

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Электроснабжение»

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЭНЕРГЕТИКЕ

ПРАКТИКУМ

для студентов специальности 1-43 01 02
«Электроэнергетические системы и сети»

Гомель 2009

УДК 519.711.3(075.8)
ББК 31в631.0я73
М33

*Рекомендовано научно-методическим советом
энергетического факультета ГГТУ им. П. О. Сухого
(протокол № 4 от 30.03.2009 г.)*

Составители: *Т. В. Алферова, О. М. Попова*

Рецензент: канд. техн. наук, доц. каф. «Автоматизированный электропривод»
ГГТУ им. П. О. Сухого *В. В. Тодарев*

Математическое моделирование в энергетике : практикум для студентов специальности 1-43 01 02 «Электроэнергетические системы и сети» / сост.: Т. В. Алферова, О. М. Попова. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2009. – 61 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц; 32 Mb RAM; свободное место на HDD 16 Mb; Windows 98 и выше; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: <http://lib.gstu.local>. – Загл. с титул. экрана.

Содержит краткие теоретические сведения, примеры решения задач и задания для самостоятельного решения.

Для студентов специальности 1-43 01 02 «Электроэнергетические системы и сети».

УДК 519.711.3(075.8)
ББК 31в631.0я73

© Алферова Т. В., Попова О. М., составление,
2009
© Учреждение образования «Гомельский
государственный технический университет
имени П. О. Сухого», 2009

ВВЕДЕНИЕ

Целью преподавания дисциплины "Математическое моделирование в энергетике" является подготовка студентов в области применения современных математических методов для решения задач электроэнергетики на основе алгебры матриц, теории графов, численных методов, вероятностно-статистического анализа и ПЭВМ.

Цель данного методического указания – помочь студентам специальности 1-43 01 02 "Электроэнергетические системы и сети" в практическом освоении:

- методов формирования уравнений установившегося режима электрических систем в матричной форме;
- методов решения уравнений при различных формах их записи;
- определения интегральных характеристик параметров режимов электрических систем.

Для успешного освоения материала и развития навыков решения задач в начале каждой темы кратко изложены основные теоретические положения и алгоритмы решения.

К предлагаемым задачам даны численные решения, в которых для упрощения восприятия все решения приведены на основе вещественных параметров, хотя для реальных электрических систем переменного тока параметры являются комплексными.

С целью повышения качества усвоения материала следует каждому студенту давать персональные аудиторные и домашние задания.

Для обеспечения вычислительного процесса при решении задач рекомендуется применение программных пакетов MathCAD и Excel, микрокалькулятора.

1. ПРИМЕНЕНИЕ МАТРИЧНОЙ АЛГЕБРЫ

1.1. Числовые матрицы и их преобразования

Прямоугольной матрицей A размером $m \times n$ называется таблица величин из m строк и n столбцов вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ & & & \dots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ & & & \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = [a_{ij}],$$

где a_{ij} – элемент матрицы, указывающий положение его в таблице, (i – строка, j – столбец), $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Если $m \neq n$, то матрица называется **прямоугольной** размера $m \times n$; если $m = n$ – матрица называется **квадратной** порядка n .

Матрица, элементами которой являются числа, называется **числовой**.

Две матрицы $A_{m \times n}$ и $A_{k \times l}$ называются равными, если соответствующие элементы этих матриц равны между собой

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}; \quad B = [b_{ij}]_{k \times l}; \quad a_{ij} = b_{ij}.$$

Матрица, в которой $m = 1$, $n > 1$ называется строкой; матрица, состоящая из $m > 1$ и $n = 1$ – столбцом.

Симметричной матрицей называется матрица, элементы которой располагаются симметрично главной диагонали, т.е. $a_{ij} = a_{ji}$.

Симметричной матрицей является диагональная матрица, у которой отличны от нуля лишь элементы, расположенные на диагонали. Диагональная матрица порядка p

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & a_p \end{pmatrix} \text{ сокращенно записывается как}$$

$$A = \text{diag}(a_i), \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

Если все элементы a_i диагональной матрицы равны единице, то такая матрица называется **единичной** и обозначается символом 1 . Столбец, все элементы которого равны единице, называется **единичным столбцом** и обозначается n . Транспонированный единичный столбец есть **единичная строка** n_i .

Над матрицами можно производить следующие преобразования: алгебраическое суммирование; умножение числа на матрицу; умножение матриц; транспонирование; обращение.

Алгебраической суммой двух матриц $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ и $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ называется матрица $C = [c_{ij}]_{m \times n}$, элементы которой определяются алгебраической суммой соответствующих элементов исходных матриц:

$$[c_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}].$$

Операция сложения над матрицами обладает свойствами коммутативности и ассоциативности:

$$A + B = B + A;$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C;$$

$$A + 0 = A.$$

Произведением постоянного коэффициента α на матрицу или наоборот является матрица, все элементы которой умножены на этот коэффициент

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} & \dots & \alpha a_{1j} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} & \dots & \alpha a_{2j} & \dots & \alpha a_{2n} \\ & & & \dots & & & \\ \alpha a_{i1} & \alpha a_{i2} & \alpha a_{i3} & \dots & \alpha a_{ij} & \dots & \alpha a_{in} \\ & & & \dots & & & \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \alpha a_{m3} & \dots & \alpha a_{mj} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix} = [\alpha a_{ij}].$$

Тождества перемножения матриц:

$$1) 1 \cdot A = A;$$

$$3) \alpha(\beta \cdot A) = \alpha \cdot \beta \cdot A;$$

$$2) 0 \cdot A = 0;$$

$$4) \alpha(A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B;$$

$$5) (\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A.$$

Произведением матриц $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ и $B = [b_{ij}]_{p \times q}$ называется матрица $C = [c_{ij}]_{m \times q}$, элементы которой определяются по выражению

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} \cdot b_{kj}, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, q.$$

Произведение возможно только в том случае, если $n = p$, т. е. число столбцов множимого равно числу строк множителя.

Произведением двух прямоугольных матриц является прямоугольная матрица, число строк которой равно числу строк первой матрицы, а число столбцов – числу столбцов второй матрицы.

Свойства матричного произведения: Матричное произведение не обладает свойством коммутативности

- 1) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$;
- 2) $\alpha \cdot (B \cdot C) = \alpha \cdot B \cdot C$;
- 3) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$;
- 4) $C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$;
- 5) $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Для произведения квадратной матрицы A на единичную матрицу выполняется закон коммутативности

$$A \cdot 1 = 1 \cdot A.$$

Транспонирование матриц

Если в матрице $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ поменять местами элементы строк и столбцов, то получим транспонированную матрицу $A_t = [a_{ji}]_{n \times m}$.

Дважды транспонированная матрица равна исходной $(A_t)_t = A$.

Транспонированная матрица суммы двух матриц равна сумме транспонированных матриц

$$(A + B)_t = A_t + B_t.$$

Транспонированная матрица произведения двух матриц равна обратному произведению транспонированных матриц

$$(A \cdot B)_t = B_t \cdot A_t.$$

Детерминанты матриц A и A_t равны, т. е. $\det A_t = \det A$.

Симметричная матрица не изменяется при транспонировании

$$A = A_t.$$

Обращение матриц

Для квадратной неособенной матрицы A определена операция ее обращения, т. е. нахождения обратной матрицы A^{-1} .

Обратной называется матрица, которая будучи умноженной как справа, так и слева на данную матрицу, дает единичную матрицу:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = 1.$$

Операция нахождения обратной матрицы называется операцией упрощения.

Не всякая матрица имеет обратную себе. Неособенная матрица имеет себе обратную.

Неособенной матрицей называется матрица, детерминант которой не равен нулю. Матрица, детерминант которой равен нулю, называется особенной и себе обратной она не имеет.

Свойства обратной матрицы:

1. Детерминант обратной матрицы равен обратной величине детерминанта исходной матрицы

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

2. Обратная матрица произведения двух квадратных матриц равна произведению обратных матриц сомножителей, но взятых в обратном порядке

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

3. Транспонированная обратная матрица равна обратной транспонированной исходной матрице

$$(A^{-1})_t = (A_t)^{-1}.$$

Обращение матриц применяется для решения систем линейных уравнений

$$A \cdot X = B \rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B.$$

1.2. РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

1.2.1. Произвести алгебраические операции над матрицами.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}; \quad B = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}; \quad C = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

- а) $A + B$; б) $3A + 2B - C$; в) $2A - 4B - 3C$;
г) $3A - 2B + C$; д) $2A + 4B - 3C$.

Решение варианта д):

$$2A + 4B - 3C = \begin{vmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot (-1) & 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 3 & 2 \cdot (-2) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 \cdot 0 & 4 \cdot 2 \\ 4 \cdot (-2) & 4 \cdot 0 \\ 4 \cdot 1 & 4 \cdot 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 \cdot (-2) & 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 0 & 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot (-1) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 - 3 \cdot (-2) & 2 \cdot 0 + 4 \cdot 2 - 3 \cdot 0 \\ 2 \cdot (-1) + 4 \cdot (-2) - 3 \cdot 0 & 2 \cdot 2 + 4 \cdot 0 - 3 \cdot 1 \\ 2 \cdot 3 + 4 \cdot 1 - 3 \cdot 2 & 2 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 - 3 \cdot (-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 8 \\ -10 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

1.2.2. Найти произведение числовых матриц:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 6 \end{vmatrix};$

б) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 3 \\ 5 \end{vmatrix};$

в) $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix};$

г) $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 5 & 2 & 7 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix};$

д) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix};$

е) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}.$

Сопоставить результаты перемножения д) и е).

Решение примера в):

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) + 0 \cdot 4 & -4 - 3 + 0 + 0 \\ 5 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 & 10 + 1 + 0 + 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -6 & -7 \\ 15 & 11 \end{vmatrix}.$$

1.2.3. Даны матрицы $A = [a_{ij}]_{2 \times 3}$; $B = [b_{ij}]_{3 \times 1}$; $C = [c_{ij}]_{3 \times 3}$.

Существуют ли произведения:

- а) $A \times B$; б) $B \times A$; в) $A \times C$; г) $C \times A$;
 д) $C \times B$; е) $A \times B \times C$; ж) $A \times C \times B$; з) $C \times B \times A$.

Решение данного типа задач основано на знании правил умножения матриц, поэтому последовательность решения не приводится.

1.2.4. Произвести транспонирование матриц:

$$\text{а) } A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{vmatrix}; \quad \text{б) } B = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}; \quad \text{в) } K = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 4 \\ -5 & -6 \end{vmatrix};$$

$$\text{г) } C = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 5 & 4 \end{vmatrix}; \quad \text{д) } F = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}; \quad \text{е) } F = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 9 & 10 \end{vmatrix};$$

$$\text{ж) } L = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{з) } (B + K)_t; \quad \text{и) } (D \times K)_t.$$

1.2.5. Найти матрицу обратную заданной:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}; \quad \text{в) } \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -3 & 5 & 6 \\ -2 & 2 & 10 \end{vmatrix}; \quad \text{г) } \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix};$$

$$\text{д) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 6 \end{vmatrix}; \quad \text{е) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}; \quad \text{ж) } \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{з) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix};$$

$$\text{и) } \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & -8 & 2 \\ -1 & 6 & -1 \end{vmatrix}; \quad \text{к) } \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix}; \quad \text{л) } \begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{vmatrix}; \quad \text{м) } \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 8 & 9 & 7 \end{vmatrix}.$$

Решение примера д):

$$\text{Найти матрицу, обратную матрице } A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 6 \end{vmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix},$$

где $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ji}$ – алгебраическое дополнение, определенное по исходной матрице A .

Вычислим $\det A$:

$$\det A = 1 \cdot 3 \cdot 6 - 1 \cdot 3 \cdot 5 - 1 \cdot 2 \cdot 6 - 2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \cdot 5 = -1.$$

Так как $\det A \neq 0$, то матрица A имеет обратную матрицу. Найдем алгебраические дополнения матрицы A :

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 8; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -6;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 8 & -2 & -1 \\ -6 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -8 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Проверим правильность расчетов $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = 1$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 6 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -8 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3-8+12 & 0+2-2 & 1+1-2 \\ -6-24+30 & 0+6-5 & 2+3-5 \\ -12-24+36 & 0+6-6 & 4+3-6 \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Решение остальных примеров предоставляется выполнить студентам самостоятельно.

2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СЕТИ С ПОМОЩЬЮ ПЕРВОЙ И ВТОРОЙ МАТРИЦ СОЕДИНЕНИЙ ВЕТВЕЙ В УЗЛАХ И НЕЗАВИСИМЫЕ КОНТУРЫ

2.1. Теоретическая часть

Для расчета режимов электрических сетей, выполняемых с помощью ПЭВМ, пользуются схемами замещения и математическими моделями.

Схемы замещения представляет собой совокупность схем замещения ее отдельных элементов, соединенных между собой в той же последовательности, что и в реальной схеме.

Отдельные элементы электрической системы представляются схемами замещения элементов электрической цепи: источников напряжения или тока и сопротивлений. В системах трехфазного тока все величины, характеризующие схемы замещения ее элементов, определяются комплексными числами. Схемы замещения составляются на одну фазу с нейтралью.

Источники электроэнергии могут быть представлены в виде источника напряжения с ЭДС \dot{E} и внутренним сопротивлением Z , либо в виде источника тока \dot{J} , равного току установившегося режима \dot{I} , причем последний отображают так называемым задающим током (рис. 2.1, а, б, в).

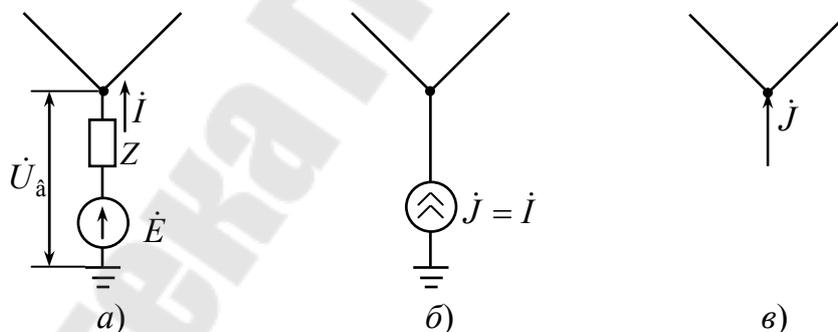


Рис. 2.1

Нагрузка (потребители электроэнергии) имеют схему замещения либо в виде сопротивления \dot{Z} , либо аналогично источнику питания в виде источника тока, равного взятому с обратным знаком току нагрузки, или задающего тока (рис. 2.2, а, б, в).

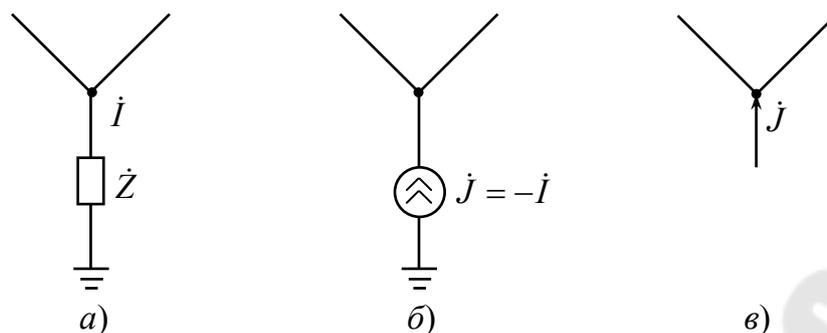


Рис. 2.2

Линий электропередач, трансформаторы подстанций и электростанций представляются в схеме замещения системы в виде сопротивлений.

Выбор того или иного варианта схемы замещения элементов определяется целями расчетов и исходными данными.

Таким образом, схема замещения представляет собой электрическую цепь, для которой применимы понятия: ветвь, узел и контур.

Сопротивления, входящие в схему замещения электрической системы, при расчетах установившихся режимов принимаются постоянными, т. е. не зависящими от значений токов и напряжений. При этом схема замещения системы представляет собой линейную электрическую цепь.

Математическое описание схем замещения электрических сетей возможно с помощью элементов теории графов и алгебры матриц.

Конфигурацию схемы замещения можно отобразить в виде графа. **Граф** представляет собой множество вершин (узлов) и ребер (ветвей), соединяющих некоторые (а может быть и все) пары вершин. Любая часть графа называется **подграфом**. Совокупность ребер, соединяющих две произвольные вершины, образуют подграф, определяемый как **путь графа**. Если начальная и конечная вершины пути графа совпадают, то этот путь графа является замкнутым и образуют **контур**.

Граф, соединяющий любые две его вершины, называется **связанным и направленным**, если ребра его имеют фиксированные направления. Каждое ребро направленного графа имеет начальную и конечную вершины, его направление принимается от первой вершины ко второй.

Схема замещения электрической системы является связанным направленным графом, ребрами которого служат ветви, вершинами – узлы, а все величины, характеризующие состояние ветвей (токи, ЭДС,

падения напряжения) имеют определенное направление (произвольно выбранное).

Аналитическое представление конфигурации сети может быть дано с помощью матриц соединений (инциденций):

– матрицы соединений ветвей в узлах [M], или I матрицы инциденций, которая позволяет сформировать узловую модель электрической сети и в общем виде записать уравнения первого закона Кирхгофа;

– матрицы соединения ветвей в независимые контуры [N], или II матрицы инциденций, которая позволяют сформировать контурную модель электрической сети и в общем виде записать уравнения второго закона Кирхгофа.

Матрица соединения ветвей в узлах – это прямоугольная матрица, число строк которой равно числу вершин графа n , а число столбцов – числу ребер m . Она обозначается следующим образом:

$$M_{\Sigma} = (m_{ij}), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Номер строк i соответствуют номерам вершин, а номера столбцов j – номером ребер. Элементы матрицы M_{Σ} могут принимать одно из трех значений:

$m_{ij} = +1$, если узел i является начальной вершиной ветви j ;

$m_{ij} = -1$, если узел i является конечной вершиной ветви j ;

$m_{ij} = 0$, если узел i не является вершиной ветви j .

Каждая строка матрицы M_{Σ} показывает, какими вершинами соответствующие ветви присоединяются к данному узлу схемы; каждый столбец – какие узлы являются начальной и конечной вершинами данной ветви. Сумма всех строк этой матрицы (по столбцам) должна давать нулевую (строчную) матрицу:

$$n_t \cdot M_{\Sigma} = 0,$$

где n_t – единичная строка.

Если выделить строку, соответствующую узлу, принятому за балансирующий, причем номер ее принять последним, то это условие запишется в виде

$$[n_t \ 1] \times \begin{bmatrix} M \\ M_{\dot{a}} \end{bmatrix} = 0, \quad \text{откуда } M_{\dot{a}} = -n_t M,$$

где M – матрица соединений для схемы без балансирующего узла;

$M_{\dot{a}}$ – матрица соединений для балансирующего узла.

Для практических расчетов достаточно пользоваться матрицей M , по которой может быть восстановлена вся схема

$$M_{\Sigma} = \begin{bmatrix} M \\ -n_i M \end{bmatrix}.$$

Матрица соединений ветвей в независимые контуры – это прямоугольная матрица, число строк которой равно числу независимых контуров графа k , а число столбцов – числу ветвей (ребер) m . Она обозначается:

$$N = (n_{ij}), \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Номера строк i соответствуют номерам независимых контуров, а номера столбцов j – номерам ветвей.

Элементы матрицы N определяются следующим образом:

$n_{ij} = +1$, если ветвь j входит в контур i и их направления совпадают;

$n_{ij} = -1$, если ветвь j входит в контур i и их направления противоположны;

$n_{ij} = 0$, если ветвь j не входит в контур i .

Каждая строка матрицы N показывает, какие ветви входят в соответствующие независимые контуры и какое направление имеют относительно направления контура. Каждый столбец матрицы N показывает, в состав каких независимых контуров входит данная ветвь и совпадает ли ее направление с направлениями этих контуров.

Для обеспечения наглядной структуры матриц параметров сети целесообразно вести упорядоченную нумерацию элементов схем с использованием *принципа ярусности*.

1. В схеме электрической сети выбирают (задается) *балансирующий узел* (БУ) – шины электростанции или крупной подстанции энергосистемы, мощность которого, в отличие от других узлов сети, не фиксируется.

Балансирующему узлу присваивается последний $(n + 1)$ -й номер.

2. Последовательно числами натурального ряда на графе схемы нумеруются все ветви, идущие от БУ, и такие же номера присваиваются узлам, которые являются концами этих ветвей (концом первой ветви должен быть узел № 1, концом второй – узел № 2, и т. д.). Эти ветви составят *первый ярус* схемы. Затем, начиная с первой вершины графа, по аналогичному принципу, выбираются и нумеруются ветви

второго яруса, оттекающие от конечных вершин ветвей первого яруса, затем ветви третьего яруса, оттекающие от конечных вершин ветвей второго яруса и т. п. То есть, начальными вершинами ветвей последующего яруса служат концы ветвей предыдущего яруса, и рассмотрение узлов ведется в порядке возрастания их номеров – в этом суть принципа ярусности.

Для всех ветвей за положительное принимается, направление от начальной вершины к конечной.

Совокупность n ветвей схемы, составляющих минимальный связный подграф, обеспечивающий связь БУ со всеми n независимыми узлами схемы, образуют так называемое *дерево сети*.

3. Когда в ходе нумерации встречается ветвь, подтекающая к ранее пронумерованному узлу, то эта ветвь замыкает собой контур – такая ветвь называется *хордой*. Для каждой из хорд за положительное также принимается направление от начальной вершины к конечной. Хорды условно помечаются на схеме и отдельно нумеруются (I, II, III, ..., k , где k – число контуров) в дополнение к сквозной нумерации ветвей.

4. В результате нумерации схемы формируется массив номеров узлов – из n элементов, массив номеров ветвей дерева также из n элементов и массив номеров хорд схемы – k элементов, где $k + n = m$ – полному числу ветвей схемы.

В результате применения принципа ярусности матрицы M и N могут быть представлены блоками, относящимися к дереву схемы и хордам

$$M = [M_\alpha M_\beta], \quad N = [N_\alpha N_\beta],$$

где M_α, N_α – подматрицы, относящиеся к дереву схемы;

M_β, N_β – подматрицы, характеризующие подграфы, состоящие из хорд.

2.2. Решение типовых задач

ЗАДАЧА 1. Для схемы (рис. 2.3) составить направленный граф, сформировать первую и вторую матрицу инцидентий для представления и анализа установившегося режима.

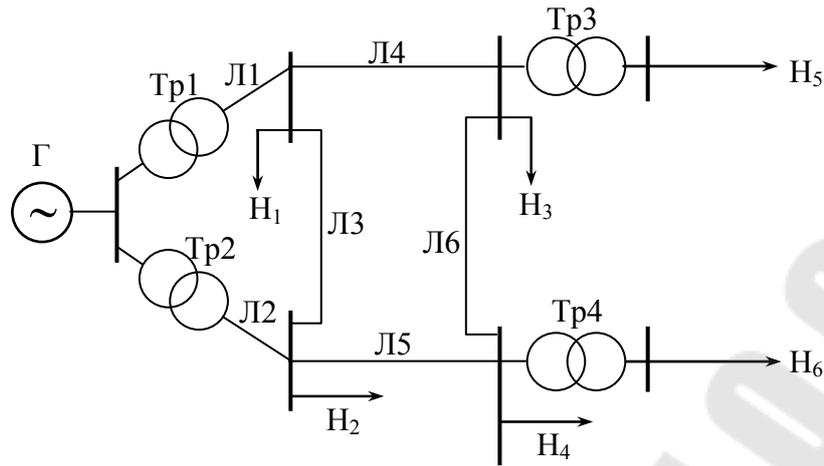


Рис. 2.3. Конфигурация сети

РЕШЕНИЕ:

Для составления направленного графа необходимо пронумеровать и задать направления в ветвях схемы замещения. Схема замещения может быть представлена с учетом схем замещения отдельных элементов следующим образом (рис. 2.4, 2.5)

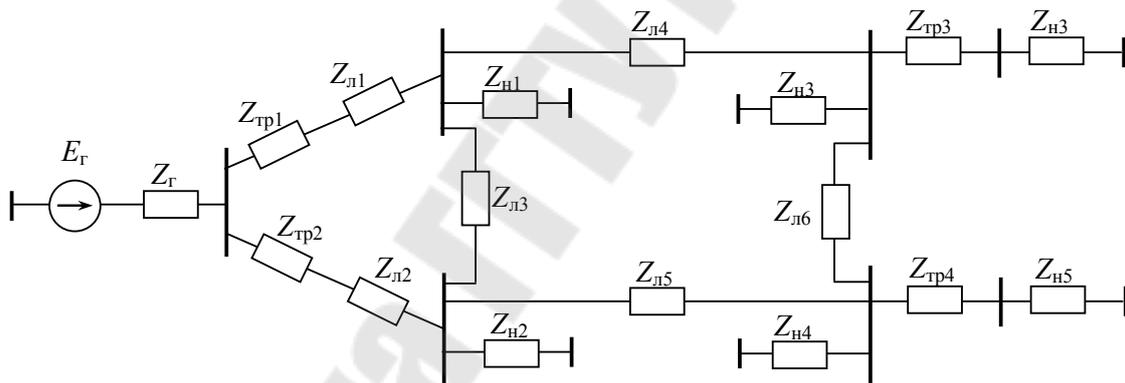


Рис. 2.4

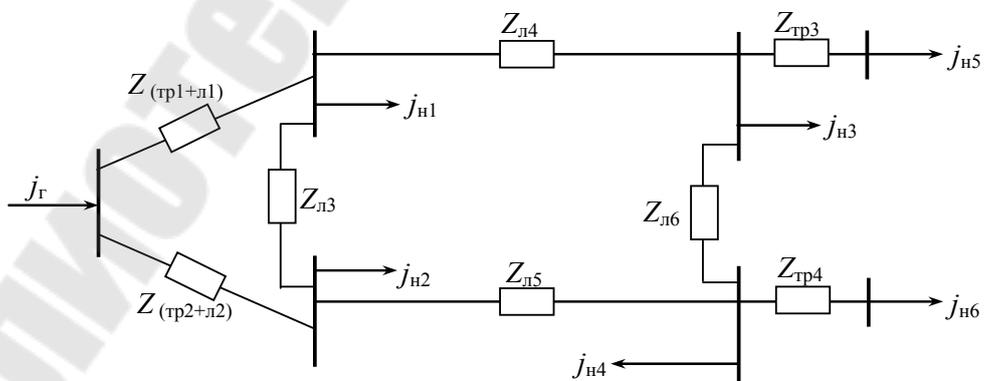
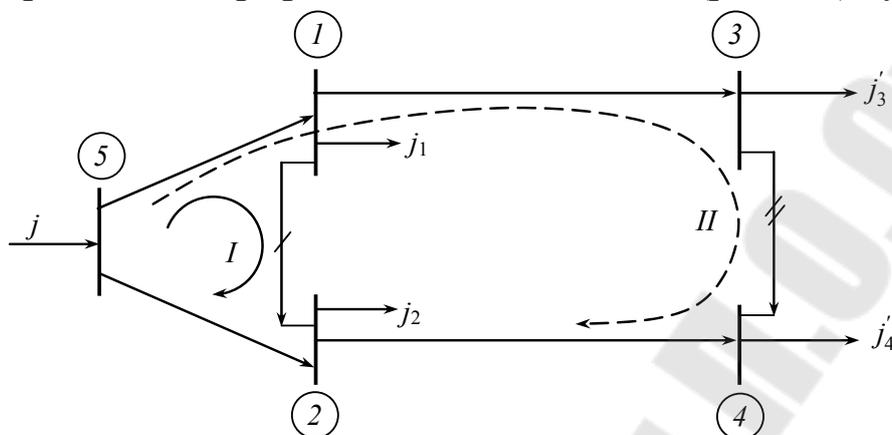


Рис. 2.5

Узлом в схеме будем считать точку, в которой объединяются две и более ветвей.

Нумерацию узлов и ветвей выполним с учетом ярусности.

Направленный граф для схемы замещения (рис. 2.5) будет



где j'_3 , j'_4 – нагрузки узлов 3, 4 с учетом нагрузок за трансформаторами.

Полная (суммарная) матрица соединений ветвей в узлах будет 5×6

$$M_{\Sigma} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

При решении установившихся режимов используется первая матрица инцидентий – M , составленная без балансирующего узла, т. е. в матрице M_{Σ} вычеркивается строка, соответствующая балансирующему. В нашем случае в качестве балансирующего принят узел 5, поэтому матрица M будет иметь следующий вид:

$$M = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Для составления второй матрицы инцидентий (соединение ветвей в независимые контуры) задаемся направлениями в контурах с учетом принципа ярусности, т. к. при отбрасывании двух последних ветвей мы получим схему разомкнутой сети. Число ветвей, обеспечи-

вающее размыкание всех контуров определяет число независимых контуров (в нашем случае – два).

$$N = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Необходимо отметить, что матрицы M и N для заданной схемы могут быть другими, если отступить от принципа ярусности.

Матрицы M и N, преобразованные в блоки для нашей схемы:

$$M = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = [M_\alpha M_\beta];$$

$$N = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = [N_\alpha N_\beta].$$

2.3. Варианты индивидуальных заданий

Принять по таблице П1 и схемам, приведенным в Приложении.

3. УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СЕТИ В МАТРИЧНОЙ ФОРМЕ

3.1. Теоретическая часть

Задачей расчета установившегося режима электрической системы является определение токов в ветвях схемы замещения, напряжений в ее узловых точках, мощностей. В общем случае замкнутой схемы замещения задача решается одним из следующих путей:

Первый – на основе решения обобщенного уравнения.

Обобщенное уравнение состояния электрической цепи

$$A \cdot \dot{I} = \dot{F}, \quad (3.1)$$

где $A = \begin{bmatrix} M \\ NZ_{\hat{a}} \end{bmatrix}$ – блок объединенной матрицы параметров схемы замещения системы;

$\dot{F} = \begin{bmatrix} \dot{J} \\ E_{\hat{e}} \end{bmatrix}$ – блок объединенной матрицы исходных параметров режима.

Уравнение (3.1) можно решить относительно матрицы токов ветвей.

Для формирования обобщенного уравнения состояния (3.1) необходимо определить матрицы M и N .

Матрица M содержит исчерпывающую информацию о конфигурации соответствующей ей схемы.

Матрица N для сложных электрических систем может быть однозначно определена, если известны M_{α} , M_{β} – блоки, соответствующие дереву и хордам графа.

Матрица N представляется блоками: ветви контуров, входящие в дерево N_{α} , и ветви хорд N_{β} . Матрицу N_{β} можно задать равной единичной матрице ($N_{\beta} = 1$).

Тогда матрицу N_{α} можно вычислить по выражению

$$N_{\alpha} = -M_{\beta t} \cdot M_{\alpha t}^{-1}.$$

В случае разомкнутой схемы матрица M является квадратной, так же как и матрица M_{α} в общем случае. При этом обобщенное уравнение состояния (.6) сводится к матричному уравнению первого закона Кирхгофа (.1)

$$M_p \cdot \dot{I} = \dot{J}, \quad (3.2)$$

где $M_p = M_\alpha$ – первая матрица соединения для разомкнутой сети.

Уравнение можно решить относительно токов ветвей по выражению

$$\dot{I}_p = M_p^{-1} \cdot \dot{J} = C_p \cdot \dot{J}, \quad (3.3)$$

где $C_p = M_p^{-1}$ – матрица коэффициентов распределения задающих токов по ветвям разомкнутой сети.

По найденной матрице \dot{I} определяются падения напряжения на ветвях схемы $U_{\hat{a}}$ согласно уравнению закона Ома $U_{\hat{a}} = Z_{\hat{a}} \dot{I} - E$. Далее находятся напряжения узлов относительно балансирующего \dot{U}_Δ

$$U_{\hat{a}} = M_t \cdot \dot{U}_\Delta$$

$$\begin{bmatrix} U_{\hat{a}\alpha} \\ U_{\hat{a}\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{I}_{\alpha t} \\ \dot{I}_{\beta t} \end{bmatrix} \cdot U_\Delta \rightarrow U_{\hat{a}\alpha} = \dot{I}_{\alpha t} \cdot \dot{U}_\Delta; U_{\hat{a}\beta} = \dot{I}_{\beta t} \cdot \dot{U}_\Delta,$$

где $M_{\alpha t}$ – квадратная и неособенная матрица $\rightarrow \dot{U}_\Delta = M_{\alpha t}^{-1} \cdot \dot{U}_{\hat{a}\alpha}$ тогда

$$\dot{U}_{\hat{a}\beta} = M_{\beta t} \cdot M_{\alpha t}^{-1} \cdot \dot{U}_{\hat{a}\alpha}.$$

При известном напряжении балансирующего узла \dot{U}_δ определяются и напряжения узлов \dot{U}_i

$$\dot{U}_i = \dot{U}_\delta + \dot{U}_{\Delta i}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Последовательность расчета параметров характеризуется тем, что на первом этапе решается система уравнений порядка m , где m – число ветвей.

Второй – на основе решения системы узловых напряжений.

Матричное узловое уравнение в общем виде имеет вид

$$Y_y \dot{U}_\Delta = \dot{J} - M \cdot Y_{\hat{a}} \dot{A}, \quad (3.4)$$

где $Y_y = M \cdot Y_{\hat{a}} \cdot M_t'$ – матрица узловых проводимостей;

$\dot{U}_\Delta = \dot{U}_i - \dot{U}_0$ – напряжение узлов относительно базисного;

$Y_{\hat{a}}$ – матрица проводимости ветвей, определяется по исходной матрице $Z_{\hat{a}}$;

U_0 – напряжение базисного узла.

Решив систему (.) относительно \dot{U}_Δ , можно найти и токи в ветвях

$$\dot{I} = Z_{\hat{a}}^{-1} \cdot (M_t \cdot \dot{U}_\Delta + \dot{E}). \quad (3.5)$$

При отсутствии ЭДС в ветвях, что характерно для большинства схем замещения реальных электрических систем, уравнения (.) и (.) принимают вид

$$Y_y \dot{U}_\Delta = \dot{J} \quad \text{и} \quad \dot{I} = Z_{\hat{a}}^{-1} \cdot M_t \cdot \dot{U}_\Delta,$$

т. е. задача сводится первоначально к определению матрицы узловой проводимости Y_y .

Система решаемых уравнений, связывающих напряжения узлов относительно балансирующего с задающими тока, равна $(n-1)$, что ниже на число независимых контуров $k = m - n + 1$;

Третий – на основе решения контурных уравнений.

Матричное контурное уравнение имеет вид

$$Z_{\hat{e}} \dot{I}_{\hat{e}} = \dot{E}_{\hat{e}} - NZ_{\hat{a}} \begin{bmatrix} M_{\alpha}^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \dot{J}, \quad (3.6)$$

а токи в ветвях схемы

$$\dot{I} = \begin{bmatrix} M_{\alpha}^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \dot{J} + N_t \cdot \dot{I}_{\hat{e}}, \quad (3.7)$$

где $Z_{\hat{e}} = NZ_{\hat{a}} \cdot N_t$ – матрица контурных сопротивлений;

$I_{\hat{e}}$ – контурный ток (ток хорд);

M_{α} – матрица соединения ветвей в узлах дерева;

N – матрица соединения ветвей в узлах контурах.

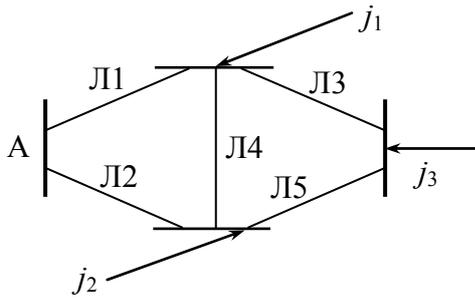
Падения напряжения узлов относительно балансирующего $\dot{U}_\Delta = M_{\alpha t}^{-1} \cdot \dot{U}_{\hat{a}\alpha}$.

Система решаемых контурных уравнений равна числу независимых контуров $k = m - n + 1$.

3.2. Решение типовых задач

ЗАДАЧА. Для заданного варианта схемы, представленной на рисунке, параметров сети и задающих нагрузок составить в матричной форме:

- а) обобщенное уравнение состояния электрической цепи;
- б) узловое уравнение;
- в) контурное уравнение.



Сопротивления линий (Ом):

$$Z_1 = 1; Z_2 = 1; Z_3 = 1;$$

$$Z_4 = 2; Z_5 = 1.$$

Задающие токи (А):

$$J_1 = -4; J_2 = -6; J_3 = -2.$$

Узел А принять базисным и балансирующим. Напряжение в узле А принять равным 10 В.

РЕШЕНИЕ:

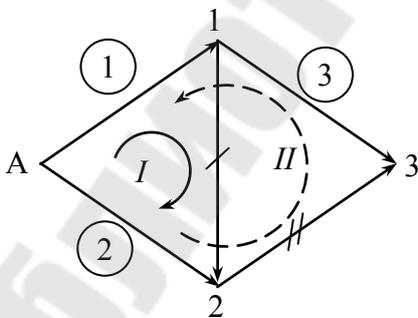
Для упрощения: сопротивления линий, задающие токи узлов и напряжение в балансирующем узле принять вещественными.

Для выполнения условий а), б) и в) необходимо исходные данные представить в матричной форме, составить матрицы М и N.

Исходными данными являются сопротивления ветвей, которые представляются диагональной матрицей, а задающие токи в узлах и напряжение узла А – в виде матрицы столбца.

$$Z_{\hat{a}} = \begin{vmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 2 & \\ & & & & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{Ом}); \quad J_i = - \begin{vmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{vmatrix} \quad (\text{А}); \quad U_A = U_0 = \begin{vmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{vmatrix} \quad (\text{В}).$$

Матрицы М и N составляются по схеме замещения и графу. Составим граф схемы, где зададимся направлениями в ветвях, считая принятые направления совпадающими с направлениями токов в схеме, а также направлениями обхода контуров. Узел А принимаем в качестве балансирующего (нумерацию узлов и ветвей осуществляем по принципу ярусности).



$$M = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix};$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{M_\alpha} \quad \underbrace{\hspace{5em}}_{M_\beta}$

$$N = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{N_\alpha} \qquad \underbrace{\hspace{2em}}_{N_\beta}$

а) Обобщенное уравнение состояния электрической цепи
 $A \cdot I = F$

$$A = \begin{bmatrix} M \\ NZ_{\hat{a}} \end{bmatrix}; \quad F = \begin{bmatrix} j \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Определим

$$[NZ_{\hat{a}}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Итак, обобщенное уравнение для заданной схемы имеет вид:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Для определения токов в ветвях и других параметров режима можно применить различные математические методы решения системы линейных уравнений.

б) Матричное узловое уравнение

$$\dot{Y}_0 \cdot \dot{U}_\Delta = J - M \cdot Y_{\hat{a}} \cdot \dot{E},$$

в котором необходимо определить матрицу Y_0 : $Y_0 = M \cdot Y_{\hat{a}} \cdot M'_t$.

Матрицу M мы определили ранее, $Y_{\hat{a}}$ – диагональная матрица, определяемая обращением матрицы $Z_{\hat{a}}$, а M'_t – транспонированная матрица соединения ветвей в узлах без базисного. Поскольку в нашей задаче за балансирующий и базисный узел принят один и тот же (узел А), то $M'_t = M_t$.

Находим \dot{Y}_0

$$Y_{\dot{e}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0,5 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2,5 & -0,5 & -1 \\ -0,5 & 2,5 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Поскольку в ветвях схемы отсутствуют ЭДС, то матричное узловое уравнение для заданной схемы имеет вид:

$$\begin{bmatrix} 2,5 & -0,5 & -1 \\ -0,5 & 2,5 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dot{U}_{1\Delta} \\ \dot{U}_{2\Delta} \\ \dot{U}_{3\Delta} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Для определения напряжений узлов относительно базисного и других параметров можно применить различные математические методы решения системы линейных уравнений.

в) Матричное контурное уравнение имеет вид:

$$Z_{\dot{e}} \cdot \dot{I}_{\dot{e}} = \dot{E}_{\dot{e}} - N \cdot Z_{\dot{a}} \cdot \begin{bmatrix} M_{\alpha}^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot j.$$

Поскольку в ветвях схемы нет \dot{E}_i , то последнее уравнение преобразуется

$$Z_{\dot{e}} \cdot \dot{I}_{\dot{e}} = -N \cdot Z_{\dot{a}} \cdot \begin{bmatrix} M_{\alpha}^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot j.$$

В последнем выражении определению подлежат матрицы $Z_{\dot{e}}$, M_{α}^{-1} .

Определим матрицу $Z_{\dot{e}} = N \cdot Z_{\dot{a}} \cdot N_t$,

$$Z_{\dot{e}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

По известной матрице $M = [M_\alpha M_\beta]$ определим M_α^{-1} :

$$M_\alpha = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad M_\alpha^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Определим произведение матриц правой части контурного уравнения (упрощенного):

$$-N \cdot Z_{\hat{a}} \cdot \begin{bmatrix} M_\alpha^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot j =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Итак, контурное уравнение в матричной форме имеет вид:

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_{\hat{e}1} \\ I_{\hat{e}2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Данная система линейных уравнений может быть разрешена относительно токов в хордах любым методом, а далее – определяются и другие параметры режима электрической сети.

3.3. Варианты индивидуальных задач

Принять таблицам П1, П2, П3 и схемам, приведенным в Приложении.

Задающие нагрузки в узлах привести к точкам подключения трансформаторов.

4. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ СОСТОЯНИЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ СЕТИ ПРЯМЫМИ МЕТОДАМИ

4.1. Теоретическая часть

Расчеты установившихся режимов выполняются как на стадии проектирования электрических систем, так и в процессе их эксплуатации.

Для выполнения расчетов установившегося режима необходима информация о схеме и параметрах сети системы, о потребителях (нагрузках) и источниках электроэнергии (электростанциях). Сеть электрической системы в расчетах установившихся режимов представляется схемой замещения в виде линейной электрической цепи, конфигурация и параметры которой отображаются той или иной матрицей обобщенных параметров.

Исходными данными о нагрузках служат значения потребляемых ими активных и реактивных мощностей ($P_{ii} + jQ_{ii} = S_{ii}$), применяемых или постоянными ($S_{ii} = \text{const}$), либо зависящими от напряжения в точке подключения нагрузки к сети, т. е. $S_{ii} = f(U_{ii})$. Исходными данными об источниках питания служат выдаваемые генераторами в систему активные мощности ($P_{aj} = \text{const}$) и абсолютные значения напряжений в точках их подключения $|U_{aj}| = \text{const}$, либо постоянными активными и реактивными мощностями аналогично нагрузкам. Кроме того, один из источников (наиболее мощная электрическая станция), играющий роль балансирующего, задается комплексным значением напряжения ($\dot{U}_a = \text{const}$).

При указанных исходных данных определению подлежат мощности и токи в ветвях схемы замещения и комплексные значения напряжений в ее узловых точках. С математической точки зрения задача сводится к решению системы нелинейных уравнений в силу нелинейной зависимости мощности от тока и напряжения.

Наиболее широкое применение нашли узловые уравнения, которые характеризуются простотой формирования и большими возможностями организации процесса их решения. Контурные уравнения формируются сложнее, но и они имеют определенную рациональную область применения.

Дальнейшему рассмотрению подлежат решение обобщенных, узловых и контурных уравнений, т. к. матричная структура предпо-

деляет возможность использования для их решения одних и тех же методов.

Рассмотрим точные или прямые методы решения линейных уравнений установившегося режима.

Точными или **прямыми** методами называются такие, которые в предположении, что все вычисления ведутся точно (без округления), позволяют получить точные значения неизвестных в результате конечного числа операций.

В основе всех прямых методов решения линейных алгебраических уравнений установившегося режима электрической системы лежит метод последовательного исключения неизвестных, называемый методом Гаусса. К числу наиболее характерных вычислительных схем этого метода относятся алгоритмы с обратным ходом и без обратного хода.

Алгоритм метода Гаусса с обратным ходом. Решение системы n линейных алгебраических уравнений вида

$$A \cdot x = b$$

по этому алгоритму состоит из двух этапов. На первом этапе (прямой ход) исходная система за n однотипных шагов преобразуется таким образом, что матрица коэффициентов преобразованной системы становится верхней треугольной, т. е. все элементы, расположенные ниже ее главной диагонали равны нулю. На втором этапе (обратный ход) последовательно определяются значения неизвестных от X_n до X_1 .

Последовательность операций, выполняемых при прямом и обратном ходах, формулы для расчетов коэффициентов систем уравнений на произвольном (k -м) шаге и обратного хода приведены в практических решениях обобщенного уравнения.

Алгоритм метода Гаусса без обратного хода (в литературе известен также под названием схемы Жардана). Решение системы n линейных алгебраических уравнений по этому алгоритму осуществляется за один этап, в результате которого матрица коэффициентов A за n однотипных шагов приводится к единичной, т. е. система уравнений разрешается относительно искомым неизвестных, которые равны соответствующим элементам полученного в результате преобразования столбца в правой части системы.

Выполнение операций произвольного (k -го) шага соответствует преобразованию k -го столбца таким образом, чтобы его диагональный

элемент $(a_{kk}^{(k)})$ стал равен единице, а недиагональные элементы $(a_{jk}^{(k)}, j \neq k)$ – нулю. Формулы для расчета коэффициентов системы уравнений на k -м шаге приведены в практических решениях узлового уравнения.

В ряде задач в решаемой системе линейных уравнений $A \cdot x = b$ матрица коэффициентов A остается неизменной, а меняются только столбцы правых частей. В таких случаях может оказаться целесообразным обращение матрицы A , т. е. представление решения системы уравнений в виде $X = A^{-1} \cdot b$. Чтобы определить X , надо вычислить A^{-1} и умножить эту матрицу справа на столбец b .

Обращение матрицы можно выполнить на основе алгоритма метода Гаусса без обратного хода и классическим способом, изложенным в [1, П1].

4.2. Решение типовых задач

Обобщенное уравнение в матричной форме решим методом Гаусса с обратным ходом.

Исходное уравнение получено на предыдущем занятии

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{\hat{a}1} \\ I_{\hat{a}2} \\ I_{\hat{a}3} \\ I_{\hat{a}4} \\ I_{\hat{a}5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Формулы для расчетов коэффициентов системы уравнений в матричной форме на произвольном шаге k :

$$\begin{aligned} a_{kj}^{(k)} &= a_{kj}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)}; & b_k^{(k)} &= b_k^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)}; \\ a_{ij}^{(k)} &= a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} \cdot a_{kj}^{(k)}; & b_i &= b_i^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} \cdot b_k^{(k)}; \\ i, j &= k+1, \dots, n. \end{aligned}$$

Вычислим коэффициенты на шаге $k = 1$:

$$\begin{aligned} a_{11}^{(1)} &= -1/-1 = 1; & a_{12}^{(1)} &= 0/-1 = 0; & a_{13}^{(1)} &= 1/-1 = -1; \\ a_{14}^{(1)} &= 1/-1 = -1; & a_{15}^{(1)} &= 0/-1 = 0; & b_1^{(1)} &= -4/-1 = 4; \\ a_{41}^{(1)} &= 1 - 1 \cdot 1 = 0; & a_{42}^{(1)} &= -1 - 1 \cdot 0 = -1; \\ a_{43}^{(1)} &= 0 - 1 \cdot 0 = 0; & a_{44}^{(1)} &= 2 - 1 \cdot (-1) = 3; \\ a_{45}^{(1)} &= 0 - 1 \cdot 0 = 0; & b_4^{(1)} &= 0 - 1 \cdot 4 = -4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{51}^{(1)} &= -1 - (-1) \cdot 1 = 0; & a_{52}^{(1)} &= 1 - (-1) \cdot 0 = 1; \\
 a_{53}^{(1)} &= -1 - (-1) \cdot (-1) = -2; & a_{54}^{(1)} &= 0 - (-1) \cdot (-1) = -1; \\
 a_{55}^{(1)} &= 1 - (-1) \cdot (0) = 1; & b_5^{(1)} &= 0 - (-1) \cdot 4 = 4.
 \end{aligned}$$

Пересчет коэффициентов второго и третьего уравнений не производили, т. к. коэффициенты первого столбца в этих уравнениях равны нулю.

Результаты пересчетов представим в виде расширенной матрицы на шаге $k = 1$:

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 4 \\
 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & -6 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -2 \\
 0 & -1 & 1 & 3 & 0 & -4 \\
 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 4
 \end{bmatrix}.$$

Результаты расчетов на последующих шагах приводим без подробных пояснений в виде матриц:

$$\begin{array}{cc}
 \text{шаг } k = 2 & \text{шаг } k = 3 \\
 \begin{bmatrix}
 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 4 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 6 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -2 \\
 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & 2 \\
 0 & 0 & -2 & -2 & 2 & -2
 \end{bmatrix}; & \begin{bmatrix}
 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 4 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 6 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\
 0 & 0 & 0 & 4 & -2 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -2 & 4 & 2
 \end{bmatrix};
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc}
 \text{шаг } k = 4 & \text{шаг } k = 5 \\
 \begin{bmatrix}
 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 4 \\
 & 1 & 0 & 1 & -1 & 6 \\
 & & 1 & 0 & 1 & 2 \\
 & & & 1 & -0,5 & 0 \\
 & & & & 3 & 2
 \end{bmatrix}; & \begin{bmatrix}
 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 4 \\
 & 1 & 0 & 1 & -1 & 6 \\
 & & 1 & 0 & 1 & 2 \\
 & & & 1 & -0,5 & 0 \\
 & & & & 1 & 2/3
 \end{bmatrix}.
 \end{array}$$

В результате пяти шагов система уравнений приведена к треугольному виду.

Формулы для обратного хода в общем виде:

$$x_i = b_i^{(i)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}^{(i)} x_j, \quad i = n-1, \dots, 1.$$

Токи в ветвях равны:

$$\dot{I}_{\hat{a}t} = [17/3; 19/3; 4/3; 1/3; 2/3].$$

Проверку по первому закону Кирхгофа выполнить самостоятельно с представлением токораспределения по схеме.

Применение метода Гаусса с обратным ходом при решении системы узловых уравнений приводит только результаты преобразований на соответствующих шагах.

Исходное узловое уравнение в матричной форме получено на предыдущем занятии:

$$Y \cdot U_{\Delta} = J,$$

$$\begin{bmatrix} 2,5 & -0,5 & -1 \\ -0,5 & 2,5 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{\Delta 1} \\ U_{\Delta 2} \\ U_{\Delta 3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Результаты пересчетов на шаге $k = 1, 2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -0,2 & -0,4 & -1,6 \\ & 2,4 & -1,2 & -6,8 \\ & -1,2 & 1,6 & -3,6 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & -0,2 & -0,4 & -1,6 \\ & 1 & -0,5 & -2,83 \\ & & 1 & -7 \end{bmatrix}.$$

В результате двух шагов систему уравнений привели к треугольному виду, поэтому можно выполнить расчет обратного хода:

$$\dot{U}_{\Delta 3} = -7;$$

$$\dot{U}_{\Delta 2} = -2,83 + 0,5 \cdot (-7) = -6,33;$$

$$\dot{U}_{\Delta 1} = -1,6 + 0,4 \cdot (-7) + 0,2 \cdot (-6,33) = -5,666.$$

Токи в ветвях схемы определяются произведением матриц

$$\dot{I}_{\hat{a}} = Z_{\hat{a}}^{-1} \cdot M_t \cdot U_{\hat{a}};$$

$$\dot{I}_{\hat{a}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5,666 \\ -6,33 \\ -7,0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,666 \\ 6,333 \\ 1,333 \\ 0,333 \\ 0,666 \end{bmatrix}.$$

Сопоставление результатов токов ветвях указывает на верность выполнения решения узлового уравнения.

Решим систему узловых уравнений методом Гаусса без обратного хода.

Исходное уравнение в матричной форме

$$\begin{bmatrix} 2,5 & -0,5 & -1 \\ -0,5 & 2,5 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{\Delta 1} \\ U_{\Delta 2} \\ U_{\Delta 3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Первый шаг – выполняется аналогично алгоритму метода Гаусса с обратным ходом, результаты которого:

$$\begin{bmatrix} 1 & -0,2 & -0,4 & -1,6 \\ & 2,4 & -1,2 & -6,8 \\ & -1,2 & 1,6 & -3,6 \end{bmatrix}.$$

Расчет коэффициентов на произвольном k -ом шаге выполняется по формулам:

$$\begin{aligned} a_{kj}^{(k)} &= a_{kj}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)}; & b_k^{(k)} &= b_k^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)}; \\ a_{ij}^{(k)} &= a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} \cdot a_{kj}^{(k)}; & b_i &= b_i^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} \cdot b_k^{(k)}; \\ i &= 1, 2, \dots, n, & i &\neq k, & j &= k+1, \dots, n. \end{aligned}$$

Второй шаг – коэффициенты второго уравнения полученной системы на первом шаге делим на 2,4, получим:

$$a_{22}^{(2)} = 2,4/2,4 = 1; \quad a_{23}^{(2)} = -1,2/2,4 = -0,5; \quad b_2^{(2)} = -6,8/2,4 = -2,833.$$

Пересчитываем коэффициенты $a_{ij}^{(2)}$ и $b_i^{(2)}$ для $i=1, 3$
 $j = k+1 = 3$:

$$\begin{aligned} a_{13}^{(2)} &= a_{13}^{(1)} - a_{12}^{(1)} \cdot a_{23}^{(2)} = -0,4 - (-0,2)(-0,5) = -0,5; \\ b_1^{(2)} &= b_1^{(1)} - a_{12}^{(1)} \cdot b_2^{(2)} = -1,6 - (-0,2)(-2,833) = -2,166; \\ a_{33}^{(2)} &= a_{33}^{(1)} - a_{32}^{(1)} \cdot a_{23}^{(2)} = 1,6 - (-1,2)(-0,5) = 1; \\ b_3^{(2)} &= b_3^{(1)} - a_{32}^{(1)} \cdot b_2^{(2)} = -3,6 - (-1,2)(-2,833) = -7. \end{aligned}$$

Полученные коэффициенты представим в виде матрицы:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0,5 & -2,166 \\ 0 & 1 & -0,5 & -2,833 \\ 0 & 0 & 1 & -7,0 \end{bmatrix}.$$

Третий шаг – поскольку ведущий элемент третьей строки матрицы, полученной на втором шаге равен единице, то коэффициенты $a_{33}^{(3)} = 1$, $b_3^{(3)} = -7$.

Пересчету подлежат $b_1^{(3)}$ и $b_2^{(3)}$, т. к. при пересчете $a_{13}^{(3)}$ и $a_{23}^{(3)}$ получаем равными нулю.

$$b_1^{(3)} = b_1^{(2)} - a_{13}^{(2)} \cdot b_3^{(3)} = -2,166 - (-0,5)(-7,0) = -5,666;$$

$$b_2^{(3)} = b_2^{(2)} - a_{23}^{(2)} \cdot b_3^{(3)} = -2,833 - (-0,5)(-7,0) = -6,333.$$

Результаты третьего шага в виде матрицы:

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{\Delta 1} \\ U_{\Delta 2} \\ U_{\Delta 3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5,666 \\ -6,333 \\ -7,0 \end{bmatrix}.$$

Сопоставив результаты $U_{\Delta i}$ с результатами, полученными на основе решения уравнения методом Гаусса с обратным ходом, видим, что они идентичны.

Для нахождения $U_{\Delta i}$ можно применить и метод Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2,5 & -0,5 & -1 \\ -0,5 & 2,5 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 6;$$

$$\Delta 1 = \begin{vmatrix} -4 & -0,5 & -1 \\ -6 & 2,5 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -34; \quad \Delta 2 = \begin{vmatrix} -2,5 & -4 & -1 \\ -0,5 & -6 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -38;$$

$$\Delta 3 = \begin{vmatrix} 2,5 & -0,5 & -4 \\ -0,5 & 2,5 & -6 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -42; \quad U_{\Delta i} = \begin{bmatrix} -5,666 \\ -6,333 \\ -7,0 \end{bmatrix}.$$

Полученные результаты идентичны значениям напряжений узлов относительно базисного, определенным при решении матричного узлового уравнения другими прямыми методами.

На основании решения контурного уравнения

$$Z_k \cdot I_k = -N \cdot Z_{\hat{a}} \cdot \begin{bmatrix} M_{\alpha}^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot J,$$

коэффициенты которого определены ранее, имеет вид

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_{k1} \\ I_{k2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

определить токи в ветвях схемы.

Токи в ветвях схемы определяется выражением

$$I_{\hat{a}} = N_t \cdot I_k + \begin{bmatrix} M_{\alpha}^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot J.$$

Определим контурные токи путем обращения матрицы Z_k

$$Z_k^{-1} = \begin{bmatrix} 0,333 & 0,166 \\ 0,166 & 0,333 \end{bmatrix}.$$

Контурные токи определяются $I_k = Z_k^{-1}$

$$\begin{bmatrix} I_{k1} \\ I_{k2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,333 & 0,166 \\ 0,166 & 0,333 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,332 \\ 0,666 \end{bmatrix}.$$

Токи в ветвях схемы

$$\begin{aligned} I_{\hat{a}} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,333 \\ 0,666 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -0,333 \\ 0,333 \\ -0,666 \\ 0,333 \\ 0,666 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6,0 \\ 6,0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,667 \\ 6,335 \\ 1,334 \\ 0,333 \\ 0,666 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Полученные значения токов совпадают с решением, полученном на основе обобщенного уравнения.

Решение контурного уравнения на основе метода Гаусса (с обратным и без обратного хода) выполнить самостоятельно.

4.3. Индивидуальные задания

Определить параметры установившегося режима: $I_{\hat{a}}$ и U_i по уравнениям состояния электрической сети (обобщенного, контурного, узлового) применив прямые методы решения.

5. РАСЧЕТ РЕЖИМОВ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СЕТИ ПО УЗЛОВЫМ И КОНТУРНЫМ УРАВНЕНИЯМ ИТЕРАЦИОННЫМИ МЕТОДАМИ ПРИ ЗАДАНИИ НАГРУЗОК В ТОКАХ

5.1. Теоретические сведения

К итерационным относятся такие методы, с помощью которых решение систем уравнений получается как предел последовательных приближений, вычисляемых посредством единообразных операций.

Сущность итерационных методов заключается в том, что значения искомых величин, полученных на предыдущей итерации, уточняются на последующей. Этот процесс продолжается до тех пор, пока не будут выполнены определенные условия.

Метод простой итерации

Допустим, что задана система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad (5.1)$$

Разрешим каждое уравнение системы относительно одной переменной, номер которой совпадает с номером уравнения, т. е. приведем систему к нормальному виду

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \dots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n + \frac{b_1}{a_{11}}; \\ x_2 &= -\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1 - \dots - \frac{a_{2n}}{a_{22}}x_n + \frac{b_2}{a_{22}}; \\ &\dots \\ x_n &= -\frac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1 - \frac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2 - \dots + \frac{b_n}{a_{nn}}. \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

Система (5.2) согласно методу простой итерации решается следующим образом:

1) задаются начальными приближениями неизвестных $x_i^{(0)}$, $i = 1, 2, \dots, n$;

2) значения $x_i^{(0)}$ подставляют в правые части уравнений (5.2) и тем самым определяются следующие приближения неизвестных $x_i^{(1)}$, $i = 1, 2, \dots, n$;

3) подстановкой значений $x_i^{(1)}$ находится следующее приближение и т. д.

Таким образом, на k -ом шаге итерационного процесса система (5.2) запишется как

$$\left. \begin{aligned} x_1^{(k)} &= -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2^{(k-1)} - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3^{(k-1)} - \dots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n^{(k-1)} + \frac{b_1}{a_{11}}; \\ x_2^{(k)} &= -\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1^{(k-1)} - \frac{a_{23}}{a_{22}}x_3^{(k-1)} - \dots - \frac{a_{2n}}{a_{22}}x_n^{(k-1)} + \frac{b_2}{a_{22}}; \\ &\dots \\ x_n^{(k)} &= -\frac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1^{(k-1)} - \frac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2^{(k-1)} - \dots - \frac{a_{n(n-1)}}{a_{nn}}x_{n-1}^{(k-1)} + \frac{b_n}{a_{nn}}. \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока значения x_i , полученные на двух смежных итерациях, не будут отличаться на величину, меньшую заданной погрешности решения ε , т. е. до выполнения условия

$$\left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.4)$$

Для выполнения условия (5.4) при любой заданной точности решения необходимо, чтобы

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^k = x_i^*, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.5)$$

При выполнении (5.5) для произвольного начального приближения $x_i^{(k)}$, $i = 1, 2, \dots, n$ итерационный процесс называется сходящимся. В противном случае итерационный процесс не приводит к решению и называется расходящимся.

Условие сходимости итерационного процесса при любом столбце начальных приближений можно записать через элементы матрицы коэффициентов исходной системы уравнений.

$$\sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| < |a_{ii}|, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (5.6)$$

т. е. если модули диагональных коэффициентов для каждого из уравнений (5.1) больше суммы модулей всех остальных коэффициентов.

В том случае, если перечисленные условия не соблюдаются, матрица $|a_{jj}|$ не является особенной, всегда можно добиться того, чтобы в результате перестановки уравнений (5.1) итерационный процесс всегда сходил.

Отметим, что достаточные условия (5.6) определяются только соотношением элементов матрицы коэффициентов A . Применительно к решению системы узловых уравнений сходимость итерационного процесса будет зависеть только от свойств матрицы узловых проводимостей Y_y . При решении линейных уравнений состояния итерационный процесс по методу простой итерации обычно сходится, хотя и весьма медленно.

Метод Зейделя

Этот метод основан на использовании уравнений, приведенных к виду (5.2). Но в отличие от метода простой итерации для вычисления i -ой переменной на каждом k -ом шаге итерационного процесса используются значения переменных, вычисленные как на предыдущем $(k-1)$ -м шаге, так и на данном. При этом на k -ом шаге итерационного процесса система (5.2) имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} x_1^{(k)} &= -\frac{a_{12}}{a_{11}} x_2^{(k-1)} - \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3^{(k-1)} - \dots - \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n^{(k-1)} + \frac{b_1}{a_{11}}; \\ x_2^{(k)} &= -\frac{a_{21}}{a_{22}} x_1^{(k)} - \frac{a_{23}}{a_{22}} x_3^{(k-1)} - \dots - \frac{a_{2n}}{a_{22}} x_n^{(k-1)} + \frac{b_2}{a_{22}}; \\ &\dots \\ x_{n-1}^{(k)} &= -\frac{a_{(n-1)1}}{a_{(n-1)(n-1)}} x_1^{(k)} - \dots - \frac{a_{(n-1)(n-2)}}{a_{(n-1)(n-1)}} x_{n-2}^{(k)} - \frac{a_{(n-1)n}}{a_{(n-1)(n-1)}} x_n^{(k-1)} + \frac{b_{n-1}}{a_{(n-1)(n-1)}}; \\ x_n^{(k)} &= -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} x_1^{(k)} - \frac{a_{n2}}{a_{nn}} x_2^{(k)} - \dots - \frac{a_{n(n-1)}}{a_{nn}} x_{n-1}^{(k)} + \frac{b_n}{a_{nn}}; \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

Достаточные условия сходимости метода простой итерации являются достаточными и для метода Зейделя. При одинаковых начальных приближениях неизвестных и одинаковой заданной точности решение по методу Зейделя получается за меньшее число итераций.

Характеризуя итерационные методы в целом, необходимо указать, что они обладают свойством самоисправляемости: любое оши-

бочно найденное решение может восприниматься как новое начальное решение.

Пример выполнения расчетов на ПЭВМ

Матричное узловое уравнение получено в теме № 3:

$$Y_y \cdot U_\Delta = J;$$

$$\begin{vmatrix} 2,5 & -0,5 & -1 \\ -0,5 & 2,5 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} U_{1\Delta} \\ U_{2\Delta} \\ U_{3\Delta} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{vmatrix}.$$

перемножив $Y_y \cdot U_\Delta$, получим

$$\begin{vmatrix} 2,5 \cdot U_{1\Delta} & -0,5 \cdot U_{2\Delta} & -1 \cdot U_{3\Delta} \\ -0,5 \cdot U_{1\Delta} & 2,5 \cdot U_{2\Delta} & -1 \cdot U_{3\Delta} \\ -1 \cdot U_{1\Delta} & -1 \cdot U_{2\Delta} & 2 \cdot U_{3\Delta} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{vmatrix}.$$

Из каждой строки системы выражаем соответствующий диагональный элемент:

$$2,5 \cdot U_{1\Delta} = -4 - (-0,5 \cdot U_{2\Delta}) - (-1 \cdot U_{3\Delta});$$

$$2,5 \cdot U_{2\Delta} = -6 - (-0,5 \cdot U_{1\Delta}) - (-1 \cdot U_{3\Delta});$$

$$2 \cdot U_{3\Delta} = -2 - (-1 \cdot U_{1\Delta}) - (-1 \cdot U_{2\Delta}).$$

Теперь произведем преобразования и из каждой строки системы выразим соответствующий элемент U_i :

$$U_{1\Delta} = \frac{-4}{2,5} + \frac{0,5 \cdot U_{2\Delta}}{2,5} + \frac{1 \cdot U_{3\Delta}}{2,5};$$

$$U_{2\Delta} = \frac{-6}{2,5} + \frac{0,5 \cdot U_{1\Delta}}{2,5} + \frac{1 \cdot U_{3\Delta}}{2,5};$$

$$U_{3\Delta} = \frac{-2}{2} + \frac{1 \cdot U_{1\Delta}}{2} + \frac{1 \cdot U_{2\Delta}}{2}.$$

Упростим получившиеся уравнения:

$$U_{1\Delta} = -1,6 + 0,2 \cdot U_{2\Delta} + 0,4 \cdot U_{3\Delta};$$

$$U_{2\Delta} = -2,4 + 0,2 \cdot U_{1\Delta} + 0,4 \cdot U_{3\Delta};$$

$$U_{3\Delta} = -1 + 0,5 \cdot U_{1\Delta} + 0,5 \cdot U_{2\Delta}.$$

Таким образом, мы выразили неизвестные элементы системы через другие неизвестные (привели к виду (5.2)).

Для нахождения значений $U_{i\Delta}$ используем метод простой итерации, при нахождении элемента $U_{i\Delta}$ на шаге (k), в формуле будем подставлять вместо неизвестных элементов найденные значения на предыдущем шаге ($k - 1$), тогда получим:

$$\begin{aligned} U_{1\Delta}^{(k)} &= -1,6 + 0,2 \cdot U_{2\Delta}^{(k-1)} + 0,4 \cdot U_{3\Delta}^{(k-1)}; \\ U_{2\Delta}^{(k)} &= -2,4 + 0,2 \cdot U_{1\Delta}^{(k-1)} + 0,4 \cdot U_{3\Delta}^{(k-1)}; \\ U_{3\Delta}^{(k)} &= -1 + 0,5 \cdot U_{1\Delta}^{(k-1)} + 0,5 \cdot U_{2\Delta}^{(k-1)}. \end{aligned}$$

Задаем начальные приближения: $U_{1\Delta}^{(0)} = U_{2\Delta}^{(0)} = U_{3\Delta}^{(0)} = 0$ и точность $\varepsilon_i = 0,001$.

Итерационный процесс проводим до того момента, пока две соседние строки не сойдутся (значения станут одинаковыми) с заданной точностью (в нашем случае до третьего знака после запятой).

Таблица

Результаты итерационного процесса

№ итерации	$U_{1\Delta}$	$U_{2\Delta}$	$U_{3\Delta}$
1	-1,6	-2,4	-1
2	-2,48	-3,12	-3
3	-3,424	-4,096	-3,8
4	-3,9392	-4,6048	4,76
5	-4,42496	-5,09184	-5,272
...
16	-5,62062	-6,28728	-6,93785
17	-5,6326	-6,29926	-6,95395
18	-5,644143	-6,3081	-6,96593
19	-5,64799	-6,31466	-6,97477
20	-5,65284	-6,3195	-6,98133
...
31	-5,66616	-6,33283	-6,99932
32	-5,66629	-6,33296	-6,99949
33	-5,66639	-6,33306	-6,99963
34	-5,66646	-6,33313	-6,99972

Как видно из таблицы итерационный процесс сошелся на 34 шаге.

Запишем полученный результат:

$$U_{\Delta} = \begin{pmatrix} -5,666 \\ -6,333 \\ -6,999 \end{pmatrix}.$$

Результаты определения $U_{i\Delta}$ совпадают с расчетами на основе других методов, полученных ранее.

5.3. Индивидуальные задания

Для нахождения значений $U_{i\Delta}$ используем метод ускоренной итерации при нахождении элемента $U_{n\Delta}$ на шаге (k) , в формулу будем подставлять найденные значения $U_{(n-1)\Delta}$ на этом же шаге (k) , а вместо неизвестных U_{n-1} – значения с предыдущего шага $(k-1)$, тогда получим:

$$U_{1\Delta}^{(k)} = -1,6 + 0,2 \cdot U_{2\Delta}^{(k-1)} + 0,4 \cdot U_{3\Delta}^{(k-1)};$$

$$U_{2\Delta}^{(k)} = -2,4 + 0,2 \cdot U_{1\Delta}^{(k)} + 0,4 \cdot U_{3\Delta}^{(k-1)};$$

$$U_{3\Delta}^{(k)} = -1 + 0,5 \cdot U_{1\Delta}^{(k)} + 0,5 \cdot U_{2\Delta}^{(k)}.$$

Задаем начальные приближения: $U_{1\Delta}^{(0)} = U_{2\Delta}^{(0)} = U_{3\Delta}^{(0)} = 0$ и точность $\varepsilon_i = 0,001$.

Итерационный процесс проводим до того момента, пока две соседние строки не сойдутся (значения станут одинаковыми) с заданной точностью (в нашем случае до третьего знака после запятой).

Таблица

№ итерации	$U_{1\Delta}$	$U_{2\Delta}$	$U_{3\Delta}$
1	-1,6	-2,72	-3,16
2	-3,408	-4,3456	-4,8768
3	-4,41984	-5,23469	-5,82726
4	-4,97784	-5,72647	-6,35216
5	-5,28616	-5,9981	-6,64213
...
16	-5,66611	-6,33284	-6,99948
17	-5,66636	-6,33306	-6,99971
18	-5,6665	-6,33318	-6,99984

Как видно из таблицы итерационный процесс сошелся на 18 шаге.

Запишем получившейся результат:

$$U_{\Delta} = \begin{pmatrix} -5,666 \\ -6,333 \\ -6,999 \end{pmatrix}.$$

Результаты $U_{i\Delta}$ совпадают с расчетами на основе простой итерации.

Матричное контурное уравнение итерационными методами вида

$$Z_k \cdot I_k = -N \cdot Z \cdot \begin{vmatrix} M_{\alpha}^{-1} \\ 0 \end{vmatrix} \cdot J$$

с учетом исходных данных получено в теме № 3

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} I_{k1} \\ I_{k2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 2 \end{vmatrix}.$$

Перемножив $Z_k \cdot I_k$, получим:

$$\begin{vmatrix} 4 \cdot I_{k1} & -2 \cdot I_{k2} \\ -2 \cdot I_{k1} & 4 \cdot I_{k2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 2 \end{vmatrix}.$$

Из каждой системы выражаем соответствующий диагональный элемент:

$$\begin{aligned} 4 \cdot I_{k1} &= 0 - (-2 \cdot I_{k2}); \\ 4 \cdot I_{k2} &= 2 - (-2 \cdot I_{k1}). \end{aligned}$$

Теперь произведем преобразования и из каждой строки системы выразим соответствующий элемент I_{ki} :

$$\begin{aligned} I_{k1} &= \frac{0}{4} + \frac{2 \cdot I_{k2}}{4}; \\ I_{k2} &= \frac{2}{4} + \frac{2 \cdot I_{k1}}{4}. \end{aligned}$$

Упростим получившиеся уравнения:

$$\begin{aligned} I_{k1} &= 0,5 \cdot I_{k2}; \\ I_{k2} &= 0,5 + 0,5 \cdot I_{k1}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы выразили неизвестные элементы системы через другие неизвестные.

Для нахождения значений I_{ki} используем метод простой итерации. То есть при нахождении элемента I_{ki} на шаге (k), в формуле будем подставлять найденные значения I_k на предыдущем шаге ($k-1$), тогда получим:

$$\begin{aligned} I_{k1}^{(k)} &= 0,5 \cdot I_{k2}^{(k-1)}; \\ I_{k2}^{(k)} &= 0,5 + 0,5 \cdot I_{k1}^{(k-1)}. \end{aligned}$$

Задаемся начальным приближением: $I_{k1}^{(0)} = I_{k2}^{(0)} = 0$ и точность $\varepsilon_i = 0,001$.

Итерационный процесс проводим до того момента, пока две соседние строки не сойдутся (значения станут одинаковыми) до заданной точности (в нашем случае до третьего знака после запятой).

Таблица

Результаты итерационного процесса

№ итерации	I_{k1}	I_{k2}
1	0	0,5
2	0,25	0,5
3	0,25	0,625
4	0,3125	0,625
5	0,3125	0,65625
6	0,328125	0,65625
7	0,328125	0,664063
8	0,332031	0,664063
9	0,332031	0,666016
10	0,333008	0,666016
11	0,333008	0,666504

Как видно из таблицы итерационный процесс сошелся на 11-ом шаге. Запишем получившейся результат:

$$I_k = \begin{pmatrix} 0,333 \\ 0,666 \end{pmatrix}.$$

Результаты определения I_{ki} совпадают с полученными результатами на основе других методов.

Для нахождения значений I_{ki} используем метод ускоренной итерации. При нахождении элемента I_{kn} на шаге (k), в формулу будем подставлять найденные значения $I_{k(n-1)}$ на этом же шаге (k), а вместо неизвестных $I_{k(n+1)}$ - значения с предыдущего шага ($k-1$), тогда получим:

$$\begin{aligned} I_{k1}^{(k)} &= 0,5 \cdot I_{k2}^{(k-1)}; \\ I_{k2}^{(k)} &= 0,5 + 0,5 \cdot I_{k1}^{(k-1)}. \end{aligned}$$

Задаемся начальным приближением: $I_{k1}^{(0)} = I_{k2}^{(0)} = 0$ и точность $\varepsilon_i = 0,001$.

Итерационный процесс проводим до того момента, пока две соседние строки не сойдутся (значения станут одинаковыми) до заданной точности (в нашем случае до третьего знака после запятой).

Результаты итерационного процесса

№ итерации	I_{k1}	I_{k2}
1	0	0,5
2	0,25	0,625
3	0,3125	0,65625
4	0,328125	0,664063
5	0,332031	0,666016
6	0,333008	0,666504
7	0,333252	0,666626

Как видно из таблицы итерационный процесс сошелся на 9-ом шаге. Запишем получившейся результат:

$$I_k = \begin{pmatrix} 0,333 \\ 0,666 \end{pmatrix}.$$

Результаты I_{ki} совпадают с расчетными на основе простой итерации.

По вариантам, представленными в приложениях определить токи и напряжения в схемах, применяя итерационные методы решения:

- а) метод простой итерации;
- б) метод Зейделя.

6. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН – ПАРАМЕТРОВ РЕЖИМОВ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ

При проектировании и эксплуатации электрических систем возникает задача оценки характеристик режимов при рассмотрении их на достаточно длительных интервалах времени (сутки, месяц, сезон, год). Причем нагрузки моделируются случайными величинами.

В этом случае нагрузки элементов электрических систем и параметры режимов напряжений целесообразно описывать интегральными характеристиками: математическими ожиданиями, среднеквадратическими отклонениями, математическими ожиданиями квадратов случайных величин и т. д.

В общем случае нагрузки электрических систем для решения указанных задач следует моделировать многомерными комплексными случайными векторами с коррелированными действительными и мнимыми составляющими. Ограничимся изучением указанных характеристик режимов в действительной области изменения аргументов.

Для вычисления вероятностных характеристик нагрузок ветвей сети по известным вероятностным характеристикам нагрузок узлов целесообразно использовать такие обобщенные параметры схемы замещения, как матрицы коэффициентов распределения C и собственных и взаимных проводимостей $Y_{\hat{a}}$.

Основное уравнение связи токов узлов и ветвей

$$I = C \cdot J + Y \cdot E,$$

где I – матрица-столбец токов ветвей;

$C = Z_{\hat{a}}^{-1} \cdot M_t (M \cdot Z_{\hat{a}}^{-1} \cdot M_t)^{-1}$ – матрица коэффициентов распределения;

$Z_{\hat{a}}$ – матрица сопротивлений ветвей, диагональная;

M, M_t – соответственно матрица соединений схемы замещения и транспонированная матрица соединений;

J – столбцовая матрица нагрузок узлов;

$Y = N_t (N \cdot Z_{\hat{a}} \cdot N_t)^{-1} N$ – матрица собственных и взаимных проводимостей;

N, N_t – соответственно матрица соединений в контурах и транспонированная матрица соединений в контурах;

E – матрица столбец свободных ЭДС ветвей.

Матрица математических ожиданий токов ветвей I определяется по матрице математических ожиданий токов нагрузок узлов и матрице математических ожиданий ЭДС ветвей

$$I = M[C \cdot J + Y \cdot E] = C \cdot J + Y \cdot E.$$

Для вычисления матрицы дисперсий токов ветвей требуется уже гораздо больше исходной информации:

$$\begin{aligned} D(I) = D(C \cdot J + Y \cdot E) = D(C \cdot J) + D(Y \cdot E) + \\ + \left\| \sum_{\substack{k \neq p \\ k=p}} C_{ik} \cdot Y_{ip} \cdot \sigma_{jk} \cdot \sigma_{Ep} \cdot \eta_{kp} \right\| = \left\| C_{ij}^2 \right\| D(J) + \left\| \sum_{k \neq l} C_{ik} \cdot C_{il} \cdot \sigma_{Jk} \cdot \sigma_{Jl} \cdot \eta_{kl} \right\| + \\ + \left\| Y_{ip}^2 \right\| D(E) + \left\| \sum_{p \neq q} Y_{ip} \cdot Y_{iq} \cdot \sigma_{Ep} \cdot \sigma_{Eq} \cdot \eta_{pq} \right\| + \left\| \sum_{\substack{k \neq p \\ k=p}} C_{ik} \cdot Y_{ip} \cdot \sigma_{Jk} \cdot \sigma_{Ep} \cdot \eta_{kp} \right\|, \end{aligned}$$

где $i = 1, 2, \dots, m$ – число ветвей схемы замещения;

$k = 1, 2, \dots, n$ – число независимых узлов схемы замещения;

$p = 1, 2, \dots, s$ – число свободных ЭДС в схеме замещения.

Таким образом дисперсия токов ветвей зависит не только от обобщенных параметров схемы, дисперсий токов нагрузок $D(J)$ и дисперсий свободных ЭДС $D(E)$, но и от вероятностной взаимосвязи между режимами электропотребления в узлах (матрица коэффициентов корреляции $\|\eta_{kl}\|$), вероятностной взаимосвязи между изменениями свободных ЭДС ветвей (матрица $\|\eta_{pq}\|$), вероятностной взаимосвязи между режимами электропотребления в узлах нагрузки и изменением свободных ЭДС ветвей (матрица $\|\eta_{kp}\|$).

Если принять, что указанные совокупности случайных величин, входящих в систему случайных векторов, взаимнонезависимыми, то нахождение дисперсии упрощается

$$D(I) = \left\| C_{ik}^2 \right\| \cdot D(J) + \left\| Y_{ip}^2 \right\| \cdot D(E).$$

Для получения числовых интегральных характеристик напряжений узлов рассмотрим связь между напряжениями узлов и активными параметрами схемы замещения J, E .

Основное узловое уравнение

$$U_{\Delta} = Z \cdot J - Z \cdot M \cdot Z_{\hat{a}}^{-1} \cdot E,$$

где $U_{\Delta} = U_0 - U_y$;

U_0 – напряжение базисного узла;

U_y – матрица-столбец напряжений узлов;

$Z = (M \cdot Z_{\hat{a}}^{-1} \cdot M_t)^{-1}$ – матрица квадратная, собственных и взаимных сопротивлений схемы;

$Z_y \cdot M \cdot Z_{\hat{a}}^{-1} = H$ – матрица коэффициентов распределения напряжений.

Получаем матрицу напряжений узлов

$$U_y = U_0 - U_{\Delta} = U_0 - [Z \cdot J + H \cdot E] -$$

основное уравнение связи между активными параметрами схемы замещения и напряжением узлов.

Матрица математических ожиданий напряжений узлов вычисляется по матрице математических ожиданий свободных ЭДС

$$M(U_y) = \bar{U}_y = U_0 - M[Z \cdot J + H \cdot E].$$

Матрица дисперсий напряжений узлов

$$D|(U_y)| = D|(U_0)| + \|Z_{ik}^2\| D(J) + \|H_{ip}^2\| D(E) + \left\| \sum_{k \neq l} Z_{ik} \cdot Z_{il} \cdot \sigma_{J_k} \cdot \sigma_{J_l} \cdot \eta_{kl} \right\| +$$

$$+ \left\| \sum_{r \neq q} H_{ip} \cdot H_{iq} \cdot \sigma_{E_p} \cdot \sigma_{E_q} \cdot \eta_{pq} \right\| + \left\| \sum_{\substack{k \neq l \\ k=p}} Z_{ik} \cdot H_{ip} \cdot \sigma_{J_k} \cdot \sigma_{E_p} \cdot \eta_{kp} \right\| +$$

$$+ \left[- \left\| \sum_{k=1}^n Z_{ik} \cdot \sigma_{J_k} \cdot \sigma_{U_0} \cdot \eta_{U_0 J_k} \right\| - \left\| \sum_{p=1}^m H_{ip} \cdot \sigma_{E_p} \cdot \sigma_{U_0} \cdot \eta_{U_0 E_p} \right\| \right],$$

где $\eta_{U_0 J_k}$, $\eta_{U_0 E_p}$ – соответственно коэффициенты корреляции между случайной величины напряжения базисного узла и случайными величинами – нагрузкой k -го узла и свободной ЭДС p -ветви.

Если известны числовые интегральные характеристики параметров режима системы, то предполагая из физических соображений вид закона распределения исследуемого параметра можно, определить расчетные его X_p с заданной вероятностью превышения. Для этого необходимо решить уравнение относительно X_p , а именно

$$\int_{X_p}^{\infty} p(x) dx = \gamma,$$

где $p(x)$ – плотность распределения параметра x .

Рассмотрим следующие случаи распределения параметра режима:

– нормальный закон – $X_p = \bar{X} + \Phi^{-1}(1 - \gamma)\sigma_x$,

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$ – функция Лапласа;

– экспоненциальный закон – $X_p = \bar{X} + \sigma_x[-\ln \gamma - 1]$;

– равномерный закон – $X_p = \bar{X} + \sigma_x[\sqrt{3}(1 - 2\gamma)]$.

Вероятность нахождения параметров в диапазоне $[x_1, x_2]$ определяются по формуле

$$p(x_1 \leq x \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx.$$

По интегральным характеристикам нагрузок элементов сетей в них просто вычислить потери мощности и энергии.

Математическое ожидание потерь активной мощности в элементе сети трехфазного тока

$$M[\Delta P] = M[3 \cdot I^2 \cdot R] = 3 \cdot R \cdot M[I^2 + D(I)].$$

Потери электроэнергии в элементе сети за время T

$$\Delta W = 3R \cdot \int_0^T I^2(t) dt = 3R \cdot M[I^2] \cdot T = 3R \cdot T [I^2 + D(I)].$$

6.2. РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

ЗАДАЧА № 1

Активная мощность потребителей электроэнергии узла нагрузки распределена равномерно в некотором диапазоне значений. Математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение значение мощности соответственно

$$M(P) = 80 \text{ кВт}, \sigma_p = 43,3 \text{ кВт}.$$

Определить:

1) Вероятность нахождения значений нагрузки в интервале $10 - 40 \text{ кВт}$

$$p(10 \leq P \leq 40).$$

2) Значение нагрузки P_γ , вероятность превышения которого $\gamma = 0,05$.

3) Вероятность того, что нагрузка будет меньше 55 кВт.

РЕШЕНИЕ:

Определим диапазон изменения случайной величины нагрузки. При равномерном законе распределения вероятностей случайной величины ее математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение выражаются через границы диапазона изменения

$$M[P] = \frac{P_{\max} + P_{\min}}{2} = 80 \text{ кВт};$$

$$\sigma_p = \frac{P_{\max} - P_{\min}}{2 \cdot \sqrt{3}} = 43,3 \text{ кВт}.$$

Решая систему двух уравнений относительно P_{\max} и P_{\min} , получаем $P_{\max} = 155 \text{ кВт}$, $P_{\min} = 5 \text{ кВт}$. Плотность распределения значений нагрузки

$$p(P) = \frac{1}{P_{\max} - P_{\min}} = \frac{1}{155 - 5} = \frac{1}{150} = 0,00666 \text{ 1/кВт}.$$

1) Вероятность нахождения значений нагрузки в интервале $10 - 40 \text{ кВт}$

$$p(10 \leq P \leq 40) = \int_{10}^{40} p(P) dP = \int_{10}^{40} 0,00666 \cdot dP = 0,00666 \cdot (40 - 10) = 0,2.$$

2) Значение нагрузки P_γ , вероятность превышения которого $\gamma = 0,05$

$$\int_{P_\gamma}^{155} p(P) dP = \gamma = 0,05;$$

$$0,00666 \cdot (155 - P_\gamma) = 0,05;$$

$$P_{\gamma} = \frac{0,00666 \cdot 155 - 0,05}{0,00666} = 147,5 \text{ кВт}.$$

3) Вероятность того, что нагрузка будет меньше 55 кВт

$$p(5 \leq P \leq 55) = \int_5^{55} 0,00666 \cdot dP = 0,00666 \cdot (55 - 5) = 0,333.$$

ЗАДАЧА № 2

Решить предыдущую задачу при условии, что активная мощность потребителей узла нагрузки распределена нормально с числовыми характеристиками

$$M(P) = 80 \text{ кВт}, \quad \sigma_p = 43,3 \text{ кВт}.$$

РЕШЕНИЕ:

Нормально распределенная плотность вероятности нагрузки описывается уравнением

$$p(P) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-(P-m_p)^2 / (2\sigma_p^2)} \quad (-\infty < P < +\infty).$$

1. Вероятность нахождения значений нагрузки в интервале 10–40 кВт

$$p(10 \leq P \leq 40) = \int_{10}^{40} p(P) dP = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_p} \cdot \int_{10}^{40} e^{-(P-m_p)^2 / 2\sigma_p^2} dP.$$

Пусть $x = \frac{P - m_p}{\sigma_p}$; $dP = \sigma_p \cdot dx$, тогда

$$\begin{aligned}
 p(10 \leq P \leq 40) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_p} \cdot \int_{\frac{10-m_p}{\sigma_p}}^{\frac{40-m_p}{\sigma_p}} e^{-x^2/2} \sigma_p \cdot dx = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\frac{40-m_p}{\sigma_p}} e^{-x^2/2} dx - \int_{-\infty}^{\frac{10-m_p}{\sigma_p}} e^{-x^2/2} dx \right) = \\
 &= \Phi\left(\frac{40-m_p}{\sigma_p}\right) - \Phi\left(\frac{10-m_p}{\sigma_p}\right),
 \end{aligned}$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-z^2/2} dz$ – функция Лапласа;

$$\begin{aligned}
 p(10 \leq P \leq 40) &= \Phi\left(\frac{40-80}{43,3}\right) - \Phi\left(\frac{10-80}{43,3}\right) = \\
 &= \Phi(-0,9238) - \Phi(-1,617) = 0,1236.
 \end{aligned}$$

2. Значение нагрузки P_γ , вероятность превышения которой $\gamma = 0,05$ определяется из выражения

$$\begin{aligned}
 \gamma &= \int_{P_\gamma}^{\infty} p(P) dP = \int_{P_\gamma}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_p} \cdot e^{-\frac{(P-m_p)^2}{2\sigma_p^2}} dP = \\
 &= 1 - \int_{-\infty}^{P_\gamma} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_p} \cdot e^{-\frac{(P-m_p)^2}{2\sigma_p^2}} dP.
 \end{aligned}$$

Используя, как и ранее замену переменной, получим

$$\begin{aligned}
 0,5 &= \Phi(\infty) - \Phi\left(\frac{P_\gamma - 80}{43,3}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{P_\gamma - 80}{43,3}\right); \\
 \Phi\left(\frac{P_\gamma - 80}{43,3}\right) &= 0,95.
 \end{aligned}$$

Находим обратную функцию Лапласа Φ' от величины 0,95

$\Phi'(0,95) = 1,64$, следовательно

$$\frac{P_\gamma - 80}{43,3} = 1,64; \quad P_\gamma = 151 \text{ кВт}.$$

3. Вероятность того, что нагрузка будет меньше 55 кВт:

$$\begin{aligned} p(-\infty \leq P \leq 55,0) &= \int_{-\infty}^{55} p(P) dP = \Phi\left(\frac{55 - m_p}{\sigma_p}\right) = \Phi\left(\frac{55 - 80}{43,3}\right) = \\ &= \Phi(-0,577) = 0,281. \end{aligned}$$

ЗАДАЧА № 3

Активная мощность потребителей электроэнергии узла нагрузки распределена экспоненциально со значениями числовых характеристик $M(P) = \sigma_p = 80$ кВт.

Определить:

1. Вероятность нахождения в интервале 10 – 40 кВт.
2. Значение нагрузки P_γ , вероятность превышения которого $\gamma = 0,05$.
3. Вероятность того, что нагрузка будет меньше 55 кВт.

РЕШЕНИЕ:

Экспоненциальная функция распределения плотности вероятности активной мощности имеет вид

$$p(P) = \alpha \cdot e^{-\alpha P} \quad (0 \leq P \leq \infty).$$

Для экспоненциального распределения $M(P) = \sigma_p = 1/\alpha$, откуда $\alpha = 1/M(P) = 1/80 = 0,0125$ 1/кВт.

Следовательно

$$p(P) = 0,0125 \cdot e^{-0,0125 \cdot P}.$$

1. Вероятность нахождения нагрузки в интервале 10 – 40 кВт

$$\begin{aligned} p(10 \text{ кВт} \leq P \leq 40 \text{ кВт}) &= \int_{10}^{40} p(P) dP = \int_{10}^{40} 0,0125 \cdot e^{-0,0125 P} dP = \\ &= e^{-10 \cdot 0,0125} - e^{-40 \cdot 0,0125} = 0,88 - 0,606 = 0,274. \end{aligned}$$

2. Значение нагрузки P_γ , вероятность превышения которого $\gamma = 0,05$ определяется из выражения

$$0,95 = \int_0^{P_\gamma} p(P) dP = \int_0^{P_\gamma} 0,0125 \cdot e^{-0,0125P} dP =$$

$$= e^0 - e^{-0,0125 \cdot P_\gamma} = 1 - e^{-0,0125 \cdot P_\gamma}.$$

$$1 - 0,95 = e^{-0,0125 \cdot P_\gamma}; \quad P_\gamma = 239,6 \text{ кВт}.$$

При $M(P) = \sigma_p = 43,3 \text{ кВт}$ $P_\gamma = 129,7 \text{ кВт}$.

3. Вероятность того, что нагрузка будет меньше 55 кВт

$$p(0 \leq P \leq 55) = \int_0^{55} 0,0125 \cdot e^{-0,0125P} dP =$$

$$= e^0 - e^{-0,0125 \cdot 55} = 1 - 0,503 = 0,497.$$

ЗАДАЧА № 4

Промышленное предприятие получает электроэнергию по двум параллельно работающим КЛ длиной 5 км, с сечением алюминиевых жил $3 \times 240 \text{ мм}^2$ ($r_0 = 0,132 \text{ Ом/км}$) с $U_i = 10 \text{ кВ}$. За год потребляет $76 \cdot 10^6 \text{ кВт} \cdot \text{ч}$ электроэнергии.

По замерам в период максимума и минимума нагрузок получены практически максимально и минимально возможные их среднечасовые значения

$$I_{\max} = 460 \text{ А}; \quad I_{\min} = 40 \text{ А}.$$

Определить потери электроэнергии за год в КЛ, полагая, что значения нагрузки предприятия распределены по нормальному закону.

Принять $\cos \varphi_i = 1$.

РЕШЕНИЕ:

Потери электроэнергии в элементе трехфазной сети переменного тока вычисляются по формуле

$$\Delta W = 3 \cdot R \cdot T \left([M(I)]^2 + D(I) \right) = 3 \cdot R \cdot T \left[\bar{I}^2 + D(I) \right].$$

Для нахождения потерь энергии за год необходимо знать среднегодовое значение тока и его дисперсию.

Среднегодовое значение тока

$$\bar{I} = \frac{T}{\sqrt{3} \cdot U_i \cos \varphi \cdot n} = \frac{\dot{Y}}{\dot{O} \cdot \sqrt{3} \cdot U_i \cos \varphi \cdot n} = \frac{76 \cdot 10^6}{8760 \cdot \sqrt{3} \cdot 10 \cdot 1 \cdot 2} = 250,4 \text{ А.}$$

При нормальном законе распределения случайной величины вероятность нахождения ее значений в диапазоне $(\bar{I} - 3 \cdot \sigma_I \leq I \leq \bar{I} + 3 \cdot \sigma_I)$ равна 0,0027 (правило трех сигм).

Поэтому для практических инженерных расчетов можно принять, что

$$I_{\max} = \bar{I} + 3 \cdot \sigma_I; \quad I_{\min} = \bar{I} - 3 \cdot \sigma_I.$$

$$\text{Следовательно, } \sigma_I = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{6} = \frac{460 - 40}{6} = 70 \text{ (А)}.$$

Потери электроэнергии в кабельных линиях за год

$$\Delta W = 3 \cdot 0,132 \cdot 5 \cdot 8760 \cdot (250,4^2 + 70^2) \cdot 10^{-3} \cdot 2 = 234,6 \cdot 10^4 \text{ кВт} \cdot \text{ч},$$

что составляет 3,08 % от передаваемой энергии.

Сравним полученный результат с результатом расчета по общепринятому методу – по времени потерь τ

$$\tau = \left(0,124 + \frac{T_{iá}}{10000} \right)^2 \cdot 8760 = \left(0,124 + \frac{4770}{10000} \right)^2 \cdot 8760 = 3164 \text{ ч}.$$

$$\text{где } T_{iá} = \frac{\dot{Y}}{P_{\max} \cdot n} = \frac{76 \cdot 10^6}{460 \cdot \sqrt{3} \cdot 10 \cdot 1 \cdot 2} = 4770 \text{ ч};$$

$\Delta W = 2 \cdot 3 \cdot 460^2 \cdot 0,132 \cdot 5 \cdot 3164 \cdot 10^{-3} = 265,08 \cdot 10^4 \text{ кВт} \cdot \text{ч}$ или 3,5 % от передаваемой мощности.

Метод, предусматривающий моделирование нагрузки случайной величиной, позволяет вычислить потери электроэнергии в схемах любых конфигураций, в т. ч. и сложноразветвленных, по токовым числовым характеристикам нагрузок ветвей, которые рассчитываются с использованием обобщенных параметров схем замещения.

ЗАДАЧА № 5

От шин низшего напряжения районной понизительной подстанции получают электроэнергию четыре типа потребителей. Законы

распределения случайных величин их нагрузок нормальные со следующими параметрами:

$$M(P_1) = 10; \quad \sigma_{P_1} = 3; \quad \text{МВт};$$

$$M(P_2) = 15; \quad \sigma_{P_2} = 8; \quad \text{МВт};$$

$$M(P_3) = 12; \quad \sigma_{P_3} = 5; \quad \text{МВт};$$

$$M(P_4) = 20; \quad \sigma_{P_4} = 10. \quad \text{МВт}.$$

Вероятностные взаимосвязи между режимами электропотребления характеризуются коэффициентами корреляции

$$\|\eta_{ij}\| = \begin{vmatrix} 1 & 0,3 & 0,45 & 0,7 \\ & 1 & -0,4 & 0,6 \\ & & 1 & 0,8 \\ & & & 1 \end{vmatrix}.$$

Определить значение нагрузки на шинах подстанции, вероятность превышения которой $\gamma = 0,05$, а также коэффициент одновременности, соответствующий этой вероятности.

РЕШЕНИЕ:

Нагрузка на шинах подстанции равна сумме нагрузок отдельных потребителей. При сложении случайных величин с нормальными законами распределения в результате также получается нормальный закон. Определим числовые характеристики суммарной нагрузки

$$M(P_\Sigma) = \sum_{i=1}^4 M(P_i) = 10 + 15 + 12 + 20 = 57 \text{ i}\hat{\text{A}}\text{d} .$$

$$\begin{aligned} D(P_\Sigma) &= \sum_{i=1}^4 D(P_i) + 2 \cdot \sum_{i<j} \sigma_{P_i} \cdot \sigma_{P_j} \cdot \eta_{ij} = \\ &= 3^2 + 8^2 + 5^2 + 10^2 + 2(3 \cdot 8 \cdot 0,3 + 3 \cdot 5 \cdot 0,45 + 3 \cdot 10 \cdot 0,7 - \\ &\quad - 8 \cdot 5 \cdot 0,4 + 8 \cdot 10 \cdot 0,6 + 5 \cdot 10 \cdot 0,8) = 198 + 2 \cdot 106,95 = 411,9 \text{ i}\hat{\text{A}}\text{d}. \end{aligned}$$

Среднеквадратическое отклонение

$$\sigma_P = \sqrt{D(P_\Sigma)} = \sqrt{411,9} = 20,3 \text{ i}\hat{\text{A}}\text{d} .$$

Значение нагрузки, вероятность превышения которой γ , вычислим из уравнения относительно P_γ в виде

$$\gamma = \int_{P_\gamma}^{\infty} p(P)dP = 1 - \int_{-\infty}^{P_\gamma} p(P)dP = 1 - \frac{1}{\sigma_p \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{P_\gamma} e^{-\frac{(P-M(P))^2}{2\sigma_p^2}} dP =$$

$$= 1 - \Phi \left[\frac{P_\gamma - M(P)}{\sigma_p} \right];$$

$$P_\gamma = M(P_\Sigma) + \sigma_p \Phi^{-1}(1 - \gamma);$$

$$P_\gamma = 57 + 20,3 \cdot \Phi^{-1}(0,95) = 57 + 1,65 \cdot 20,3 = 90,5 \text{ \AA}.$$

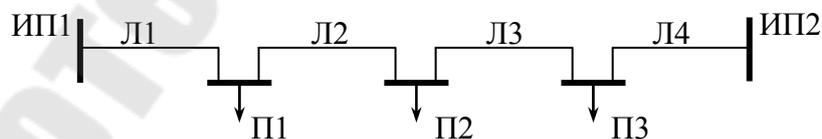
Коэффициенты одновременности по определению – отношение суммарной нагрузки с заданной вероятностью превышения к арифметической сумме нагрузок отдельных потребителей с той же вероятностью превышения

$$K_{0\gamma} = P_\gamma / \sum_1^n P_{i\gamma} =$$

$$= \frac{90,5}{(10 + 1,65 \cdot 3) + (15 + 1,65 \cdot 8) + (12 + 1,65 \cdot 5) + (20 + 1,65 \cdot 10)} = 0,905.$$

ЗАДАЧА № 6

Потребители пунктов П1-П3 получают электроэнергию от двух источников питания ИП1 и ИП2, напряжения на которых являются случайными величинами с числовыми характеристиками $M(U_1) = 10,3 \text{ \AA}$, $\sigma_{U_1} = 0,05 \text{ \AA}$, $M(U_2) = 10,1 \text{ \AA}$, $\sigma_{U_2} = 0,03 \text{ \AA}$. Вероятностная взаимосвязь между режимами изменения напряжений на источниках характеризуется коэффициентом корреляции $\eta_{U_1 U_2} = 0,6$.



Система случайных величин нагрузок потребителей имеет числовые характеристики.

$$\bar{J}_i = \begin{vmatrix} 100 \\ 150 \\ 200 \end{vmatrix}; \quad \sigma_{j_i} = \begin{vmatrix} 50 \\ 80 \\ 100 \end{vmatrix}; \quad |\eta_{j_1 j_2}| = \begin{vmatrix} 1 & 0,3 & -0,6 \\ & 1 & 0,8 \\ & & 1 \end{vmatrix}.$$

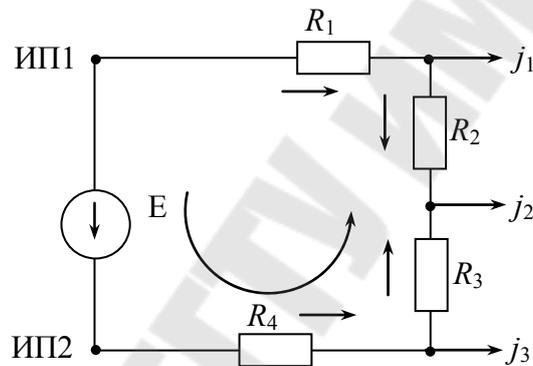
Случайные величины нагрузок потребителей не зависят от случайных величин напряжений на ИП1 и ИП2. Сеть выполнена КЛ, активные сопротивления участков линий $R_1 = 1,0 \hat{\Omega}$, $R_2 = 0,5 \hat{\Omega}$, $R_3 = 1,0 \hat{\Omega}$, $R_4 = 1,5 \hat{\Omega}$.

Определить:

- 1) расчетные максимальные нагрузки участков линий, вероятность превышения которых $\gamma = 0,00135$;
- 2) математическое ожидание потерь мощности и энергии в сети за год. Законы распределения нагрузок линии принять нормальными.

РЕШЕНИЕ:

Приведем расчетную схему замещения и вычислим числовые характеристики ЭДС контура



$$E = M(U_1) - M(U_2) = 10,3 - 10,1 = 0,2 \hat{\text{В}}.$$

$$\begin{aligned} \sigma_E &= \sigma_{(U_1 - U_2)} = \sqrt{\sigma_{U_1}^2 + \sigma_{U_2}^2 - 2\sigma_{U_1}\sigma_{U_2} \cdot \eta_{U_1 U_2}} = \\ &= \sqrt{0,05^2 + 0,03^2 - 2 \cdot 0,05 \cdot 0,03 \cdot 0,6} = 0,04. \end{aligned}$$

Обобщенные параметры схемы:

Матрица собственных и взаимных проводимостей схемы замещения сети:

$$Y = N_t \cdot (N \cdot Z_{\hat{a}} \cdot N_t)^{-1} \cdot N = \begin{vmatrix} 0,25 & 0,25 & -0,25 & -0,25 \\ 0,25 & 0,25 & -0,25 & -0,25 \\ -0,25 & -0,25 & 0,25 & 0,25 \\ -0,25 & -0,25 & 0,25 & 0,25 \end{vmatrix};$$

Матрица коэффициентов распределения

$$C = Z_{\hat{a}}^{-1} \cdot M_t \cdot (M \cdot Z_{\hat{a}}^{-1} \cdot M_t)^{-1} = \begin{vmatrix} 0,75 & 0,625 & 0,375 \\ -0,25 & 0,625 & 0,375 \\ 0,25 & 0,375 & -0,375 \\ 0,25 & 0,373 & 0,625 \end{vmatrix};$$

Математические ожидания токов ветвей

$$I = C \cdot J_i + YE = \begin{vmatrix} 0,75 & 0,625 & 0,375 \\ -0,25 & 0,625 & 0,375 \\ 0,25 & 0,375 & -0,375 \\ 0,25 & 0,373 & 0,625 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 100 \\ 150 \\ 200 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 0,25 & 0,25 & -0,25 & -0,25 \\ 0,25 & 0,25 & -0,25 & -0,25 \\ -0,25 & -0,25 & 0,25 & 0,25 \\ -0,25 & -0,25 & 0,25 & 0,25 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0,2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 293,7 \\ 193,7 \\ -43,7 \\ 151,3 \end{vmatrix} \text{ A};$$

Дисперсия токов ветвей

$$D(I) = \|C_{ik}^2\| \cdot D(I) + 2 \left\| \sum_{k < i} \sigma_{ik} \cdot \sigma_{il} \cdot C_{ik} \cdot C_{il} \cdot \eta_{kl} \right\| + \|Y_{ip}^2\| \cdot D(E) =$$

$$= \begin{vmatrix} 0,75^2 & 0,625^2 & 0,375^2 \\ (-0,25)^2 & 0,625^2 & 0,375^2 \\ 0,25^2 & 0,375^2 & (-0,375)^2 \\ 0,25^2 & 0,373^2 & 0,625^2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 50^2 \\ 80^2 \\ 100^2 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 0,75 \cdot 0,625 \cdot 50 \cdot 80 \cdot 0,3 - \\ -0,25 \cdot 0,625 \cdot 50 \cdot 80 \cdot 0,3 + \\ 0,25 \cdot 0,375 \cdot 50 \cdot 80 \cdot 0,3 + \\ 0,25 \cdot 0,375 \cdot 50 \cdot 80 \cdot 0,3 - \\ -0,75 \cdot 0,375 \cdot 50 \cdot 100 \cdot 0,6 + 0,625 \cdot 0,375 \cdot 80 \cdot 100 \cdot 0,8 \\ + 0,25 \cdot 0,375 \cdot 50 \cdot 100 \cdot 0,6 + 0,625 \cdot 0,375 \cdot 80 \cdot 100 \cdot 0,8 \\ + 0,25 \cdot 0,375 \cdot 50 \cdot 100 \cdot 0,6 - 0,375 \cdot 0,375 \cdot 80 \cdot 100 \cdot 0,8 \\ - 0,25 \cdot 0,625 \cdot 50 \cdot 100 \cdot 0,6 + 0,375 \cdot 0,625 \cdot 80 \cdot 100 \cdot 0,8 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 0,25^2 & 0,25^2 & (-0,25)^2 & (-0,25)^2 \\ 0,25^2 & 0,25^2 & (-0,25)^2 & (-0,25)^2 \\ (-0,25)^2 & (-0,25)^2 & 0,25^2 & 0,25^2 \\ (-0,25)^2 & (-0,25)^2 & 0,25^2 & 0,25^2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1600 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7455 \\ 7347 \\ 3577 \\ 7349 \end{vmatrix} \text{ A}^2;$$

Среднеквадратические отклонения токов ветвей

$$\sigma_I = \begin{pmatrix} 86,3 \\ 85,7 \\ 59,8 \\ 85,7 \end{pmatrix} \text{ A};$$

Расчетные максимальные токи ветвей, вероятность превышения которых $\gamma = 0,00135$

$$I_\gamma = I + \Phi^{-1} \cdot (1 - \gamma) \cdot \sigma_I = \begin{pmatrix} 293,7 \\ 193,7 \\ -43,7 \\ 151,3 \end{pmatrix} + 3 \times \begin{pmatrix} 86,3 \\ 85,7 \\ -59,8 \\ 85,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 544,6 \\ 444,4 \\ -220,4 \\ 402,0 \end{pmatrix};$$

Математическое ожидание потерь мощности в сети

$$\begin{aligned} M(\Delta P) &= 3 \sum_1^4 (\bar{I}_i^2 + \sigma_{I_i}^2) \cdot R_i = \\ &= 3[(293,3^2 + 7455) \cdot 1 + (193,7^2 + 7347) \cdot 0,5 + \\ &+ (43,7^2 + 3577) \cdot 1 + (151,3^2 + 7349) \cdot 1,5] = 501 \text{ кВт}; \end{aligned}$$

Потери электроэнергии в сети за год

$$\Delta W = M \cdot (\Delta P) \cdot T = 501 \cdot 8760 = 4388,7 \cdot 10^3 \text{ кВт} \cdot \text{ч}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Электрические системы. Математические задачи электроэнергетики: учебник для студентов вузов / под ред. В.А. Веникова. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1981. – 288 с.
2. Электроэнергетические системы в примерах и иллюстрациях: учебное пособие для вузов / под ред. В.А. Веникова. – М.: Энергоатомиздат, 1983. – 504 с.
3. Идельчик, В. И. Электрические системы и сети: учебник для вузов. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 592 с.
4. Фокин, Ю. А. Вероятностно-статистические методы в расчетах надежности систем электроснабжения. – М.: Энергоатомиздат, 1985. – 400 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Таблица П1

Балансирующие (базисные) узлы

№ схемы	Варианты			
	1	2	3	4
1-6	2	3	4	1
7, 8	3	4	1	5

Таблица П2

Задающие нагрузки в узлах J_i, A

Нагрузка в узлах	Варианты							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	1	10	3	4	5	3	7
2	4	3	5	2	10	1	6	8
3	4	5	8	7	6	12	7	1
4	6	3	4	9	8	7	12	4
5	5	6	6	5	9	3	5	3

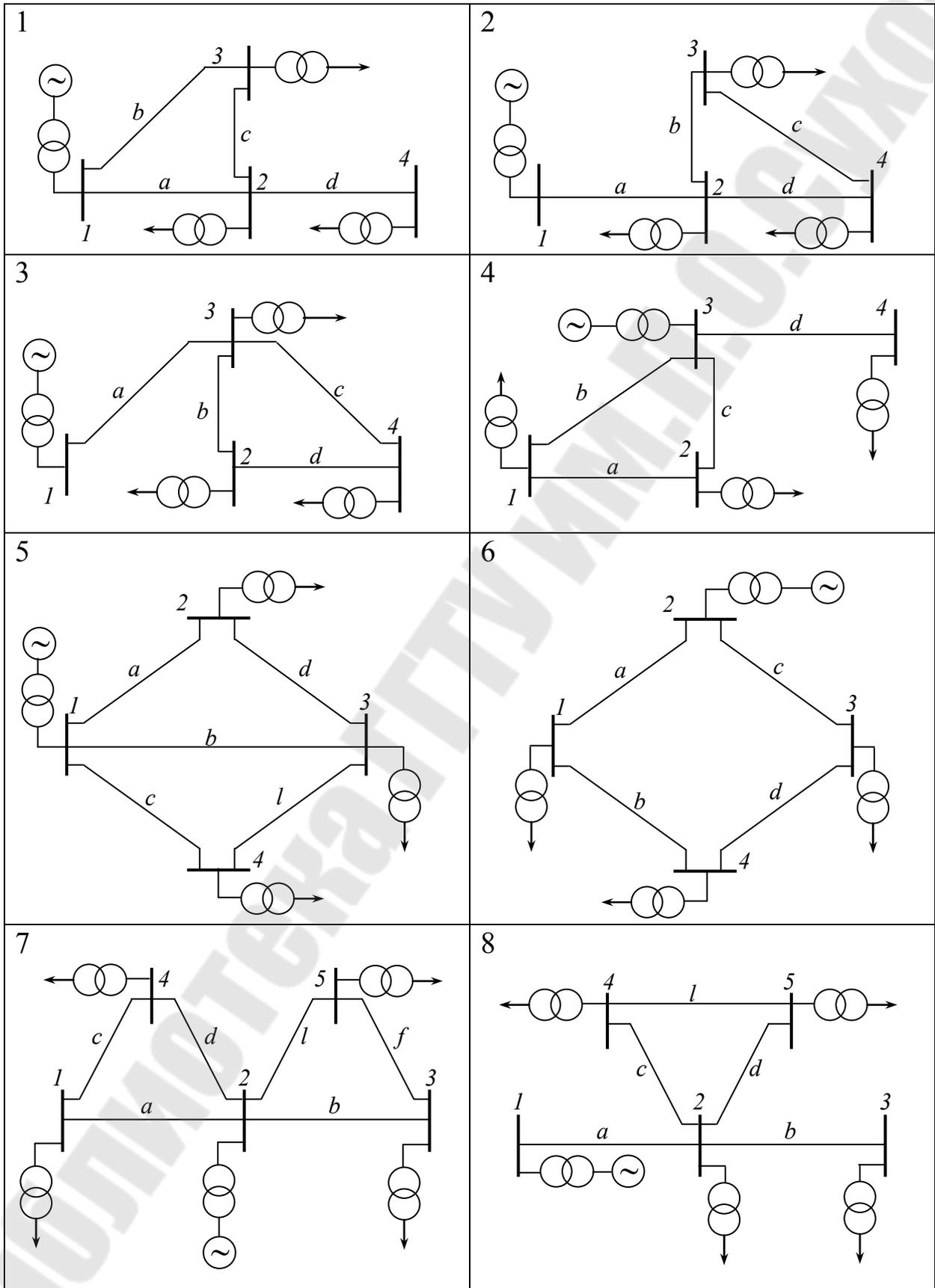
- Примечания: 1. Нагрузку в балансирующем узле исключить.
2. Знак нагрузок принять в соответствии со схемой замещения.

Таблица П3

Сопротивления в ветвях

Z_a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
<i>a</i>	10	20	10	40	80	10	20	50	30	10
<i>b</i>	20	40	10	20	40	10	10	20	40	40
<i>c</i>	40	20	10	40	100	10	20	10	50	20
<i>d</i>	40	40	20	20	40	10	10	50	30	30
<i>e</i>	20	20	20	40	100	10	20	20	40	10
<i>f</i>	10	40	20	20	40	10	10	10	50	20

Варианты схем



СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
1. Применение матричной алгебры	4
2. Аналитическое описание электрической сети с помощью первой и второй матриц соединений ветвей в узлах и независимые контуры	11
3. Уравнения состояния линейной электрической сети в матричной форме	19
4. Решение уравнений состояния энергетической сети прямыми методами	26
5. Расчет режимов электрической сети по узловым и контурным уравнениям итерационными методами при задании нагрузок в токах	34
6. Числовые характеристики случайных величин – параметров режимов электрических систем	43
Литература	59
Приложения	60

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЭНЕРГЕТИКЕ

**Практикум
для студентов специальности 1-43 01 02
«Электроэнергетические системы и сети»**

Составители: **Алферова** Тамара Викторовна
Попова Ольга Михайловна

Подписано к размещению в электронную библиотеку
ГГТУ им. П. О. Сухого в качестве электронного
учебно-методического документа 30.06.09.

Рег. № 52Е.

E-mail: ic@gstu.gomel.by
<http://www.gstu.gomel.by>