

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования  
«Гомельский государственный технический  
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Информационные технологии»

**В. В. Комраков**

# **ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

**ПРАКТИКУМ**

**по одноименному курсу для студентов  
специальности 1-40 01 02 «Информационные системы  
и технологии (по направлениям)»  
дневной и заочной форм обучения**

Гомель 2013

УДК 519.8(075.8)  
ББК 22.193я73  
К63

*Рекомендовано научно-методическим советом  
факультета автоматизированных и информационных систем  
ГГТУ им. П. О. Сухого  
(протокол № 5 от 26.12.2011 г.)*

Рецензент: канд. техн. наук, доц. каф. «Информатика» ГГТУ им. П. О. Сухого  
*Т. А. Трохова*

**Комраков, В. В.**  
К63 Численные методы математической физики : практикум по одноим. курсу для студентов специальности 1-40 01 02 «Информационные системы и технологии (по направлениям)» днев. и заоч. форм обучения / В. В. Комраков. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2013. – 83 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: <http://library.gstu.by/StartEK/>. – Загл. с титул. экрана.

Представлены основные разделы численного анализа. Рассмотрены задачи интерполирования и приближения функций, численного интегрирования, прямые и итерационные методы линейной алгебры, системы нелинейных уравнений, дифференциальные уравнения, краевые задачи, стационарные и нестационарные задачи математической физики.

Для студентов специальности 1-40 01 02 «Информационные системы и технологии (по направлениям)» дневной и заочной форм обучения.

**УДК 519.8(075.8)  
ББК 22.193я73**

© Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого», 2013

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	4
1. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ .....	5
1.1. Основные определения алгебры матриц .....	5
1.2. Точные методы решения систем линейных уравнений .....	7
1.3. Приближенные методы решения систем линейных уравнений .....	16
2. РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ .....	22
2.1. Общие сведения о дифференциальных уравнениях .....	22
2.2. Решение дифференциальных уравнений методом Эйлера .....	23
2.3. Решение дифференциальных уравнений при помощи модифицированного метода Эйлера .....	25
2.4. Решение дифференциальных уравнений методами Рунге-Кутты .....	26
2.4.1. Метод Рунге-Кутты первого порядка .....	26
2.4.2. Методы Рунге-Кутты второго порядка .....	26
2.4.3. Метод Рунге-Кутты четвертого порядка .....	27
2.4.4. Метод Кутты-Мерсона четвертого порядка .....	28
2.5. Решение дифференциальных уравнений методом прогноза-коррекции Адамса .....	29
2.6. Решение дифференциальных уравнений методом Милна .....	30
3. РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ .....	32
3.1. Общие сведения о дифференциальных уравнениях в частных производных .....	32
3.2. Использование метода сеток для решения уравнений в частных производных .....	34
3.3. Использование метода сеток для решения уравнения теплопроводности .....	35
3.3.1 Явная двухслойная разностная схема .....	36
3.3.2 Неявная разностная схема .....	39
3.3.3 Шеститочечная параметрическая схема .....	40
3.3.4 Схема Франкела-Дюфорта .....	41
3.3.5 Схема Ричардсона .....	42
3.3.6 Схема Алена-Чена .....	42
3.3.7 Нецентральная явная схема .....	43
3.3.8 Схема Саульева .....	44
3.3.9 Точечные решения тестовых краевых задач для одномерного линейного уравнения теплопроводности .....	45
3.4. Использование метода сеток для решения одномерного волнового уравнения .....	46
3.5. Использование метода сеток для решения одномерного уравнения Пуассона .....	47
3.6. Метод взвешенных невязок с использованием базисных функций .....	49
3.6.1 Аппроксимация функций с использованием систем базисных функций .....	49
3.6.2. Основы метода взвешенных невязок .....	52
3.6.3. Аппроксимация решений дифференциальных уравнений .....	56
3.6.4. Использование метода взвешенных невязок для решения уравнения теплопроводности .....	58
ЛИТЕРАТУРА .....	<b>Ошибка! Закладка не определена.</b>

## ВВЕДЕНИЕ

Численный эксперимент является неотъемлемой частью математического моделирования. Чаще всего «образом» реальных процессов и явлений различной природы становятся системы нелинейных уравнений в частных производных, анализ которых представляет значительные трудности. На этом этапе исследователю приходится обращаться к научной литературе. На сегодняшний день существуют многочисленные исчерпывающие монографии и учебники, в которых со всей полнотой и строгостью описаны теоретические и практические стороны численных методов, однако, вопросы остаются даже после их прочтения. Поэтому в этой работе ставится цель хотя бы частично преодолеть трудности практического использования численных методов. Вместе с кратким изложением теоретического материала приводятся блок–схемы алгоритмов, достаточно подробные для реализации в различных математических пакетах или с помощью различных языков программирования.

# 1. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

## 1.1. Основные определения алгебры матриц

Напомним основные определения алгебры матриц. Если  $m \cdot n$  выражений расставлены в прямоугольной таблице из  $m$  строк и  $n$  столбцов, то говорят о матрице размера  $m \times n$ . Выражения  $a_{ij}$  называют элементами матрицы. Элементы  $a_{ij}$  ( $i = 1, \dots, m$ ), стоящие в таблице на линии, проходящей из левого верхнего угла в правый нижний угол квадрата  $m \times n$ , образуют главную диагональ матрицы. Матрица размером  $m \times n$  ( $m \neq n$ ) называется прямоугольной. В случае если  $m = n$ , то матрицу называют квадратной матрицей порядка  $n$ . В частности, матрица типа  $1 \times n$  — это вектор–строка, а матрица размером  $m \times 1$  является вектором–столбцом. Число (скаляр) можно рассматривать как матрицу типа  $1 \times 1$ . Квадратная матрица  $A = \{a_{ij}\}$  размером  $n \times n$  называется:

1. нулевой, если все ее элементы равны нулю:  $A = \{a_{ij} = 0\}$  верхней треугольной, если все элементы, расположенные ниже главной диагонали, равны нулю:  $A = \{a_{ij} = 0, \text{ для всех } i > j\}$ ;
2. нижней треугольной, если все элементы, расположенные выше главной диагонали, равны нулю:  $A = \{a_{ij} = 0, \text{ для всех } i < j\}$ ;
3. диагональной, если все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю:  $A = \{a_{ij} = 0, \text{ для всех } i \neq j\}$ ;
4. единичной, если элементы главной диагонали равны единице, а все остальные — нулю:  $A = \{a_{ij} = 0, \text{ для всех } i \neq j \text{ и } a_{ij} = 1, \text{ для всех } i = j\}$ ;

С квадратной матрицей связано понятие определителя, или детерминанта. Определителем матрицы  $A$  является число  $\det A$ , или  $\Delta$ , вычисляемое по правилу:

$$\det A = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n)} (-1)^\lambda a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n}$$

где сумма распределена на всевозможные перестановки  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$   $1, 2, \dots, n$  и, следовательно, содержит  $n!$  слагаемых, причем  $\lambda = 0$ , если перестановка четная, и  $\lambda = 1$ , если перестановка нечетная. Квадратная матрица называется невырожденной, если ее определитель отличен от

нуля. В противном случае матрица называется вырожденной, или сингулярной.

С матрицами можно проводить операции сравнения, сложения и умножения. Две матрицы  $A = \{a_{ij}\}$  и  $B = \{b_{ij}\}$  – считаются равными, если они одного типа, то есть имеют одинаковое число строк и столбцов, и соответствующие элементы их равны  $\{a_{ij}\} = \{b_{ij}\}$ . Суммой двух матриц  $A = \{a_{ij}\}$  и  $B = \{b_{ij}\}$  одинакового типа называется матрица  $C = \{c_{ij}\}$  того же типа, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц  $A = \{a_{ij}\}$  и  $B = \{b_{ij}\}$  то есть  $\{c_{ij}\} = \{a_{ij} + b_{ij}\}$ . Разность матриц определяется аналогично. Произведением числа  $a$  на матрицу  $A = \{a_{ij}\}$  (или произведением матрицы на число) называется матрица, элементы которой получены умножением всех элементов матрицы  $A$  на число  $a$ , то есть  $A = a \cdot A = A\{a \cdot a_{ij}\}$ . Произведением матриц  $A = \{a_{ij}\}$  размерностью  $m \times n$  и  $B = \{b_{ij}\}$  размерностью  $n \times s$  является матрица  $C$  размерностью  $m \times s$ , каждый элемент которой можно представить формулой

$$\{c_{ij}\} = \{a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, s\}.$$

Таким образом, произведение матриц  $A \cdot B$  имеет смысл тогда и только тогда, когда количество строк матрицы  $A$  совпадает с количеством столбцов матрицы  $B$ . Кроме того, произведение двух матриц не обладает переместительным законом, то есть  $A \cdot B \neq B \cdot A$ . В тех случаях, когда  $A \cdot B = B \cdot A$ , матрицы  $A$  и  $B$  называются перестановочными.

Если в матрице  $A = \{a_{ij}\}$  размерностью  $m \times n$  заменить строки соответствующими столбцами, то полученная транспонированная матрица  $A^T = \{a_{ij}\}$ . В частности, для вектора–строки транспонированной матрицей является вектор–столбец.

Обратной матрицей по отношению к данной матрице  $A = \{a_{ij}\}$  размерностью  $n \times n$  называется матрица  $A^{-1} = \{A_{ij}\}$  того же типа, которая, будучи умноженной как справа, так и слева на данную матрицу, в результате дает единичную матрицу  $E = \{\delta_{ij}\}$ :  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ . Нахождение обратной матрицы для данной называется обращением данной матрицы. Всякая неособенная матрица имеет обратную матрицу.

## 1.2. Точные методы решения систем линейных уравнений

**Метод Гаусса.** Пусть дана система  $n$  линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с  $n$  неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1.1)$$

Обозначим через  $A$  матрицу коэффициентов системы (1.1), через  $b$  столбец ее свободных членов через  $x$  столбец из  $n$  неизвестных (искомый вектор):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Тогда систему (1.1) можно записать в матричном виде:  $A \cdot x = b$  и составить ее расширенную матрицу  $(A \mid b)$ :

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

Первый этап решения системы уравнений (1.1), называемый прямым ходом метода Гаусса, заключается в приведении расширенной матрицы (1.2) к треугольному виду. Это означает, что все элементы матрицы (1.2) ниже главной диагонали должны быть равны нулю:

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{4n} & b_4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Для формирования первого столбца матрицы (1.3) необходимо из каждой строки (начиная со второй) вычесть первую, умноженную на некоторое число  $M_i$ .

Коэффициент  $M$  для  $i$ -й строки выбирается из условия  $a_{i1} - M \cdot a_{11} = 0$ , и равен  $M = a_{i1}/a_{11}$

После проведения подобных преобразований для всех строк матрица (1.2) примет вид:

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

Очевидно, что если повторить описанный выше алгоритм для следующих столбцов матрицы (1.2), причем начинать преобразовывать второй столбец с третьего элемента, третий столбец — с четвертого и т.д. Алгоритм этого процесса изображен на рис. 1.1.

Заметим, что если в матрице (1.2) на главной диагонали встретится элемент  $a_{kk}$ , равный нулю, то расчет коэффициента  $M = a_{ik}/a_{kk}$  для  $k$ -й строки будет невозможен. Избежать деления на ноль можно, избавившись от нулевых элементов на главной диагонали. Для этого перед обнулением элементов в  $k$ -м столбце необходимо найти в нем максимальный по модулю элемент, запомнить номер строки, в которой он находится, и поменять её местами с  $k$ -й. Алгоритм, отображающий эти преобразования, приведен на рис. 1.1.

В результате выполнения прямого хода метода Гаусса матрица (1.2) преобразуется в матрицу (1.3), а система уравнений (1.1) будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{22}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{13}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_3, \\ \dots \\ a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad (1.4)$$

Решение системы (1.4) называют обратным ходом метода Гаусса.

В случае если  $a_{nn} = 0$  и  $b_n = 0$ , то система (1.4), а, следовательно, и система (1.1) имеет бесконечное множество решений.

При  $a_{nn} = 0$  и  $b_n \neq 0$ , система (1.1) решения не имеет.

Формула для вычисления  $i$ -го значения  $x$  будет иметь вид:



$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j}{a_{ii}}.$$

Общая блок–схема метода Гаусса показана на рис.1.1.

**Метод исключения Жордана – Гаусса или полного исключения** для решения систем линейных алгебраических уравнений неизвестных сводится к преобразованию исходной системы к системе с единичной или диагональной матрицей.

Вычислительная схема метода состоит из  $n$  циклов, в каждом из которых последовательно с помощью  $k$ -ой строки исключаются элементы при  $x_k$  – ой неизвестной в каждой из  $n - 1$  –ой строки, кроме  $k$ -ой. Схема реализуется по следующим формулам:

1. Деление  $k$ -ой строки на число  $a_{kk}^{(k)}$

$$d_p^{(k)} = \frac{a_{kp}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, p = k, \dots, n, k = 1, 2, \dots, n \quad (1.5)$$

$$b_k^{(k)} = \frac{b_k^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}};$$

2. Вычитание  $k$ -ой строки из  $m$ -ой строки

$$a_{np}^{(k+1)} = a_{np}^{(k)} - d_p^{(k)} \cdot a_{nk}^{(k)}, p = k, \dots, n; m > k \quad (1.6)$$

$$b_m^{(k+1)} = b_m^{(k)} - a_{nk}^{(k)} \cdot b_k^{(k)}$$

3. В результате  $n$  циклов получается система с единичной матрицей

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \dots \\ b_n^{(n)} \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

или

$$x_i = b_i^{(n)}, i = 1, 2, \dots, n.$$

Шагами 1 – 3 определяется поэлементная форма записи основной вычислительной схемы метода исключения Жордана – Гаусса.

Необходимым и достаточным условием применимости метода является неравенство нулю всех ведущих элементов,  $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ .

## Методы разложения матрицы коэффициентов системы линейных уравнений на подматрицы

**Метод  $LL^T$  разложения.** Пусть дана система линейных алгебраических уравнений (1.1). Запишем ее в матричной форме:

$$A \cdot x = b \quad (1.8)$$

где  $A = \{a_{ij}\}$  - симметрическая матрица, то есть  $A^T = \{a_{ji}\} = A$ . Тогда матрицу  $A$  можно представить в виде произведения двух транспонированных между собой треугольных матриц

$$A = L \cdot L^T, \quad (1.9)$$

где

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{12} & l_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{1n} & l_{2n} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad L^T = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & \dots & l_{1n} \\ 0 & l_{22} & \dots & l_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & l_{nn} \end{pmatrix}.$$

Перемножение матриц  $L$  и  $L^T$  дает следующие уравнения:

$$\begin{cases} l_{1i} \cdot l_{1j} + l_{2i} \cdot l_{2j} + \dots + l_{ii} \cdot l_{ij} = a_{ij}, & (i < j), \\ l_{1i}^2 + l_{2i}^2 + \dots + l_{ii}^2 = a_{ii}. \end{cases}$$

Отсюда последовательно находим:

$$\begin{cases} l_{11} = \sqrt{a_{11}}, \quad l_{1j} = \frac{a_{1j}}{l_{11}}, & (i > 1), \\ l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ki}^2}, & (1 < i \leq n), \quad (1.10-1.14) \\ l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ki} \cdot l_{kj}}{l_{ii}}, & (i < j), \\ l_{ij} = 0, & (i > j) \end{cases}$$

Система (1.8) имеет определенное единственное решение, если  $l_{ii} \neq 0$ ,  $(i = 1, 2, \dots, n)$ , так как тогда  $\det A = \det L \cdot \det L^T = (\det L)^2 = (l_{11} l_{22} \dots l_{nn})^2 \neq 0$ .

В случае если соотношение (1.9) выполняется, уравнение (1.8) эквивалентно двум уравнениям:

$$L \cdot y = b \quad \text{и} \quad L^T \cdot x = y,$$

На практике метод  $LL^T$  разложения применяют так. Прямым ходом с помощью формул (1.10) последовательно вычисляются коэф-

коэффициенты  $l_{ij}$  и  $y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), а затем обратным ходом находятся неизвестные  $x_i$  ( $i = n, n-1, \dots, 1$ ).

В общем случае метод квадратных корней применим и для вычисления комплексных корней системы (1.1), так как если для некоторой  $m$ -й строки выполняется условие  $(l_{mm})^2 < 0$ , то соответствующие элементы  $l_{mj}$  – мнимые. Блок-схема метода квадратных корней приведена на рис. 1.2.

**Метод LU разложения с единицами на главной диагонали матрицы U.** Идея метода заключается в следующем [1].

Представим систему (1.1) в матричном виде

$$A \cdot x = b \quad (1.15)$$

где  $A = \{a_{ij}\}$  – квадратная матрица порядка  $n$ .

Представим матрицу  $A$  в виде  $A = L \cdot U$ , где  $L = \{l_{ij}\}$  – нижняя треугольная матрица, а  $U = \{u_{ij}\}$  – верхняя треугольная матрица с единичной диагональю:

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Тогда элементы  $l_{ij}$  и  $u_{ij}$  определяются по формулам:

$$\begin{cases} l_{i1} = a_{i1}, \\ l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj}, \quad (i \geq j > 1) \end{cases} \quad (1.16)$$

и

$$\begin{cases} u_{1j} = \frac{a_{1j}}{l_{11}}, \\ u_{ij} = \frac{1}{d_{ii}} \left( a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \right), \quad (1 < i < j). \end{cases} \quad (1.17)$$

Следовательно, вектор  $x$  можно вычислить из системы  $L \cdot y = b, U \cdot x = y, (1.18)$

причем она легко решается, так как матрицы  $L$  и  $U$  – треугольные:

Алгоритм LU разложения довольно прост и изображен на рис. 1.3.

**Метод LU разложения с единицами на главной диагонали матрицы L.** Представим матрицу  $A = \{a_{i,j}\}$  (1.8) в виде произведения треугольных матриц  $L = \{l_{ij}\}$  и  $U = \{u_{ij}\}$  (1.20, 1.21):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

где элементы  $l_{ij}$  и  $u_{ij}$  определяются по формулам:

$$\begin{cases} u_{1j} = a_{1j}, (j = 1, 2, \dots, n) \\ u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj}, (i \leq j) \end{cases} \quad (1.22)$$

и

$$\begin{cases} l_{1j} = \frac{a_{i1}}{u_{11}}, (i = 2, \dots, n) \\ l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj}, (i \leq j) \end{cases} \quad (1.23)$$

Формулы(1.22) и (1.23) дают нам LU-разложение матрицы  $A$ . Итак ,если  $A = L \cdot U$ , то можно записать уравнение, эквивалентное (1.21):

$$L \cdot U \cdot X = b \quad (1.24)$$

Введем вектор вспомогательных переменных  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)^T$  и представим уравнение (1.24) в виде системы:

$$\begin{cases} L \cdot y = b, \\ U \cdot x = y. \end{cases}$$

Таким образом, решение системы (1.1) с квадратной матрицей коэффициентов сводится к решению двух систем с треугольными матрицами коэффициентов:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = b_1, \\ l_{21} \cdot y_1 + y_2 = b_2 \\ \dots \\ l_{n1} \cdot y_1 + l_{n2} \cdot y_2 + \dots + l_{n,n-1} \cdot y_n = b_n \end{array} \right. \quad (1.25)$$

и

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{11} \cdot x_1 + u_{12} \cdot x_2 + \dots + u_{1n} \cdot x_n = y_1 \\ u_{22} \cdot x_2 + \dots + u_{2n} \cdot x_n = y_2 \\ \dots \\ u_{nn} \cdot x_n = y_n \end{array} \right. \quad (1.26)$$

Из (1.25) и (1.26) понятно, что все  $y_i$  могут быть вычислены по формуле:

$$y_i = b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} y_k, (i = 1, 2, \dots, n), (1.27)$$

а для всех  $x_i$  истинно равенство

$$x_i = \frac{1}{u_{ij}} (y_i - \sum_{k=i+1}^n u_{ik} x_k), (i = n, n-1, \dots, 2, 1) (1.28)$$

Алгоритм решения системы линейных алгебраических уравнений с помощью  $LU$ -разложения приведен на рисунке 1.4

**Метод ортогонализации.** Заключается он в том, что систему (1.1) ортонормируют, то есть приводят ее к виду:

$$Q \cdot x = d, (1.29)$$

где  $Q$  – ортогональная матрица. Для этого разделим первое уравнение системы (1.1) на выражение

$$\sqrt{\sum_{k=1}^n a_{1k}^2}.$$

Получим

$$q_{1j} = \frac{a_{1j}}{\sqrt{\sum_{k=1}^n a_{1k}^2}}, \quad d_1 = \frac{b_1}{\sqrt{\sum_{k=1}^n a_{1k}^2}}, \quad \sqrt{\sum_{k=1}^n q_{1k}^2} = 0, (j = 1, 2, \dots, n). (1.30)$$

Тогда для второго уравнения системы (1.29) имеем:

$$\left. \begin{aligned} q_{2j} &= \frac{a'_{2j}}{\sqrt{\sum_{k=1}^n a'^2_{2k}}}, & d_2 &= \frac{b'_2}{\sqrt{\sum_{k=1}^n a'^2_{2k}}}, & j &= (1, 2, \dots, n), \\ q'_{2j} &= a_{2j} - q_{1j} \cdot \sum_{k=1}^n a_{2k} \cdot q_{1k}, & d'_2 &= b_2 - d_1 \cdot \sum_{k=1}^n a_{2k} \cdot q_{1k}. \end{aligned} \right\}$$

Следовательно, уравнение с номером  $i$  примет вид:

$$\left. \begin{aligned} q_{ij} &= \frac{q'_{ij}}{\sqrt{\sum_{k=1}^n q'^2_{ik}}}, & d_i &= \frac{d'_i}{\sqrt{\sum_{k=1}^n q'^2_{ik}}}, & (i &= 2, 3, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n), \\ q'_{ij} &= a_{ij} - q_{1j} \cdot \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot q_{1k} - q_{2j} \cdot \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot q_{2k} - \dots - q_{i-1j} \cdot \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot q_{i-1k}, \\ d'_i &= b_i - d_1 \cdot \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot q_{1k} - d_2 \cdot \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot q_{2k} - \dots - d_{i-1} \cdot \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot q_{i-1k}. \end{aligned} \right\} (1.31)$$

Если система (1.1) совместна, то, воспользовавшись формулами (1.30) и (1.31), можно перейти к новой системы (1.29) где матрица  $Q$  будет ортогональной, а это значит, что она будет обладать свойством:

$$Q^T \cdot Q = E,$$

Где  $E$  единичная матрица. Значит, решение системы (1.29) можно записать в виде:

$$Q^T \cdot Q \cdot x = Q^T \cdot d,$$

или

$$x = Q^T \cdot d.$$

Рисунок 1.5 содержит алгоритм решение линейной системы методом отогонализации по формулам (1.30), (1.31) и (1.32). Заметим, что этим алгоритмом можно воспользоваться, если необходимо решить задачу вычисления ортогональной матрицы  $Q$  для матрицы  $A$ . Понятно, что в этом случае расчет вектора  $d$  теряет смысл.

**Метод прогонки.** На практике часто встречаются линейные системы вида:

$$\begin{pmatrix} c_1 & d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & c_2 & d_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & c_3 & d_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & c_{n-1} & d_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & b_n & c_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \dots \\ r_{n-1} \\ r_n \end{pmatrix},$$

которые называют системами с трехдиагональной матрицей коэффициентов. Каждое уравнение такой системы связывает три неизвестных, расположенных особым образом, и может быть записано в общем виде так:

$$b_i \cdot x_{i-1} + c_i \cdot x_i + d_i \cdot x_{i+1} = r_i \quad (1.33)$$

где  $i=1, 2, n$ ,  $b_1 = 0$ ,  $d_n = 0$ . Такие уравнения называют трехточечными разностными уравнениями второго порядка. Для решения систем (1.33) существует специальный метод, называемый методом прогонки. Заключается он в следующем [2]. Предположим, что существуют такие наборы чисел  $\delta_i, \lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$ , для которых

$$x_i = \delta_i \cdot x_{i+1} + \lambda_i \quad (1.34)$$

Уменьшим индекс в уравнении (1.34) и подставим его в (1.33), получим

$$b_i \cdot \delta_{i-1} \cdot x_i + b_i \cdot \lambda_{i-1} + c_i \cdot x_i + d_i \cdot x_{i+1} = r_i,$$

откуда имеем

$$x_i = -\frac{d_i}{c_i + b_i \cdot \delta_{i-1}} \cdot x_{i+1} + \frac{r_i - b_i \cdot \lambda_{i-1}}{c_i + b_i \cdot \delta_{i-1}}$$

Следовательно, уравнение (1.34) имеет место, если для всех  $i = 1, 2, \dots, n$ , выполняются рекуррентные соотношения:

$$\delta_i = -\frac{d_i}{c_i + b_i \cdot \delta_{i-1}}, \quad \lambda_i = \frac{r_i - b_i \cdot \lambda_{i-1}}{c_i + b_i \cdot \delta_{i-1}} \quad (1.35)$$

Нетрудно заметить что, так как  $b_1 = 0$ , то процесс вычисления  $\delta_i, \lambda_i$  по формулам (1.35) можно начать со значений

$$\delta_1 = -\frac{d_1}{c_1}, \quad \lambda_1 = \frac{r_1}{c_1}$$

и продолжать для  $i = 1, 2, \dots, n$ . В случае, когда  $i = n$  и  $d_n = 0$ , получим  $\delta_n = 0$ , то есть для  $i = n$  будем иметь

$$x_n = \lambda_n = \frac{r_n - b_n \cdot \lambda_{n-1}}{c_n + b_n \cdot \delta_{n-1}} \quad (1.36)$$

где  $\lambda_{i-1}$  и  $\delta_{i-1}$  были вычислены на предыдущем шаге. Далее по формулам (1.35) последовательно находятся значения  $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1$  при  $i=n-1, n-2, \dots, 1$ .

Итак, алгоритм метода прогонки (рис. 1.5) сводится к вычислениям по трем формулам:

1. Находят прогоночные коэффициенты  $\delta_i, \lambda_i$  по формулам (1.35). Этот процесс называют прямой прогонкой

2. Определяются неизвестные по формуле (1.34), выполняя тем самым обратную прогонку.

### 1.3. Приближенные методы решения систем линейных уравнений

**Метод итерации.** Разрешим первое уравнение системы (1.1) относительно  $x_1$ , второе — относительно  $x_2$  и так далее. Получим систему, эквивалентную данной

$$\begin{cases} x_1 = b_1 + a_{12} \times x_2 + a_{13} \times x_3 + \dots + a_{1n} \times x_n \\ x_2 = b_2 + a_{21} \times x_1 + a_{23} \times x_3 + \dots + a_{2n} \times x_n \\ \dots \\ x_n = b_n + a_{n1} \times x_1 + a_{n2} \times x_2 + \dots + a_{nn} \times x_n \end{cases} \quad (1.37)$$

где

$$b_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad a_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, \quad i \neq j$$

$$a_{ij=0}, i=j \quad i=1,2,\dots,n, \quad (1.38)$$

$$j = 1, 2, \dots, n$$

Запишем систему (1.37) в матричном виде

$$x = \beta + \alpha \cdot x_i \quad (1.39)$$

где

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$



Для решения системы (1.39) методом итерации необходимо выбрать нулевое приближение. Пусть это будет столбец свободных коэффициентов

$$x^0 = \beta_i \quad (1.40)$$

тогда первое приближение будет иметь вид:

$$x^1 = \beta + \alpha \cdot x^0$$

а второе будет таким:

$$x^2 = \beta + \alpha \cdot x^1$$

и так далее:  $(k + 1)$ -е приближение будем вычислять по формуле:

$$x^{k+1} = \beta + \alpha \cdot x^k, (k = 1, 2, \dots).$$

или в развернутом виде:

$$x_i^k = \beta_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \cdot x_j^k, (i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots). \quad (1.41)$$

Вообще говоря, если последовательность приближений  $x^0, x^1, x^2, \dots, x^k, \dots$  имеет предел  $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x^k$ , то этот предел и является решением системы (1.39).

При практическом применении метода итерации вычисления прекращают, когда выполняется условие

$$\max (|x - x^k|) \leq \varepsilon \quad (1.42)$$

где  $\varepsilon$  – заданная точность вычислений.

Приведем без доказательства условие сходимости метода итерации [1]: для существования единственного решения системы (1.36) и сходимости метода простых итераций достаточно выполнения условия

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| < |a_{ii}|, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.43)$$

то есть чтобы модули диагональных коэффициентов для каждого уравнения системы были больше суммы модулей всех остальных коэффициентов, не считая свободных.

Итак, алгоритм метода простой итерации (рис. 1.16) заключается в следующем:

1. Проверка условий (1.43), если они не выполняются, то работа алгоритма завершена, иначе переходим к п.2.
2. Формирование матрицы  $\alpha$  и массива  $\varepsilon$  по формулам (1.38).
3. Формирование начального приближения  $x^0$  по (1.40).

4. Расчет нового приближения  $x^1$  по (1.41).

5. Если условие (1.42) выполняется и максимальная ошибка вычислений меньше заданного числа  $\varepsilon$ , то решение  $x^1$  найдено, иначе переходим к п.4.

**Метод Зейделя.** Представляет собой модификацию метода простой итерации. Основная идея [1] этого метода заключается в том, что при вычислении  $(k+1)$ -го приближения неизвестной  $x_i$  учитываются уже вычисленные к этому времени  $(k+1)$ -е предшествующих неизвестных  $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}$ .

Пусть дана приведенная линейная система

$$x_i = \beta_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \cdot x_j \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1.44)$$

Выберем в качестве начального приближения корней вектор  $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$  (1.45)

Тогда, согласно идее метода Зейделя, предполагая, что  $k$ -е приближения корней известны, будем строить  $(k+1)$ -е приближения по следующим формулам:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^{k+1} = \beta_1 + \sum_{j=1}^n \alpha_{1j} \cdot x_j^k; \\ x_2^{k+1} = \beta_2 + \alpha_{21} \cdot x_1^{k+1} + \sum_{j=2}^n \alpha_{2j} \cdot x_j^k; \\ \dots \\ x_i^{k+1} = \beta_i + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} \cdot x_j^{k+1} + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \cdot x_j^k; \\ \dots \\ x_n^{k+1} = \beta_n + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{nj} \cdot x_j^{k+1} + \sum_{j=i}^n \alpha_{nn} \cdot x_n^k, (k = 0, 1, 2, \dots). \end{array} \right. \quad (1.46)$$

Возникает вопрос о сходимости метода. Заметим, что условия (1.43) применимы и для метода Зейделя, кроме того, если линейная система (1.36) — нормальная, то процесс Зейделя для эквивалентной ей приведенной системы сходится всегда. Напомним, что линейная система (1.36) называется нормальной, если матрица коэффициентов  $A = \{a_{ij}\}$  — симметрическая, то есть  $a_{ij} = a_{ji}$  и соответствующая квадратичная форма

$$u = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \cdot x_i \cdot x_j$$

положительно определена.

Возникает проблема, как от системы (1.36) перейти к системе (1.39) таким образом, чтобы выполнялись все условия сходимости. Выполним следующие преобразования:

$$A^T \cdot A \cdot x = A^T \cdot b$$

Пусть

$$F = A^T \cdot A \text{ и } H = A^T \cdot b \quad (1.47)$$

Тогда система

$$F \cdot x = H \quad (1.48)$$

Эквивалентна системе  $A \cdot x = b$  и обладает следующими свойствами:

- Матрица  $F$  симметрична, то есть  $f_{ij} = f_{ji}$
- Все элементы главной диагонали матрицы  $F$  положительны:  
 $f_{ij} > 0$ ;
- Соответствующая квадратичная форма является положительной определенной.

Теперь, если систему привести к специальному виду:

$$x_i = \sum_{j \neq i} \alpha_{ij} \cdot x_j + \beta_i \quad (1.49)$$

где

$$\beta_i = \frac{h_i}{f_{ij}}$$

$$\alpha_{ij} = -\frac{f_{ij}}{f_{ij}}, (i \neq j) \quad (1.50)$$

$$\alpha_{ij} = 0, (i = j)$$

то она будет сходиться к единственному решению при любом начальном приближении.

Алгоритм решения системы линейных алгебраических уравнений по методу Зейделя приведён на рис.1.7.

**Метод релаксации**, или, иначе, метод ослабления, — это ещё один итерационный способ решения линейных систем. Рассмотрим его подробнее.

Пусть дана линейная система (1.36). Подготовим ее к релаксации. Для этого перенесем свободные члены налево и разделим первое уравнение на  $(-a_{11})$ , второе на  $(-a_{22})$  и т.д. получим систему:

$$\begin{cases} -x_1 + d_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n + c_1 = 0, \\ d_{21} \cdot x_1 - x_2 + \dots + d_{2n} \cdot x_n + c_2 = 0, \\ \dots \\ d_{n1} \cdot x_1 + d_{n2} \cdot x_2 + \dots - x_n + c_n = 0, \end{cases} \quad (1.51)$$

где

$$d_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ij}}, (i \neq j), \quad (1.52)$$
$$c_1 = \frac{b_1}{a_{11}}.$$

Пусть задан вектор начальных приближений  $x^0$ . Подставим его в систему и получим невязки:

$$\begin{cases} R_1^0 = c_1 - x_1^0 + \sum_{j=2}^n b_{1j} \cdot x_j^0, \\ R_2^0 = c_2 - x_2^0 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^n b_{2j} \cdot x_j^0, \\ \dots \\ R_n^0 = c_n - x_n^0 + \sum_{j=2}^{n-1} b_{nj} \cdot x_j^0, \end{cases} \quad (1.53)$$

Если одной из неизвестных  $x_k^0$  дать приращение  $\Delta x_k^0$ , то соответствующая невязка  $R_k^0$  уменьшится на величину  $\Delta x_k^0$ , а все остальные невязки  $R_j^0 (i \neq k)$  увеличатся на величину  $b_{ik} \Delta x_k^0$ . Таким образом очередную невязку  $R_k^1$  в нуль, достаточно величине  $x_k^0$  дать приращение

$$\Delta x_k^0 = R_k^0$$

мы будем иметь:

$$R_k^1 = 0$$

и

$$R_i^1 = R_i^0 + b_{ik} \Delta x_k^0 (i \neq k). \quad (1.54)$$

Вообще говоря [1], идея метода релаксации заключается в том, что на каждом шаге обращается в нуль максимальная по модулю невязка путем изменения значения соответствующей компоненты приближения. Процесс заканчивается, когда все невязки последней преобразованной системы будут равны нулю с заданной точностью.

Запишем алгоритм решения линейной системы методом релаксации.

1. Подготовка системы к релаксации, то есть ее преобразование по формулам (1.52).
2. Формирование вектора начальных приближений  $x^0 = 0$
3. Расчёт первых невязок  $R^1$  (1.53).
4. Определение текущего вектора невязок  $R^0$ .
5. Вычисление максимальной невязки системы (или, иначе, приращения  $\Delta$ ) и ее номера.
6. Уточнение невязки  $R^1$  в соответствии с формулами.
7. Вычисление значения корня  $X$  с номером, соответствующим номеру максимальной невязки, как суммы приращения  $\Delta$ .
8. Если хотя бы одна невязка системы не равна нулю с заданной точностью  $\varepsilon$ , то перейти к п. 4, иначе решение системы  $X$  найдено.

Блок-схема алгоритма приведена на рис.1.9.

## 2. РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Дифференциальные уравнения и системы описывают очень многие динамические процессы и используются при решении различных задач физики, электротехники, химии и других наук. Данная глава посвящена численному решению дифференциальных уравнений.

### 2.1. Общие сведения о дифференциальных уравнениях

Дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка называется соотношение вида:

$$H(t, x, x', x'', \dots, x^{(n)}) = 0. (2.1)$$

Решением дифференциального уравнения называется функция  $x(t)$ , которая обращает уравнение в тождество.

Каждое дифференциальное уравнение имеет бесконечное множество решений, которые отличаются друг от друга константами. Для однозначного определения решения необходимо определить дополнительные начальные или граничные условия. Количество таких условий должно совпадать с порядком дифференциальных уравнений. В зависимости от вида дополнительных условий в дифференциальных уравнениях различают:

- *задачу Коши* – в случае, если все дополнительные условия заданы в одной (чаще начальной) точке интервала;
- *краевую задачу* – в случае, когда дополнительные условия заданы на границах интервала.

Различают точные (аналитические) и приближенные (численные) методы решения дифференциальных уравнений. Большое количество уравнений может быть решено точно. Однако есть уравнения, а особенно системы уравнений, для которых нельзя записать точное решение. Но даже для уравнений с известным аналитическим решением очень часто необходимо вычислить числовое значение при определенных исходных данных. Поэтому широкое распространение получили численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений, которые будем рассматривать для следующей задачи Коши. Найдем решение дифференциального уравнения:

$$x' = f(x, t), (2.4)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$x(t_0) = x_0. \quad (2.5)$$

Иными словами, требуется найти интегральную кривую  $x = x(t)$ , проходящую через заданную точку  $M_0(t_0, x_0)$  (рис. 2.1).

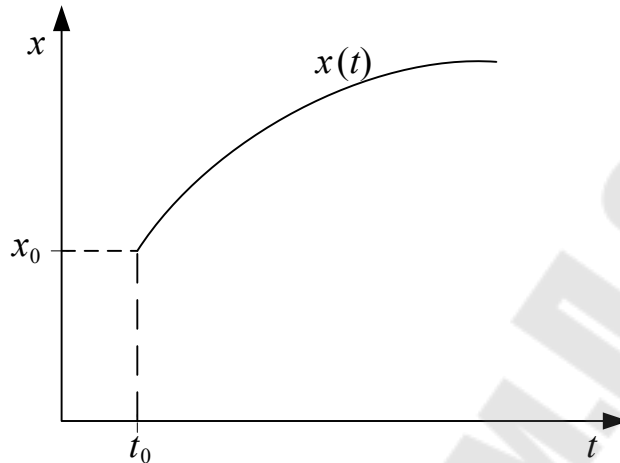


Рис. 2.1 Интегральная кривая  $x(t)$ , проходящая через точку  $(t_0, x_0)$

Для дифференциального уравнения  $n$ -го порядка:

$$x^{(n)} = f(t, x', x'', \dots, x^{(n-1)}) \quad (2.6)$$

задача Коши состоит в нахождении решения  $x = x(t)$ , удовлетворяющего уравнению (2.6) и начальным условиям:

$$x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x'_0, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{n-1} \quad (2.7)$$

Рассмотрим основные численные методы решения задачи Коши.

## 2.2. Решение дифференциальных уравнений методом Эйлера

При решении задачи Коши (2.4), (2.5) на интервале  $[t_0, t_n]$ , выбрав достаточно малый шаг  $h$ , построим систему равностоящих точек:

$$h = \frac{t_n - t_0}{n}, t_i = t_0 + ih, i = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (2.8)$$

Для вычисления значения функции в точке  $t_1$  разложим функцию  $x = x(t)$  в окрестности точки  $t_0$  в ряд Тейлора:

$$x(t_1) = x(t_0 + h) = x(t_0) + hx'(t_0) + x''(t_0) \frac{h^2}{2} + \dots \quad (2.9)$$

При достаточно малом значении  $h$  членами выше второго порядка можно пренебречь, и с учётом  $x'(t_0) = f(x_0, t_0)$  получим сле-

дующую формулу для вычисления приближенного значения функции  $x(t)$  в точке  $t_1$ :

$$x(t_1) \approx x_1 = x_0 + hf(x_0, t_0). (2.10)$$

Рассматривая найденную точку  $(x_1, t_1)$  как начальное условие задачи Коши, запишем аналогичную формулу для нахождения значения функции  $x(t)$  в точке  $t_2$ :

$$x_2 = x_1 + hf(x_1, t_1).$$

Повторяя этот процесс, сформируем последовательность значений  $x_i$  в точках  $t_i$  по формуле:

$$x_{i+1} = x_i + hf(x_i, t_i), i = 1, 2, \dots, n. (2.11)$$

Процесс нахождения значений функции  $x_i$  в узловых точках  $t_i$  по формуле (2.11) называется методом Эйлера. Геометрическая интерпретация метода Эйлера состоит в замене интегральной кривой  $x(t)$  ломаной  $M_0, M_1, M_2, \dots, M_n$  с вершинами  $M_i(x_i; y_i)$ . Звенья ломаной Эйлера  $M_i M_{i+1}$  в каждой вершине  $M_i$  имеют направление  $y_i = f(t_i; x_i)$ , совпадающее с направлением интегральной кривой  $x(t)$  уравнения (2.4), проходящей через точку  $M_i$  (рис. 2.2). Последовательность ломаных Эйлера при  $h \rightarrow 0$  на достаточно малом отрезке  $[x_i; x_i + h]$  стремится к искомой интегральной кривой.

На каждом шаге решение  $x(t)$  определяется с ошибкой за счет отбрасывания членов ряда Тейлора выше первой степени, что в случае быстроменяющейся функции  $f(t, x)$  может привести к быстрому накоплению ошибки. В методе Эйлера следует выбирать достаточной малый шаг  $h$ . На рис. 2.3 представлена блок-схема решения задачи Коши (2.4)-(2.5) методом Эйлера на интервале  $[a; b]$ .



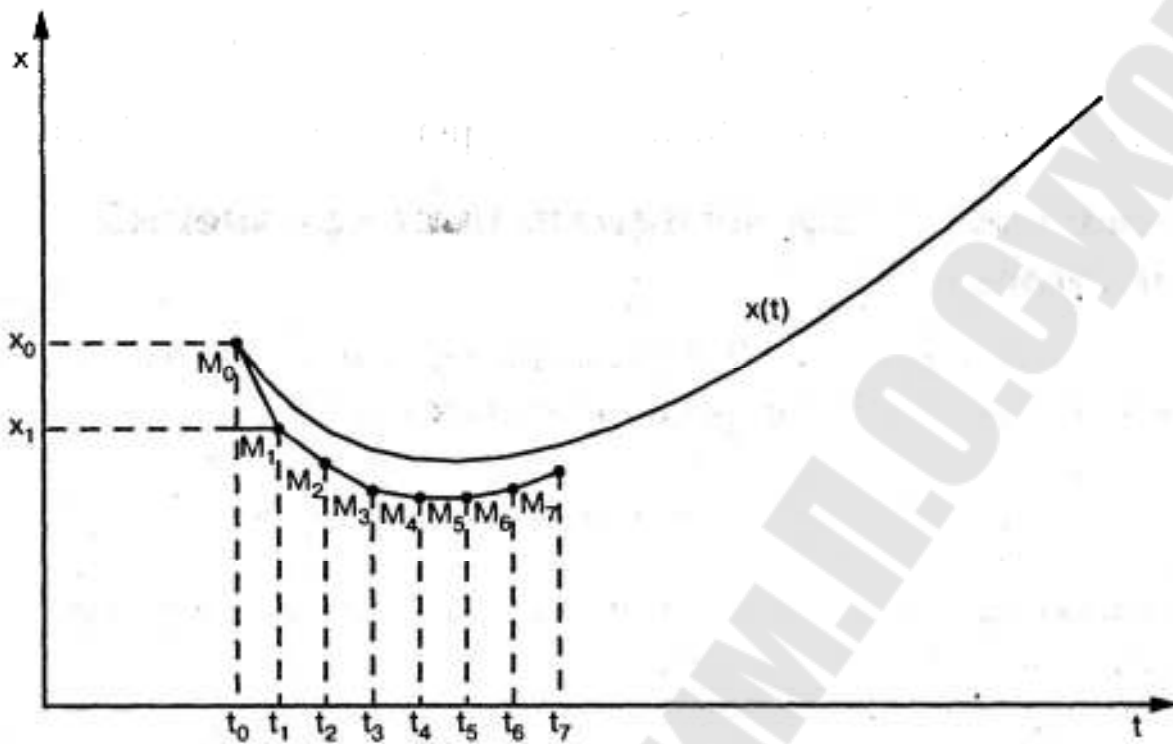


Рис.2.2 – Геометрическая интерпретация метода Эйлера

При этом, уменьшение шага интегрирования  $h$  приводит к повышению точности решения уравнения методом Эйлера.

Метод Эйлера является очень простым методом решения задачи Коши, но недостаточно точным: для его использования нужно выбирать достаточно маленький шаг интегрирования  $h$ . В связи с недостаточной точностью метода Эйлера для повышения точности были разработаны его модификации.

### 2.3. Решение дифференциальных уравнений при помощи модифицированного метода Эйлера

Более точным методом решения задачи (2.4)–(2.5) является модифицированный метод Эйлера, при котором сначала вычисляют промежуточные значения:

$$t_p = t_i + \frac{h}{2}, x_p = x_i + \frac{h}{2} f(t_i, x_i), \quad (2.12)$$

после чего находят значение  $x_{i+1}$  по формуле:

$$x_{i+1} = x_i + hf(x_p, t_p), i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.13)$$

На рис. 2.4 представлена блок-схема решения задачи Коши (2.4)–(2.5) модифицированным методом Эйлера на интервале  $[a;b]$ .

С помощью модифицированного метода Эйлера можно найти намного более точное решение, чем обычным методом Эйлера.

## 2.4. Решение дифференциальных уравнений методами Рунге-Кутты

Рассмотренные выше методы Эйлера (как обычный, так и модифицированный) являются частными случаями явного метода Рунге-Кутты  $k$ -го порядка. В общем случае формула вычисления очередного приближения методом Рунге-Кутты имеет вид:

$$x_{i+1} = x_i + h\varphi(x_i, t_i, h), i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.14)$$

Функция  $\varphi(x, t, h)$  приближает отрезок ряда Тейлора до  $k$ -го порядка и не содержит частных производных  $f(x, t)$  [2].

### 2.4.1. Метод Рунге-Кутты первого порядка

Метод Эйлера является методом Рунге-Кутты первого порядка ( $k = 1$ ) и получается при  $\varphi(x, t, h) = f(x, t)$ .

### 2.4.2. Методы Рунге-Кутты второго порядка

Семейство методов Рунге-Кутты второго порядка имеет вид [2]:

$$x_{i+1} = x_i + h \left( (1-a)f(t_i, x_i) + af\left(t_i + \frac{h}{2a}, x_i + \frac{h}{2a} f(t_i, x_i)\right) \right), i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.15)$$

)

Два наиболее известных среди методов Рунге-Кутты второго порядка - это *метод Хорна* ( $a=1/2$ ) и модифицированный метод Эйлера ( $a=1$ ).

Подставив  $a=1/2$  в формулу (2.15), получаем расчетную формулу *метода Хорна*:

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{2} (f(t_i, x_i) + f(t_i + h, x_i + hf(t_i, x_i))), i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.16)$$

Блок-схема метода Хорна будет отличаться от рассмотренных ранее блок-схем методов Эйлера (см. рис. 2.3, 2.4) расчетной формулой для вычисления  $x_{i+1}$  (см. формулу (2.16)).

Подставив  $a = 1$  в формулу (2.15), получаем расчетную формулу уже рассмотренного выше модифицированного метода Эйлера:

$$x_{i+1} = x_i + h \left( f\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2} f(t_i, x_i)\right) \right), i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.17)$$

### 2.4.3. Метод Рунге-Кутты четвертого порядка

Наиболее известным является *метод Рунге-Кутты четвертого порядка*, расчетные формулы которого можно записать в виде:

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + \Delta x_i, i = 1, 2, \dots, n, \\ \Delta x_i = \frac{h}{6} (K_1^i + 2K_2^i + 2K_3^i + K_5^i), \\ K_1^i = f(t_i, x_i), \\ K_2^i = f\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2} K_1^i\right), \\ K_3^i = f\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2} K_2^i\right), \\ K_5^i = f\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + hK_3^i\right). \end{cases} \quad (2.18)$$

На рис. 2.5 представлена блок-схема решения задачи Коши методом Рунге-Кутты.

Одной из главных проблем при использовании рассмотренных ранее численных методов решения дифференциальных уравнений является, правильный выбор шага  $h$ . Для решения этой проблемы на каждом этапе применяют двойной пересчет. А именно: исходя из текущего верного значения  $y(x_i)$ , вычисляют величину  $y(x_i + 2h)$  двумя способами: один раз с шагом  $h$ , а второй раз с двойным шагом  $H = 2h$ . Если расхождение полученных значений не превышает допустимой погрешности  $\varepsilon$ , то шаг  $h$  для данного этапа выбран правильно и полученное с его помощью значение можно принять за  $y(x_i + 2h)$ . В противном случае шаг уменьшают в два раза.

В рассматриваемом ниже методе Кутта–Мерсона проблема выбора шага интегрирования решена.

#### 2.4.4. Метод Кутта-Мерсона четвертого порядка

Одной из модификаций метода Рунге-Кутта является метод Кутта-Мерсона (или пятиэтапный метод Рунге-Кутта четвертого порядка), который состоит в следующем [2]:

1. На  $i$ -м шаге рассчитываются коэффициенты:

$$\begin{aligned}K_1^i &= f(t_i, x_i), \\K_2^i &= f\left(t_i + \frac{h}{3}, x_i + \frac{h}{3}K_1^i\right), \\K_3^i &= f\left(t_i + \frac{h}{3}, x_i + \frac{h}{6}K_1^i + \frac{h}{6}K_2^i\right), \\K_4^i &= f\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{8}K_1^i + \frac{3h}{12}K_2^i\right), \\K_5^i &= f\left(t_i + h, x_i + \frac{h}{2}K_1^i - \frac{3h}{2}K_3^i + 2hK_4^i\right).\end{aligned}\quad (2.19)$$

2. Вычисляем приближенное значение  $x(t_{i+1})$  по формуле:

$$\bar{x}_{i+1} = x_i + \frac{h}{2}(K_1^i - 3K_3^i + 4K_4^i). \quad (2.20)$$

3. Вычисляем приближенное значение  $x(t_{i+1})$  по формуле:

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{6}(K_1^i - 4K_3^i + 4K_5^i). \quad (2.21)$$

4. Вычисляем оценочный коэффициент по формуле:

$$R = 0.2 \left| x_{i+1} - \bar{x}_{i+1} \right| \quad (7.22)$$

5. Сравниваем  $R$  с точностью вычислений  $\varepsilon$ . Если  $R \geq \varepsilon$ , то уменьшаем шаг вдвое и возвращаемся к п.1. Если  $R < \varepsilon$ , то значение, вычисленное по формуле (2.21), и будет вычисленным значением  $x(t_{i+1})$  (с точностью  $\varepsilon$ ).

6. Перед переходом к вычислению следующего значения  $x$  сравниваем  $R$  с  $\frac{\varepsilon}{64}$ . Если  $R \leq \frac{\varepsilon}{64}$ , то дальнейшие вычисления можно проводить с удвоенным шагом  $h=2h$ .

На рис. 2.6 представлена блок-схема решения задачи методом Кутта-Мерсона.

При решении уравнения методом Кутта-Мерсона невозможно гарантировать вычисление значения в заданных точках интервала  $[t_0, t_n]$ , так как шаг то увеличивается, то уменьшается. Однако после

получения решения методом Кутта-Мерсона значение в любой точке интервала  $[t_0, t_n]$  можно вычислить, интерполируя полученную зависимость  $[t_i, t_i]$

Рассмотренные методы Рунге-Кутта относятся к классу одношаговых методов, в которых для вычисления значения в очередной точке  $x_{k+1}$  нужно знать значение в предыдущей точке  $x_k$ .

Еще один класс методов решения задачи Коши — многошаговые методы, в которых используются точки  $x_{k-3}, x_{k-2}, x_{k-1}, x_k$  для вычисления  $x_{k+1}$ . В многошаговых методах первые четыре начальные точки  $(t_0, x_0), (t_1, x_1), (t_2, x_2), (t_3, x_3)$  должны быть получены заранее любым из одношаговых методов (метод Эйлера, Рунге-Кутта и т.д.). Наиболее известными многошаговыми методами являются методы прогноза-коррекции Адамса и Милна.

## 2.5. Решение дифференциальных уравнений методом прогноза-коррекции Адамса

Рассмотрим решение уравнения (2.1)–(2.2) на интервале  $[t_i; t_{i+1}]$ . Будем считать, что решение в точках  $t_0, t_1, t_2, \dots, t_i$  уже найдено, и значения в этих точках будем использовать для нахождения значения  $x(t_{i+1})$ .

Проинтегрируем уравнение (2.1) на интервале  $[t_i; t_{i+1}]$  и получим соотношение [2]:

$$x(t_{i+1}) = x(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, x(t)) dt. \quad (2.23)$$

При вычислении интеграла, входящего в (2.23), вместо функции  $f(t, x(t))$  будем использовать интерполяционный полином Лагранжа, построенный по точкам  $(t_{i-3}, x_{i-3}), (t_{i-2}, x_{i-2}), (t_{i-1}, x_{i-1}), (t_i, x_i)$ . Подставив полином Лагранжа в (2.23), получаем первое приближение (прогноз)  $\bar{x}_{i+1}$  для значения функции в точке  $t_{i+1}$ :

$$\bar{x}_{i+1} = x_i + \frac{h}{24} (-9f(t_{i-3}, x_{i-3}) + 37f(t_{i-2}, x_{i-2}) - 59f(t_{i-1}, x_{i-1}) + 55f(t_i, x_i)). \quad (2.24)$$

Как только  $\bar{x}_{i+1}$  вычислено, его можно использовать. Следующий полином и Лагранжа для функции  $f(t, x(t))$  построим по точкам

$(t_{i-2}, x_{i-2}), (t_{i-1}, x_{i-1}), (t_i, x_i)$  и новой точке  $(t_{i+1}, x_{i+1})$  после чего подставляем его в (2.23) и получаем второе приближение (корректор):

$$\bar{x}_{i+1} = x_i + \frac{h}{24}(f(t_{i-2}, x_{i-2}) - 5f(t_{i-1}, x_{i-1}) + 19f(t_i, x_i) + 9f(t_{i+1}, x_{i+1})). \quad (2.25)$$

Таким образом, для вычисления значения  $x(t_{i+1})$  методом Адамса необходимо последовательно применять формулы (2.24), (2.25), а первые четыре точки  $f$  можно получить методом Рунге-Кутты.

На рис. 2.7 представлена блок-схема решения задачи Коши (2.4)–(2.5) методом Адамса.

## 2.6. Решение дифференциальных уравнений методом Милна

Отличие метода Милна от метода Адамса состоит в том, что в первом случае в качестве интерполяционного полинома используется полином Ньютона.

Подставив в (2.23) вместо функции  $f(t, x(t))$  интерполяционный полином Ньютона, построенный по точкам  $(t_{k-3}, x_{k-3}), (t_{k-2}, x_{k-2}), (t_{k-1}, x_{k-1}), (t_k, x_k)$ , получаем первое приближение — прогноз Милна  $\bar{x}_{k+1}$  для значения функции в точке  $t_{k+1}$ .

$$\bar{x}_{k+1} = x_{k-3} + \frac{4h}{3}(2f(t_{k-2}, x_{k-2}) - f(t_{k-1}, x_{k-1}) + 2f(t_k, x_k)). \quad (2.26)$$

Следующий полином Ньютона для функции  $f(t, x(t))$  построим по точкам

$$(t_{k-2}, x_{k-2}), (t_{k-1}, x_{k-1}), (t_k, x_k)$$

и новой точке  $(t_{k+1}, \bar{x}_{k+1})$ , после чего подставляем его в (2.23) и получаем второе приближение — корректор Милна:

$$x_{k+1} = x_{k-1} + \frac{h}{3}(f(t_{k-1}, x_{k-1}) + 4f(t_k, x_k) + f(t_{k+1}, \bar{x}_{k+1})). \quad (2.27)$$

В методе Милна для вычисления значения  $x(t_{k+1})$  необходимо последовательно применять формулы (2.26) – (2.27), а первые четыре точки можно получить методом Рунге-Кутты.

Существует модифицированный метод Милна. В нем сначала вычисляется первое приближение по формуле (2.26), затем вычисляется управляющий параметр:

$$m_{k+1} = \bar{x}_{k+1} + \frac{28}{29}(x_k - \bar{x}_k), \quad (2.28)$$

после чего вычисляется значение второго приближения – корректор Милна по формуле:

$$x_{k+1} = x_{k-1} + \frac{h}{3}(f(t_{k-1}, x_{k-1}) + 4f(t_k, x_k) + f(t_{k+1}, m_{k+1})). \quad (2.29)$$

В модифицированном методе Милна первые четыре точки можно получить методом Рунге–Кутты, а для вычисления значения  $x(t_{k+1})$  необходимо последовательно применять формулы (2.26), (2.28), (2.29).

На рис. 2.8 представлена блок-схема решения задачи (2.4)-(2.5) модифицированным методом Милна.

Для вышеизложенного можно сделать вывод, что наиболее точным методами является метод Кутты-Мерсона, метод Адамса и модифицированный метод Милна.

### 3. РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Математические модели физических и иных процессов описываются с помощью дифференциальных уравнений в частных производных. Аргументами функций этих уравнений являются пространственные координаты  $x, y, z$  и время  $t$ . Один из основных аналитических методов решения уравнений математической физики — метод разделения переменных

#### 3.1. Общие сведения о дифференциальных уравнениях в частных производных

Линейным уравнением в частных производных второго порядка называется соотношение между функцией  $u(x, y)$  (или  $(x, t)$ ) и ее частными производными вида [1, 2, 3, 4]:

$$L(u) = A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + E(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + G(x, y)u = F(x, y) \quad (3.1)$$

Если переменная функция  $u$  зависит от  $x$  и  $t$ , то уравнение (3.1) может быть записано следующим образом:

$$L(u) = A(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + C(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + D(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} + E(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} + G(x, t)u = F(x, t) \quad (3.2)$$

В случае если  $F = 0$ , то уравнения (3.1)-(3.2) называются однородными, иначе-неоднородными [1, 2, 3, 4].

Если  $B^2 - AC < 0$ , то уравнение (3.2) относится к классу эллиптических уравнений, если  $B^2 - AC > 0$ , то (3.2) — это гиперболическое уравнение; если  $B^2 - AC = 0$  -параболическое уравнение. Когда  $B^2 - AC$  не имеет постоянного знака, получается уравнение смешанного типа. С помощью преобразования переменных  $x, y$  (или  $x, t$ ) уравнение можно привести к виду, когда  $B = 0$  [3, 4]. В этом случае очень просто определяется тип уравнения. Если  $A$  и  $C$  имеют один и тот же знак, то (3.2) — эллиптическое уравнение, если разные, то гиперболическое, а



если  $A$  или  $C$  равно 0, то уравнение относится к параболическим [2, 3, 4].

К классическим эллиптическим уравнениям относятся [2, 3, 4]:

- уравнение Лапласа  $\Delta u = 0$ , которое используется для описания магнитных и стационарных тепловых полей (в двумерном случае оператор Лапласа имеет вид  $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ , в трехмерном –

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2});$$

- уравнение Пуассона,  $\Delta u = f$  которое применяется в электростатике, теории упругости и других науках;
- уравнение Гельмгольца  $\Delta u + cu = f$ , описывающее установившиеся колебательные процессы.

Среди гиперболических уравнений можно выделить [2, 3, 4]:

- волновые уравнения: одномерное  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t)$  которое описывает, вынужденные колебания струны; двумерное  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t)$ , которое описывает колебания мембраны (при  $f = 0$  уравнение описывает свободные колебания струны или мембраны);

- телеграфное уравнение  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{RC + LG}{LC} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{RG}{LC} u - \frac{1}{LC} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ , которое описывает изменение потенциала и в линиях электропередачи. Здесь  $L, C, R, G$ - коэффициент самоиндукции, емкость, сопротивление, характеристика потерь на единицу длины линии.

К классическим параболическим уравнениям относится уравнение теплопроводности  $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f$ .

Для нахождения единственного решения дифференциального уравнения в частных производных необходимо задать начальные и граничные условия. Начальными условиями принято называть условия, заданные в начальный момент времени  $t$ . Граничные условия задаются при различных значениях пространственных переменных. Для эллиптических уравнений задаются только граничные условия, которые можно разделить на три класса:

1. условие Дирихле  $u|_{(x,y,z) \in \Gamma} = \varphi(t)$ . В этом случае на границе области  $\Gamma$ , в которой ищется решение, задана некая непрерывная функция  $\varphi$ . В одномерном случае это условие принимает вид  $u(0,t) = \varphi_1(t); u(L,t) = \varphi_2(t)$ ,

где  $(0, L)$  - интервал, на котором ищется решение одномерной задачи;

2. условие Неймана  $\frac{\partial u}{\partial n}|_{(x,y,z) \in \Gamma} = \varphi(t)$ . В этом случае на границе области заданна производная по направлению  $n$  внешней нормали;

3. смешанное условие  $\left( au + \beta \frac{\partial u}{\partial n} \right)|_{(x,y,z) \in \Gamma} = \varphi(t)$ .

Для параболических уравнений, кроме граничных условий, необходимо определить одно начальное, которое может быть таким:  $u(x, t_0) = \psi(x)$

В случае гиперболических уравнений начальные условия могут быть следующими:  $u(x, t_0) = \psi_1(x)$  и  $\frac{\partial u(x, t_0)}{\partial t} = \psi_2(x)$ . Решение ряда дифференциальных уравнений в частных производных может быть получено аналитически. Одним из наиболее часто используемых методов является метод разделения переменных (метод Фурье). Поэтому широкое распространение получили численные методы решения уравнений в частных производных.

### 3.2. Использование метода сеток для решения уравнений в частных производных

Одним из наиболее распространенных численных методов решения уравнений является метод сеток. В методе сеток область  $Q$ , в которой необходимо найти решение уравнения, прямыми, параллельными осям  $t = t_j$  и  $x = x_i$ , разобьем на прямоугольные области (см.

рис. 3.1), где  $x_i = x_0 + ih$ ,  $h = \frac{x_n - x_0}{n}$ ,  $i=0,1,2,\dots,n$ ,  $t_j = t_0 + j\Delta$ ,  $\Delta = \frac{t_k - t_0}{k}$ ,  $j = 0,1,\dots,k$ . Точки, которые лежат на границе  $\Gamma$  области  $\Omega$ , называются внешними, остальные точки — внутренними. Совокупность всех точек называется сеткой  $\Omega_h^\Delta$  величины  $h$  и  $\Delta$  - шагами сетки по  $x$  и  $t$

соответственно. Идея метода сеток состоит в том, что вместо любой непрерывной функции  $w(x,t)$  будем рассматривать дискретную функцию  $w_i^j = w(x_i, t_j)$ , которая определена в узлах сетки  $\Omega_h^\Delta$ . Вместо производных функции будем рассматривать их простейшие разностные аппроксимации в узлах сетки. Таким образом, вместо системы дифференциальных уравнений в частных производных получим систему алгебраических уравнений. Чем меньше величины  $h$  и  $\Delta$ , тем точнее получаемые алгебраические уравнения моделируют исходное дифференциальное уравнение в частных производных.

Метод сеток в литературе также называют методом конечных разностей.

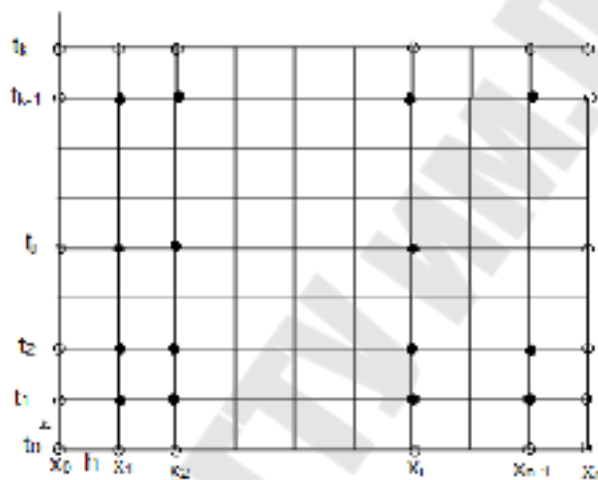


Рис. 3.1 Сетка  $\Omega_h^\Delta$  для области  $\Omega$  с границей  $\Gamma$

### 3.3. Использование метода сеток для решения уравнения теплопроводности

Знакомство с численными методами решения дифференциальных уравнений в частных производных начнем с разностных схем решения параболических уравнений [2]. Разностные схемы решения параболических уравнений будем рассматривать на примере следующего одномерного уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), 0 \leq x \leq L, 0 \leq t \leq T, \\ u(0,t) &= \mu(t), u(L,t) = \eta, 0 \leq t \leq T \\ u(x,0) &= \varphi(x), 0 \leq x \leq L. \end{aligned} \quad a^2 = \frac{\lambda}{c\rho} \quad (3.3)$$

где  $a^2$  – коэффициент температуропроводности,  $\lambda$  – коэффициент температуропроводности материала стержня,  $c$  – удельная теплоемкость,  $\rho$  – плотность материала.

Построим сетку  $\Omega_h^\Delta$  (см. рис. 3.1). Для получения сеточного уравнения заменим производную  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  приближенной разностной формулой [2]:

$$\frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial x^2} = \frac{u_{i,j} - 2u_{i,j} + 2u_{i-1,j}}{h^2} \quad (3.4)$$

Для замены  $\frac{\partial u}{\partial t}$  можно воспользоваться одной из приближенных разностных формул:

$$\frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial t} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta}, \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial t} = \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta} \quad (3.6)$$

Кроме того, заменим начальные и граничные условия их разностной аппроксимацией:

$$u_{i,0} = \varphi(x_i) = \varphi_i, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (3.7)$$

$$u_{0,j} = \mu(t_j) = \mu_j, \quad u_{n,j} = \eta(t_j) = \eta_j, \quad j = 0, 1, \dots, k. \quad (3.8)$$

### 3.3.1. Явная двухслойная разностная схема

Заменив частные производные в задаче (3.3) соотношениями (3.4) и (3.5) и учитывая условия (3.7)–(3.8), получим следующую вычислительную схему для расчета значений функции  $u$  в узлах сетки  $\Omega_h^\Delta$ :

$$u_{i,j+1} = \gamma u_{i,j-1} + (1 - 2\gamma)u_{i,j} + \gamma u_{i,j+1} + \Delta \cdot f_{i,j}, \quad (3.9)$$

$$u_{0,j} = \mu_j, \quad u_{n,j} = \eta_j, \quad u_{i,0} = \varphi_i, \quad \gamma = \frac{a^2 \Delta}{h^2} \quad (3.10)$$

Это явная двухслойная разностная схема (рис. 3.2). Учитывая, что на нулевом слое (при  $i = 0$ ) все значения  $u_{0,i}$  (как, впрочем, и  $u_{0,j}$ ,  $u_{n,i}$ ) известны, по формуле (3.9) можно сначала явно рассчитать значе-

ния  $u_{i,1}$ , затем  $u_{i,2}$  и так до  $u_{i,k}$ . Для устойчивости разностной схемы (3.9) значения шагов по  $t$  и  $x$  должны удовлетворять следующему условию:

$$\Delta \leq \frac{h^2}{2a^2} \quad (3.11)$$

Блок–схема решения уравнения (3.3) с помощью явной разностной схемы (3.9)–(3.10) представлена на рис. 3.3.

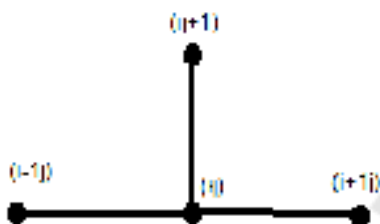


Рис.3.2 Шаблон явной двухслойной разностной схемы

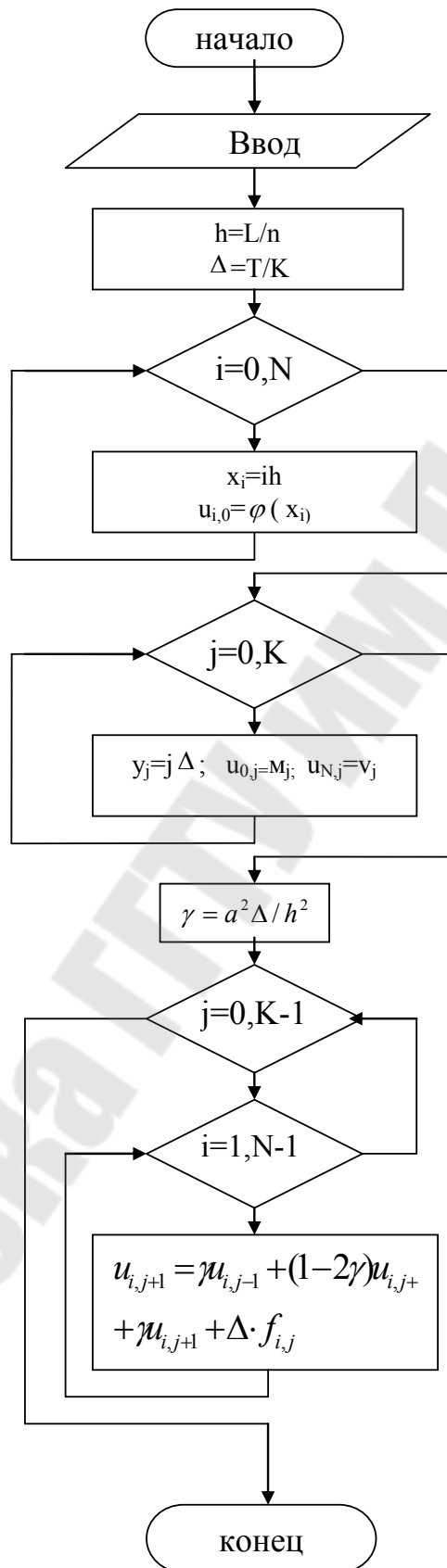


Рис. 3.3. Блок–схема решения параболического уравнения с помощью явной разностной схемы

### 3.3.2. Неявная разностная схема

При решении параболических уравнений с помощью явной разностной схемы основной проблемой является устойчивость решения и правильный выбор шага по  $t$ , удовлетворяющего соотношению (3.11). Для решения этой проблемы были предложены неявные разностные схемы. Эти схемы абсолютно устойчивы, но алгоритм решения получаемого сеточного уравнения несколько сложнее, чем простой пересчет по формуле (3.9). Для построения неявной разностной схемы заменим частные производные в задаче (3.3) соотношениями (3.4), (3.6) вместо (3.5) для явной схемы) и с учётом условий (3.7)–(3.8) получим следующую вычислительную схему для расчёта значений функции  $u$  в узлах сетки  $\Omega_h^\Delta$ :

$$Yu_{i-1j} + (1+2Y)u_{ij} + u_{i+1j} = -u_{i-1j} - \Delta \cdot f_{i,j}, \quad (3.12)$$

$$i = 1, 2, \dots, n-1, \quad j = 1, 2, \dots, k,$$

Соотношения (3.12) в месте с равенствами (3.9) – неявная двухслойная разностная схема (рис. 3.4).

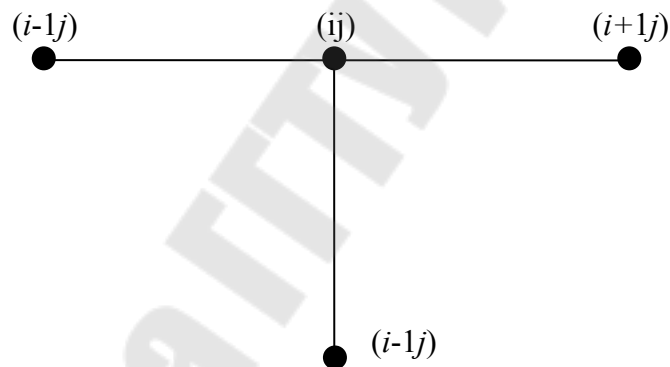


Рис. 3.4 Шаблон неявной двухслойной разностной схемы

Схема (3.10), (3.12) не позволяет явно выписывать решение, для нахождения  $u_{i,j}$  при каждом значении  $j$  необходимо решить трёхдиагональную систему линейных алгебраических уравнений, для чего можно использовать одним из итерационных методов или методом прогонки (см. главу 1). преобразуем систему (3.12) к следующему виду:

$$u_{i,j} = \frac{\gamma}{1+2\gamma}(u_{i-1,j} + u_{i+1,j}) + \frac{u_{i,j-1}}{1+2\gamma} + \frac{\Delta}{1+2\gamma} f(x_i, t_j). \quad (3.13)$$

Формула (3.13) позволит запрограммировать решение системы, получаемой с помощью неявной разностной схемы методом Зейделя.

На рис. 3.5 представлена блок – схема решения задачи 8.1 с помощью неявной разностной схемы, в которой система уравнений (3.13) решается методом Зейделя (см. блоки 10–14 блок–схемы).

### 3.3.3. Шеститочечная параметрическая схема

Сеточный шаблон показан на рис. 3.6:

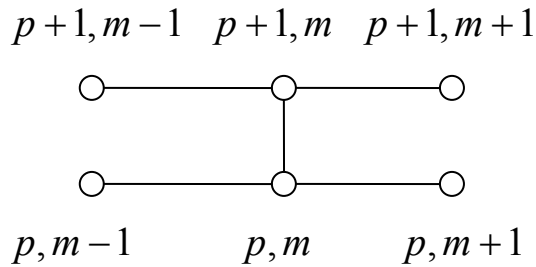


Рис. 3.6 Сеточный шаблон шеститочечной параметрической схемы

Разностная схема:

$$\frac{u_m^{p+1} - u_m^p}{\tau} - \frac{a^2}{h^2} [\sigma (u_{m-1}^{p+1} - 2u_m^{p+1} + u_{m+1}^{p+1}) + (1 - \sigma)(u_{m-1}^p - 2u_m^p + u_{m+1}^p)] = f_m^{p+1/2},$$

$$p = 0, 1, \dots, P-1; \quad m = 0, 1, \dots, M-1;$$

$$u_m^0 = \varphi_m, \quad m = 0, 1, \dots, M;$$

$$u_0^p = \alpha_1^p, \quad p = 0, 1, \dots, P;$$

$$u_M^p = \alpha_2^p, \quad p = 0, 1, \dots, P.$$

где  $0 \leq \sigma \leq 1$  — параметр схемы;

$\sigma = 0$  — явная четырехточечная схема;

$\sigma = 1$  — неявная четырехточечная схема;

$\sigma = 1/2$  — схема Кранка-Николсона.

Метод решения полученной системы линейных уравнений с матрицей трехдиагональной структуры — прогонка.

Порядок аппроксимации:

$$\sigma = 1/2: \quad O(\tau^2 + h^2),$$

$$\sigma = 1; 2: \quad O(\tau + h^2),$$

$$\sigma = 1/6: \quad O(\tau + h^4).$$



Введем обозначения

$$K = a^2 r, \quad r = \frac{\tau}{h^2}.$$

Схема устойчива при любых  $K$ , если  $0 \leq \sigma < 1/2$ ; при схема устойчива, если

$$\tau < \frac{h^2}{2a^2(1-2\sigma)}.$$

### 3.3.4. Схема Франкела-Дюфорта

Сеточный шаблон показан на рис. 3.7:

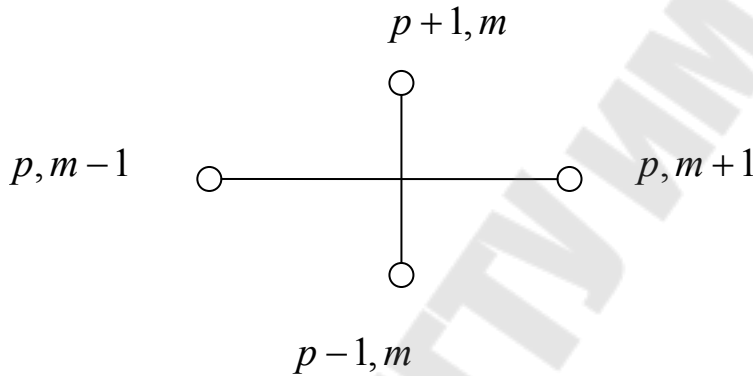


Рис. 3.7 Сеточный шаблон

Разностная схема:

$$\frac{u_m^{p+1} - u_m^{p-1}}{2\tau} - a^2 \frac{u_{m-1}^p - [u_m^{p+1} + u_m^{p-1}] + u_{m+1}^p}{h^2} = f_m^p,$$

$$p = 0, 1, \dots, P-1; \quad m = 1, 2, \dots, M-1;$$

$$u_m^0 = \varphi_m, \quad m = 0, 1, \dots, M;$$

$$u_0^p = \alpha_1^p, \quad p = 1, 2, \dots, P;$$

$$u_M^p = \alpha_2^p, \quad p = 1, 2, \dots, P.$$

Значения функции на втором слое по времени рассчитываются по явной центральной четырехточечной схеме. Значение сеточной функции на верхнем временном слое  $p+1$  рассчитывается по ее значениям на двух предыдущих нижних слоях:  $p$  и  $p-1$ .

Порядок аппроксимации:  $O(\tau^2 + h^2 + \tau^2/h^2)$ .

Схема устойчива при любых  $K = a^2 r$ ,  $r = \tau / h^2$ .

### 3.3.5. Схема Ричардсона

Сеточный шаблон показан на рис. 3.8:

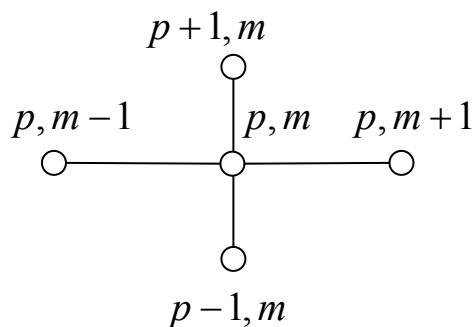


Рис. 3.8 Сеточный шаблон

Разностная схема:

$$\frac{u_m^{p+1} - u_m^{p-1}}{2\tau} - a^2 \frac{u_{m-1}^p - 2u_m^p + u_{m+1}^p}{h^2} = f_m^p,$$

$$p = 0, 1, \dots, P-1; \quad m = 1, 2, \dots, M-1;$$

$$u_m^0 = \varphi_m, \quad m = 0, 1, \dots, M;$$

$$u_0^p = \alpha_1^p, \quad p = 1, 2, \dots, P;$$

$$u_M^p = \alpha_2^p, \quad p = 1, 2, \dots, P.$$

Значения функции на втором слое по времени рассчитываются по явной центральной четырехточечной схеме. Значение сеточной функции на верхнем временном слое  $p+1$  рассчитывается по ее значениям на двух предыдущих нижних слоях:  $p$  и  $p-1$ .

Порядок аппроксимации:  $O(\tau^2 + h^2)$

Схема неустойчива при любых  $K$ .

### 3.3.6 Схема. Алена-Чена

Сеточный шаблон показан на рис. 3.9:

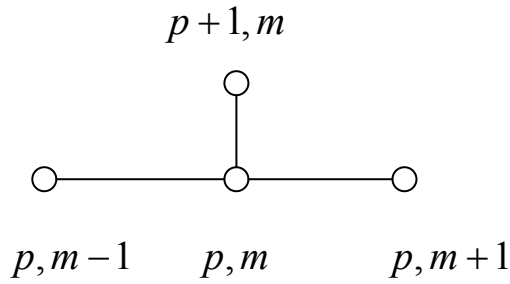


Рис. 3.9 Сеточный шаблон

Разностная схема:

$$\frac{u_m^{p+1} - u_m^p}{\tau} - a^2 \frac{u_{m-1}^p - 2u_m^{p+1} + u_{m+1}^p}{h^2} = f_m^p,$$

$$p = 0, 1, \dots, P-1; \quad m = 1, 2, \dots, M-1;$$

$$u_m^0 = \varphi_m, \quad m = 0, 1, \dots, M;$$

$$u_0^p = \alpha_1^p, \quad p = 1, 2, \dots, P;$$

$$u_M^p = \alpha_2^p, \quad p = 1, 2, \dots, P.$$

Значения сеточной функции на верхнем временном слое находятся по ее значениям на нижнем слое, поскольку разностное уравнение разрешается относительно  $u_m^{p+1}$ .

Порядок аппроксимации:  $O(\tau + h^2 + \tau / h^2)$ .

Схема устойчива при любых  $K$ .

### 3.3.7 Нецентральная явная схема

Сеточный шаблон показан на рис. 3.10:

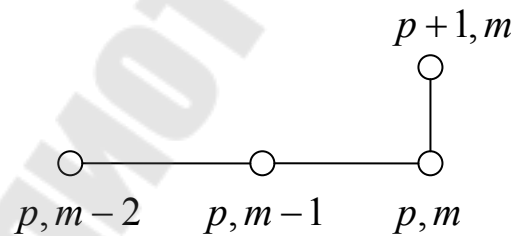


Рис. 3.10 Сеточный шаблон

Разностная схема:

$$\frac{u_m^{p+1} - u_m^p}{\tau} - \alpha^2 \frac{u_{m-2}^p - 2u_{m-1}^p + u_m^p}{h^2} = f_m^p,$$

$$p = 0, 1, \dots, P-1; \quad m = 2, 3, \dots, M-1;$$

$$u_m^0 = \varphi_m, \quad m = 0, 1, \dots, M;$$

$$u_0^p = \alpha_1^p, \quad p = 1, 2, \dots, P;$$

$$u_M^p = \alpha_2^p, \quad p = 1, 2, \dots, P.$$

Значение сеточной функции на верхнем временном слое  $p+1$  рассчитывается по ее значениям на нижнем слое  $p$  (значения сеточной функции в точках  $\{m=1; p=1, 2, \dots, P\}$  рассчитываются по шеститочечной параметрической схеме при  $\sigma=1$ ).

Порядок аппроксимации:  $O(\tau+h)$ .

Схема устойчива при любых  $K$ .

### 3.3.8. Схема Саульева

Сеточный шаблон показан на рис. 3.11:

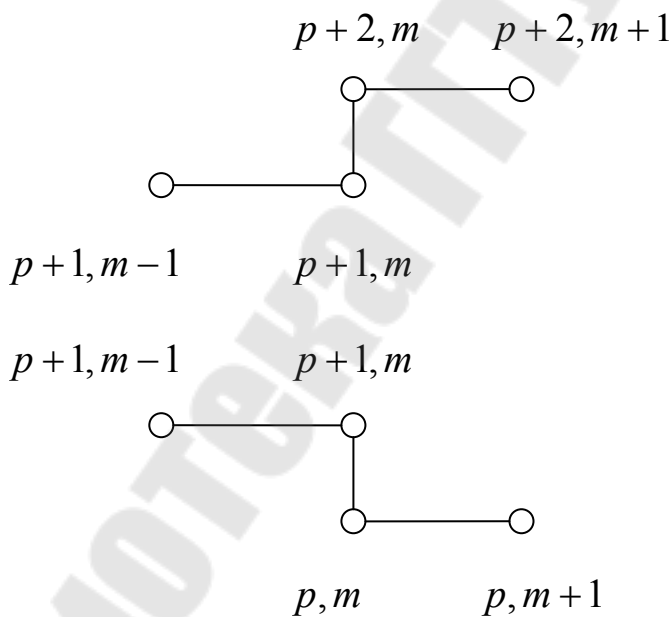


Рис. 3.11 Сеточный шаблон

Разностная схема:

$$\frac{u_m^{p+1} - u_m^p}{\tau} - \alpha^2 \frac{u_{m-1}^{p+1} - [u_m^{p+1} + u_m^p] + u_{m+1}^p}{h^2} = f_m^{p+1/2},$$

$$\frac{u_m^{p+2} - u_m^{p+1}}{\tau} - \alpha^2 \frac{u_{m-1}^{p+1} - [u_m^{p+2} + u_m^{p+1}] + u_{m+1}^{p+2}}{h^2} = f_m^{p+3/2},$$

$$p = 0, 1, \dots, P-1; \quad m = 1, 2, \dots, M-1;$$

начальные и граничные условия в такой схеме реализуют следующим образом:

$$u_m^0 = \varphi_m, \quad m = 0, 1, \dots, M;$$

$$u_0^p = \alpha_1^p, \quad p = 1, 2, \dots, P;$$

$$u_M^p = \alpha_2^p, \quad p = 1, 2, \dots, P.$$

Алгоритм численного решения задачи — «бегущий счет»: слева направо — первый этап, справа налево — второй.

Порядок аппроксимации:  $O(\tau^2 + h^2 + \tau^2 / h^2)$

Схема устойчива при любых  $K$ .

### 3.3.9. Точечные решения тестовых краевых задач для одномерного линейного уравнения теплопроводности

В дальнейшем мы будем сравнивать численные решения с точными решениями следующих задач.

Задача 1:

$$u_t = u'_{xx}, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < 1,$$

$$u(0, x) = 0, \quad 0 < x < 1,$$

$$u(t, 0) = 0, \quad 0 < t < T,$$

$$u(t, 1) = 1, \quad 0 < t < T.$$

Точное решение:

$$u(t, x) = x + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot (\pi n)^{-1} \cdot e^{-n^2 \pi^2 t} \cdot \sin n \pi x.$$

Задача 2:

$$u_t = u'_{xx}, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < 1,$$

$$u(0, x) = \sin \pi x, \quad 0 < x < 1,$$

$$u(t, 0) = 0, \quad 0 < t < T,$$

$$u(t, 1) = 0, \quad 0 < t < T.$$

Точное решение:

$$u(t, x) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x.$$

Задача 3:

$$\begin{aligned} u_t' &= u_{xx}' + \sin \pi x, & 0 < t < T, \quad 0 < x < 1, \\ u(0, x) &= 0, & 0 < x < 1, \\ u(t, 0) &= 0, & 0 < t < T, \\ u(t, 1) &= 0, & 0 < t < T. \end{aligned}$$

Точное решение:

$$u(t, x) = \frac{1}{\pi^2} [1 - e^{-\pi^2 t}] \sin \pi x.$$

### 3.4. Использование метода сеток для решения одномерного волнового уравнения

Решение гиперболических уравнений также можно осуществить с помощью разностных схем. Разностные схемы решения одномерного гиперболического уравнения рассмотрим на примере следующего уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (3.14) \\ u(0, t) &= \mu(t), \quad u(L, t) = \nu(t), \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

Построим сетку  $\Omega_k^\Delta$  (см. рис. 3.1), в которой будем искать решение уравнения (3.14). Частную производную  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  заменим разностным соотношением (3.4), а производную  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$  соотношением (3.15):

$$\frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial t^2} = \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{\Delta^2}. \quad (3.15)$$

Подставляя (3.15), (3.4), (3.5) в гранично-начальную задачу (3.14), получим следующую явную разностную схему решения уравнения:

$$\begin{aligned}
u_{i,j+1} &= -u_{i,j-1} + \gamma(u_{i-1,j} + u_{i+1,j}) + (2 - 2\gamma)u_{ij} + \Delta^2 f_{i,j}, \\
i &= 1, 2, \dots, N-1, j = 1, 2, \dots, K-1, \\
u_{i,0} &= \varphi(x_i), \frac{u_{i,1} - u_{i,0}}{\Delta} = \psi_i, u_{i,1} = u_{i,0} + \Delta\psi_i, i = 0, 1, \dots, N, \quad (3.16) \\
u_{0,j} &= \mu_j, u_{N,j} = \nu_j, j = 0, 1, \dots, K, \\
\gamma &= \frac{a^2 \Delta^2}{h^2}.
\end{aligned}$$

которая устойчива при  $\gamma \leq 1$  и по аналогии с разностной схемой (3.9)–(3.10) может быть легко запрограммирована. Блок-схема этой разностной схемы аналогична изображенной на рис. 8.3 и отличается только формулой расчета  $u_{i,j+1}$  (см. формулу (3.16)).

Для решения гиперболических уравнений можно построить и неявные схемы, однако в связи с тем, что у них нет таких преимуществ перед явными [2], как в параболических уравнениях, имеет смысл использовать их, только когда нельзя построить явную (например, при смешанных условиях на границе области).

### 3.5. Использование метода сеток для решения одномерного уравнения Пуассона

Рассмотрим разностную схему для эллиптического уравнения в прямоугольной области  $\Omega(R-a \leq x \leq R+a; -a \leq y \leq a)$  с граничными условиями Дирихле на границе  $\Gamma$ :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{5}{x} \frac{\partial \psi}{\partial x} = -2, \quad (3.17)$$

$$\psi(x, y) \Big|_{(x,y) \in \Gamma} = 0.$$

Построим сетку  $\Omega_{hx}^{hy}$ , для чего проведем в области прямые, параллельные осям  $y = y_j$  и  $x = x_i$ , где  $x_i = R - b + i \cdot hx$ ,  $hx = \frac{2b}{n}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ,  $y_j = -a + j \cdot hy$ ,  $hy = \frac{2a}{k}$ ,  $j = 0, 1, \dots, k$ .

Для построения разностного уравнения заменим частные производные и граничные условия следующими соотношениями:

$$\frac{\partial^2 \psi(x_i, y_j)}{\partial x^2} = \frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{hx^2},$$

$$\frac{\partial^2 \psi(x_i, y_j)}{\partial y^2} = \frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{hy^2}.$$

$$\psi_{i,0} = \psi_{i,Ny} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, Nx,$$

$$\psi_{0,j} = \psi_{Nx,j} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, Ny. \quad (3.19)$$

С помощью соотношений (3.18)–(3.19) преобразуем эллиптическую краевую задачу к следующей системе разностных уравнений:

$$\psi_{i,j} = \frac{1}{A} (B_i \psi_{i+1,j} + C_i \psi_{i-1,j} + D(\psi_{i,j-1} + \psi_{i,j+1}) + 2),$$

$$A = \left( \frac{2}{hx^2} + \frac{2}{hy^2} \right), B_i = \frac{1}{hx^2} + \frac{5}{2 \cdot hx \cdot x_i}, C_i = \frac{1}{hx^2} - \frac{5}{2 \cdot hx \cdot x_i}, D = \frac{1}{hy^2},$$

$$i = 1, 2, \dots, Nx - 1; \quad j = 1, 2, \dots, Ny - 1,$$

$$\psi_{i,0} = \psi_{i,Ny} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, Nx,$$

$$\psi_{0,j} = \psi_{Nx,j} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, Ny. \quad (3.20)$$

Эту систему можно решить итерационным методом Зейделя.

Аналогично можно построить разностную схему для решений уравнения Лапласа и Пуассона.

В случае медленной сходимости итерационных процессов при решении сеточных уравнений, получаемых путём аппроксимации гиперболических и эллиптических задач, имеет смысл попробовать заменить метод Зейделя градиентными методами (или методами релаксации) [2].



### 3.6. Метод взвешенных невязок с использованием базисных функций

#### 3.6.1. Аппроксимация функций с использованием систем базисных функций

Рассмотренный выше метод конечных разностей позволяет свести решение дифференциальных уравнений для непрерывных функций к численному решению системы алгебраических уравнений путем разностной аппроксимации производных в узлах сеточной области. В результате решения такой задачи удается определить значения искомой функции в конечном числе точек.

Однако существует много других способов аппроксимации функций, которые могут быть использованы для численного решения дифференциальных уравнений. В частности широкое распространение получили методы, основанные на применении базисных функций, определенных на всей области решения поставленной задачи [1].

Пусть требуется аппроксимировать заданную функцию  $f$  в области  $V$ , ограниченной поверхностью  $\Gamma$  и принимающую на этой поверхности заданные значения  $f|_{\Gamma}$ .

С этой целью введем функцию  $\Psi$ , удовлетворяющую условию  $\Psi|_{\Gamma} = f|_{\Gamma}$ , а также систему линейно-независимых базисных функций  $\{N_m; m = 1, 2, \dots, M\}$ , удовлетворяющих на граничной поверхности  $\Gamma$  условиям  $N_m|_{\Gamma} = 0$  для всех  $m$ .

Тогда аппроксимацию функции  $f$  можно представить в виде

$$f \cong \hat{f} = \Psi + \sum_{m=1}^M \alpha_m N_m, \quad (3.21)$$

где  $\alpha_m (m=1, 2, \dots, M)$  – некоторые константы, определяемые из условия наилучшего приближения функции  $\hat{f}$ .

Система базисных функций должна обеспечивать улучшение аппроксимации функции (т.е. сходимость  $\hat{f} \rightarrow f$ ) при увеличении числа  $M$  базисных функций. Для этого комбинация (1.1) должна удовлетворять условиям полноты, т.е. обеспечивать возможность сколь угодно точного представления произвольной функции  $f$ , удовлетворяющей условиям на границе  $f|_{\Gamma} = \Psi|_{\Gamma}$  при  $M = \infty$ .

Таким образом, для получения хорошей аппроксимации функции с помощью комбинации типа (2.1) необходимо решить следующие вопросы:

- подобрать функцию  $\Psi$ , удовлетворяющую условию  $\Psi|_{\Gamma} = f|_{\Gamma}$ ;
- выбрать систему базисных функций  $N_m$ , удовлетворяющих условиям полноты;
- выбрать способ определения констант  $\alpha_m$  при выбранных базисных функциях  $N_m$ .

Первый вопрос обычно решается сравнительно просто, поэтому ниже основное внимание будет направлено на вопросы выбора базисных функций и способа вычисления констант.

В настоящее время известен ряд классов функций, которые могут быть использованы в качестве базисных в аппроксимациях типа (2.1).

В частности широко используются базисные функции в виде степенных полиномов, приводящие к аппроксимации функций алгебраическими многочленами вида

$$\hat{f}_M(x) = \alpha_1 + \alpha_2(x) + \dots + \alpha_M x^{M-1} = (x) \{ \alpha \}, \quad (3.22)$$

$$(x) = (1, x, x^2, \dots, x^{M-1}); \quad \{ \alpha \}^T = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_M) \ .$$

Многочлены типа (3.22) хорошо изучены и удобны в использовании: легко вычисляются, без труда дифференцируются и интегрируются.

Для вычисления параметров  $\alpha_m$  может быть использован способ интерполяции, согласно которому искомая функция заменяется аппроксимирующей, совпадающей с искомой в ряде различных точек (узлах интерполяции). При этом параметры интерполяции определяются из решения системы алгебраических уравнений

$$[x_m] \{ \alpha \} = \{ f_m \};$$

$$\{ f_m \}^T = (f x_1, f x_2) \dots f x_M);$$

$$[x_m] = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{M-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \dots & x_m^{M-1} \end{bmatrix};$$

ИЛИ

$$\{\alpha\} = [x_m]^{-1} \{f_m\}. \quad (3.23)$$

Эта система однозначно разрешима, если узлы интерполяции попарно различны.

Далее аппроксимацию (3.22) можно привести к виду

$$\hat{f}_M(x) = (x)[x_m]^{-1} \{f_m\} = (N) \{f_m\};$$

$$(N) = (x)[x_m]^{-1}; \quad (N) = (N_1, N_2 \dots N_M).$$

Следует отметить, однако, что на практике такой способ определения параметров  $\alpha_m$  и представления аппроксимации вида (3.22) используется достаточно редко, т.к. функции  $N_m$  определены неявно из решения системы (3.23), которая обычно оказывается плохо обусловленной.

В связи с этим более широкое применение находят другие формы аппроксимации функций алгебраическими многочленами, в которых функции  $N_m$  определены в явном виде, например в форме многочленов Лагранжа

$$\hat{f}_M(x) = \sum_{m=1}^M f(x_m) N_m(x), \quad (3.24)$$

где

$$N_m(x) = \prod_{\substack{k=1 \\ m \neq k}}^M \frac{x - x_k}{x_m - x_k}.$$

Особенностью аппроксимации типа (3.24) является то, что в ней принимается  $\Psi = 0$ , а базисные функции обладают свойством  $N_m = 1$  при  $x = x_m$  и  $N_m = 0$  при  $x_k \neq x_m$ ; (3.25)

$$\alpha_m = f(x_m)$$

В качестве базисных функций также часто используются тригонометрические функции, приводящие к аппроксимации вида

$$\hat{f} = \Psi + \sum_{m=1}^M \alpha_m \sin(m\pi x / L), \quad (3.26)$$

где  $L$  – длина отрезка  $0 \leq x \leq L$ ,  $\Psi$  – линейная функция, принимающая на границе отрезка значения  $\Psi(0) = f(0)$ ,  $\Psi(L) = f(L)$ .

На основе теории рядов Фурье коэффициенты этой аппроксимации могут быть получены в виде

$$\alpha_m = \frac{2}{L} \int_0^L (f - \Psi) \sin(m\pi x / L) dx. (3.27)$$

Возможны и другие частные способы построения аппроксимаций типа (1.1). При этом существует общий метод определения констант в аппроксимации (1.1), на основе которого можно получить все рассмотренные выше подходы. Этот метод носит название – метод взвешенных невязок [1].

### 3.6.2. Основы метода взвешенных невязок

Наиболее общий метод определения параметров  $\alpha_m$  в аппроксимации вида (3.21) можно получить, если ввести невязку аппроксимации  $R_v$

$$R_v = f - \hat{f} (3.28)$$

Поскольку  $R_v$  представляет собой функцию, зависящую от координат точек области  $V$ , для уменьшения величины этой невязки, т.е. для приближения функции  $\hat{f}$  к  $f$  потребуем выполнения условий

$$\int_V W_n (f - \hat{f}) dV = \int_V W_n R_v dV = 0, (3.29)$$

где  $\{W_n; n=1,2,\dots,M\}$  – множество линейно-независимых весовых функций.

Тогда, при условии полноты выбранных весовых функций  $W_n$ , сходимость функций  $\hat{f} \rightarrow f$  будет достигнута, если потребовать выполнение равенств (3.29) для всех  $n$  при  $M \rightarrow \infty$ .

Подставляя в (3.29) представление функции  $\hat{f}$  согласно (3.21) можно получить

$$\int_V W_n (f - \Psi - \sum_{m=1}^M \alpha_m N_m) dV = 0$$

или

$$\sum_{m=1}^M \alpha_m \int_V W_n N_m dV = \int_V W_n (f - \Psi) dV \quad \text{при } n = 1, 2, \dots, M \quad (3.30)$$

Уравнение (3.30) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений, из решения которой могут быть найдены неизвестные константы  $\alpha_m$ . По аналогии с предыдущим разделом эту систему можно записать в матричном виде

$$[K]\{\varphi\} = \{R\}$$

где

$$K_{n,m} = \int_V W_n \cdot N_m dV \quad 1 \leq n, m \leq M, (3.31)$$

$$\{\varphi\}^T = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_M),$$

$$\{R\}^T = \left( \int_V W_1 (f - \Psi) dV, \int_V W_2 (f - \Psi) dV, \dots, \int_V W_M (f - \Psi) dV \right).$$

Задаваясь различными видами весовых функций на основе (3.30) можно получать различные варианты метода взвешенных невязок.

Ниже рассмотрены некоторые наиболее часто используемые формы представления весовых функций [1].

Коллокация в точке. В этом случае полагается, что  $W_n = \delta(x - x_n)$ , где  $\delta(x - x_n)$  – дельта функция Дирака, обладающая свойствами

$$\delta(x - x_n) = 0 \quad \text{при } x \neq x_n; \quad \delta(x - x_n) = \infty \quad \text{при } x = x_n,$$

$$\int_{x < x_n}^{x > x_n} G(x) \delta(x - x_n) dx = G(x_n).$$

$$\text{При этом } K_{nm} = \int_x \delta(x - x_n) N_m dx = N_m \Big|_{x=x_n}.$$

Иначе говоря, принимается, что  $W_n = 1$  в точке  $x_n$  и  $W_n = 0$  нулю во всех других точках.

Согласно такому выбору весовой функции невязка  $R_v$  оказывается равной нулю в ряде заданных точек  $x_n$ , а элементы системы (3.31) принимают вид

$$K_{nm} = N_m \Big|_{x=x_n}; \quad R_n = (f - \Psi) \Big|_{x=x_n}.$$

Понятно, что на основе схемы поточечной коллокации могут быть получены различные способы интерполяции функций.

Коллокации по подобластям. В этом методе принимается, что  $W_n = 1$  в некоторой подобласти  $x_{n-1} < x < x_n$  и  $W = 0$  при  $x < x_{n-1}$ ,  $x > x_n$ . Иначе говоря, принимается условие, согласно которому интеграл от невязки обращается в ноль для ряда подобластей

$$x_{n-1} < x < x_n$$

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} R_v dx = 0.$$

Элементы системы (3.31) при этом принимают вид

$$K_{nm} = \int_{x_{n-1}}^{x_n} N_m dx; \quad R_n = \int_{x_{n-1}}^{x_n} (f - \Psi) dx;$$

Метод Галеркина. В качестве весовых функций выбираются базисные функции  $W_n = N_n$ . Элементы системы уравнений (3.31) при этом приобретают вид

$$K_{nm} = \int_V N_n N_m dV; \quad R_n = \int_V N_n (f - \Psi) dV.$$

Особенностью метода Галеркина является симметричность матрицы  $[K]$ .

Кроме этого, если в качестве  $N_m$  использовать систему ортогональных функций, таких, что

$$\int_V N_n \cdot N_m dV = 0 \quad \text{при } n \neq m,$$

то матрица  $[K]$  становится диагональной.

Например, если на отрезке  $0 < x < L$  использовать для аппроксимации систему базисных функций

$$\{N_m = \sin(m\pi x / L); \quad m = 1, 2, \dots\},$$

то

$$K_{nm} = \int_0^L \sin(n\pi x / L) \sin(m\pi x / L) dx = \begin{cases} L/2, & \text{при } n = m \\ 0, & \text{при } n \neq m \end{cases};$$

$$R_n = \int_0^L (f - \Psi) \sin(n\pi x / L) dx.$$

При этом могут быть сразу найдены коэффициенты  $a_m$ :

$$a_m = \frac{2}{L} \int_0^L (f - \Psi) \sin(m\pi x / L) dx.$$

Такая форма аппроксимации соответствует приближению функций на основе рассмотренных выше рядов Фурье.

Метод моментов.

Весовые функции принимаются в виде

$$\{W_n = x^{n-1}; \quad n = 1, 2, \dots\}$$

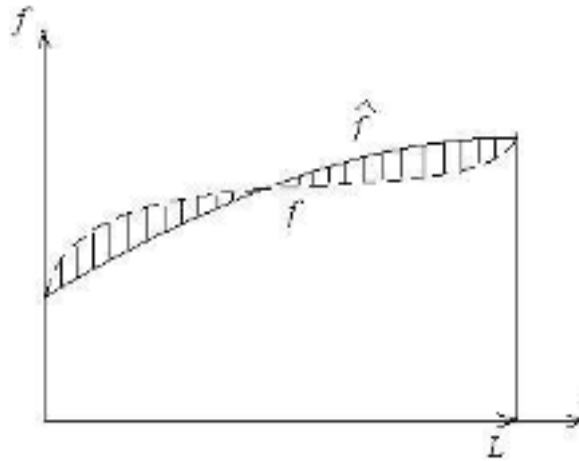


Рис. 3.12. Весовые функции для момента нулевого порядка

$n = 1; \int_0^L R_v dx = M_0 = 0$  – момент нулевого порядка – суммарная площадь (см.рис.2.1)

$n = 2; \int_0^L R_v x dx = M_1 = 0$  – момент первого порядка – момент площади относительно начала координат;

$n = 3; \int_0^L R_v x^2 dx = M_2 = 0$  – момент второго порядка и т.д.

#### Метод наименьших квадратов.

В методе наименьших квадратов минимизируется интеграл от квадрата невязки функций  $f$  и  $\hat{f}$  по области  $V$ .

$$\int_V (f - \hat{f})^2 dV = I(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_M).$$

Для нахождения минимума  $I$  используется условие стационарности, приводящее к системе уравнений

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha_n} = 0; \quad n = 1, 2, \dots, M.$$

Принимая для функции  $\hat{f}$  представление в виде (3.21) и учитывая, что  $\frac{\partial \hat{f}}{\partial \alpha_n} = N_n$ , условие стационарности функционала  $I$  можно привести к виду

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha_n} = \int_V (f - \hat{f}) N_n = 0$$

Полученные уравнения совпадают со стандартной формой метода взвешенных невязок с весами  $W_n = N_n$ . В рассматриваемом случае формулировка метода наименьших квадратов совпадает с методом Галеркина.

### 3.6.3. Аппроксимация решений дифференциальных уравнений

Рассмотренный выше общий метод аппроксимации функций может быть легко распространен на аппроксимацию решений дифференциальных уравнений.

Рассмотрим дифференциальное уравнение в области  $V$  для некоторой функции  $f = f(x_i)$

$$A(f) = Df + P = 0, (3.32)$$

где  $D$  – линейный дифференциальный оператор,  $P = P(x_i)$  – заданная функция координат области  $V$ .

Решение уравнения (3.32) должно удовлетворять краевым условиям на границе области  $\Gamma$ , которые в общем виде могут быть записаны

$$B(f) = Gf + p = 0, (3.33)$$

где  $G$  – линейный оператор, а  $p(\Gamma)$  – заданная функция координат границы  $\Gamma$ .

Например, для рассмотренных выше двумерных задач теплопроводности функции  $f = T(x, y)$ ,  $P = Q(x, y)$ , а уравнения (3.32) и (3.33) примут вид

$$Df + P = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + Q = 0; (3.34)$$

$$Gf + p = T - \bar{T} = 0 \quad \text{на } \Gamma_T, \quad \text{где } p = \bar{T} \text{ и (или)}$$

$$Gf + p = -k \frac{\partial T}{\partial n} + \bar{q} = 0 \quad \text{на } \Gamma_q, \quad \text{где } p = -\bar{q} (3.35)$$

По аналогии с предыдущим разделом искомую функцию  $f$  можно аппроксимировать с помощью базисных функций

$$f \cong \hat{f} = \Psi + \sum_{m=1}^M \alpha_m N_m, (3.36)$$



удовлетворяющих краевым условиям на границе области  $\Gamma$   
 $G\psi = -p; \quad GN_m = 0, \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (3.37)$

Если функции  $N_m$  непрерывны в  $V$  и все их производные существуют, то на основе (3.36) можно получить аппроксимации производных функций  $f$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \cong \frac{\partial \hat{f}}{\partial x_i} = \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \sum_{m=1}^M \alpha_m \frac{\partial N_m}{\partial x_i}; \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \cong \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{m=1}^M \alpha_m \frac{\partial^2 N_m}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Поскольку представление функции  $f$  в виде (3.36) удовлетворяет краевым условиям на  $\Gamma$ , для получения аппроксимации  $f$  вычислим невязку  $R_v$  уравнения (3.32)

$$R_v = A(\hat{f}) = D\hat{f} + P = D\psi + \sum_{m=1}^M \alpha_m DN_m + P. \quad (3.39)$$

Выбирая по аналогии с предыдущим разделом систему весовых функций  $\{W_n; n=1, 2, \dots\}$  потребуем выполнения условия  $R_v=0$  в  $V$  в виде

$$\int_V W_n R_v dV = \int_V \left[ W_n \left( D\psi + \left( \sum_{m=1}^M \alpha_m DN_m \right) + P \right) \right] dV = 0 \quad \text{для } n = 1, 2, \dots, M. \quad (3.40)$$

Поскольку  $W_n, \psi, N_m$  и  $P$  являются заданными функциями координат, систему уравнений (3.40) можно привести к системе алгебраических уравнений

$$[K]\{\phi\} = \{R\};$$

$$K_{nm} = \int_V W_n DN_m dV; \quad (3.41)$$

$$\{\phi\}^T = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_M);$$

$$R_n = - \int_V W_n P dV - \int_V W_n D\psi dV.$$

Если каждая из функций  $W_n$  и  $N_m$  определена на всем пространстве области  $V$ , то в общем случае матрица системы (3.41) оказывается заполненной.

Для получения конкретных значений элементов системы (3.41) необходимо выбрать соответствующие системы базисных  $N_m$  и весовых  $W_n$  функций, причем от того, насколько удачно выбраны эти функции, будет зависеть качество и общая эффективность численного решения.

### 3.6.4. Использование метода взвешенных невязок для решения уравнения теплопроводности

Рассмотрим пример решения задачи теплопроводности  $f = T(x)$  для отрезка  $0 \leq x \leq 1$

$$A(f) = \frac{d^2 T}{dx^2} - T = 0,$$

при краевых условиях

$$T=0 \text{ при } x=0 \text{ и } T=1 \text{ при } x=1,$$

или

$$Df = \frac{d^2 T}{dx^2} - T = 0; \quad P = 0;$$

$$Gf = T, \quad p = 0 \text{ при } x=0 \text{ и } p = -1 \text{ при } x=1.$$

В качестве функции  $\psi$  можно выбрать функцию  $\psi = x$ , удовлетворяющую краевым условиям при  $x = 0$  и  $x = 1$ .

В качестве базисных функций выберем систему  $\{N_m = \sin m\pi x; \quad m = 1, 2, \dots\}$ , удовлетворяющую условиям  $N_m = 0$  при  $x = 0$  и  $x = 1$  для всех  $m$ .

$$\text{Тогда предложенная выше комбинация } \hat{T} = x + \sum_{m=1}^M \alpha_m \sin m\pi x$$

будет удовлетворять заданным краевым условиям и может быть использована для аппроксимации искомой функции.

Рассмотрим два варианта выбора весовых функций  $W_n$  при  $M=2$ :

- поточечную коллокацию при  $x_1=1/3$  и  $x_2=2/3$ ;
- метод Галеркина  $W_n = \sin n\pi x$ ;

Метод поточечной коллокации.

$$K_{nm} = \int_0^1 W_n D N_m dx = \int_0^1 \delta(x - x_n) \left[ \frac{d^2}{dx^2} (\sin m\pi x) - \sin m\pi x \right] dx = -(1 + m^2 \pi^2) \sin m\pi x_n$$

$$R_n = - \int_0^1 W_n D \psi dx = - \int_0^1 \delta(x - x_n) \left[ \frac{d^2 x}{dx^2} - x \right] dx = x_n;$$

$$\underline{n=1} \quad m=1 \quad K_{11} = -(1 + \pi^2) \sin \pi / 3;$$

$$m=2 \quad K_{12} = -(1 + 4\pi^2) \sin 2\pi / 3;$$

$$R_1 = 1/3;$$

$$\underline{n=2} \quad m=1 \quad K_{21} = -(1 + \pi^2) \sin 2\pi / 3 ;$$

$$m=2 \quad K_{22} = -(1 + 4\pi^2) \sin 4\pi / 3 .$$

В результате решения полученной системы могут быть найдены параметры  $a_m$

$$a_1 = -0.05312; \quad a_2 = 0.004754.$$

Подставляя полученные значения параметров в приближенное представление функции  $T$  можно вычислить значения температуры в узлах  $x=1/3$  и  $x=2/3$ :  $T_1 = 0,2914$  и  $T_2 = 0,6165$ .

Метод Галеркина.

$$K_{nm} = \int_0^1 W_n DN_m dx = \int_0^1 \sin n\pi x \left[ \frac{d^2}{dx^2} (\sin m\pi x) - \sin m\pi x \right] dx$$

$$= -\int_0^1 (1 + m^2 \pi^2) \sin n\pi x \sin m\pi x dx =$$

$$= -(1 + m^2 \pi^2) \int_0^1 \sin^2 m\pi x dx = -1/2(1 + m^2 \pi^2) \quad \text{для } n = m;$$

$$K_{nm} = 0 \quad \text{для } n \neq m;$$

$$R_n = -\int_0^1 \sin n\pi x \left[ \frac{d^2}{dx^2} (x) - x \right] dx = \int_0^1 \sin n\pi x \cdot x dx = -\frac{x}{n\pi} \cos n\pi x \Big|_0^1$$

$$= -\int_0^1 \frac{\cos n\pi x}{n\pi} dx = -\frac{\cos n\pi}{n\pi};$$

$$n=1 \quad m=1 \quad K_{11} = -\frac{1 + \pi^2}{2}; \quad m=2 \quad K_{12} = 0;$$

$$R_1 = 1/\pi;$$

$$n=2 \quad m=1 \quad K_{21} = 0; \quad m=2 \quad K_{22} = -\frac{1 + 4\pi^2}{2}$$

$$R_2 = -1/2\pi.$$

Из решения полученной системы можно получить

$$a_1 = -0,05857; \quad a_2 = 0,007864$$

Значения температуры при этом в узлах  $x_1 = 1/3$  и  $x_2 = 2/3$  получаются равными

$$T_1 = 0,2894; \quad T_2 = 0,6091.$$

Для сравнения в таблице 2.1 приведены результаты решения этой задачи, полученные на основе поточечной коллокации, метода Галеркина, метода конечных разностей и точного решения для двух точек отрезка  $x = 1/3$  и  $x = 2/3$ .

Таблица 3.1 Значения температур для  $x = 1/3$  и  $x = 2/3$  на основе точного решения (ТР), методов коллокации (МК), Галеркина (МГ) и конечных разностей (МКР)

$X$	МК	МГ	МКР	ТР
1/3	0,2914	0,2894	0,2893	0,2889
2/3	0,6165	0,6091	0,6107	0,6102

Метод наименьших квадратов

$$I(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_M) = \int_V R_v^2 = \int_V \left\{ D\psi + \sum_{m=1}^M a_m DN_m + P \right\}^2 dV$$

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha_n} = \int_V R_v \frac{\partial R_v}{\partial \alpha_n} dV = \int_V R_v \cdot DN_n = 0;$$

Таким образом, в методе наименьших квадратов  $W_n = DN_n$  – отличается от метода Галеркина, в котором  $W_n = N_n$ .

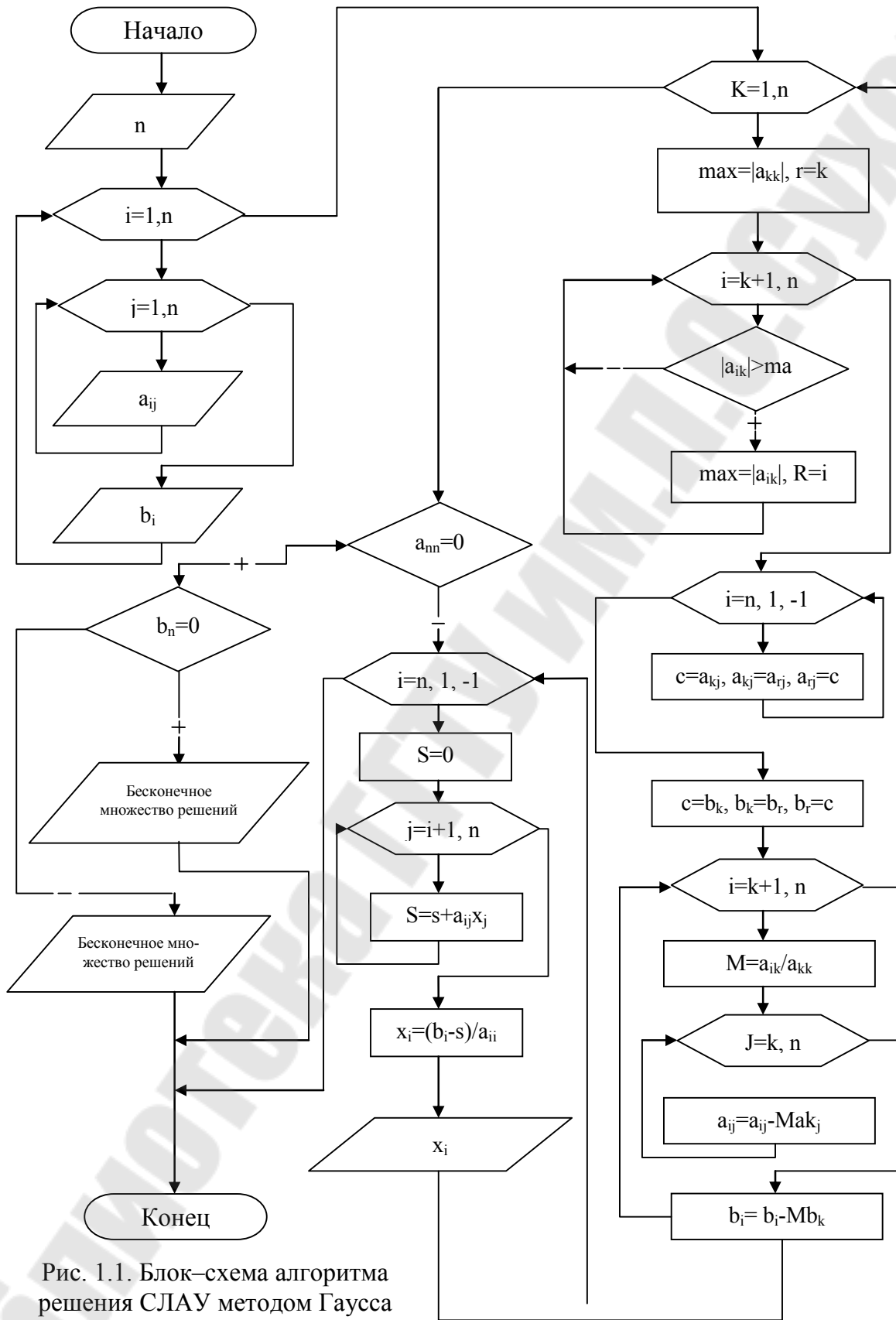


Рис. 1.1. Блок-схема алгоритма решения СЛАУ методом Гаусса

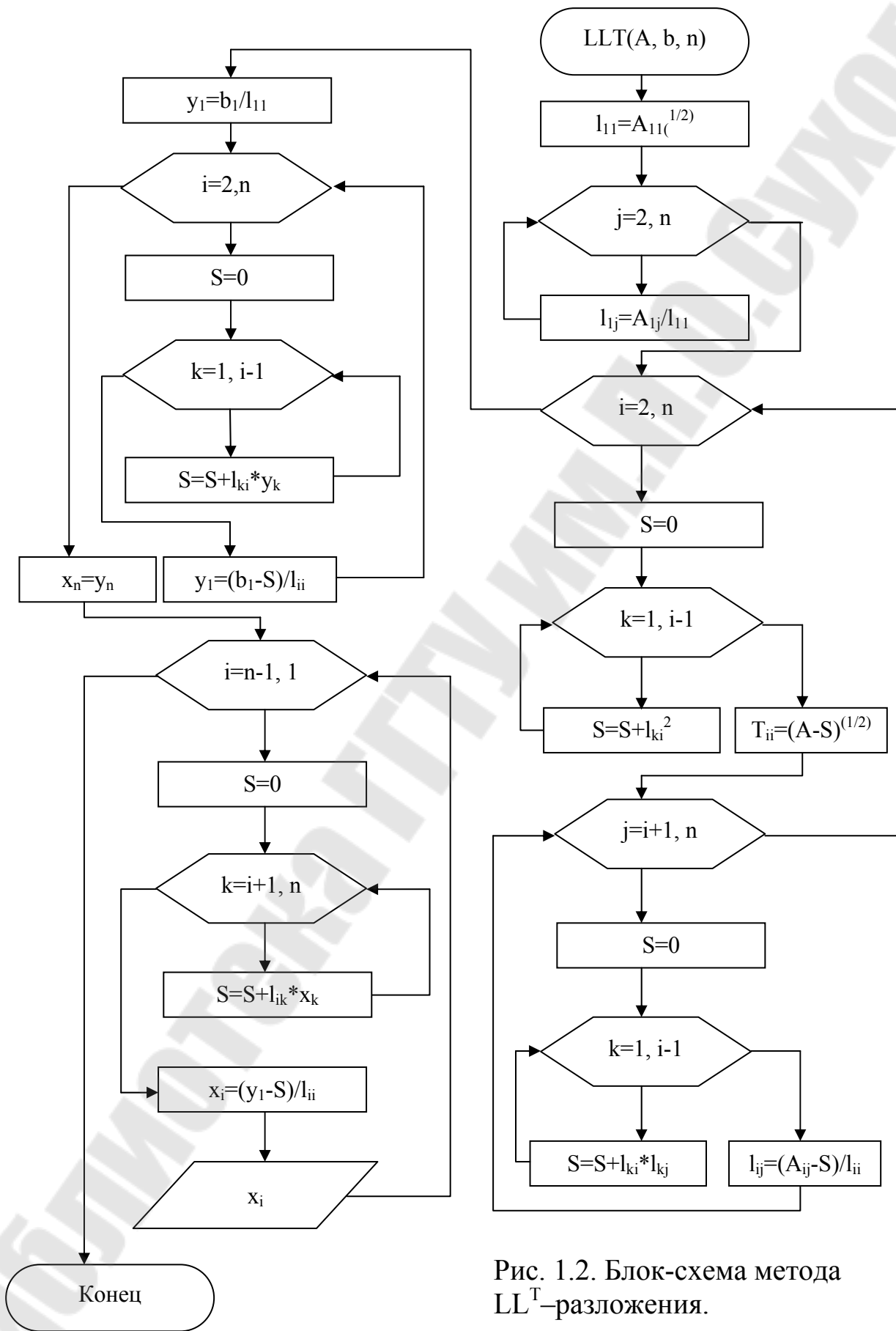


Рис. 1.2. Блок-схема метода  $LL^T$ -разложения.

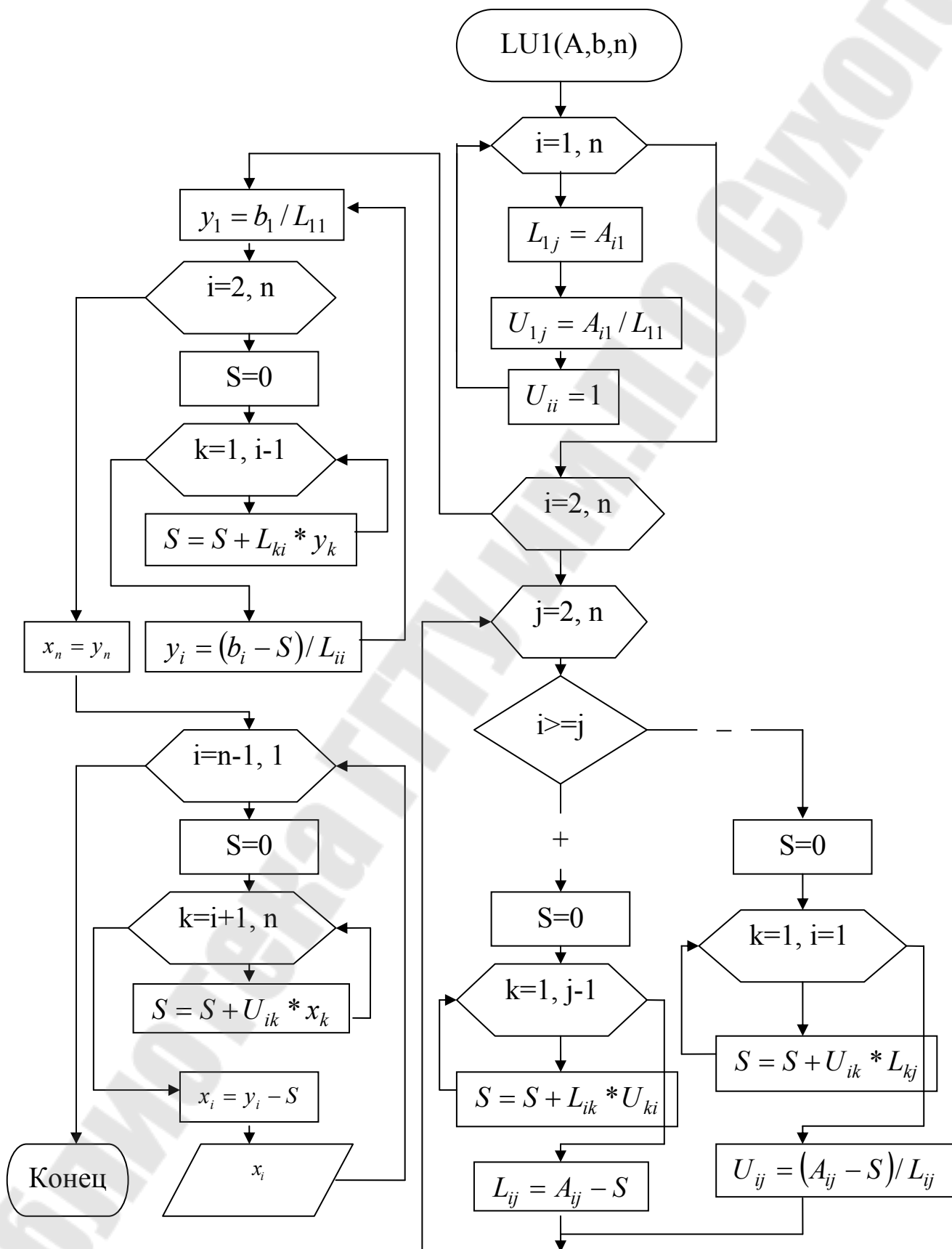


Рис. 1.3. Алгоритм метода LU.

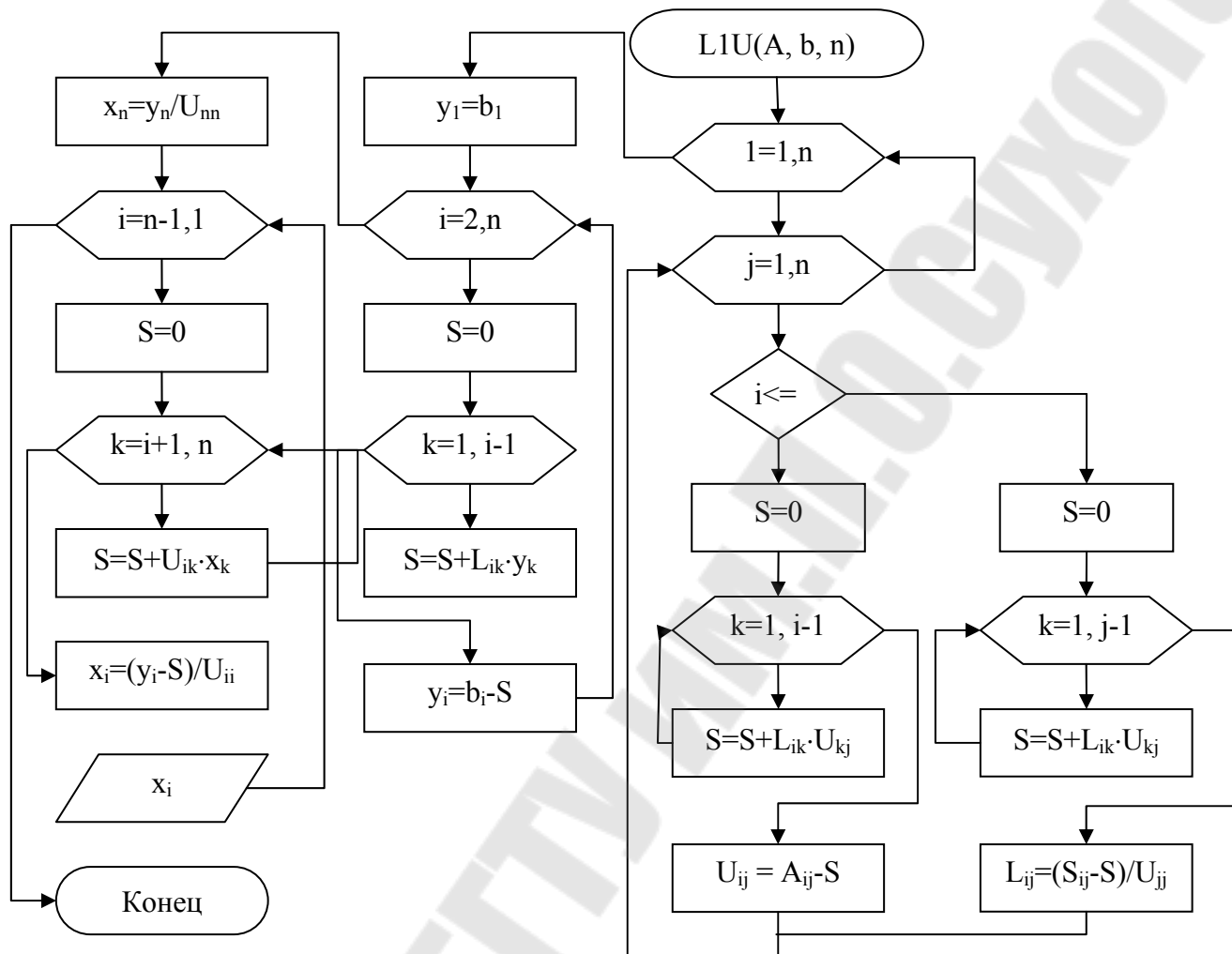


Рис. 1.4. Алгоритм метода  $LU$ -разложения



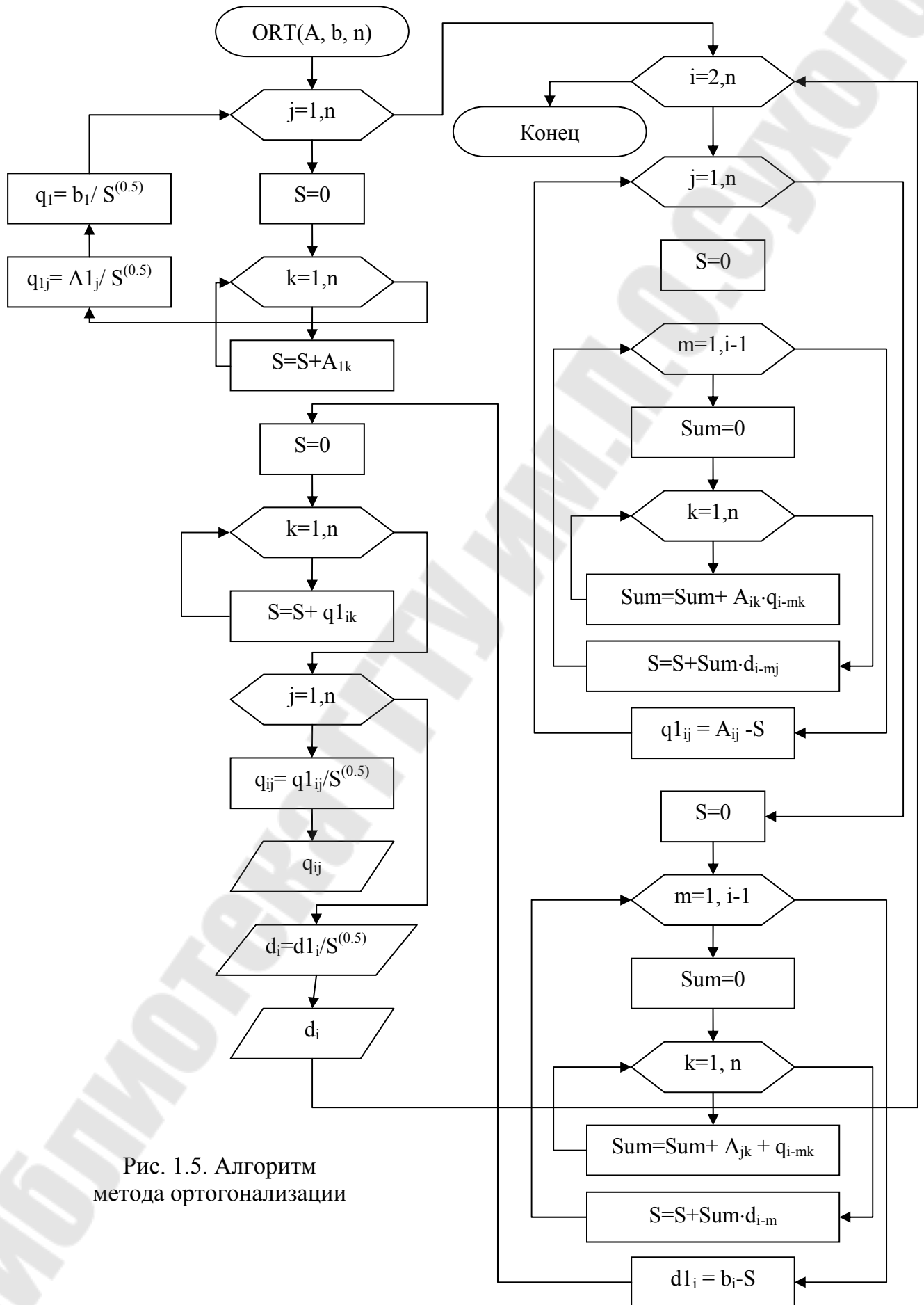


Рис. 1.5. Алгоритм метода ортогонализации

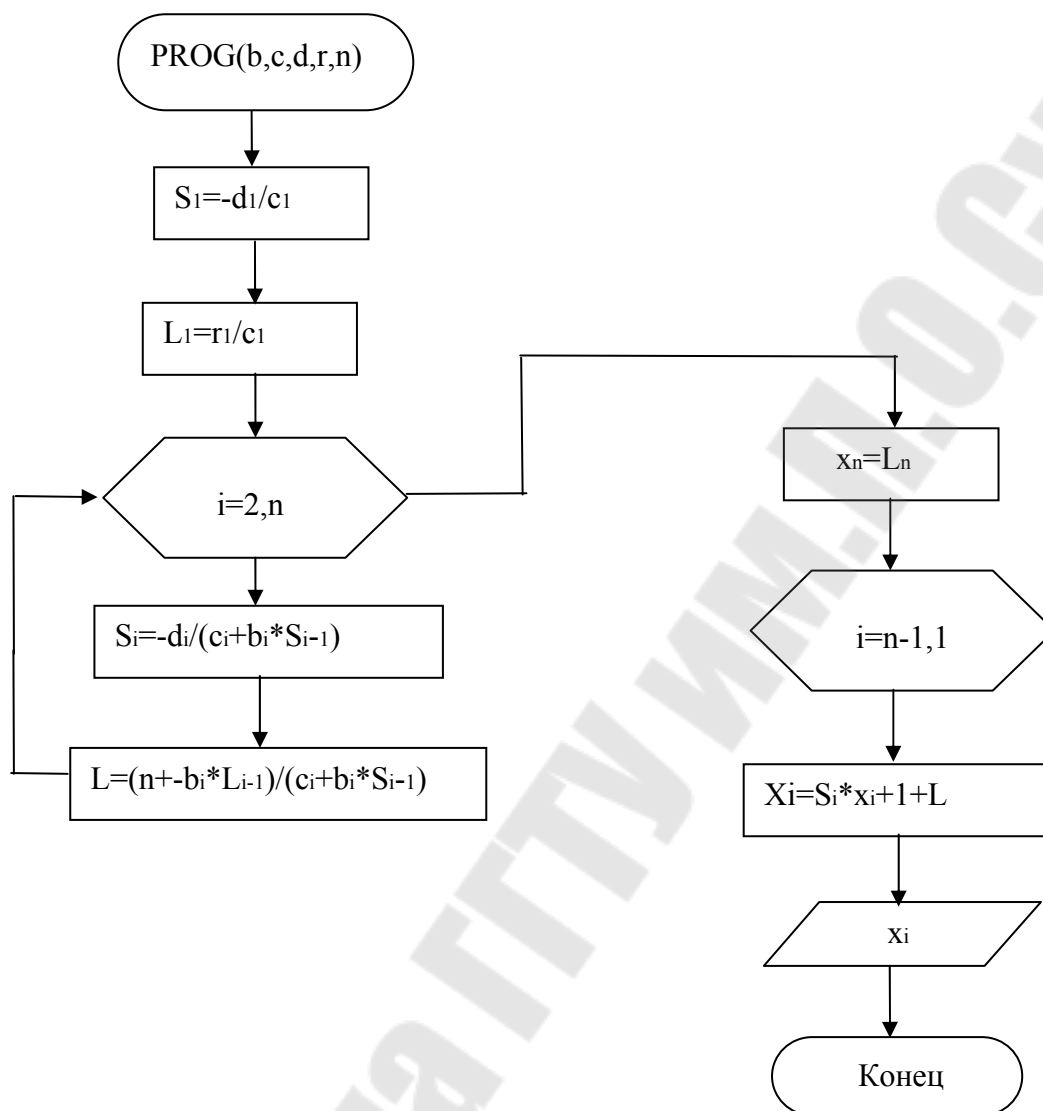


Рис. 1.6. Алгоритм метода прогонки

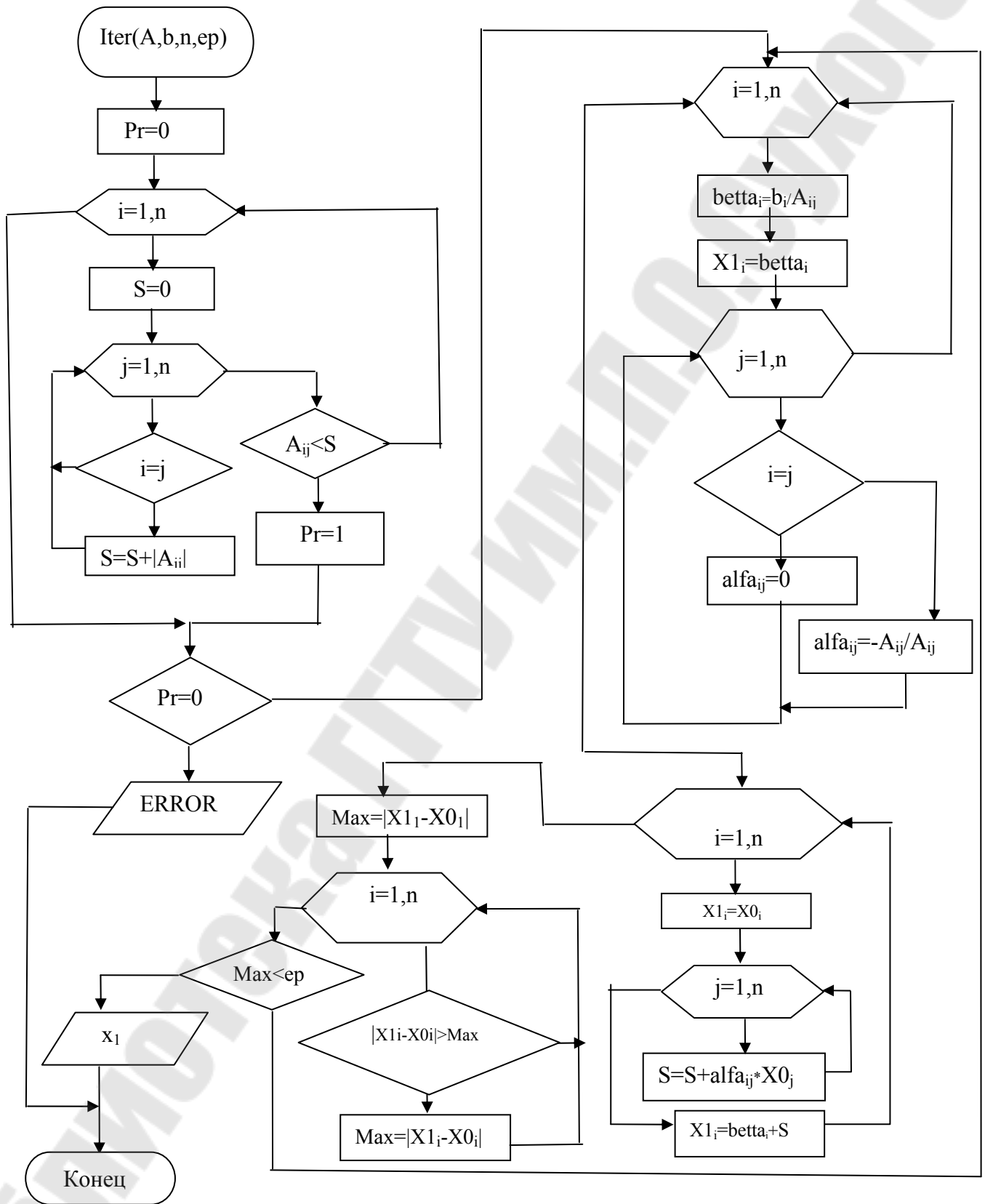


Рис. 1.7 Алгоритм метода простой итерации

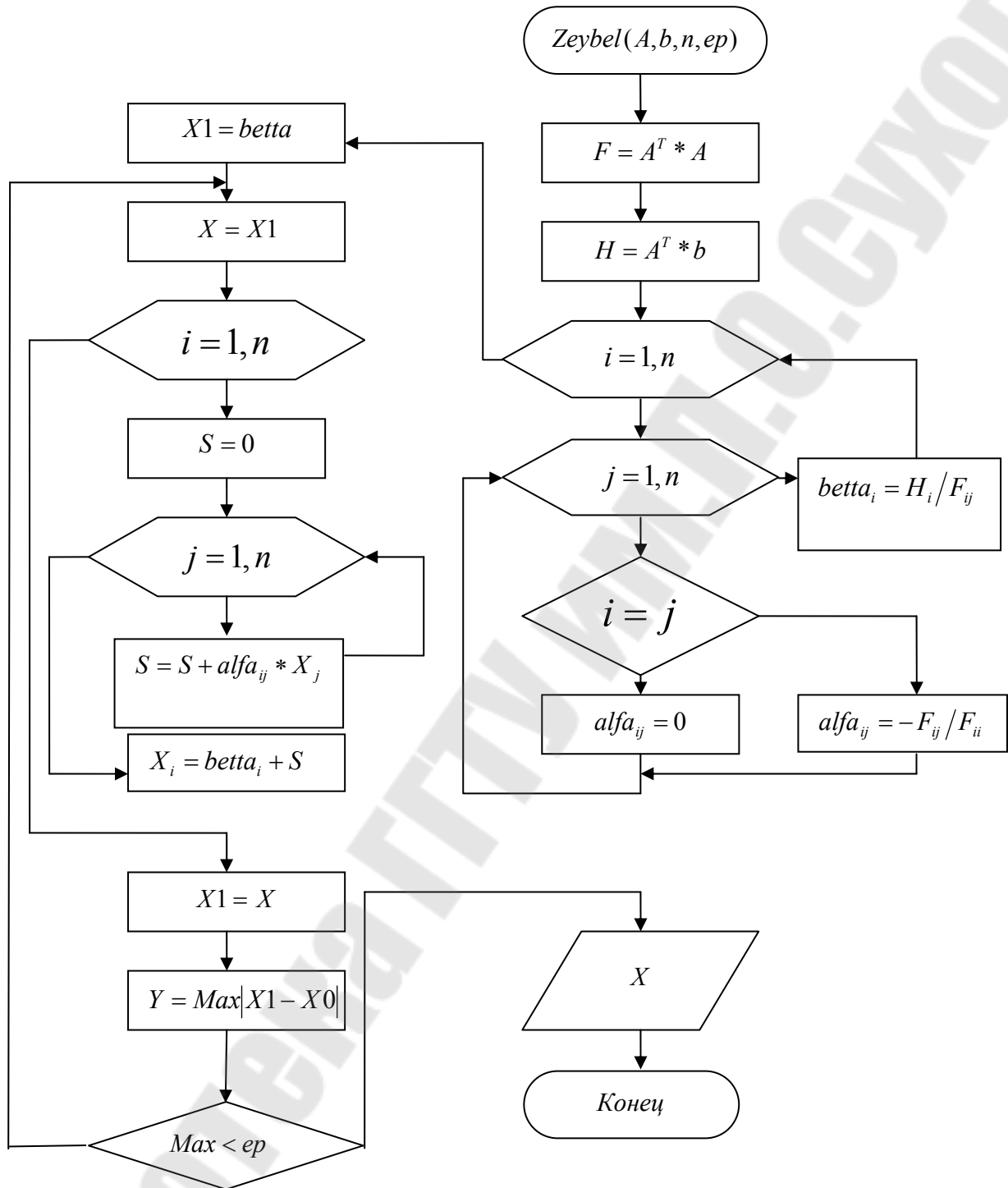


Рис.1.8. Алгоритм метода Зейделя

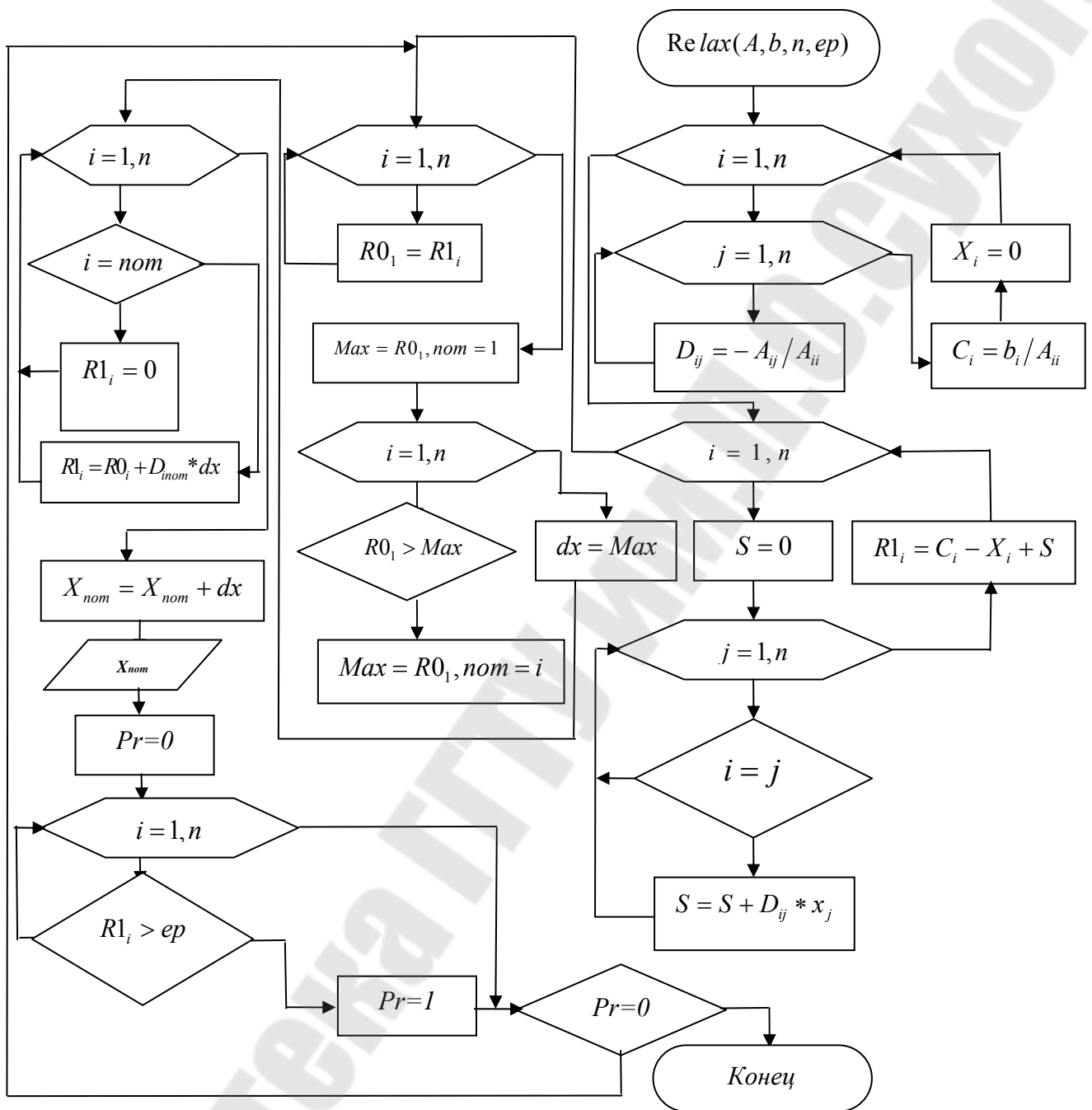


Рис.1.9. Алгоритм метода релаксации

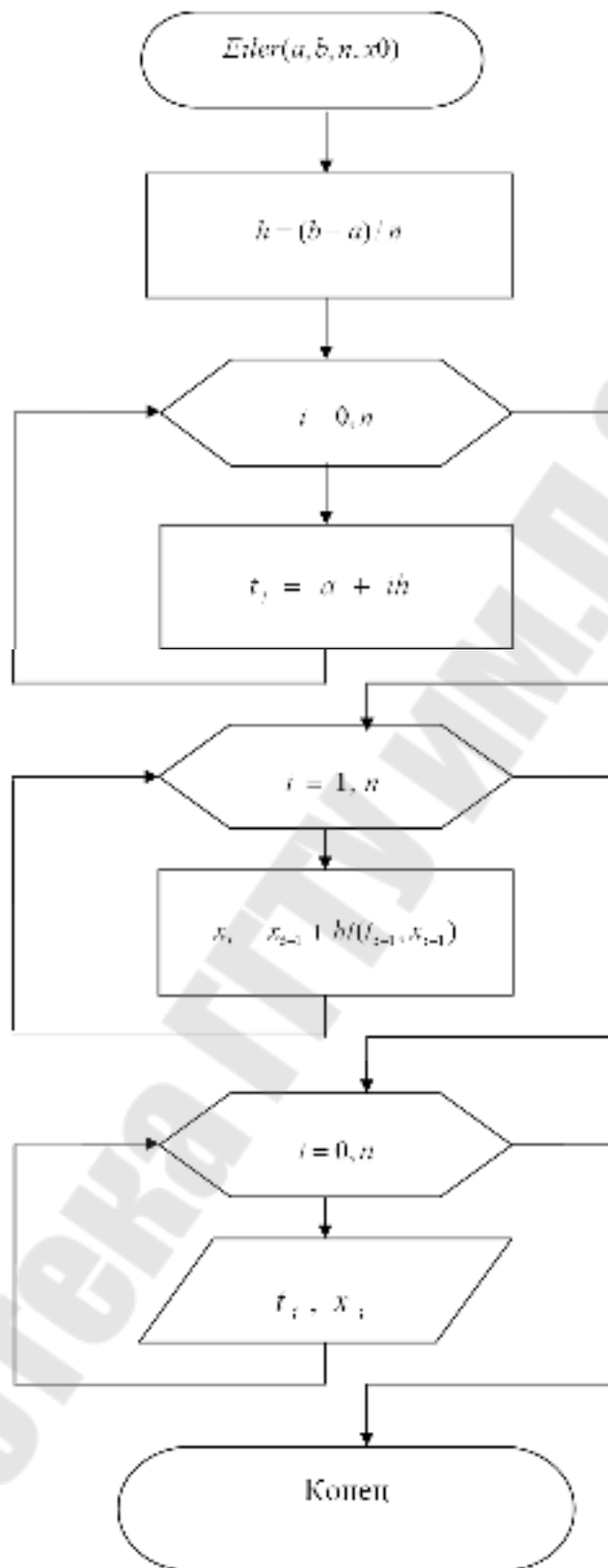


Рис. 2.3 Блок-схема метода Эйлера

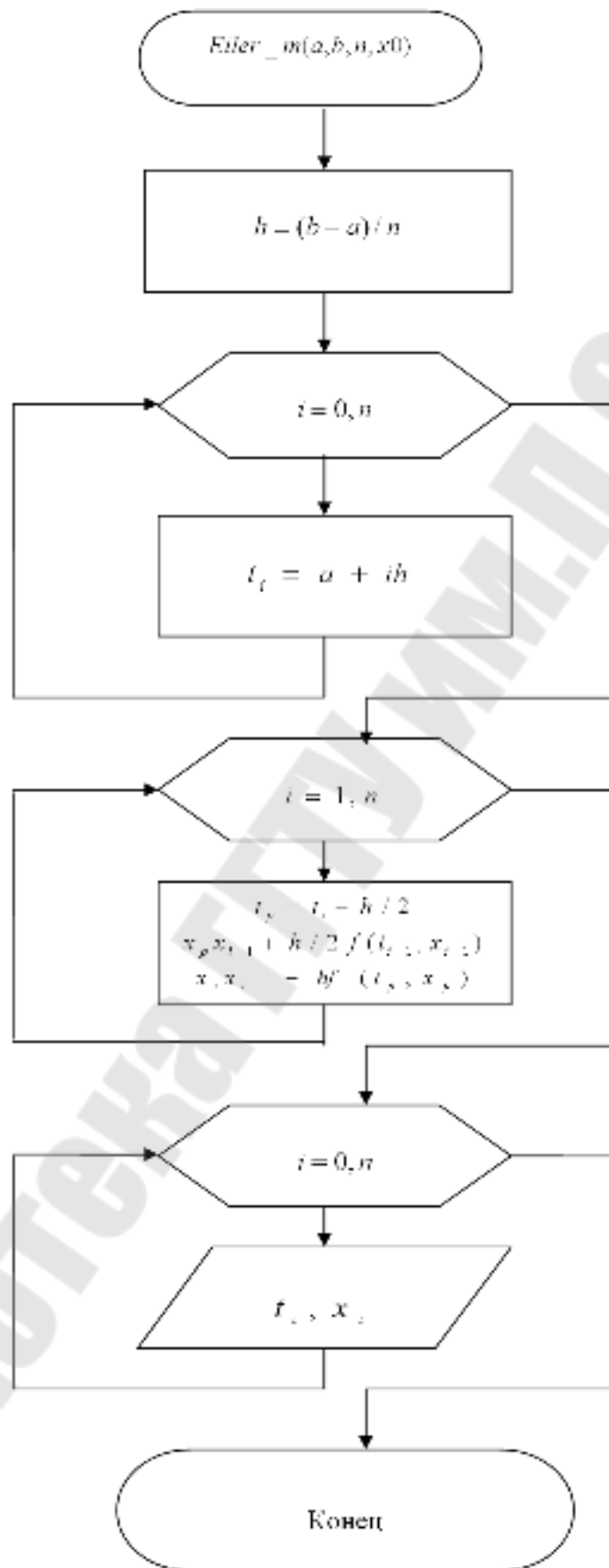


Рис. 2.4 Блок-схема модифицированного метода Эйлера

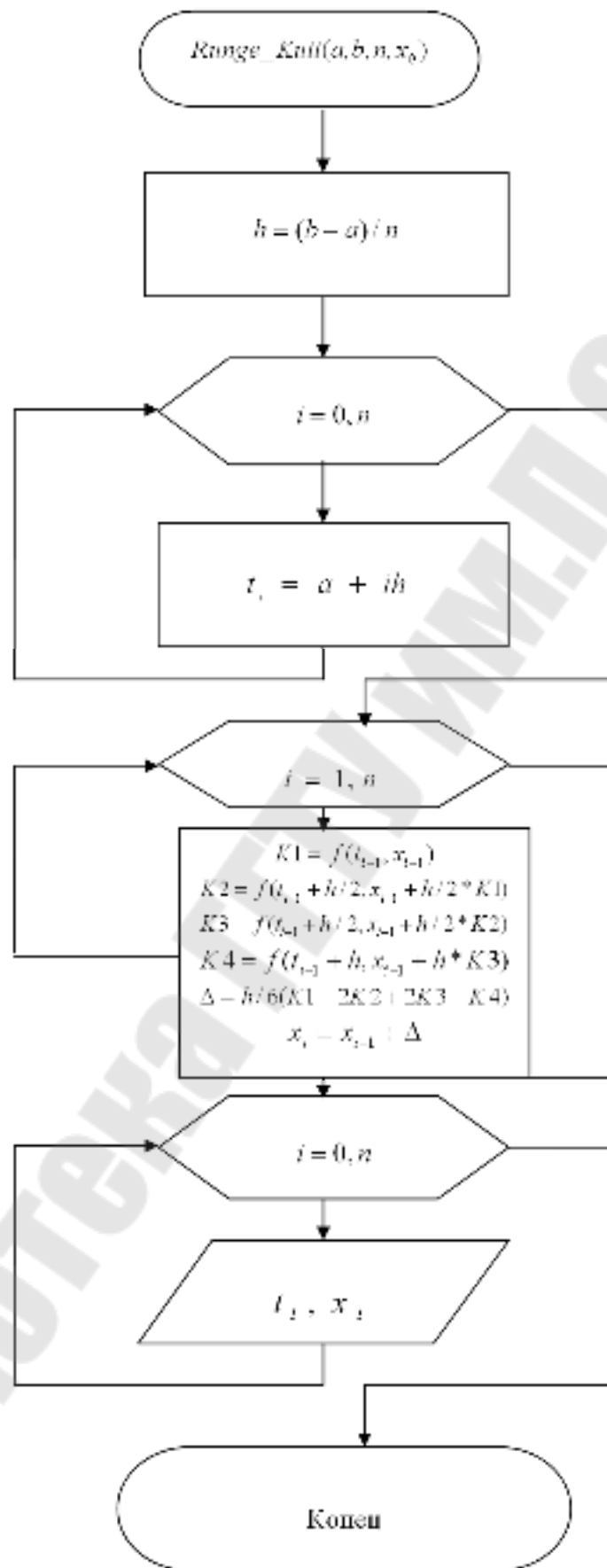


Рис. 2.5 Блок-схема решения задачи Коши методом Рунге-Кутты



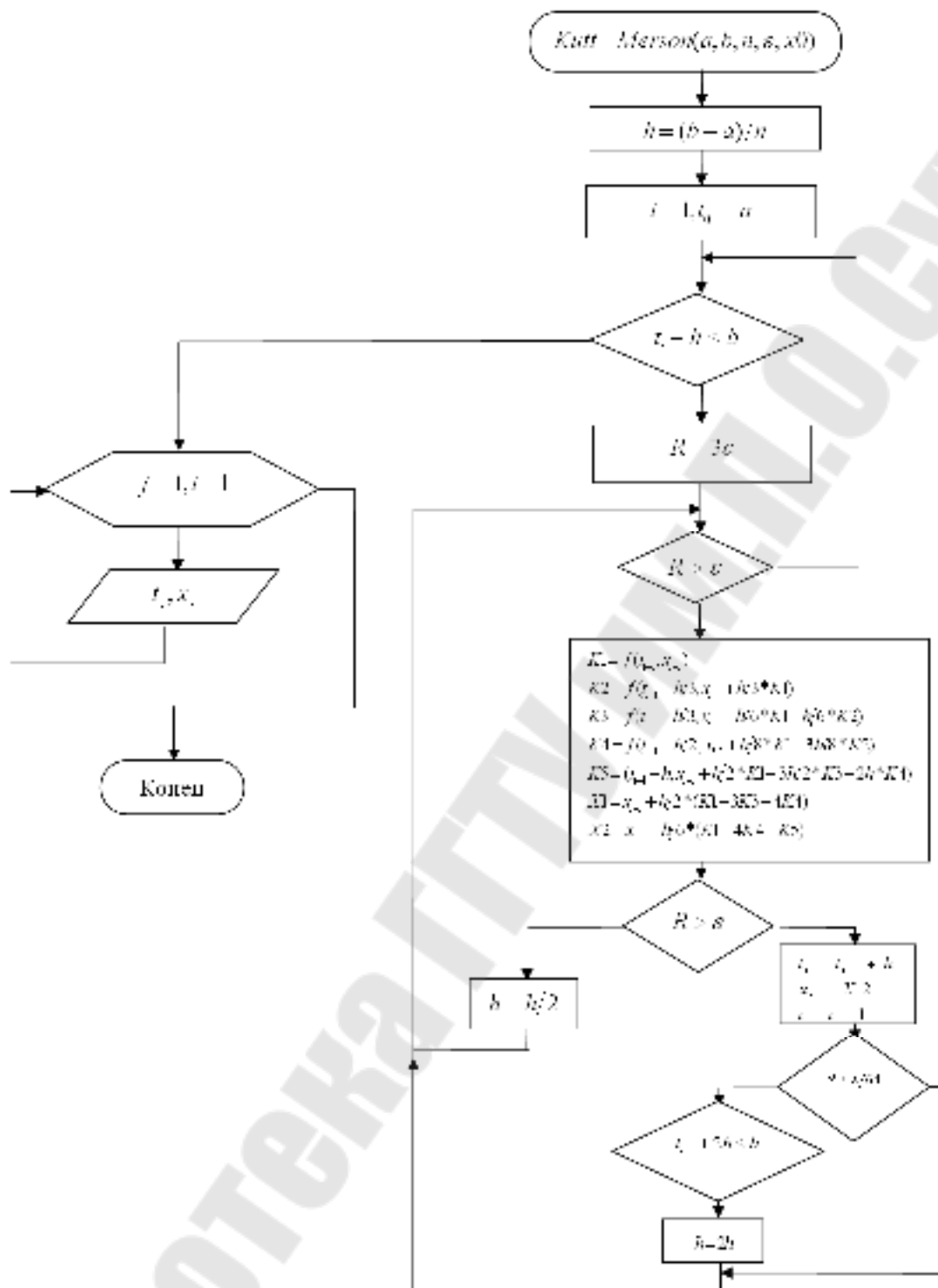


Рис. 2.6 Блок-схема решения задачи Коши методом Кутта-Мерсона

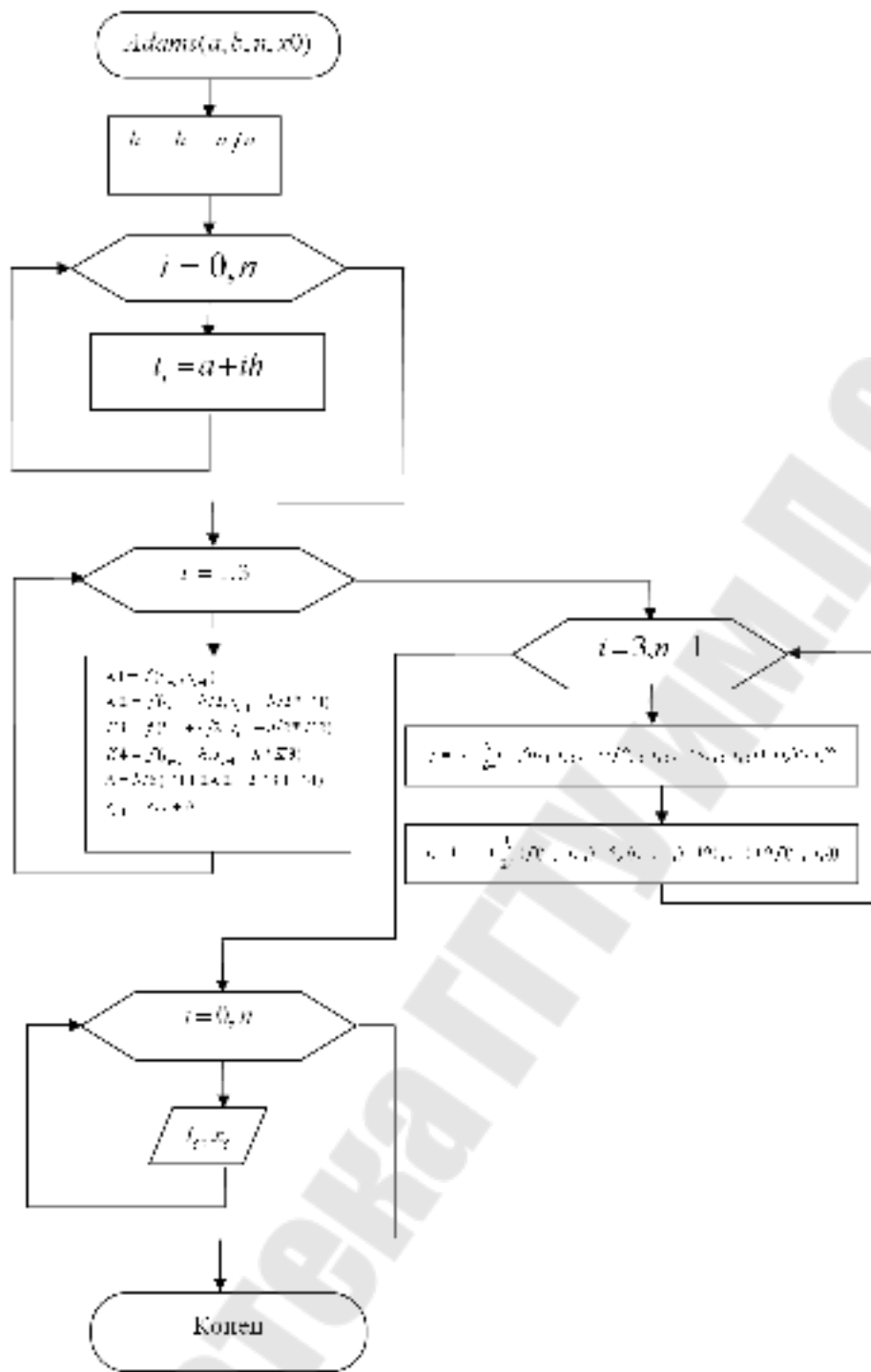


Рис. 2.7 Блок-схема решения задачи Коши методом Адамса

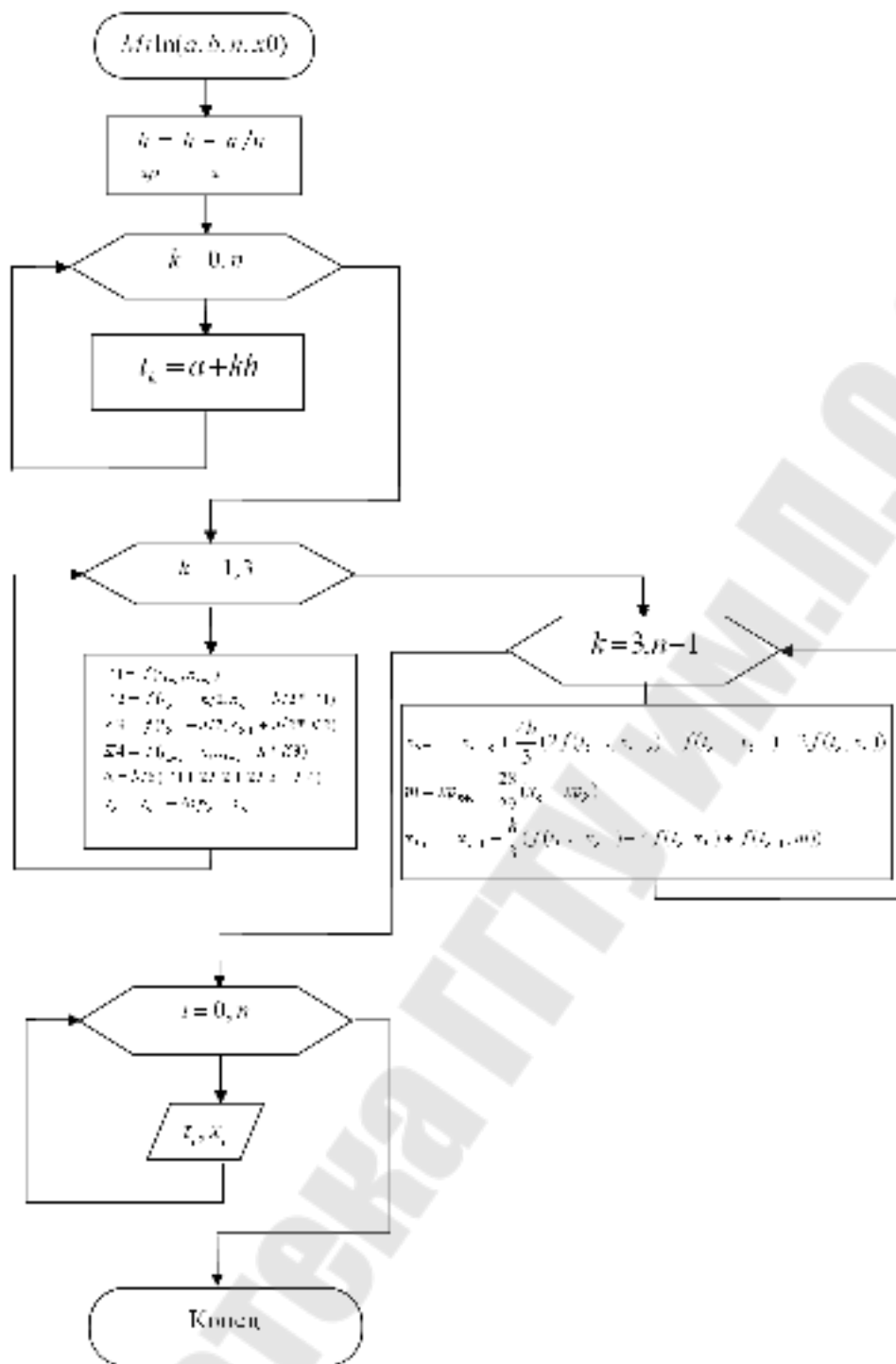


Рис. 2.8 Блок-схема решения задачи Коши модифицированным методом Милна

Вариант.-разностный метод

## ЛИТЕРАТУРА

1. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова В.З. Численные методы анализа. – М.: Наука, 1967. – 368 с.
2. Вержбицкий В.М., Основы численных методов. – М.: Высшая школа, 2002. – 840 с.
3. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 688 с.
4. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. – 724 с.
5. Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В. Решение задач вычислительной математики в пакетах Mathcad 12, Matlab 7, Maple 9. – М.: ИТ Пресс, 2006. – 496 с. ил.
6. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. М.: Мир, 1986. 318 с.

**Комраков Владимир Викторович**

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ  
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

**Практикум  
по одноименному курсу для студентов  
специальности 1-40 01 02 «Информационные системы  
и технологии (по направлениям)»  
дневной и заочной форм обучения**

Подписано к размещению в электронную библиотеку  
ГГТУ им. П. О. Сухого в качестве электронного  
учебно-методического документа 24.04.13.

Рег. № 57Е.

<http://www.gstu.by>