инерцию жидкости, μ - динамический коэффициент вязкости, r - радиус поперечного сечения трубы, υ_{cp} - средняя по сечению скорость жидкости. Размерности этих величин такие:

$$[\rho] = ML^{-3}, [r] = L, [\upsilon_{cp}] = LT^{-1}, [\mu] = ML^{-1}T^{-1}.$$

Движение обусловлено перепадом давления вдоль трубы:

$$(p_1 - p_2)/l = f(\rho, \mu, r, \upsilon_{cp}),$$

где p_1, p_2 - давления в сечениях трубы, отстоящих друг от друга на расстоянии l. Выберем за основные величины r, υ_{cp}, ρ, которые между собой независимы, тогда:

$$[\mu] = [r\upsilon_{cp}\rho], [(p_1 - p_2)l^{-1}] = [\rho\upsilon_{cp}^2 r^{-1}].$$

Воспользуемся Π - теоремой (4) и получим:

$$(p_1 - p_2)\Big/\left(\frac{\rho l \upsilon_{cp}^2}{2r}\right) = \zeta\left(1,1,1,\frac{r\rho\upsilon_{cp}}{\mu}\right),\ \mathrm{Re} = \frac{r\rho\upsilon_{cp}}{\mu}.$$

Здесь ζ - безразмерный коэффициент сопротивления трубы, Re - безразмерное число Рейнольдса. Сопротивление участка трубы l с площадью S поперечного сечения подсчитывается так:

$$(p_1 - p_2)S = \zeta S \frac{l}{a}\frac{\rho\upsilon_{cp}^2}{2},\ \zeta = \zeta(\mathrm{Re}). \qquad (12)$$

Функция $\zeta(\mathrm{Re})$ определяется экспериментально при измерении сопротивления в зависимости от скорости течения воды в трубе. Полученные результаты можно использовать при расчете сопротивления других жидкостей в трубах с другими диаметрами.

Проанализируем зависимость $\zeta(\mathrm{Re})$ для ламинарного установившегося движения в прямолинейной цилиндрической трубе (течение Гагена-Пуазейля). В этом случае ускорения частиц жидкости нулевые, так что влияние плотности ρ - параметра, характеризующего свойство инерции жидкости - на сопротивление отсутствует. Следовательно, правая часть в равенстве (12) не должна зависеть от ρ, поэтому функция $\zeta(\mathrm{Re})$ не должна содержать ρ в знаменателе, т.е. должна быть такой:

$$\zeta(\mathrm{Re}) = C\big/\mathrm{Re} = C\mu\big/\rho r\upsilon_{cp},$$

где: C - безразмерная постоянная; теоретические вычисления дают $C = 16$.

Задача 5.

Упругий призматический брус постоянного поперечного сечения подвергается кручению приложенным на торцах крутящим моментом $M_{кр}$. Найти соотношения, определяющие угол закручивания

φ, приходящийся на единицу длины бруса, и максимальное касательное напряжение τ, действующее в поперечном сечении бруса.

Определяющие параметры такие: a, G, $M_{кр}$, где a - характерный линейный размер поперечного сечения бруса, G - модуль сдвига:

$$[a] = L, [G] = ML^{-1}T^{-2}, [M_{кр}] = ML^2T^{-2}, [\varphi] = L^{-1}, [\tau] = [G],$$

значит, $n = 3$, $k = 2$. Получаем, что безразмерные величины $\varphi a, \tau / G$ - являются функциями одного безразмерного аргумента:

$$\varphi = \frac{1}{a} f_1\left(M_{кр} \big/ a^3 G \right), \ \tau = G f_2\left(M_{кр} \big/ a^3 G \right). \qquad (13)$$

Ограничиваясь линейной постановкой задачи, для которой величины φ, τ линейно зависят от крутящего момента, находим из (13):

$$\varphi = C_1 M_{кр} \big/ a^4 G, \ \tau = C_2 M_{кр} \big/ a^3.$$

Безразмерные постоянные C_1, C_2 зависят от формы поперечного сечения бруса; например, для круглого бруса $C_1 = C_2 = 2/\pi$.

Задача 6.

На границе $z = 0$ упругого полупространства приложена сосредоточенная, нормальная к границе полупространства сила P (задача Буссинеска). Найти прогиб w (перемещение в направлении оси z) точки границы, отстоящей на расстоянии r от точки приложения силы P.

Величина w определяется параметрами E, σ, P, r, где: E - модуль Юнга, σ - коэффициент Пуассона. Поэтому $n = 4, k = 2$ и

$$w/r = f\left(P/Er^2, \sigma\right).$$

Для линейной задачи прогиб линейно зависит от силы P, поэтому

$$f\left(P/Er^2, \sigma\right) = c(\sigma) P/Er^2, w = P/Er, \qquad (14)$$

где: $c(\sigma)$ - безразмерная функция.

Задача 7.

На границе $z = 0$ упругого полупространства в круге $r \le a$ действует нормальное распределенное давление $q(r)$. Найти прогиб w_0 границы полупространства в точке $r = 0$.

Для подсчета прогиба в точке $r = 0$ под действием силы *P*, отстоящей от центра на расстоянии *r*, надо применить формулу (14) и вместо *P* подставить величину $q(r) 2\pi r dr$. Проинтегрировав по *r* от 0 до *a*, найдем искомый прогиб:

$$w_0 E = 2\pi c(\sigma) \int_0^a q(r) dr \tag{15}$$

Величину *q* можно представить в виде $q(r) = q_m \overline{q}(r/a)$, где q_m - характерное, например, максимальное значение давления $q(r)$. Формула (15) принимает вид:

$$w_0 = c(\sigma) \frac{2\pi}{E} \int_0^a q_m \overline{q}\left(\frac{r}{a}\right) dr = c(\sigma) \frac{2\pi a}{E} q_m \int_0^1 \overline{q}(x) dx;$$

$$w_0 = c_1(\sigma) \frac{a}{E} q_m \tag{16}$$

Задача 8.

В упругое полупространство $z \ge 0$ вдавливается силой *P* цилиндрический штамп постоянного поперечного сечения с плоским дном. Определить глубину w_0 внедрения штампа в полупространство и давление q_0 на полупространство в центре штампа.

Определяющие параметры: *E*, σ, *a*, *P* с размерностями

$$[E] = ML^{-1}T^{-2}, [\sigma] = 1, [a] = L, [P] = MLT^{-2},$$

где: *a* - характерный размер поперечного сечения штампа. Имеем $n = 4$, $k = 2$, поэтому, применяя (4), получим:

$$\frac{w_0}{a} = f_1\left(P\big/_{Ea^2}, \sigma\right), \ \frac{q_0}{E} = f_2\left(P\big/_{Ea^2}, \sigma\right) \tag{17}$$

Теперь воспользуемся результатом (16) предыдущей задачи: $w_0 = c_1(\sigma) a \dfrac{q_0}{E}$ и составим условие равновесия в области контакта

$$P = \int_0^a q(r,\sigma) 2\pi r dr = 2\pi q_0 \int_0^a \overline{q}\left(\frac{r}{a}, \sigma\right) r dr,$$

$$P = 2\pi q_0 a^2 \int_0^1 \overline{q}(x,\sigma) dx = c_2(\sigma) q_0 a^2, \ c_2(\sigma) = 2\pi \int_0^1 \overline{q} dx, \ x \approx r/a.$$

Итак, имеем:

$$w_0 = c_1(\sigma) \frac{a q_0}{E}, \ P = c_2(\sigma) q_0 a^2.$$

Подставляя сюда значения w_0, q_0 из (17), находим:

$$f_1 = c_1 f_2, \ P/Ea^2 = c_2 f_2.$$

Окончательно получаем:

$$w_0 = k_1(\sigma) P/Ea, \ q_0 = k_2(\sigma) P/a^2, \ k_1 = c_1/c_2, \ k_2 c_2 = 1.$$

Для случая круглого цилиндрического штампа теоретические расчеты дают:

$$4k_1 = 1 - \sigma^2, \ 2\pi k_2 = 1.$$

Задача 9.

Тонкий упругий диск постоянной толщины радиуса a вращается с постоянной угловой скоростью ω. Напряжения, вызываемые центробежными силами вращающегося диска, достигают максимальной величины в центре диска, причем в центре диска в силу симметрии радиальное τ_r и тангенциальное τ_θ напряжения равны между собой:

$$\tau_r\big|_{r=0} = \tau_\theta\big|_{r=0} = \tau$$

Найти величину τ, определяющую максимальные напряжения.

Величина τ определяется параметрами ρ, *a*, ω, *E*, σ, где, ρ - плотность материала диска. Имеем:

$$[\rho] = ML^{-3}, [a] = L, [\omega] = T^{-1}, [E] = ML^{-1}T^{-2}, [\sigma] = 1.$$

Таким образом, $n = 5$, $k = 3$. Можно образовать две безразмерные комбинации, содержащие τ:

$$\frac{\tau}{E}, \frac{\tau}{\rho a^2 \omega^2}.$$

Поэтому:

$$\tau = E f_1\left(\frac{E}{\rho a^2 \omega^2}, \sigma\right) \tag{18}$$

или

$$\tau = \rho a^2 \omega^2 f_2\left(\frac{E}{\rho a^2 \omega^2}, \sigma\right) \tag{19}$$

Деформация диска обусловлена силами инерции; величина силы инерции, отнесенной к единице объема, имеет вид:

$$\rho\omega^2 r, \lfloor\rho\omega^2 r\rfloor = ML^{-2}T^{-2};\ |\varPhi| = m\frac{\upsilon^2}{r},\ \upsilon = \omega r,$$

где: $r \in [0, a]$ - радиальная координата, отсчитываемая от центра диска.

В рамках линейной постановки задачи связь напряжения τ с силой инерции должна быть линейной, поэтому в соотношениях (18), (19) должны иметь:

$$f_1 = \mathrm{c}_0(\sigma)\left(\frac{\mathrm{E}}{\rho a^2\omega^2}\right)^{-1} \text{ или } f_2 = \mathrm{c}_0(\sigma).$$

Следовательно, получаем:

$$\tau = \mathrm{c}_0(\sigma)\rho a^2\omega^2. \tag{20}$$

Значение $\mathrm{c}_0(\sigma)$ в (20) методами теории размерности найти нельзя.

Представленные здесь задачи наглядно продемонстрировали ограниченность и недостаточность методов решения задач с помощью *П* - теоремы: эти методы не позволяют установить связь между безразмерными величинами.

Практическое значение теории размерности состоит в возможности записи физических закономерностей в безразмерном виде, инвариантном относительно выбора систем единиц измерения. *П* - теорема позволяет представить результаты анализа задачи в разных формах в зависимости от того, какие параметры нас интересуют. Основное ее значение в том, что с её помощью удобно вводить безразмерные критерии подобия. Этот вопрос обсуждается в следующих разделах.

6. ПОДОБИЕ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ЯВЛЕНИЙ

Определение 6. Моделирование - это замена изучения явления в натуре изучением аналогичного явления на модели меньшего или большего масштаба.

Цель моделирования: по результатам опытов с моделями установить качественные и количественные закономерности явления в натурных условиях. Таким образом, моделирование позволяет инженерам постигнуть связь теории и практики.

Определение 7. Две геометрические фигуры подобны, если отношения всех соответственных длин одинаковы. Рассмотрим движение системы материальных точек (S) относительно системы отсчета $OXYZ$ в момент времени t и движение системы точек (S') относительно системы отсчета $O'X'Y'Z'$ в соответственный момент времени t'. Ограничимся такими движениями, при которых обе названные системы отсчета неподвижны относительно основной системы отсчета $\Omega\xi\eta\zeta$. Это позволяет представить точечные системы (OS) и ($O'S'$) в виде фигур, конфигурация которых меняется с течением времени.

Определение 8. Движущиеся системы материальных точек (S) и (S') называются к и н е м а т и ч е с к и п о д о б н ы м и, если существует непрерывная последовательность соответственных моментов $t = \chi t', \chi \equiv const$, для которых системы (OS) и ($O'S'$) геометрически подобны, а отношение подобия $\lambda \equiv const$.

Из этого определения вытекают два с л е д с т в и я [1]:

1) траектории соответственных точек двух кинематически подобных систем геометрически подобны с отношением подобия λ:

$$x_i(t) = \lambda x_i'(t'), y_i(t) = \lambda y_i'(t'), z_i(t) = \lambda z_i'(t'), i = \overline{1,n}$$

2) в соответственные моменты времени модули скоростей и ускорений соответственных точек двух кинематически подобных систем связаны между собой следующим образом:

$$\frac{dx_i}{dt} = \lambda \frac{dx_i'}{dt'}\frac{dt'}{dt} = \frac{\lambda}{\chi}\frac{dx_i'}{dt'} \quad \upsilon_{ix} = \frac{\lambda}{\chi}\upsilon_{ix}', \upsilon_{iy} = \frac{\lambda}{\chi}\upsilon_{iy}', \upsilon_{iz} = \frac{\lambda}{\chi}\upsilon_{iz}' \qquad (21)$$

$$w_{ix} = \frac{\lambda}{\chi^2} w_{ix}', \; w_{iy} = \frac{\lambda}{\chi^2} w_{iy}', \; w_{iz} = \frac{\lambda}{\chi^2} w_{iz}', \; i = \overline{1,n}.$$

Определение 9. Две системы (S и S') называются м е х а н и ч е с к и п о д о б н ы м и, если они подобны кинематически и материально:

$$w_i = \frac{\lambda}{\chi^2} w_i', \; m_i = \nu m_i', \nu \equiv const.$$

Из основного уравнения динамики следует, что $m_i w_i = F_i$, $m_i' w_i' = F_i'$. Воспользовавшись условиями механического подобия, найдем, что:

$$F_i = \varphi F_i',\ \varphi = \lambda\nu\chi^{-2} \equiv const, i = \overline{1,n}$$

Учитывая (21), можем перечислить с в о й с т в а м е х а н и ч е с к и п о д о б н ы х с и с т е м в соответственные моменты времени: 1) векторы сил и ускорений точек систем одинаково ориентированы; 2) отношения соответственных величин постоянные и такие: для длин λ, для скоростей $\lambda\chi^{-1}$, для ускорений $\lambda\chi^{-2}$, для сил $\lambda\nu\chi^{-2}$.

Из общего курса теоретической механики известно, что полная система уравнений, определяющих движение механической системы (S) под действием данной системы сил, есть следствие общего уравнения динамики (уравнения Даламбера-Лагранжа):

$$\sum_{i=1}^{n}[(X_i - m_i\ddot{x}_i)\delta x_i + (Y_i - m_i\ddot{y}_i)\delta y_i + (Z_i - m_i\ddot{z}_i)\delta z_i] = 0, i = \overline{1,n} \quad (22)$$

Сделаем преобразование:

$$x_i = \lambda x'_i, y_i = \lambda y'_i, z_i = \lambda z'_i, m_i = \nu m'_i, t = \chi t',$$
$$X_i = \varphi X_i', Y_i = \varphi Y_i', Z_i = \varphi Z_i', \varphi = \frac{\lambda\nu}{\chi^2}, i = \overline{1,n}. \quad (23)$$

В результате из системы (S) получается новая система (S') которая, по определению 9, механически подобна (S). Заменим все величины, входящие в (22), по формулам (21), (23). Тогда уравнение (22) перейдет в уравнение Даламбера-Лагранжа:

$$\sum_{i=1}^{n}[(X_i' - m_i'\ddot{x}_i')\delta x_i' + (Y_i' - m_i'\ddot{y}_i')\delta y_i' + (Z_i' - m_i'\ddot{z}_i')\delta z_i'] = 0, i = \overline{1,n} \quad (24)$$

Как видим, уравнения (22), (24) по форме записи полностью совпадают. Следовательно, все уравнения движения, выводимые из (22), по форме записи полностью совпадут с уравнениями, получаемыми на основе (24).

В ы в о д: движения двух механически подобных систем определяются одними и теми же уравнениями.

Так как числа λ, ν, χ, фигурирующие в (23), безразмерны, то параметры движения для механически подобных явлений можно рассматривать как параметры одного и того же явления, выраженные в различных системах единиц измерения. Например, для двух механически подобных систем все соответствующие безразмерные комбинации из размерных величин имеют одинаковое численное значение. Обратное утверждение тоже верно: если все соответствующие безразмерные комбинации для двух механических движений одинаковы, то движения подобны.

Согласно (4), все безразмерные характеристики движения можем рассматривать как функции от $(n-k)$ независимых безразмерных комбинаций, составленных из определяющих параметров и образующих б а з у.

Итак, для подобия двух механических явлений необходимо и достаточно, чтобы численные значения безразмерных комбинаций, образующих базу, в этих двух явлениях были одинаковыми [5].

Определение 10. К р и т е р и я м и п о д о б и я называются условия о постоянстве безразмерных параметров, образующих базу.

Ранее, в задаче 4, мы рассмотрели критерий Рейнольдса - первый критерий, с помощью которого были получены важные теоретические результаты, относящиеся к течению вязкой жидкости. Критериями подобия в принципе могут быть любые из безразмерных комбинаций величин, определяющих исследуемое явление.

7. ПРИМЕРЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ

Пример 1. Моделирование двигателей.

Обсудим условия подобия двигателей внутреннего сгорания. Пусть отношение геометрического подобия составных частей равно λ если детали изготовлены из одного материала (плотность постоянна), то массы соответственных деталей относятся как λ^3. Поэтому веса соответственных деталей двух материально подобных двигателей (силы тяжести) относятся как λ^3 и в этом же отношении должны находиться прочие соответственные силы, действующие на элементы двигателя.

Однако на практике это условие не выполняется для сил сопротивления и трения, т.е. возникает вопрос о величине погрешностей (масштабном эффекте), возникающих при переносе на натуру результатов, полученных на модели.

Далее будем пренебрегать действием реальных сил сопротивления, так что в (23) надо взять $\nu = \lambda^3$ и $\varphi \equiv \lambda\nu\chi^{-2} = \lambda^3$, откуда находим $\chi = \sqrt{\lambda}$. Рассмотрим некоторый параметр a проектируемого двигателя, $\left[a\right] = L^l T^t M^m$. Согласно формулам (23), при переходе к механически подобному двигателю единица измерения длины изменится в λ раз, единица измерения времени – в $\chi = \sqrt{\lambda}$ раз, единица измерения массы – в λ^3 раз. Таким образом, величина a и соответствующая величина a' для модели связана посредством переходного масштабного множителя:

$$a = \lambda^{l+3m+t/2}a' \qquad (25)$$

Эта формула представляет собой "правило Н ь ю т о н а".

Для двух материально и механически подобных двигателей находим отношения соответственных параметров: из формулы (21) для скоростей имеем $\upsilon = \lambda\upsilon'/\chi, \upsilon = \sqrt{\lambda}'\upsilon'$; для давлений в цилиндрах двигателей $\left[p\right] = L^{-1}T^{-2}M$, т.е $l = -1$, $t = -2$, $m = 1$ и по формуле (25) находим $p = \lambda p'$; для мощностей $\left[N\right] = L^2 T^{-3} M$, $N = \lambda^{7/2} N'$.

В конструкторско-исследовательской практике важно рассмотреть широкий диапазон давлений в цилиндрах, т.е. нужен случай $h = p/p'$, $\lambda \neq h$. Для этого варианта надо отказаться от допущения, что $\varphi = \lambda^3$ и пренебречь силами тяжести и вредными сопротивлениями.

Сила давления газов на поршень равна $F = pS$, где S - площадь поперечного сечения цилиндра. Имеем: $p = hp'$, $S = \lambda^2 S'$, $F = h\lambda^2 F'$. С другой стороны, для механического подобия должны иметь, согласно (23), $F = \lambda\nu\chi^{-2}F', \nu = \lambda^3$. Сопоставляя эти два соотношения для сил, находим:

$$h \equiv \frac{p}{p'} = \left(\lambda\chi^{-1}\right)^2, h = \left(\frac{\upsilon}{\upsilon'}\right)^2.$$

Пример 2. Моделирование равновесия упругих конструкций.

Рассмотрим сооружение из однородного материала (мост, ферма, кран). Система определяющих параметров: модуль Юнга E, коэффициент Пуассона σ, характерный размер *d,* удельный вес материала $\gamma = \rho g$. сила P - величина внешних нагрузок. Следовательно, имеем $n = 5$:

$$[E] = ML^{-1}T^{-2}, [\sigma] = 1, [d] = L, [\gamma] = ML^{-2}T^{-2}, [P] = MLT^{-2},$$

и две из этих величин имеют независимые размерности, $k = 2$.

Все безразмерные характеристики, определяющие равновесие, можно рассматривать, согласно (4), как функции от $n - k = 3$ независимых безразмерных комбинаций

$$\sigma, \frac{E}{\rho g d}, \frac{P}{Ed^2}, \tag{26}$$

образующих базу. Итак, в этой задаче критерии подобия заключаются, по определению 10, в постоянстве параметров (26) на модели и в натуре. Если модель в *N* раз меньше натуры, то на модели все перемещения при деформации будут в *N* раз меньше, чем в натуре.

Следует обратить внимание на затруднение, возникающее при моделировании: если исходная и модельная конструкции изготовлены из одного материала, т.е. ρ, σ, E в обоих случаях одинаковы, то согласно (26), для механического подобия надо иметь $gd = const$. Поскольку ускорение g постоянно, то получается $d = const$, и моделирование становится невозможным.

Для преодоления этого затруднения применяют центробежные машины, создающие действие на модель постоянных массовых сил, аналогичных силе тяжести, [4, 5]. При этом способе получается аналог ускорения силы тяжести $g' >> g$, так, что условие $g'd' = gd$ будет выполняться.

Применив *П* - теорему (4), для напряжения τ и изменения длины при деформации найдем, учитывая (26):

$$\frac{\tau}{E} = f\left(\sigma, \frac{\rho g d}{E}, \frac{P}{Ed^2}\right), \frac{l}{d} = \varphi\left(\sigma, \frac{\rho g d}{E}, \frac{P}{Ed^2}\right). \tag{27}$$

Если внешние нагрузки преобладают над собственным весом конструкции, то влиянием параметра pgd/E можно пренебречь, и (27) запишется так:

$$\frac{\tau}{E} = f\left(\sigma, \frac{P}{Ed^2}\right), \frac{l}{d} = \varphi\left(\sigma, \frac{P}{Ed^2}\right)$$

Получаем критерии подобия:

$$\sigma = const\,,\ P/Ed^2 = const\,.$$

Отсюда выводы: 1) при моделировании с сохранением свойств материалов (E, σ - одинаковые) внешние нагрузки надо изменять пропорционально квадрату линейных размеров; 2) относительные деформации одинаковы для конструкций различных масштабов.

Отметим следующий интересный и важный в практике моделирования факт. Если величина удельного веса материала ρg сравнима с P, а две конструкции геометрически подобны и сделаны из одного материала, то параметр $\xi = {\rho gd}/{E}$, входящий в правые части равенств (27), будет уменьшаться с уменьшением размера d. Значит, механическое подобие в этом случае нарушается.

Пусть физические свойства конструкции таковы, что ${\partial\varphi}/{\partial\xi} > 0$, т.е с уменьшением ξ относительная деформация уменьшается. Следовательно, модель конструкции, имеющая меньшие размеры, будет испытывать меньшие относительные деформации. В ы в о д: для конструкций указанного класса модели меньших размеров будут иметь большую прочность.

8. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ О МОДЕЛИРОВАНИИ

Модель никогда не может быть тождественна натуре. Результаты модельных исследований не дают исчерпывающих ответов на все важные для практики вопросы. В тех случаях, когда нет общей теории явления, модели служат надежным способом отыскания неизвестных закономерностей. По этой причине при модельных испытаниях важно добиться лишь подобия тех или иных характеризующих явление физико-механических величин. Для получения полной картины явления строят несколько, иногда существенно отличающихся друг от друга моделей. Влияние величин, для которых не удается обеспечить подобие, определяется посредством экспериментов. Как при постановке эксперимента, так и при проведении модельных исследований нужно заранее выявить те параметры явления, которыми можно пренебречь.

В заключение приведем слова академика Л. И. Седова: "Моделирование - ответственная научная задача, имеющая общее принципиальное и познавательное значение, но его нужно рассматривать только как исходную базу для главной задачи, которая состоит в фактическом определении законов природы, в отыскании общих свойств и характеристик различных классов явлений, в разработке экспериментальных и теоретических методов исследования и разрешения различных проблем, наконец, в получении систематических материалов, приемов, правил и рекомендаций для решения конкретных практических задач", [5].

СВОДНАЯ ТАБЛИЦА
геометрических и механических величин

Величина	Формула определения	Формула размерности (СИ)	Единица (СИ)
1	2	3	4
Длина	l	L	м
Масса	m	M	кг
Время	t	T	с
Площадь	$S = l^2$	L^2	м^2
Объем	$V = l^3$	L^3	м^3
Угол	$\varphi = l/r$	1	рад
Телесный угол	$\tau = S/r^2$	1	стер
Кривизна	$\rho = 1/r\,\rho = 1/r$	L^{-1}	м$^{-1}$
Статический момент плоской фигуры	$S_z = \int\limits_s r ds$	L^3	м^3
Скорость	$\vec{\upsilon} = d\vec{r}/dt$	LT^{-1}	м/с
Ускорение	$\vec{a} = d\vec{\upsilon}/dt$	LT^{-2}	м/с^2
Угловая скорость	$\omega = d\varphi/dt$	T^{-1}	с$^{-1}$
Угловое ускорение	$\varepsilon = d\omega/dt$	T^{-2}	с$^{-2}$
Период	$T = 2\pi/\omega$	T	с
Частота	$\nu = 1/T$	T^{-1}	гц
Объемный расход	$Q_V = dV/dt$	L^3T^{-1}	м^3/с
Массовая скорость потока	$Q_m = dm/dt$	MT^{-1}	кг/с
Сила	$\vec{F} = m\vec{a}$	LMT^{-2}	н
Момент силы	$M = Fh$	L^2MT^{-2}	н·м
Импульс силы	$\vec{S} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} dt$	LMT^{-1}	н·с
Количество движения	$m\vec{\upsilon}$	LMT^{-1}	кг м/с
Работа и энергии	$A = Fl\cos\left(\vec{F}, \vec{l}\right)$	L^2MT^{-2}	Дж
Объемная плотность энергии	$w = W/V$	$L^{-1}MT^{-2}$	Дж/м^3
Мощность силы	$N = \delta A/dt = \vec{F} \cdot \vec{\upsilon}$	L^2MT^{-3}	Вт

1	2	3	4
Момент количества движения	$\vec{L}_0 = \vec{r} \times m\vec{\upsilon}$	L^2MT^{-1}	кг м/с
Давление	$p = F/S$	$L^{-1}MT^{-2}$	н/м^2
Градиент давления	$grad\ p$	$L^{-2}MT^{-2}$	н/м^3
Момент инерции тела	$J = \int\limits_V r^2 dm$	L^2M	кг м^2
Плотность	$\rho = m/V$	$L^{-3}M$	кг/м^3
Модуль упругости и сдвига	$E = Fl/s\Delta l$	$L^{-1}MT^{-2}$	н·м^2
Коэффициент всестороннего сжатия	$k = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dp}$	$LM^{-1}T^2$	м^2/н
Вязкость	$\mu = -\frac{F}{s\frac{d\upsilon}{dl}}$	$L^{-1}MT^{-1}$	н·с/м^2
Коэффициент поверхностного натяжения	$\sigma = F/l$	MT^{-2}	н/м (Дж/м^2)
Коэффициент диффузии	$D = -\frac{\Delta m}{\Delta ts\frac{d\rho}{dl}}$	L^2T^{-1}	м^2/с

ЛИТЕРАТУРА

1. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. - Часть 2. Издательство: «Лань», 2009. - 332 с.
2. Ильюшин А.А., Ломакин В.А., Шмаков А.П. Задачи и упражнения по механике сплошной среды. - М., Издательство МГУ, 1979, 164 с.
3. Лойцянский Л.Г. Методы подобия и размерности в механике жидкости и газа. - Сборник научно-методических статей по теоретической механике.- М.: Высшая школа, 1981, вып. 11, с. 22-31.
4. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. - М.: Наука, 1977, 440 с.
5. Седов Л.И. Механика сплошной среды. - т. 1, М.: Наука, 1984, 536 с.
6. Сена Л.А. Единицы физических величин и их размерности. - М.: Наука, 1988, 432 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение..2
1. Краткие исторические сведения..2
2. Размерные и безразмерные величины. Формула размерности.......2
3. Π - теорема 4
4. Методика составления таблицы определяющих параметров 6
5. Решение задач механики методами теории размерности 7
6. Подобие и моделирование явлений 16
7. Примеры моделирования механических явлений 19
8. Общие замечания о моделировании 22
Сводная таблица геометрических и механических величин 24
Литература 26

Шабловский Олег Никифорович
Лискович Михаил Ильич

МОДЕЛИРОВАНИЕ В МЕХАНИКЕ

Пособие
по курсу «Теоретическая механика»
для студентов инженерно-технических специальностей
дневной и заочной форм обучения

Подписано к размещению в электронную библиотеку
ГГТУ им. П. О. Сухого в качестве электронного
учебно-методического документа12.01.10.
Рег. № 116Е.
E-mail: ic@gstu.by
http://www.gstu.by