Государственное научное учреждение
“Институт математики Национальной академии наук Беларуси”

УДК 517.988.3 + 519.858

ТРОФИМОВИЧ
Марина Александровна

ЛИПШИЦЕВЫ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОДНОРОДНЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К ЗАДАЧАМ ВЕКТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С НЕТРАНЗИТИВНЫМ ОТНОШЕНИЕМ ПРЕДПОЧТЕНИЯ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальностям
01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ,
01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика

Минск, 2015

Работа выполнена на кафедре нелинейного анализа и аналитической экономики механико-математического факультета Белорусского государственного университета.

Научный руководитель — **Гороховик Валентин Викентьевич,**
доктор физико-математических наук, профессор,
член-корреспондент НАН Беларуси,
заведующий отделом нелинейного и стохастического анализа Института математики НАН Беларуси

Официальные оппоненты: **Астровский Анатолий Иванович,**
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры высшей математики Белорусского государственного экономического университета

Миротин Адольф Рувимович,
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой математического анализа Гомельского государственного университета имени Франциска Скорины

Оппонирующая организация:
Учреждение образования **"Гродненский государственный университет имени Янки Купалы"**, г. Гродно, Беларусь.

Защита состоится 27 ноября 2015 г. в 13:30 на заседании совета по защите диссертаций Д 01.02.02 при Институте математики НАН Беларуси по адресу: 220072, г. Минск, ул. Сурганова, 11, ауд. 87, тел. ученого секретаря совета (017) 284-17-81, e-mail: svl@im.bas-net.by

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики НАН Беларуси.

Автореферат разослан “ ” октября 2015 г.

Ученый секретарь совета
по защите диссертаций Д 01.02.02
кандидат физико-математических наук С.В. Лемешевский

ВВЕДЕНИЕ

Повышенный интерес к положительно однородным функциям в последние десятилетия обусловлен в значительной мере их применениями в негладком анализе, т. е. в исследованиях функций, которые не являются дифференцируемыми в классическом смысле. Основная идея, которая реализуется в дифференциальном анализе, кратко может быть выражена следующим образом: подлежащая исследованию “сложная” функция локально аппроксимируется “простой” функцией, и по свойствам локальной аппроксимации, которые вследствие ее “простоты” сравнительно легко определяются, устанавливаются затем локальные свойства исходной “сложной” функции. “Простыми” с математической точки зрения естественно считать такие функции, для которых разработаны эффективные методы и средства анализа, или, другими словами, которые принадлежат хорошо изученному классу функций. Таким наиболее изученным классом функций по праву является пространство линейных функций и отображений. Заметим, что часто, когда говорят, что рассматриваемая функция является нелинейной, тем самым как бы стремятся подчеркнуть, что данная функция является сложной. Именно “простота” линейных функций и обусловила их использование в качестве локальных аппроксимаций в классической теории дифференцирования.

Как известно, в классическом анализе введены и эффективно применяются различные производные: производные в смысле Гато, Адамара, Фреше, строгая производная и некоторые другие[1]. Общим для этих понятий является то, что в качестве локальных аппроксимаций в них используются линейные функции, а отличаются они друг от друга способом аппроксимации, при этом различные способы аппроксимации обеспечивают различную степень (качество) приближения локальной аппроксимации к исходной дифференцируемой функции. Таким образом, отсутствие классической производной у функции означает, по существу, лишь то, что она не может быть локально аппроксимирована (в том или ином смысле) линейной функцией. Напрашиваются два естественные пути выхода из данной ситуации: во-первых, можно расширить класс локальных аппроксимаций, а, во-вторых, можно использовать менее жесткие способы аппроксимации, например, можно отказаться от точных локальных аппроксимаций, заменив их локальными мажорантами или минорантами. Реализуя первый путь, надо иметь ввиду, что класс локальных аппроксимаций не может быть выбран слишком широким, посколь-

[1]Картан, А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы / А. Картан. — М. : Мир, 1971. — 392 с.
Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С.В. Фомин. — М. : Наука, 1981. — 543 с.

ку это приведет к усложнению функций, используемых в качестве локальных аппроксимаций, а это противоречит основной идее дифференциального анализа, в соответствии с которой локальная аппроксимация должна быть "простой" функцией.

В настоящее время в теории дифференцирования негладких функций выбор класса локальных аппроксимаций ограничивается в абсолютном большинстве случаев функциями того или иного подпространства пространства положительно однородных функций. Однако, в общем случае положительно однородные функции сами по себе являются довольно сложными объектами, вследствие чего характеристика их свойств требует значительных усилий, часто сравнимых с исследованием исходной функции. Выход из этой ситуации может быть по существу только один: провести исчерпывающее исследование пусть даже не всего пространства положительно однородных функций, а хотя бы некоторого его подкласса, более широкого чем пространство линейных функций, а затем развить теорию дифференцирования, обобщающую классическое дифференцирование, в которой в качестве локальных аппроксимаций используются положительно однородные функции из этого класса.

В диссертации основное внимание сосредоточено на липшицевых положительно однородных функциях. Выбор этого класса функций обусловлен следующими обстоятельствами. Во-первых, отсутствием достаточно полно разработанной теории для пространства липшицевых положительно однородных функций, наличие которой обеспечило бы эффективное применение липшицевых положительно однородных функций в негладком анализе, сравнимое с применением разностно-сублинейных и сублинейных функций. Во-вторых, широким применением липшицевых положительно однородных функций не только в качестве локальных аппроксимаций при обобщенном дифференцировании негладких функций, но и в других разделах анализа, в частности, в теории оптимизации в методе штрафных функций[2], в нелинейной скаляризации задач векторной оптимизации[3] и др. Кроме того, липшицевы положительно однородные функции играют важную роль при построении обобщенных (вязких и минимаксных) решений уравнений в частных производных, в частности, уравнений Гамильтона-Якоби[4]. В связи со сказанным систематическое исследование и изучение все более широких классов положительно однородных функций, в частности, пространства липшицевых положительно однородных функций является весьма актуальной задачей.

---

[2]Васильев, Ф.П. Методы оптимизации / Ф.П. Васильев. — М. : Факториал Пресс, 2002. — 824 с.

[3]Гороховик, В.В. Выпуклые и негладкие задачи векторной оптимизации / В.В. Гороховик. — Минск : Наука и техника, 1990. — 239 с.

[4]Метод характеристик для уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана / Н.Н. Субботина [и др.] ; под ред. В.Н. Ушакова. — Екатеринбург : РИО УрО РАН, 2013. — 244 с.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с крупными научными программами, темами

Исследования по теме диссертации включены в задание, которое выполняется в рамках Государственной программы научных исследований Республики Беларусь на 2011–2015 годы (шифр — "Конвергенция") и соответствуют разделу "12.1 Физические и математические методы и их применение для решения актуальных проблем естествознания, техники, новых технологий, экономики и социальных наук"перечня приоритетных направлений научной деятельности Республики Беларусь на 2011–2015 годы, утверждено постановлением Совета Министров Республики Беларусь от 19.04.2010 №585.

Цель и задачи исследования

Цель диссертационной работы — систематическое исследование липшицевых положительно однородных функций, определенных на конечномерных векторных пространствах, их взаимосвязей с другими классами положительно однородных функций, а также их приложения к исследованию негладких задач векторной оптимизации с нетранзитивным отношением предпочтения.

Для достижения поставленной цели решались следующие задачи:

1. Сформулировать и доказать геометрические и аналитические критерии липшицевости положительно однородных функций; ввести на векторном пространстве липшицевых положительно однородных функций структуру банахова пространства и изучить связь с другими банаховыми пространствами положительно однородных функций.

2. Установить характеристические свойства прямых экзостеров липшицевых положительно однородных функций, а также прямых экзостеров разностно-сублинейных и кусочно-линейных функций, образующих собственные подпространства в пространстве липшицевых положительно однородных функций.

3. Для основных классов (непрерывных, липшицевых, разностно-сублинейных) положительно однородных функций предложить и обосновать конструктивные методы конвертирования прямых экзостеров.

4. Разработать метод нелинейной скаляризации задач векторной оптимизации с нетранзитивным отношением предпочтения посредством липшицевых положительно однородных функций и получить на этой основе необходимые, а также достаточные условия оптимальности первого и второго порядков для общих задач векторной оптимизации.

Объект исследования — липшицевы положительно однородные функции, определенные на конечномерных векторных пространствах.

Предмет исследования — характеристические свойства липшицевых положительно однородных функций, их взаимосвязи с другими классами положительно однородных функций, алгебраические, порядковые и метрические структуры на пространстве липшицевых положительно однородных функций, приложения к исследованию негладких задач векторной оптимизации с нетранзитивным отношением предпочтения.

Научная новизна

Научная новизна представленных в диссертации результатов заключается в том, что в совокупности они образуют достаточно полную с точки зрения потребностей современного негладкого анализа теорию липшицевых положительно однородных функций и раскрывают их связи с другими классами положительно однородных функций, в частности, с непрерывными положительно однородными функциями, разностно-сублинейными и кусочно-линейными функциями. Используя установленные в диссертации новые свойства липшицевых положительно однородных функций, разработан метод нелинейной скаляризации нового класса задач векторной оптимизации с нетранзитивным отношением предпочтения, что позволило получить для этих задач как необходимые, так и достаточные условия оптимальности первого и второго порядков.

Упомянутые выше результаты являются новыми, ранее в литературе не встречались.

Положения, выносимые на защиту

1. Геометрические и аналитические критерии липшицевости положительно однородных функций, заданных на конечномерных векторных пространствах. Определение на векторном пространстве липшицевых положительно однородных функций структуры банахова пространства с нормой равной модулю Липшица, доказательство того, что как норма модуль Липшица сильнее равномерной на единичной сфере нормы, определенной на банаховом пространстве непрерывных положительно однородных функций, и слабее DC-нормы и эквивалентной ей нормы Бартэлза-Паллашке на банаховом пространстве разностно-сублинейных функций.

2. Характеристические свойства прямых экзостеров положительно однородных функций, принадлежащих пространству липшицевых положительно

однородных функций, а также пространству разностно-сублинейных функций и пространству кусочно-линейных функций. Данные результаты распространяют на указанные пространства положительно однородных функций классическую двойственность Минковского между сублинейными функциями и выпуклыми компактами.

3. Критерии липшицевости и разностной-сублинейности неотрицательных положительно однородных функций, сформулированные в терминах свойств соответствующих этим функциям радиантных множеств. Данные критерии обобщают классические результаты о двойственности между выпуклыми множествами и их калибровочными функциями.

4. Конструктивный метод построения для любой заданной непрерывной положительно однородной функции равномерно (на единичной сфере) сходящейся к ней монотонной (как неубывающей, так и невозрастающей) последовательности липшицевых положительно однородных функций и основанный на этом метод конвертирования экзостеров произвольных непрерывных положительно однородных функций.

5. Метод нелинейной скаляризации задач векторной оптимизации с нетранзитивым отношением предпочтения посредством липшицевых положительно однородных функций и полученные на его основе необходимые, а также достаточные условия оптимальности первого и второго порядков для задач векторной оптимизации с нетранзитивным отношением предпочтения.

Личный вклад соискателя

Основная часть результатов, выносимых на защиту в диссертационной работе, получена совместно с научным руководителем и принадлежит обоим авторам на паритетных условиях. Часть результатов главы 3 получена автором лично на основе рекомендаций научного руководителя.

Апробация результатов диссертации

Результаты докладывались на следующих международных конференциях:

1. Международная конференция "Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений"(12–17 сентября 2011 г., Минск);
2. Международная конференция "Конструктивный негладкий анализ и смежные вопросы"(18–23 июня 2012 г., Санкт-Петербург, Россия);
3. Международная конференция "XI Белорусская математическая конференция"(4–9 ноября 2012 г., Минск);
4. Международная конференция "Dynamical Systems: Stability, Control, Optimization"(1–5 октября 2013 г., Минск);

5. Международная конференция "6th German-Polish Conference on Optimization"(28 февраля – 4 марта 2014 г., Wittenberg, Германия);

6. Международная конференция "Динамика систем и процессы управления"(15–20 сентября 2014 г., Екатеринбург, Россия).

Опубликованность результатов диссертации

Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 14 научных работах; из них: 6 — статьи в научных изданиях в соответствии с пунктом 18 "Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь"(общим объемом 6.5 авторских листа), 1 — статья в сборнике трудов международной научной конференции, 7 — тезисы международных конференций.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из перечня условных обозначений, введения, общей характеристики работы, пяти глав, заключения и библиографического списка. Первая глава посвящена обзору литературы по теме исследования. Основные результаты исследования приводятся во второй, третьей, четвертой и пятой главах. Полный объем диссертации составляет 122 страницы, в том числе 9 рисунков. Библиографический список содержит 167 наименований, включая собственные публикации автора.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Глава 1 содержит обзор литературы по положительно однородным функциям и их приложениям к негладкому анализу и негладкой оптимизации, в частности приложениям к проблеме нелинейной скаляризации задач векторной оптимизации. В данной главе выявлены недостаточно изученные вопросы, относящиеся к липшицевым положительно однородным функциям, исходя из которых очерчен круг вопросов, подлежащих разработке в диссертации.

В **главе 2** диссертации представлен ряд новых геометрических и аналитических критериев липшицевости положительно однородных функций, а также критерии, позволяющие выделять из пространства липшицевых положительно однородных функций разностно-сублинейные функции. Кроме того, на пространстве липшицевых положительно однородных функций введена норма, определяющая структуру банахова пространства, проведено сравнение с банаховым пространством непрерывных положительно однородных функций и банаховым пространством разностно-сублинейных функций.

Функция $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется *положительно однородной*, если она удовлетворяет условию

$$p(\lambda x) = \lambda p(x)\, \forall x \in \mathbb{R}^n,\, \forall \lambda \in \mathbb{R},\, \lambda > 0. \tag{1}$$

Геометрически условие (1) эквивалентно тому, что надграфик $\operatorname{epi} p := \{(x,\, \alpha) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \,|\, p(x) \le \alpha\}$ и подграфик $\operatorname{hyp} p := \{(x,\, \alpha) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \,|\, p(x) \ge \alpha\}$ функции p являются конусами.

Положительно однородная функция p непрерывна тогда и только тогда, когда $\operatorname{epi} p$ и $\operatorname{hyp} p$ являются замкнутыми конусами. Совокупность всех непрерывных положительно однородных функций образует векторное пространство $\mathcal{P}_C(\mathbb{R}^n)$. Функция $\|\cdot\|_C : p \to \max\limits_{x \in S} |p(x)|$, где S — единичная сфера, является нормой на $\mathcal{P}_C(\mathbb{R}^n)$, определяющей структуру банахова пространства.

Говорят, что функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ удовлетворяет *условию Липшица на подмножестве* $Q \subset \mathbb{R}^n$, если существует положительное число $L > 0$, называемое *константой Липшица*, такое, что

$$|f(x) - f(y)| \le L\|x - y\| \tag{2}$$

для всех $x, y \in Q$.

Неотрицательное число $L_{f,Q} = \sup\limits_{\substack{x,y \in Q \\ x \ne y}} \dfrac{|f(x) - f(y)|}{\|x - y\|}$ называется *модулем Липшица* функции f. Очевидно, что $L_{f,Q}$ есть точная нижняя грань чисел L, удовлетворяющих неравенству (2). В случае, если $Q = \mathbb{R}^n$, модуль Липшица функции f на $\mathbb{R}^n$ будем обозначать L_f.

В **теореме 2.8** [6–А] диссертации доказано, что *положительно однородная функция* $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *липшицева на всем пространстве* $\mathbb{R}^n$ *тогда и только тогда, когда она липшицева на единичной сфере* $S \subset \mathbb{R}^n$, *при этом*

$$\max\{\|p\|_C,\, L_{p,S}\} \le L_p \le \|p\|_C + 2L_{p,S}.$$

Совокупность положительно однородных функций, удовлетворяющих условию Липшица на всем пространстве $\mathbb{R}^n$, будем обозначать символом $\mathcal{P}_L(\mathbb{R}^n)$. Пример положительно однородной функции $p : (x_1,\, x_2) \to \sqrt{|x_1 x_2|}$, которая является непрерывной, но не удовлетворяет на $\mathbb{R}^2$ условию Липшица, показывает, что $\mathcal{P}_L(\mathbb{R}^n)$ является собственным векторным подпространством в $\mathcal{P}_C(\mathbb{R}^n)$.

В следующих двух теоремах представлены критерии, выделяющие липшицевы положительно однородные функции из пространства непрерывных положительно однородных функций $\mathcal{P}_C(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 2.3. [6–A]

(i) *Непрерывная положительно однородная функция* $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *является липшицевой тогда и только тогда, когда рецессивный конус ее надграфика* $[\mathrm{epi}\, p]^\infty$ *является телесным и* $(\mathbf{0},\, 1) \in \mathrm{int}[\mathrm{epi}\, p]^\infty$ *;*

(ii) *непрерывная положительно однородная функция* $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *является липшицевой тогда и только тогда, когда рецессивный конус ее подграфика* $[\mathrm{hyp}\, p]^\infty$ *является телесным и* $(\mathbf{0},\, -1) \in \mathrm{int}[\mathrm{hyp}\, p]^\infty$ *.*

Рецессивный конус[5] множества $Q \subset \mathbb{R}^m$ определяется следующим образом: $[Q]^\infty := \{h \in \mathbb{R}^m \,|\, x + th \in Q$ для всех $x \in Q$ и всех $t > 0\}$.

Теорема 2.4. [1–A, 6–A] *Положительно однородная функция* $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *является липшицевой на всем пространстве* $\mathbb{R}^n$ *тогда и только тогда, когда для любого* $x \in \mathbb{R}^n$ *имеет место неравенство*

$$V_p(x) := \sup_{y \in \mathbb{R}^n} (p(y + x) - p(y)) < +\infty,$$

при этом функция $V_p : x \to V_p(x)$ *положительно однородна и выпукла и, кроме того,* $L_p = \|V_p\|_C$.

Следующая теорема демонстрирует, что критерий липшицевости положительно однородной функции, данный в теореме 2.4, является, по существу, аналитической версией геометрического критерия из теоремы 2.3.

Теорема 2.5. [1–A, 6–A] *Пусть* $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *— липшицева положительно однородная функция. Тогда имеет место равенство:*

$$\mathrm{epi} V_p = [\mathrm{epi}\, p]^\infty.$$

Из теоремы Вейерштрасса-Стоуна следует, что подпространство липшицевых положительно однородных функций $\mathcal{P}_L(\mathbb{R}^n)$ плотно в банаховом пространстве $(\mathcal{P}_C(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_C)$. Поскольку $\mathcal{P}_L(\mathbb{R}^n) \neq \mathcal{P}_C(\mathbb{R}^n)$, то из этого следует, что нормированное пространство $(\mathcal{P}_L(\mathbb{R}^n),\, \|\cdot\|_C)$ не является полным. Вместе с тем, в **теоремах 2.6 и 2.7** доказано [6–A], что

функция

$$\|\cdot\|_L : p \to \sup_{\substack{x, y \in \mathbb{R}^n \\ x \neq y}} \frac{|p(x) - p(y)|}{\|x - y\|} =: L_p$$

является нормой на пространстве липшицевых положительно однородных функций $\mathcal{P}_L(\mathbb{R}^n)$, *причем пространство* $(\mathcal{P}_L(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_L)$ *является банаховым. Кроме того, для любой липшицевой положительно однородной функции* $p \in \mathcal{P}_L(\mathbb{R}^n)$ *справедливо неравенство*

$$\|p\|_C \leq \|p\|_L.$$

[5] Рокафеллар, Р.Т. Выпуклый анализ / Р.Т. Рокафеллар. — М. : Мир, 1973. — 472 с.

Из последнего неравенства следует [6–A], что на подпространстве $\mathcal{P}_L(\mathbb{R}^n)$ норма $\|\cdot\|_L$ сильнее нормы $\|\cdot\|_C$.

Следующая теорема дает альтернативные представления для значений нормы $\|\cdot\|_L$ на $\mathcal{P}_L(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 2.10. [6–A] *Для любой липшицевой положительно однородной функции* $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *имеют место равенства*

$$\|p\|_L = \|V_p\|_C = \sup_{x \in T_p \cap S} \|\nabla p(x)\|,$$

где T_p *— множество всех точек, в которых функция* p *дифференцируема в классическом смысле, а* $\nabla p(x)$ *— градиент функции* p *в точке* x.

Далее в главе 2 исследуется взаимосвязь пространства липшицевых положительно однородных функций $\mathcal{P}_L(\mathbb{R}^n)$ с подпространством разностно-сублинейных функций $\mathcal{P}_{DC}(\mathbb{R}^n)$.

Положительно однородную функцию $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называют *разностно-сублинейной*, если она может быть представлена как разность двух сублинейных (выпуклых положительно однородных) функций.

Так как любая сублинейная функция является липшицевой на всем $\mathbb{R}^n$, то любая разностно-сублинейная функция также липшицева на всем $\mathbb{R}^n$ и, следовательно, $\mathcal{P}_{DC}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{P}_L(\mathbb{R}^n)$. В диссертации построен нетривиальный пример (пример 2.3), который показывает, что данное включение является собственным.

В следующих двух теоремах приведены геометрическое достаточное условие и аналитический критерий разностной сублинейности функций.

Теорема 2.11. [6–A] *Для того чтобы липшицева положительно однородная функция* $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *была разностно-сублинейной, достаточно, чтобы ее надграфик* $\mathrm{epi}\, p$ *или ее подграфик* $\mathrm{hyp}\, p$ *был представим в виде объединения конечного числа выпуклых конусов.*

Теорема 2.12. [6–A] *Положительно однородная функция* $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *является разностно-сублинейной тогда и только тогда, когда для нее можно указать такую сублинейную функцию* $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *что функции* $p(\cdot) + \varphi(\cdot)$ *и* $-p(\cdot) + \varphi(\cdot)$ *являются сублинейными.*

Векторное подпространство разностно-сублинейных функций $\mathcal{P}_{DC}(\mathbb{R}^n)$ также является плотным в банаховом пространстве $(\mathcal{P}_C(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_C)$. Это утверждение является следствием теоремы Вейерштрасса-Стоуна.

Функции

$$\|\cdot\|_{DC} : p \to \inf\{\|\overline{p}\|_C + \|\underline{p}\|_C \mid p = \overline{p} - \underline{p},\ \ \overline{p}, \underline{p} \text{ — сублинейные функции}\}$$

и

$$\|\cdot\|_{BP} : p \to \inf\{\max\{\|\overline{p}\|_C,\ \|\underline{p}\|_C\} \mid p = \overline{p} - \underline{p},\ \ \overline{p}, \underline{p} \text{ — сублинейные функции}\}$$

являются эквивалентными нормами на пространстве разностно-сублинейных функций $\mathcal{P}_{DC}(\mathbb{R}^n)$, называемые, соответственно, DC-нормой[6] и нормой Бартэлза-Паллашке[7], относительно которых пространство $\mathcal{P}_{DC}(\mathbb{R}^n)$ является банаховым.

В теореме 2.13 диссертации установлено [6–А], что *для любой разностно-сублинейной функции* $p \in \mathcal{P}_{DC}(\mathbb{R}^n)$ *справедливы неравенства*

$$\|p\|_C \leq \|p\|_L \leq \|p\|_{DC}, \tag{3}$$

которые выполняются как равенства, если p *является сублинейной или суперлинейной функцией.*

Из неравенств (3) следует, что на $\mathcal{P}_{DC}(\mathbb{R}^n)$ DC-норма (и эквивалентная ей норма Бартэлза-Паллашке) сильнее нормы $\|\cdot\|_L$, которая, как уже было показано выше, сильнее равномерной нормы $\|\cdot\|_C$.

В главе 3 диссертации липшицевы положительно однородные функции характеризуются в терминах прямых экзостеров и радиантных множеств, которые являются в определенном смысле двойственными по отношению к положительно однородным функциям объектами.

В **разделах 3.1 - 3.3** установлены характеристические свойства прямых экзостеров липшицевых положительно однородных функций, а также разностно-сублинейных и кусочно-линейных функций, образующих соответственно, векторные подпространства $\mathcal{P}_{DC}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{PL}(\mathbb{R}^n)$ такие, что $\mathcal{PL}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{P}_{DC}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{P}_L(\mathbb{R}^n)$.

Семейство сублинейных функций $\Phi = \{\varphi\}$ называется [1–А] *прямым верхним экзостером* положительно однородной функции p, если $p(x) = \inf\limits_{\varphi \in \Phi} \varphi(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$.

Аналогично, *прямым нижним экзостером* положительно однородной функции p называется [1–А] семейство суперлинейных функций $\Psi = \{\psi\}$, удовлетворяющее равенству $p(x) = \sup\limits_{\psi \in \Psi} \psi(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$.

Демьяновым В.Ф. и Рубиновым А.М.[8] доказано, что положительно однородная функция является непрерывной в том и только том случае, когда для нее существуют как верхний, так и нижний экзостеры.

[6] Гороховик, В.В. Выпуклые и негладкие задачи векторной оптимизации / В.В. Гороховик. — Минск : Наука и техника, 1990. — 239 с.

[7] Bartels, S.G. Some remarks on the space of differences of sublinear functions / S.G. Bartels, D. Pallaschke // Applicationes mathematicae. — 1994. — Vol. 22, № 3. — P. 419–426.

[8] Демьянов, В.Ф. Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление / В.Ф. Демьянов, А.М. Рубинов. — М. : Наука, 1990. — 479 с.

Положительно однородную функцию p называют *ограниченной*, если существует константа $M > 0$ такая, что $|p(x)| \leq M\|x\|$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$.

Семейство Π положительно однородных функций называют *равномерно ограниченным*, если найдется константа $M > 0$ такая, что $|p(x)| \leq M\|x\|$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и для всех $p \in \Pi$.

Теорема 3.3. [1–A] *Пусть $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — положительно однородная функция. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *функция p удовлетворяет условию Липшица на всем пространстве $\mathbb{R}^n$;*

(ii) *для функции p существует равномерно ограниченный прямой верхний экзостер;*

(iii) *для функции p существует равномерно ограниченный прямой нижний экзостер.*

В диссертации показано (**лемма 3.1.** [1–A]), что *любое семейство липшицевых положительно однородных функций, ограниченное как подмножество нормированного пространства $(\mathcal{P}_L(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_L)$, является равномерно равностепенно непрерывным на всем пространстве $\mathbb{R}^n$.*

Поскольку для любой сублинейной функции p имеет место равенство $\|p\|_C = \|p\|_L$, то из этого утверждения получаем (**следствие 3.1.** [1–A]), что *любое равномерно ограниченное семейство сублинейных функций, определенных на $\mathbb{R}^n$, является равномерно равностепенно непрерывным на всем пространстве $\mathbb{R}^n$.*

Из этих утверждений и теоремы Арцела-Асколи заключаем, что теорема 3.3 может быть переформулирована в эквивалентном виде следующим образом.

Теорема 3.4. [1–A] *Пусть $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — положительно однородная функция. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *функция p удовлетворяет условию Липшица на всем пространстве $\mathbb{R}^n$;*

(ii) *для функции p существует компактный (как подмножество банахова пространства $(\mathcal{P}_C(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_C)$) прямой верхний экзостер;*

(iii) *для функции p существует существует компактный (как подмножество банахова пространства $(\mathcal{P}_C(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_C)$) прямой нижний экзостер.*

В теоремах, представленных в разделе 3.2, выявлены характеристические свойства прямых экзостеров разностно-сублинейных функций.

Теорема 3.6. [1–A] *Положительно однородная функция $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ является разностно-сублинейной тогда и только тогда, когда она ограничена и для нее существует такая сублинейная мажоранта $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, что* *семейство*

$$\Phi_{p,\varphi} := \{x \to \varphi(x) - \langle v,\, x\rangle \,|\, v \in V_{p,\varphi}\},$$

где

$$V_{p,\varphi} = \{v \in \mathbb{R}^n \,|\, p(x) \le \varphi(x) - \langle v, x\rangle \; \forall x \in \mathbb{R}^n\},$$

является прямым верхним экзостером функции p.

Теорема 3.7. [1–А] *Положительно однородная функция* $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *является разностно-сублинейной тогда и только тогда, когда она ограничена и для нее существует такая суперлинейная миноранта* $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *что семейство*

$$\Psi_{p,\psi} := \{x \to \psi(x) + \langle u,\, x\rangle \,|\, u \in U_{p,\psi}\},$$

где

$$U_{p,\psi} = \{u \in \mathbb{R}^n \,|\, p(x) \ge \psi(x) + \langle u, x\rangle \;\; \forall x \in \mathbb{R}^n\},$$

является прямым нижним экзостером функции p.

Символом $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ обозначим векторное пространство линейных функций, определенных на $\mathbb{R}^n$. Семейство Γ положительно однородных функций назовем [1–А] $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$-*плоским*, если $\varphi - \psi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ для любых $\varphi,\, \psi \in \Gamma$.

Теорема 3.8. [1–А] *Пусть* $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *— положительно однородная функция. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *функция* p *является разностно-сублинейной;*

(ii) *для функции* p *существует* $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$*-плоский компактный (как подмножество банахова пространства* $(\mathcal{P}_C(\mathbb{R}^n),\, \|\cdot\|_C)$ *) прямой верхний экзостер;*

(iii) *для функции* p *существует* $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$*-плоский компактный (как подмножество банахова пространства* $(\mathcal{P}_C(\mathbb{R}^n),\, \|\cdot\|_C)$ *) прямой нижний экзостер.*

Характеристические свойства прямых экзостеров кусочно-линейных функций, образующих собственное подпространство $\mathcal{PL}(\mathbb{R}^n)$ в пространстве разностно-сублинейных функций $\mathcal{P}_{DC}(\mathbb{R}^n)$, исследованы в разделе 3.3.

Напомним[9], что функция $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется *кусочно-линейной*, если она непрерывна, и для нее можно указать такое конечное покрытие пространства $\mathbb{R}^n$ телесными выпуклыми конусами $K_1, K_2, \ldots, K_k$, что сужение p на каждое коническое множество K_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, совпадает с сужением на это множество некоторой линейной функции.

Теорема 3.9. [1–А] *Положительно однородная функция* $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *является кусочно-линейной в том и только том случае, когда для функ-*

[9] Gorokhovik, V.V. Piecewise affine functions and polyhedral sets / V.V. Gorokhovik, O.I. Zorko // Optimization: A Journal of Mathematical Programming and Operations Research. — 1994. — Vol. 31, № 2. — P. 209 –221.

ции p существуют конечный прямой верхний и конечный прямой нижний экзостеры.

В **разделе 3.4** неотрицательные липшицевы положительно однорородные функции, а также неотрицательные разностно-сублинейные функции, характеризуются в терминах соответствующих им радиантных множеств.

Множество U называется *радиантным*, если для любого $x \in U$ и любого $t \in (0,1]$ имеет место $tx \in U$.

Теорема 3.13. [2–A] *Неотрицательная положительно однородная функция $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ липшицева на $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда соответствующее ей множество $U_p = \{x \in \mathbb{R}^n | \, p(x) \leq 1\}$ является радиантным, и для него существует семейство выпуклых подмножеств $\{C_i, \, i \in I\}$, таких, что*

1) $U_p = \bigcup\limits_{i \in I} C_i$*;*

2) $\exists \varepsilon > 0 : \, B(0, \varepsilon) \subset C_i \, \forall i \in I$*.*

Теорема 3.14. [2–A] *Неотрицательная положительно однородная функция $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ разностно-сублинейна на $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда соответствующее ей множество $U_p = \{ x \in \mathbb{R}^n \, | \, p(x) \leq 1 \}$ является радиантным, и для него существует семейство выпуклых подмножеств $\{C_i, \, i \in I\}$, таких, что*

1) $U_p = \bigcup\limits_{i \in I} C_i$*;*

2) $\exists \varepsilon > 0 : \, B(0, \varepsilon) \subset C_i \, \forall i \in I$*;*

3) семейство $\{\mu_{C_i}, \, i \in I\}$, состоящее из калибровочных функций (или, по другому, функций Минковского) выпуклых множеств C_i, $i \in I$, является $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$-плоским.

Глава 4 диссертации посвящена методам конвертирования прямых экзостеров непрерывных положительно однородных функций. Под конвертированием понимается преобразование верхнего экзостера в нижний, или наоборот.

В следующей теореме представлен метод конвертирования равномерно ограниченных прямых экзостеров. Как установлено в теореме 3.3, равномерно ограниченные экзостеры соответствуют липшицевым положительно однородным функциям и только им.

Теорема 4.1. [3–A, 5–A] *Пусть $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — липшицева положительно однородная функция, и пусть Φ — равномерно ограниченный прямой верхний экзостер функции p. Тогда семейство суперлинейных функций*

$$\Psi = \{\psi_{\bar{x}} : x \to \inf_{\varphi \in \Phi} \langle a(\varphi, \bar{x}), x \rangle \, | \, \bar{x} \in S\},$$

где $a(\varphi, \bar{x}) \in \partial\varphi(\bar{x})$ — произвольный субградиент функции φ в точке

$\bar{x} \in S$, является равномерно ограниченным прямым нижним экзостером функции p.

Для $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$-плоских равномерно ограниченных прямых экзостеров, соответствующих в силу теоремы 3.4 разностно-сублинейным функциям и только им, теорема 4.1 допускает некоторое упрощение.

Теорема 4.2. [5–A] *Пусть $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — разностно-сублинейная функция, и пусть Φ — $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$-плоский равномерно ограниченный прямой верхний экзостер функции p. Тогда, какая бы ни была функция φ_0 из Φ, семейство функций*

$$\Psi = \{\psi_{\bar{x}} : x \to \inf_{\varphi \in \Phi}(\langle a(\varphi_0, \bar{x}), x\rangle - \varphi_0(x) + \varphi(x)) \,|\, \bar{x} \in S\},$$

где $a(\varphi_0, \bar{x}) \in \partial\varphi_0(\bar{x})$ — произвольный субградиент функции φ_0 в точке $\bar{x} \in S$, является равномерно ограниченным прямым нижним экзостером функции p.

Важным результатом главы 4 является метод конвертирования прямых экзостеров, которые не являются равномерно ограниченными и, следовательно, соответствуют непрерывным положительно однородным функциям, не удовлетворяющим условию Липшица. Этот метод состоит из двух этапов. На первом этапе исходная непрерывная положительно однородная функция аппроксимируется монотонным (неубывающим или невозрастающим в зависимости от того верхний или нижний экзостер подлежит конвертированию) семейством липшицевых положительно однородных функций. Метод построения такого аппроксимирующего семейства является конструктивным и представляет самостоятельный интерес.

Пусть $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — непрерывная положительно однородная функция. Символом $\Psi_0(p)$ обозначим совокупность всех суперлинейных минорант функции p. Величину k_p определим следующим образом:

$$k_p = \inf_{\psi \in \Psi_0(p)} \|\psi\|_C. \tag{4}$$

Функции p и вещественному числу k, $k > k_p$, поставим в соответствие функцию

$$p_k : x \to \inf_{y \in \mathbb{R}^n} (p(y) + k\|y - x\|)\,. \tag{5}$$

Теорема 4.4. [3–A, 5–A] *Любая непрерывныя положительно однородная функция $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ является поточечной верхней гранью однопараметрического неубывающего семейства липшицевых положительно однородных функций $\{p_k,\, k \geq k^*\}$, $k^* > k_p$, где величина k_p и функции p_k определяются, соответственно, равенствами* (4) *и* (5), *т. е. функция p представима*

в виде
$$p(x) = \sup_{k \ge k_p} p_k(x) \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Подобным образом, заменив функцию p функцией $-p$, можно представить любую непрерывную положительно однородную функцию p в виде поточечной нижней грани однопараметрического невозрастающего семейства липшицевых положительно однородных функций.

Из теоремы 4.4 и теоремы Дини[10] следует, что любая непрерывная положительно однородная функция p есть равномерный предел соответствующей ей последовательности функций $\{p_k,\, k \in \mathbb{N},\, k > k_p\}$, т. е. $\|p - p_k\|_C \to 0$ при $k \to \infty$.

Пусть Φ — прямой верхний экзостер функции p.

Каждой сублинейной функции φ из прямого верхнего экзостера Φ и каждому числу $k \in \mathbb{R},\, k > k_p$, поставим в соответствие конечную сублинейную функцию $\varphi_k : x \to \inf\limits_{y \in \mathbb{R}^n} (\varphi(y) + k\|y - x\|)$.

Теорема 4.5. [3–A, 5–A] *Для любых $k \in \mathbb{R}, k > k_p$, семейство $\Phi_k = \{ \varphi_k \mid \varphi \in \Phi \}$ является равномерно ограниченным прямым верхним экзостером функции p_k.*

Теорема 4.6. [3–A, 5–A] *Пусть $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — непрерывная положительно однородная функция, и Φ — прямой верхний экзостер функции p. Для каждой сублинейной функции $\varphi \in \Phi$, точки $\bar{x} \in S$ и каждого $k \in \mathbb{R},\, k > k_p$, выберем произвольный субградиент $a(\varphi, \bar{x}, k) \in \partial\varphi$ функции φ, такой, что*
$$\|a(\varphi, \bar{x}, k)\| \le k \quad \text{и} \quad \langle a(\varphi, \bar{x}, k),\, \bar{x}\rangle = \inf_{y \in \mathbb{R}^n} (\varphi(y) + k\|y - \bar{x}\|) =: \varphi_k(\bar{x}).$$

Тогда для любого $k^* \in \mathbb{R},\, k^* > k_p$, семейство суперлинейных функций
$$\Psi(k^*) = \{\psi_{\bar{x},\,k} : x \to \inf_{\varphi \in \Phi} \langle a(\varphi, \bar{x},\, k), x\rangle \mid \bar{x} \in S,\, k \ge k^*\}$$
является прямым нижним экзостером функции p.

В **главе 5** диссертации полученные выше результаты, характеризующие липшицевы положительно однородные функции, применяются для исследования задачи векторной оптимизации с нетранзитивным отношением предпочтения. Начнем с формулировки задачи векторной оптимизации.

Пусть $F : X \to Y$ — отображение из некоторого множества X в вещественное векторное пространство Y, на котором задано асимметричное бинарное отношение $\prec$ (называемое отношением предпочтения), согласованное с алгебраическими операциями данного векторного пространства.

[10] Bourbaki, N. General Topology: Chapters 5-10 / N. Bourbaki. — 2nd print. — Berlin: Springer, 1989. — 363 p.

Согласованность отношения предпочтения $\prec$ с алгебраическими операциями пространства Y означает, что для любых $y_1, y_2, y \in Y$ и любого вещественного числа $\alpha > 0$ выполняются следующие импликации:

$$y_1 \prec y_2 \Longrightarrow y_1 + y \prec y_2 + y$$

и

$$y_1 \prec y_2 \Longrightarrow \alpha y_1 \prec \alpha y_2.$$

Пусть, кроме того, задано подмножество Q из X, называемое далее множеством допустимых точек.

Говорят, что *точка* $\bar{x} \in Q$ *доставляет отображению* $F : X \to Y$ $\prec$*–минимум на подмножестве* $Q \subset X$, если не существует точки $x \in Q$ такой, что $F(x) \prec F(\bar{x})$.

Если X является топологическим пространством, то естественным образом вводится понятие локального $\prec$–минимума отображения F на подмножестве Q.

Задача нахождения точек (локального) $\prec$–минимума отображения $F : X \to Y$ на подмножестве $Q \subset X$ называется *задачей векторной оптимизации.*

Практически во всех существующих работах, в которых исследуются задачи векторной оптимизации, предполагается, что отношение предпочтения $\prec$ является не только асимметричным, но и транзитивным. Вместе с тем, в приложениях, в частности, в экономике и социологии, встречаются задачи, в которых отношение предпочтения не является транзитивным. Это мотивирует исследование задач векторной оптимизации без предположения о транзитивности отношения предпочтения. Цель главы 5 — получить необходимые, а также достаточные условия $\prec$–минимальности первого и второго порядка для допустимых точек задач векторной оптимизации с нетранзитивным отношением предпочтения.

Вывод условий $\prec$–минимальности осуществляется в диссертации в предположении, что Y является конечномерным нормированным пространством, а согласованное отношение предпочтения $\prec$, определенное на Y, таково, что соответствующий ему конус положительных элементов $P_\prec := \{y \in Y \mid 0 \prec y\}$ является телесным и при этом $\mathrm{cl}(\mathrm{int} P_\prec) = \mathrm{cl} P_\prec$. Эти предположения далее считаем выполненными, если даже об этом специально не сказано.

В основу методики вывода условий $\prec$–минимальности положено следующее утверждение (см. **предложение 5.2.** [4–A]):

для любого согласованного отношения предпочтения $\prec$, *определенного на нормированном пространстве* Y *и удовлетворяющего условиям* $\mathrm{int} P_\prec \neq \varnothing$ *и* $\mathrm{cl}(\mathrm{int} P_\prec) = \mathrm{cl} P_\prec$, *существует компактное (как подмножество банахова* *пространства* $(\mathcal{P}_C(Y),\, \|\cdot\|_C)$ *) семейство сублинейных функций* $\Phi_\prec$ *такое, что*

$$\min_{\varphi\in\Phi_\prec} \varphi(y_1 - y_2) < 0 \Longrightarrow y_1 \prec y_2 \tag{6}$$

и

$$y_1 \prec y_2 \Longrightarrow \min_{\varphi\in\Phi_\prec} \varphi(y_1 - y_2) \le 0. \tag{7}$$

В качестве семейства $\Phi_\prec$, удовлетворяющего импликациям (6) и (7), может быть выбран, например, любой прямой верхний экзостер липшицевой положительно однородной функции

$$p_\prec : y \to \inf_{z\in P_\prec} \|y+z\| - \inf_{z\in Y\setminus P_\prec} \|y+z\|.$$

Используя импликации (6) и (7), аналитически характеризующие отношение предпочтения $\prec$, исследуемая задача векторной оптимизации сводится к скалярным вариационным неравенствам. Такое сведение принято называть нелинейной скаляризацией задачи векторной оптимизации.

Теорема о нелинейной скаляризации [4–A]. *а) Для того чтобы точка* $\bar{x} \in Q$ *доставляла локальный* $\prec$*–минимум отображению* $F : X \to Y$ *на множестве* $Q \subset X$*, необходимо, чтобы существовала окрестность* $\mathcal{N}(\bar{x})$ *точки* $\bar{x}$ *такая, что*

$$\min_{\varphi\in\Phi_\prec} \varphi(F(x) - F(\bar{x})) \ge 0 \text{ для всех } x \in Q \cap \mathcal{N}(\bar{x}), \tag{8}$$

где $\Phi_\prec$ *— компактное (как подмножество банахова пространства* $(\mathcal{P}_C(Y),\, \|\cdot\|_C)$ *) семейство сублинейных функций, удовлетворяющее импликациям (6) и (7).*

б) Для того чтобы точка $\bar{x} \in Q$ *доставляла локальный* $\prec$*–минимум отображению* $F : X \to Y$ *на множестве* $Q \subset X$*, достаточно, чтобы для некоторого компактного (как подмножество банахова пространства* $(\mathcal{P}_C(Y),\, \|\cdot\|_C)$ *) семейства сублинейных функций* $\Phi_\prec$*, удовлетворяющего импликациям (6) и (7), выполнялось неравенство*

$$\min_{\varphi\in\Phi_\prec} \varphi(F(x) - F(\bar{x})) > 0 \text{ для всех } x \in Q \cap \mathcal{N}(\bar{x}),\ F(x) \ne F(\bar{x}). \tag{9}$$

Исследуя вариационными методами неравенства (8) и (9), приходим к следующим условиям $\prec$-минимальности первого и второго порядка.

Теорема 5.2. [4–A] **(условия первого порядка для точек** $\prec$**-минимума)** *Пусть* $\bar{x} \in Q$*, и пусть отображение* $F : X \to Y$ *является* H*–дифференцируемым по направлениям в точке* $\bar{x}$*. Тогда* *а) для того чтобы точка $\bar{x} \in Q$ доставляла отображению $F : X \to Y$ локальный $\prec$-минимум на множестве Q, необходимо, чтобы для любого компактного (как подмножество банахова пространства $(\mathcal{P}_C(Y), \|\cdot\|_C)$) семейства сублинейных функций $\Phi_\prec$, удовлетворяющего импликациям (6) и (7), выполнялось неравенство*

$$\min_{\varphi \in \Phi_\prec} \varphi(F'(\bar{x} \,|\, h)) \geq 0 \ \text{для всех} \ h \in T(\bar{x} \,|\, Q);$$

б) если нормированные пространства X и Y конечномерны, то для того чтобы точка $\bar{x} \in Q$ доставляла отображению $F : X \to Y$ локальный $\prec$-минимум на множестве Q, достаточно, чтобы для некоторого компактного (как подмножество банахова пространства $(\mathcal{P}_C(Y), \|\cdot\|_C)$) семейства сублинейных функций $\Phi_\prec$, удовлетворяющего импликациям (6) и (7), выполнялось неравенство

$$\min_{\varphi \in \Phi_\prec} \varphi(F'(\bar{x} \,|\, h)) > 0 \ \text{для всех} \ h \in T(\bar{x} \,|\, Q), \ h \neq 0.$$

Здесь $F'(\bar{x} \,|\, \cdot) : X \to Y$ — H–производная по направлениям отображения F в точке $\bar{x}$, $T(\bar{x} \,|\, Q)$ — касательный конус первого порядка к множеству Q в точке $\bar{x}$.

Напомним, что 1) отображение $F : X \to Y$ называется H-дифференцируемым по направлениям в точке $\bar{x}$, если для любого $h \in X$ существует предел

$$F'(\bar{x} \,|\, h) = \lim_{\substack{u \to h, \\ t \to 0, \, t > 0}} \frac{F(\bar{x} + tu) - F(\bar{x})}{t},$$

при этом H-производной по направлениям отображения F в точке $\bar{x}$ называется отображение $F'(\bar{x} \,|\, \cdot) : h \to F'(\bar{x} \,|\, h)$; 2) касательный конус первого порядка $T(\bar{x} \,|\, Q)$ состоит из таких и только таких векторов $h \in X$, для которых существуют последовательности $\{x_n\} \subset Q$ и $\{t_n\}$, $t_n > 0$, такие, что $x_n \to \bar{x}$, $t_n \to 0$ и $\dfrac{x_n - \bar{x}}{t_n} \to h.$

Условия $\prec$-минимальности второго порядка получены в диссертации при дополнительном предположении о финитности нетранзитивного согласованного отношения предпочтения $\prec$.

Будем говорить, что согласованное отношение предпочтения $\prec$, определенное на векторном пространстве Y, удовлетворяет условию финитности, если оно представимо в виде объединения конечного числа согласованных транзитивных отношений предпочтения. Это предположение эквивалентно существованию конечного семейства $\Phi_\prec$ сублинейных функций, удовлетворяющего тождествам (6) и (7).

Теорема 5.3. (необходимое условие второго порядка для точек локального $\prec$–минимума) [4–A] *Пусть отображение $F : X \to Y$ является дважды параболически H–дифференцируемым по направлениям с отклонениями в точке $\bar{x} \in Q$, и пусть согласованное отношение предпочтения $\prec$, определенное на векторном пространстве Y, удовлетворяет условию финитности. Тогда для того чтобы точка $\bar{x}$ доставляла отображению $F : X \to Y$ локальный $\prec$–минимум на множестве Q, необходимо, чтобы для любого конечного семейства сублинейных функций $\Phi_{\prec}$, удовлетворяющего импликациям* (6) *и* (7), *и любого $h \in T(\bar{x}\,|\,Q)$ такого, что $\min\limits_{\varphi\in\Phi_{\prec}} \varphi(F'(\bar{x}\,|\,h)) = 0$, выполнялось неравенство*

$$\inf_{w\in T^2(\bar{x},\,h\,|\,Q)}\ \min_{\varphi\in\Phi_{\prec}(F'(\bar{x})h)}\ \max_{y^*\in\partial\varphi(F'(\bar{x})h)} \langle y^*, F''(\bar{x}\,|\,h,\,w)\rangle \geq 0,$$

где $T^2(\bar{x},\,h\,|\,Q)$ — множество касательных векторов второго порядка к множеству Q в точке $\bar{x}$ по направлению h,

$$\Phi_{\prec}(F'(\bar{x})h) := \{\varphi \in \Phi_{\prec}\,|\,\varphi(F'(\bar{x})h) = 0\},$$

$$\partial\varphi(F'(\bar{x})h) = \{y^* \in \partial\varphi\,|\,\langle y^*, F'(\bar{x})h\rangle = \varphi(F'(\bar{x})h)\}.$$

Вектор $w \in X$ является *касательным вектором второго порядка* к множеству Q в точке $\bar{x}$ по направлению $h \in X$, если существуют последовательности $\{x_n\} \subset Q$ и $\{t_n\}$, $t_n > 0$, такие, что

$$x_n \to \bar{x},\ t_n \to 0 \text{ и } \frac{x_n - \bar{x} - t_n h}{\frac{1}{2}t_n^2} \to w.$$

Говорят, что отображение $F : X \to Y$ дважды параболически H–дифференцируемо по направлениям с отклонениями в точке $\bar{x}$, если для каждого направления $h \in X$ и отклонения $w \in X$, отображение F H–дифференцируемо в точке $\bar{x}$ по направлению h и, кроме того, существует предел

$$F''(\bar{x}\,|\,h,\,w) = \lim_{(t,\,z)\to(0^+,\,w)} \frac{F(\bar{x} + th + \frac{1}{2}t^2 z) - F(\bar{x}) - tF'(\bar{x}\,|\,h)}{\frac{1}{2}t^2}, \qquad (10)$$

Теорема 5.4. (достаточное условие второго порядка для точек локального $\prec$–минимума) [4–A] *Предположим, что нормированные пространства X и Y конечномерны и пусть в точке $\bar{x} \in Q$ отображение $F : X \to Y$ является дважды дифференцируемым по Фреше, а согласованное отношение предпочтения $\prec$, определенное на векторном пространстве*

Y, удовлетворяет условию финитности. Тогда, для того чтобы точка $\bar{x} \in Q$ доставляла отображению $F : X \to Y$ локальный $\prec$–минимум на множестве Q, достаточно, чтобы для некоторого конечного семейства сублинейных функций $\Phi_{\prec}$, удовлетворяющего импликациям (6) и (7), выполнялись следующие условия 1) было справедливо неравенство

$$\min_{\varphi \in \Phi_{\prec}} \varphi(F'(\bar{x})h) \geq 0 \text{ для всех } h \in T(\bar{x}\,|\,Q);$$

2) для любого $h \in C(\bar{x}) := \{h \in T(\bar{x}\,|\,Q) \,|\, \min\limits_{\varphi \in \Phi_{\prec}} \varphi(F'(\bar{x})h) = 0\}$, $h \neq 0$, имело место неравенство

$$\gamma(\bar{x}, h) := \inf_{w \in T^2(\bar{x},\, h\,|\,Q)} \min_{\varphi \in \Phi_{\prec}(F'(\bar{x})h)} \max_{y^* \in \partial\varphi(F'(\bar{x})h)} \langle y^*, F'(\bar{x})w + F''(\bar{x})[h,\, h]\rangle > 0, \tag{11}$$

где

$$\Phi_{\prec}(F'(\bar{x})h) := \{\varphi \in \Phi_{\prec} \,|\, \varphi(F'(\bar{x})h) = 0\},$$
$$\partial\varphi(F'(\bar{x})h) = \{y^* \in \partial\varphi \,|\, \langle y^*, F'(\bar{x})h\rangle = \varphi(F'(\bar{x})h)\};$$

3) множество Q удовлетворяло условию регулярности второго порядка в точке $\bar{x}$ по любому направлению $h \in C(\bar{x})$, $h \neq 0$.

Здесь $F'(\bar{x})$ и $F''(\bar{x})$ — соответственно первая и вторая производные Фреше отображения F в точке $\bar{x}$.

Множество $Q \subset X$ удовлетворяет условию регулярности второго порядка в точке $\bar{x} \in Q$ по направлению $h \in X$, если для любых последовательностей $\{x_n\} \subset Q$ и $\{t_n\}$, $t_n > 0$, таких, что $x_n \to \bar{x}$, $t_n \to 0$ и $\dfrac{x_n - \bar{x}}{t_n} \to h$, выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}\left(\frac{x_n - \bar{x} - t_n h}{\frac{1}{2}t_n^2}, T^2(\bar{x}, h\,|\,Q)\right) = 0,$$

где $\operatorname{dist}(z,\, Q) := \inf\limits_{u \in M} \|z - u\|$ — расстояние от точки z до множества Q.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

В данной диссертации:

1. Получены геометрические и аналитические критерии липшицевости положительно однородных функций, заданных на конечномерных векторных пространствах. На векторном пространстве липшицевых положительно однородных функций определена структура банахова пространства с модулем

Липшица в качестве нормы, проведено доказательство того, что как норма модуль Липшица сильнее равномерной на сфере нормы и слабее DC-нормы и эквивалентной ей нормы Бартэлза-Паллашке на банаховом пространстве разностно-сублинейных функций [1–A, 6–A, 7–A, 11–A, 14–A].

2. Доказаны характеристические свойства прямых экзостеров положительно однородных функций, принадлежащих пространству липшицевых положительно однородных функций, пространству разностно-сублинейных функций и пространству кусочно-линейных функций. Данные результаты распространяют на указанные пространства положительно однородных функций классическую двойственность Минковского между сублинейными функциями и выпуклыми компактами [1–A, 8–A, 9–A].

3. Получены критерии липшицевости и разностной-сублинейности неотрицательных положительно однородных функций, сформулированные в терминах свойств соответствующих этим функциям радиантных множеств. Данные критерии обобщают классические результаты о двойственности между выпуклыми множествами и их калибровочными функциями [2–A, 10–A].

4. Разработан конструктивный метод построения для любой заданной непрерывной положительно однородной функции равномерно (на единичной сфере) сходящейся к ней монотонной (как неубывающей, так и невозрастающей) последовательности липшицевых положительно однородных функций и основанный на этом метод конвертирования экзостеров произвольных непрерывных положительно однородных функций [3–A, 5–A, 12–A, 13–A].

5. Предложен метод нелинейной скаляризации задач векторной оптимизации с нетранзитивым отношением предпочтения посредством липшицевых положительно однородных функций и получены на его основе необходимые, а также достаточные условия оптимальности первого и второго порядков для общих задач векторной оптимизации с нетранзитивным отношением предпочтения [4–A].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Результаты диссертации имеют теоретический характер. Основные приложения они могут найти в исследованиях в области негладкого анализа и негладкой оптимизации. Кроме того, разработанный в диссертации конструктивный метод построения для любой непрерывной положительно однородной функции неубывающей и невозрастающей последовательностей липшицевых положительно однородных функций, равномерно сходящихся к данной функции, может найти приложения в теории аппроксимации.

На основе результатов диссертации может быть подготовлен спецкурс для студентов-математиков.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в научных журналах

1–А. Гороховик, В.В. Характеристические свойства прямых экзостеров различных классов положительно однородных функций / В.В. Гороховик, М.А. Старовойтова // Труды Института математики НАН Беларуси. — 2011. — Т 19, № 2. — С. 12–25.

2–А. Трофимович, М.А. Радиантные множества и критерии липшицевости и разностной сублинейности неотрицательных положительно однородных функций / М.А. Трофимович // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.–мат. навук. — 2013. — № 3. — С. 17–21.

3–А. Гороховик, В.В. Метод конвертирования экзостеров непрерывных положительно однородных функций / В.В. Гороховик, М.А. Трофимович // Доклады Национальной академии наук Беларуси. — 2013. — Т. 57, № 5. — С. 28–36.

4–А. Гороховик, В.В. Условия оптимальности первого и второго порядка в задачах векторной оптимизации с нетранзитивным отношением предпочтения / В.В. Гороховик, М.А. Трофимович // Труды института математики и механики УрО РАН. — 2014. — Т. 20, № 4. — С. 81–96.

5–А. Gorokhovik,V.V. On methods for converting exhausters of positively homogeneous functions / V.V. Gorokhovik, M.A. Trafimovich // Optimization: A Journal of Mathematical Programming and Operations Research. — 2015. — Mode of access: http://dx.doi.org/10.1080/02331934.2015.1032285. — Date of access: 21.04.2015.

6–А. Гороховик, В.В. Геометрические и аналитические характеристики положительно однородных функций / В.В. Гороховик, М.А. Трофимович // Труды Института математики НАН Беларуси. — 2015. — Т 23, № 1. — С. 27–54.

Статьи в сборниках материалов научных конференций

7–А. Гороховик, В.В. Банаховы подпространства пространства положительно однородных функций / В.В. Гороховик, М.А. Трофимович // Динамика систем и процессы управления: Труды международной конференции, посв. 90-летию со дня рождения акад. Н.Н. Красовского, Екатеринбург, Россия, 15-20 сентября 2014 г. / ИММ УрО РАН им. Н.Н. Красовского ; редкол.: В.И. Максимов, Т.Ф. Филиппова. — Екатеринбург, 2015. — С. 118–125.

Тезисы

8–А. Гороховик, В.В. Характеристические свойства экзостеров различных классов положительно однородных функций / В.В. Гороховик, М.А. Старовойтова // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений : Тез. докл. междунар. конф., Минск, 12–17 сентября 2011 г. / Институт математики НАН Беларуси; редкол.: С.В. Рогозин. — Минск, 2011. — С. 48–49.

9–А. Gorokhovik, V.V. Primal exhausters of positively homogeneous functions / V.V. Gorokhovik, M.A. Starovoitava // Конструктивный негладкий анализ и смежные вопросы. Тезисы докладов международной конференции, Санкт-Петербург, 18–23 июня 2012 г. / Междунар. матем. ин-т Леонарда Эйлера, Санкт-Петербургский гос. ун-т, Национальный исследовательский ун-т — высшая школа экономики; редкол.: В.Ф. Демьянов, Г.Ш. Тамасян. — Санкт–Петербург, 2012. — С. 63–65.

10–А. Старовойтова, М.А. Радиантные множества и неотрицательные положительно однородные функции / М.А. Старовойтова // XI Белорусская математическая конференция : Тез. докл. Междунар. науч. конф., Минск, 4–9 ноября 2012 г. / Институт математики НАН Беларуси; редкол.: С.Г. Красовский, В.В. Лепин. — Минск, 2012. — Ч. 1. — С. 22–23.

11–А. Gorokhovik, V.V. Classes of positively homogeneous functions / V.V. Gorokhovik., M.A. Trafimovich // Optimization and Applications : Abstracts. Petrovac, Montenegro, September 22–28, 2013 / The Montenegrin Academy of Sciences and Arts, University of Montenegro, University of Evora, Portugal Dorodniyn Computing Centre of RAS; ed.: V.U. Malkova. — Moscow, 2013. — p. 76–77.

12–А. Gorokhovik, V.V. Convertibility of exhausters of continuous positively homogeneous functions / V.V. Gorokhovik, M.A. Trafimovich // Dynamical Systems: stability, control, optimization (dedicated to the 95th anniversary of Ye.A.Barbashin) : тез. докладов Междунар. конф., 1–5 октября 2013 г. / Белорус. гос. ун-т, Ин-т математики НАН Беларуси; редкол.: В.В. Альсевич [и др.]. — Минск, 2013. — С. 23–24.

13–А. Gorokhovik, V.V. Primal exhausters of positively homogeneous functions and their convertors / V.V. Gorokhovik, M.A. Trafimovich // 6th German-Polish Conference on Optimization : Book of Abstracts, Wittenberg, Germany, February 28 – March 4, 2014. / TU Bergakademie Freiberg, Martin Luther Universitдt Halle-Wittenberg, University of Zielona Gyra, Polish Academy of Sciences; eds.: St. Dempe [et al.]. — Wittenberg, 2014. — P. 38–39.

14–А. Гороховик, В.В. Банаховы пространства положительно однородных функций в негладком анализе и оптимизации / В.В. Гороховик, М.А. Трофимович // Динамика систем и процессы управления: Тез. докл. Междунар. конференции, посвященной 90-летию со дня рождения акад. Н.Н. Красовского. Екатеринбург, Россия, 15–20 сентября 2014 г. / ИММ УрО РАН, УРФУ; редкол.: В.С. Пацко [и др.]. — Екатеринбург, 2014. — С. 57–58.

РЕЗЮМЕ

Трофимович Марина Александровна

Липшицевы положительно однородные функции и их приложения к задачам векторной оптимизации с нетранзитивным отношением предпочтения

Ключевые слова: положительно однородная функция, условие Липшица, экзостер, векторная оптимизация, нетранзитивное предпочтение, нелинейная скаляризация, условия оптимальности.

Целью диссертации является всестороннее исследование липшицевых положительно однородных функций, определенных на конечномерных векторных пространствах, их взаимосвязей с другими классами положительно однородных функций, а также их приложения к исследованию задач векторной оптимизации с нетранзитивным отношением предпочтения.

В диссертации получены следующие новые результаты:

1. Сформулированны и доказаны геометрические и аналитические критерии липшицевости положительно однородных функций. На векторном пространстве липшицевых положительно однородных функций введена структура банахова пространства с нормой модуль Липшица. Проведено сравнение с банаховым пространством непрерывных положительно однородных функций и банаховым пространством разностно-сублинейных функций.

2. Выявлены характеристические свойства прямых экзостеров липшицевых положительно однородных, разностно-сублинейных и кусочно-линейных функций. Данные результаты распространяют на соответствующие пространства положительно однородных функций классическую двойственность Минковского между сублинейными функциями и выпуклыми компактами.

3. Установлены критерии липшицевости и разностной-сублинейности неотрицательных положительно однородных функций в терминах свойств соответствующих им радиантных множеств. Данные критерии обобщают классические результаты о двойственности между выпуклыми множествами и их калибровочными функциями.

4. Разработан метод конвертирования экзостеров произвольных непрерывных положительно однородных функций.

5. Для задач векторной оптимизации с нетранзитивным отношением предпочтения развит метод нелинейной скаляризации и получены необходимые, а также достаточные условия оптимальности первого и второго порядков.

Результаты диссертации имеют теоретический характер. Они могут быть использованы в негладком анализе и негладкой оптимизации.

РЭЗЮМЭ

Трафімовіч Марына Аляксандраўна

Ліпшыцавы дадатна аднародныя функцыі і іх дастасаванне да задач вектарнай аптымізацыі з нетранзітыўным дачыненнем перавагі

Ключавыя словы: дадатна аднародная функцыя, умова Ліпшыца, экзостэр, вектарная аптымізацыя, нетранзітыўная перавага, нелінейная скалярызацыя, умовы аптымальнасці.

Мэтай дысертацыі з'яўляецца усебаковае даследаванне ліпшыцавых дадатна аднародных функцый, вызначаных на канечнамерных вектарных прасторах, іх узаемасувязяў з іншымі класамі дадатна аднародных функцый, а таксама іх дастасаванні да даследавання задач вектарнай аптымізацыі з нетранзітыўным дачыненнем перавагі.

У дысертацыі атрыманы наступныя новыя вынікі:

1. Сфармуляваны і даказаны геаметрычныя і аналітычныя крытэрыі ліпшыцавасці дадатна аднародных функцый. На вектарнай прасторы ліпшыцавых дадатна аднародных функцый ўведзена структура банахавай прасторы з нормай модуль Ліпшыца, для якой праведзена параўнанне з банахавай прасторай непарыўных дадатна аднародных функцый и банахавай прасторай рознасна-сублінейных функцый.

2. Выяўлены характарыстычныя ўласцівасці прамых экзостэраў ліпшыцавых дадатна аднародных, рознасна-сублінейных і кусочна-лінейных функцый. Гэтыя вынікі распаўсюджваюць на адпаведныя прасторы дадатна аднародных функцый класічную дваістасць Мінкоўскага паміж сублінейнымі функцыямі і выпуклымі кампактамі.

3. Установлены крытэрыі ліпшыцавасці і рознаснай–сублінейнасці неадмоўных дадатна аднародных функцый у тэрмінах уласцівасцяў адпаведных ім радыянтных мностваў. Дадзеныя крытэрыі абагульняюць класічныя вынікі аб дваістасці паміж выпуклымі мноствамі і іх калібровачнымі функцыямі.

4. Распрацаваны метад канвертавання экзостэраў адвольных непарыўных дадатна аднародных функцый.

5. Для задач вектарнай аптымізацыі з нетранзітыўным дачыненнем перавагі створан метад нелінейнай скалярызацыі і атрыманы неабходныя, а таксама дастатковыя ўмовы аптымальнасці першага і другога парадкаў .

Вынікі дысертацыі маюць тэарэтычны характар. Яны могуць быць выкарыстаны ў негладкім аналізе і негладкай аптымізацыі.

SUMMARY

Maryna Trafimovich

Lipschitz continuous positively homogeneous functions and their applications to the vector optimization problem with nontransitive preference relation

Keywords: positively homogeneous function, Lipschitz condition, exhauster, vector optimization, nontransitive preference relation, nonlinear scalarization, optimality conditions.

The aim of the thesis is the comprehensive study of Lipschitz continuous positively homogeneous functions defined on finite-dimensional vector spaces as well as their relationships with other classes of positively homogeneous functions and their applications to the study of vector optimization problems with nontransitive preference relation.

In the thesis the following new results are obtained:

1. The geometrical and analytical criteria of Lipschitz continuity of positively homogeneous functions. The proof that the Lipschitz modulus is a norm on the vector space of Lipschitz continuous positively homogeneous functions with respect of which it is a Banach space. The comparison of the Banach space of Lipschitz continuous positively homogeneous functions with the Banach space of continuous positively homogeneous functions and with the Banach space of difference-sublinear functions.

2. The characteristic properties of primal exhausters of Lipschitz continuous positively homogeneous finctions as well as difference-sublinear and piecewise-linear ones. These results extend the classical Minkowski duality between sublinear functions and convex compact sets.

3. The criteria of Lipschitz continuity and difference-sublinearity of non-negative positively homogeneous functions in terms of the properties of corresponding radiant sets. These criteria generalize the classical results on the duality between convex sets and guage functions.

4. The method for converting exhausters of arbitrary continuous positively homogeneous functions.

5. A method of nonlinear scalarization of vector optimization problems with nontransitive preference relation and first and second order both necessary and sufficient optimality conditions for these problems obtained on this basis.

The results of the thesis are theoretical. They can be used in the nonsmooth analysis and the nonsmooth optimization.