Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Физика»

А. А. Панков

МЕХАНИКА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

КУРС ЛЕКЦИЙ
по курсу «Физика»
для студентов всех специальностей
дневной формы обучения

Гомель 2012

УДК 531/534+539.19(075.8)
ББК 22.2я73+22.3я73
П16

Рекомендовано научно-методическим советом
энергетического факультета ГГТУ им. П. О. Сухого
(*протокол № 10 от 26.06.2012 г.*)

Рецензент: зав. каф. «Высшая математика» ГГТУ им. П. О. Сухого
канд. физ.-мат. наук, доц. *А. А. Бабич*

Панков, А. А.

П16 Механика и молекулярная физика : курс лекций по курсу «Физика» для студентов всех специальностей днев. и заоч. форм обучения / А. А. Панков. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2012. – 145 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: http://alis.gstu.by/StartEK/. – Загл. с титул. экрана.

Курс лекций соответствует требованиям образовательных стандартов и типовых учебных планов по курсу «Физика».

Для студентов всех специальностей дневной формы обучения.

УДК 531/534+539.19(075.8)
ББК 22.2я73+22.3я73

ПРЕДИСЛОВИЕ

Курс лекций составлен на основе многолетнего опыта чтения лекций по курсу физики автором в ГГТУ имени П. О. Сухого для студентов дневной и заочной форм обучения машиностроительных специальностей и написан в соответствии с требованиями Образовательных стандартов и типовых учебных планов специальностей. Данный курс лекций не заменяет учебника по физике, а является дополнением к нему и предназначен для систематизации знаний, полученных во время лекционных и лабораторно-практических занятий, а также служит пособием для успешной сдачи экзаменов. В нем сжато и лаконично рассмотрены основные определения физических понятий и величин, сформулированы физические законы и закономерности, прослежена логическая связь между рассматриваемыми явлениями и понятиями. После рассмотрения теоретического материала каждая глава заканчивается набором качественных вопросов и задач. Такая структура пособия позволит использовать его при проведении практических, семинарских и лабораторных занятий, а также для самостоятельной работы студентов в течение всего семестра и, особенно, при подготовке к экзаменам. Математические знания, необходимые для работы с пособием, соответствуют уровню обычного курса высшей математики технических университетов.

Автор рассчитывает на то, что и преподаватели кафедры найдут в курсе лекций много полезного для своей работы, выделяя те разделы, которые являются существенными для конкретной специальности, или, напротив, опуская менее значимый материал, который может быть рекомендован студентам для дополнительного изучения.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность Беляевой Р.В. за помощь в подготовке и оформлении текстового и графического материала пособия.

ВВЕДЕНИЕ

Физика есть наука, изучающая простейшие и вместе с тем наиболее общие закономерности явлений природы, свойства и строение материи и законы ее движения.

В настоящее время известны два вида неживой материи: вещество и поле. К первому виду материи – веществу – относятся, например, атомы, молекулы и все состоящие из них тела. Второй вид материи образуют электромагнитные, гравитационные и другие поля. Различные виды материи могут превращаться друг в друга. Так, например, электрон и позитрон (представляющие собой вещество) могут превращаться в фотоны (т.е. в электромагнитное поле). Возможен и обратный процесс.

Материя находится в непрерывном *движении*, под которым понимается всякое изменение вообще. Движение представляет собой неотъемлемое свойство материи, которое несотворимо и неуничтожимо, как и сама материя. Материя существует и движется в пространстве и во времени, которые являются формами бытия материи.

Физические законы устанавливаются на основе обобщения опытных фактов и выражают объективные закономерности, существующие в природе. Эти законы обычно формируются в виде количественных соотношений между различными физическими величинами.

Основным методом исследования в физике является *опыт*, т. е. наблюдение исследуемого явления в точно контролируемых условиях, позволяющих следить за ходом явления и воссоздать его каждый раз при повторении этих условий.

Для объяснения экспериментальных данных привлекаются гипотезы. *Гипотеза* – это научное предположение, выдвигаемое для объяснения какого-либо факта или явления и требующее проверки и доказательства для того, чтобы стать научной теорией или законом. Правильность высказанной гипотезы проверяется посредством постановки соответствующих опытов, путем выяснения согласия следствий, вытекающих из гипотезы, с результатами опытов и наблюдений. Успешно прошедшая такую проверку и доказательства гипотеза превращается в *научную теорию* или закон.

Физическая теория – представляет собой систему основных идей, обобщающих опытные данные и отражающих объективные закономерности природы. Физическая теория дает объяснение целой области явлений природы с единой точки зрения.

Глава 1
Кинематика материальной точки и поступательного движения твердого тела

§ 1.1. Основные понятия

Механика есть раздел физики изучающий перемещение одного тела или группы тел относительно другого тела и причины его вызывающие. Классическая механика ограничивается рассмотрением макроскопических тел, движущихся со скоростями V, значительно меньшими скорости света c в вакууме, $V << c \approx 300\,000$ км/с. Исследование движения тел со скоростями, сравнимыми со скоростью света в вакууме, является предметом теории относительности. Нерелятивистская квантовая (или волновая) механика рассматривает механику электронов и ядер, движущихся с нерелятивистскими скоростями в вакууме, атомах, молекулах и кристаллах, а также взаимодействие этих частиц с электромагнитными волнами, например, со светом. Элементарные частицы с большими энергиями и релятивистскими скоростями изучаются в релятивистской квантовой механике и квантовой теории поля.

Классическая механика содержит три раздела: статику, или учение о силах, кинематику, или учение о формах движения, и динамику, или учение о влиянии сил на движение тел.

Классическая механика не рассматривает вопросы, связанные с внутренней структурой тел и природой их взаимодействия. Для решения задач, стоящих перед классической механикой, она ограничивается рассмотрением соответствующих *модельных тел*, таких как материальная точка, абсолютно твердое тело, упругое тело, несжимаемая невязкая жидкость, и т. п.

Материальная точка – тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь. Введение этого понятия облегчает решение практических задач (например, движущиеся вокруг Солнца планеты при расчетах можно принять за материальные точки).

Система материальных точек или тел – мысленно выделенная совокупность материальных точек или тел, которые взаимодействуют как друг с другом, так и с телами, не включенными в состав системы.

Абсолютно твердое тело – тело, расстояние между любыми точками которого с течением времени не меняется.

Важнейшими единицами механики являются *метр*, *килограмм* и *секунда*. Эти же единицы являются базисными единицами Международной системы единиц (СИ), которая используется в данном пособии. Другие физические величины, являющиеся производными от базисных, приведены в Приложении 1.

Время – под временем t понимается свойство материальных процессов иметь определенную длительность, следовать друг за другом в определенной последовательности.

Начало отсчета – реальное физическое тело или условное абсолютно твердое тело, относительно которого определяется положение изучаемых материальных точек или физических тел в пространстве и времени.

Системе отсчета – начало отсчета, связанная с ним система координат и часы, по отношению к которым определяется пространственное и временное положение других тел механической системы.

Траектория – линия, которую описывает материальная точка M при своем движении. В общем случае траектория представляет собой кривую линию.

Путь – расстояние между двумя заданными точками 1 и 2 траектории, отсчитанное вдоль нее.

Перемещение – вектор, проведенный из начальной точки 1 в заданную точку 2 траектории.

§ 1.2. Кинематика материальной точки

Скорость и ускорение при прямолинейном движении

Если материальная точка движется в одном измерении, то для кинематики достаточно задать скалярную, зависящую от времени координату $x=x(t)$.

Отношение пройденного материальной точкой пути Δx к промежутку времени Δt называется *средней скоростью материальной точки за время* Δt:

$$V_{\text{ср}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \qquad (1.1)$$

Мгновенная скорость материальной точки в момент времени t, $V(t)$, есть производная координаты x по времени t:

$$V(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx(t)}{dt} \equiv \dot{x}. \qquad (1.2)$$

(заметим, что производная по времени какой-либо функции обозначается точкой над этой функцией).

Ускорение это характеристика неравномерного движения, определяющая быстроту изменения скорости по модулю и направлению. *Ускорение материальной точки* $a(t)$ есть первая производная скорости по времени или вторая производная координаты по времени:

$$a(t) = \frac{dV(t)}{dt} = \dot{V} = \ddot{x}. \tag{1.3}$$

Элементы кинематики вращательного движения

Рассмотрим движение материальной точки по окружности. Положение точки M на окружности можно задать угловой координатой – углом α, который образует радиус – вектор ОМ с каким – либо неизменным направлением, например, с осью ОХ (рис. 1.1).
Производная угловой координаты α по времени

$$\boxed{\omega = \frac{d\alpha}{dt}} \tag{1.4}$$

называется угловой скоростью. Вращение называется равномерным, если угловая скорость постоянна, ω=const. Величина $\nu = \dfrac{\omega}{2\pi}$ называется *частотой обращения*. Величина T =1/ν называется *периодом вращения.*

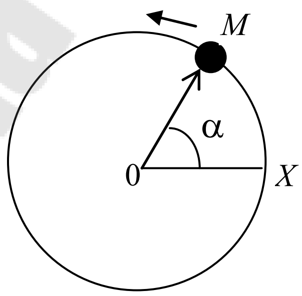


Рис. 1.1

Первая производная угловой скорости ω *по времени* или вторая производная угловой координаты α по времени называется *угловым ускорением*:

$$\boxed{\varepsilon = \dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\alpha}{dt^2}}. \tag{1.5}$$

Если через S обозначить длину дуги окружности XM, то ее производные $V = dS/dt$ и $a = \dfrac{d^2S}{dt^2}$ дают линейную скорость и линейное ускорение при движении точки по окружности. Если r – радиус окружности, то $S = r\alpha$. Дифференцируя это соотношение по времени, находим

$$V = \omega r, \tag{1.6}$$

$$a = \dot{\omega} r. \tag{1.7}$$

Скорость и ускорение при криволинейном движении

Понятия скорости и ускорения естественным образом обобщаются на случай движения материальной точки по *криволинейной траектории*. Положение движущейся точки на траектории задается радиус-вектором $\boldsymbol{r}$, проведенным в эту точку из какой-либо неподвижной точки O, например, начала координат (рис. 1.2). Пусть в момент времени t материальная точка находится в положении M с радиус-вектором $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$. Спустя короткое время Δt, она переместится в положение M_1 с радиусом – вектором $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}(t + \Delta t)$. Радиус – вектор материальной точки получит приращение, определяемое геометрической разностью $\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}$. *Средней скоростью движения за время* Δt называется величина

$$\boldsymbol{V}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}. \tag{1.8}$$

Направление средней скорости $\boldsymbol{V}_{\text{ср}}$ *совпадает* с направлением вектора $\Delta\boldsymbol{r}$.

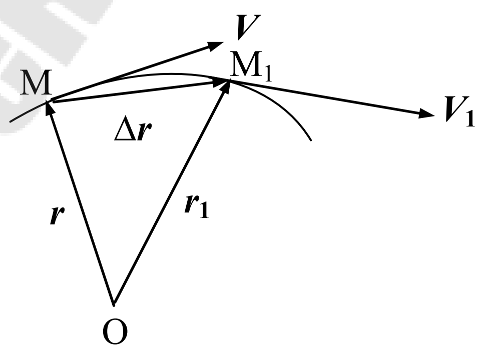


Рис. 1.2

Предел средней скорости при $\Delta t \to 0$, т. е. производная радиуса – вектора $\boldsymbol{r}$ по времени

$$\boldsymbol{V} = \dot{\boldsymbol{r}} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} \tag{1.9}$$

называется *истинной* или *мгновенной* скоростью материальной точки. Вектор $\boldsymbol{V}$ направлен *по касательной* к траектории движущейся точки.

Ускорением $\boldsymbol{a}$ называется вектор, равный первой производной вектора скорости $\boldsymbol{V}$ или второй производной радиуса – вектора $\boldsymbol{r}$ по времени:

$$\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{V}}(t) = \frac{d\boldsymbol{V}}{dt}\ , \tag{1.10}$$

$$\boldsymbol{a} = \ddot{\boldsymbol{r}}(t) = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}. \tag{1.11}$$

Отметим следующую формальную аналогию между скоростью и ускорением. Из произвольной неподвижной точки O_1 будем откладывать вектор скорости $\boldsymbol{V}$ движущейся точки во всевозможные моменты времени (рис. 1.3).

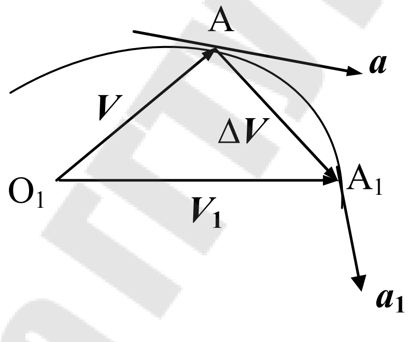


Рис. 1.3.

Конец вектора $\boldsymbol{V}$ называется *скоростной точкой*. Геометрическое место скоростных точек есть кривая, называемая *годографом скорости.* Когда материальная точка описывает траекторию, соответствующая ей скоростная точка движется по годографу.

Рис. 1.2 отличается от рис. 1.3 только обозначениями. Радиус – вектор $\boldsymbol{r}$ заменен на вектор скорости $\boldsymbol{V}$, материальная точка – на скоростную точку, траектория – на годограф. Математические операции над вектором $\boldsymbol{r}$ при нахождении скорости и над вектором $\boldsymbol{V}$ при нахождении ускорения совершенно тождественны.

Скорость $\boldsymbol{V}$ направлена по касательной траектории. Поэтому *ускорение* $\boldsymbol{a}$ *будет направлено по касательной к годографу скорости.* Можно сказать, что *ускорение есть скорость движения скоростной* *точки по годографу*. Следовательно, *все соотношения и теоремы, полученные для скорости, остаются справедливыми и для ускорения, если в них произвести замену величин и терменов согласно следующей таблице:*

Материальная точка	→	Скоростная точка
Радиус – вектор	→	Вектор скорости
Траектория	→	Годограф
Скорость	→	Ускорение

В качестве простейшего примера найдем ускорения точки, равномерно вращающейся по окружности радиуса $\boldsymbol{r}$ (Рис.1.4.а). Скорость $\boldsymbol{V}$ направлена по касательной к окружности, ее величина определяется выражением $V = \omega r = 2\pi r / T$. Годоргафом будет окружность радиуса V (Рис.1.4.б). Когда материальная точка M вращается по окружности радиуса r, соответствующая ей скоростная точка A вращается в том же направлении по окружности радиуса V, описывая эту окружность за то же время T. Положениям материальной точки на траектории M_1, M_2, M_3, M_4 соответствуют на годографе положения скоростной точки A_1, A_2, A_3, A_4 . Ускорение $\boldsymbol{a}$ направлено по касательной к окружности – годографу и притом к центру O траектории вращающейся точки M. По аналогии с формулой $V = \omega r = 2\pi r / T$, для величины ускорения можно написать

$$a = \omega V = \frac{2\pi V}{T} = \frac{V^2}{r} = \omega^2 r. \qquad (1.12)$$

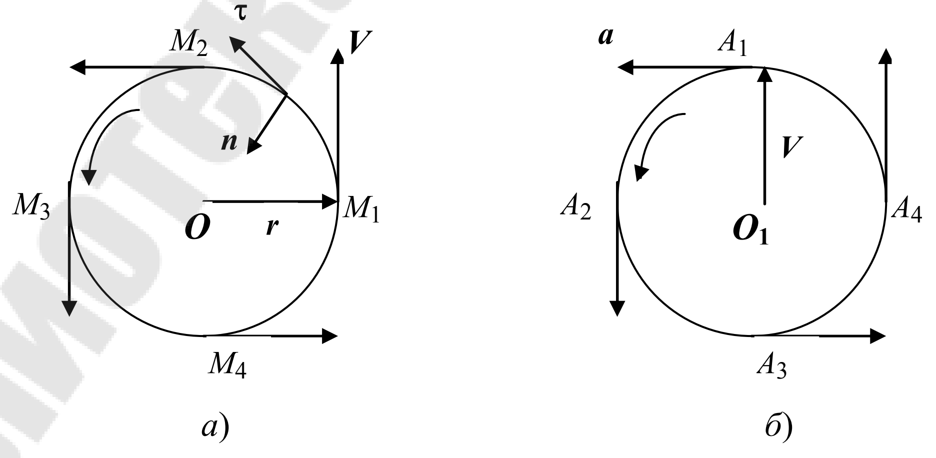


Рис. 1.4

(1.12) есть *центростремительное ускорение*. Ее можно записать в векторной форме

$$\boldsymbol{a} = -\omega^2 \boldsymbol{r}. \tag{1.13}$$

Знак минус указывает на то, что направления векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{r}$ взаимно противоположны, т.е. ускорение $\boldsymbol{a}$ направлено к центру круговой траектории, по которой вращается материальная точка. Можно также написать для любого положения движущейся точки

$$\boldsymbol{a} = \frac{V^2}{r}\boldsymbol{n}, \tag{1.14}$$

где $\boldsymbol{n}$ – единичный вектор нормали к круговой траектории движущейся точки, направленный к центру O (см. рис.1.4а).

Имея в виду дальнейшие обобщения, представим вектор скорости в виде $\boldsymbol{V} = V\boldsymbol{\tau}$, где $\boldsymbol{\tau}$ – единичный вектор касательной к окружности. Первый множитель V дает численную величину скорости, второй множитель $\boldsymbol{\tau}$ указывает ее направление. При равномерном вращении абсолютное значение скорости V остается неизменным, меняется только направление скорости, т. е. единичный вектор $\boldsymbol{\tau}$. Дифференцированию подлежит только этот вектор, а потому $\boldsymbol{a} = V\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}$. Сравнивая это выражение с (1.14), получим

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = \frac{V}{r}\boldsymbol{n}. \tag{1.15}$$

Формулу (1.15) можно использовать в случе произвольной гладкой кривой. Здесь необходимо ввести два новых понятия: величина $1/r$ и единичный вектор $\boldsymbol{n}$. Величина $1/r$ называется *кривизной кривой*, r – *радиусом кривизны*, а $\boldsymbol{n}$ – *единичным вектором главной нормали* к кривой. При этом кривизна $1/r$ считается существенно положительной. А потому единичный вектор $\boldsymbol{n}$ всегда направлен сторону вогнутости кривой.

Рассмотрим общий случай движения материальной точки по криволинейной траектории. Запишем вектор скорости в виде $\boldsymbol{V} = V\boldsymbol{\tau}$. Продифференцировав правую и левую часть по времени, получим

$$\boldsymbol{a} = \frac{d}{dt}(V\boldsymbol{\tau}) = \frac{dV}{dt}\boldsymbol{\tau} + V\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}, \tag{1.16}$$

или, с учетом формулы (1.15),

$$\boldsymbol{a} = \frac{dV}{dt}\boldsymbol{\tau} + \frac{V^2}{r}\boldsymbol{n}. \tag{1.17}$$

Ускорение $\boldsymbol{a}$ направлено под углом к траектории. Первое слагаемое в формуле (1.17)

$$\boxed{\boldsymbol{a}_\tau = \frac{dV}{dt}\boldsymbol{\tau}} \tag{1.18}$$

есть вектор, направленный по касательной к траектории. Этот вектор называется *касательным* или *тангенциальным ускорением*. Второе слагаемое

$$\boxed{\boldsymbol{a}_n = \frac{V^2}{r}\boldsymbol{n}} \tag{1.19}$$

есть вектор, направленный вдоль главной нормали в сторону вогнутости траектории. Он называется *нормальным ускорением*. Таким образом, в общем случае *ускорение* ***a*** *можно представить в виде геометрической суммы тангенциального и нормального ускорения:*

$$\boxed{\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_\tau + \boldsymbol{a}_n}. \tag{1.20}$$

Тангенциальное ускорение меняет скорость только по величине, нормальное ускорение меняет ее только по направлению.

Модуль полного ускорения точки

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\dot{V}^2 + \left(\frac{V^2}{r}\right)^2}. \tag{1.21}$$

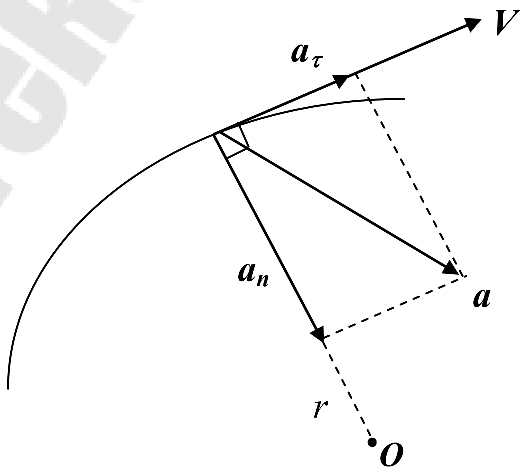


Рис. 1.5

Направления полного ускорения и его составляющих ($\boldsymbol{a}_\tau$, $\boldsymbol{a}_n$) для случая ускоренного движения приведены на рис. 1.5. При замедленном движении вектор $\boldsymbol{a}_\tau$ имеет противоположное направление.

Характеристика движения материальной точки в зависимости от тангенциальной и нормальной составляющих ускорения

a_τ	a_n	Движение
0	0	Прямолинейное равномерное
const	0	Прямолинейное равнопеременное
0	*const*	Равномерное по окружности
0	$\neq 0$	Равномерное криволинейное
const	$\neq 0$	Криволинейное равнопеременное

Табл. 1.1

Поступательное движение. Это такое движение тела, при котором любая прямая, связанная с телом, все время остается параллельной своему начальному положению. Например, вагон, движущийся по прямому участку пути; кабина колеса обозрения и др.

При поступательном движении все точки тела совершают за один и тот же промежуток времени равные перемещения. Поэтому скорости и ускорения всех точек тела в данный момент времени одинаковы. Таким образом, поступательное движение тела может быть полностью описано, если известны зависимость от времени радиуса - вектора $\boldsymbol{r}$ (t) любой точки этого тела и положение последнего в начальный момент.

Контрольные вопросы

1. Может ли криволинейное движение быть равномерным?
2. Чему равно скалярное произведение скорости и ускорения в случае равномерного движения по окружности?
3. Что характерно для скоростей и ускорений точек тела, движущегося поступательно?
4. В каких случаях модуль перемещения точки равен длине пути, пройденного точкой за тот же промежуток времени?

5. Как движется точка, если скорость этой точки все время ортогональна ее ускорению?

6. Какова траектория плоского движения точки, если ее радиальная скорость равна нулю?

Задачи

1. Можно ли утверждать, что точка движется без ускорения в случаях:

а) υ = const; б) $\boldsymbol{\upsilon}$ = const?

2. Является ли движение точки обязательно прямолинейным в случаях:

а) $\boldsymbol{\upsilon}$ = const; б) $\mathbf{a}$ = const?

3. Точка движется равномерно по окружности. Начало ее радиус-вектора $\boldsymbol{r}$ совпадает с центром окружности. Отличны ли от нуля выражения $d\boldsymbol{r}/dt$ и $d\boldsymbol{V}/dt$?

4. При каком движении материальной точки выполняются соотношения $a_\tau = 0$, $a_n = \text{const} \neq 0$: а) при равномерном движении по окружности; б) при равномерном движении по винтовой линии; в) при равномерном прямолинейном движении; г) при равнопеременном движении по окружности?

1) а, б, в; 2) а, б; 3) г; 4) а; 5) а, б, г.

5. Применима ли для вычисления тангенциального ускорения формула $a_\tau = \upsilon/t$ в случаях: а) $\upsilon = 2t + 6$; б) $\upsilon = 3t^2$; в) $\upsilon = 5t$ (υ – в м/с; t – в с)?

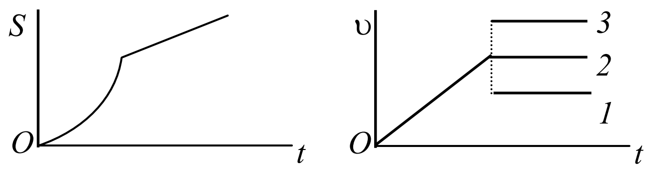
6. Математический маятник совершает гармонические колебания. Отличны ли от нуля в крайней точке траектории маятника:

а) нормальное ускорение; б) тангенциальное ускорение?

7. Тело бросили вертикально с некоторой высоты: а) вверх;

б) вниз. Начальные скорости в обоих случаях одинаковы. Сравнить скорости в момент падения тела на землю. Сопротивлением воздуха пренебречь.

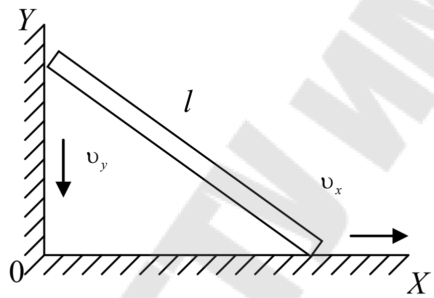
8. Какой график скорости соответствует графику пути на рисунке?



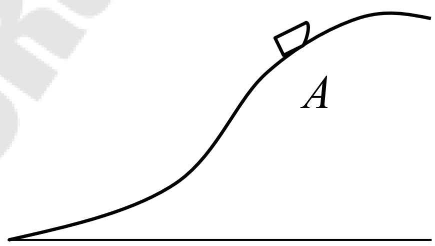
9. Применима ли для вычисления углового ускорения формула $\varepsilon = \omega/\mathrm{t}$ в случаях: а) $\omega = 2t + 8$; б) $\omega = 9t$; в) $\omega = 6$ (ω – в рад/с, t – в с)?

10. Движение тела с неподвижной осью задано уравнением $\varphi = 2\pi(6t - 3t^2)$ (φ – в рад, t – в с). Начало движения при $t = 0$. Сколько оборотов сделает тело до момента изменения направления вращения?

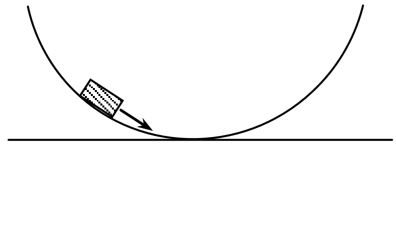
11. Стержень длиной l упирается верхним концом в стену, а нижним – в пол. Конец, упирающийся в стену, равномерно опускается вниз. Будет ли движение другого конца равномерным?



12. У подножия горы санкам сообщена некоторая скорость, в результате чего санки въезжают на гору и, достигнув точки A начинают скользить обратно. Как направлены нормальное и тангенциальное ускорения в точке A.



13. Тело скользит без трения по вогнутой поверхности. Как в наинизшей точке направлены нормальное и тангенциальное ускорения.



Глава 2
Динамика материальной точки

§ 2.1. Инерциальные системы отсчета. Закон инерции

Относительно разных систем отсчета движение имеет неодинаковый характер. Например, относительно вагона точка на ободе колеса движется по окружности, в то время как относительно Земли она движется по сложной кривой, называемой циклоидой.

Среди всевозможных систем отсчета существуют такие, относительно которых движение тел оказывается особенно простым. В частности тела, не подверженные воздействию других тел, движутся относительно таких систем без ускорения, т. е. прямолинейно и равномерно. Эти особенные системы отсчета называются *инерциальными.* Существование инерциальных систем установлено из опыта и представляет собой закон природы.

Инерциальных систем существует бесчисленное множество. Любая система отсчета, движущаяся относительно какой-либо инерциальной системы поступательно с постоянной скоростью, является также инерциальной.

Утверждение о существовании инерциальных систем отсчета Ньютон сформулировал в виде *закона инерции* или первого закона Ньютона:

всякое тело находится в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока воздействие со стороны других тел не заставит его изменить это состояние.

§ 2.2. Второй закон Ньютона

Для того чтобы сформулировать второй закон Ньютона, нужны понятия силы и массы.

Силой называется векторная величина, характеризующая воздействие на данное тело со стороны других тел.

Масса есть мера инертности тела. Под инертностью понимают неподатливость тела действию силы, т. е. свойство тела противиться изменению скорости под воздействием силы.

Импульс тела есть произведение массы тела на его скорость

$$\boxed{\mathbf{p} = m\mathbf{V}}. \qquad (2.1)$$

Второй закон Ньютона: скорость изменения импульса частицы равна действующей на частицу силе $\boldsymbol{F}$:

$$\boxed{\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F}.} \tag{2.2}$$

Соотношение (2.2) называется *уравнением движения частицы* или *основным уравнением динамики материальной точки*.

Подставляя в формулу (2.2) выражение для импульса (2.1), получим, что

$$\frac{d}{dt}(m\boldsymbol{V}) = \boldsymbol{F}.$$

Наконец, приняв во внимание, что для материальной точки $m = \text{const}$, а $\dot{\boldsymbol{V}} = \boldsymbol{a}$ – ускорению частицы, придем к соотношению

$$\boxed{m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}}. \tag{2.3}$$

Это вторая формулировка второго закона Ньютона: *произведение массы частицы на ее ускорение равно силе, действующей на частицу.*

Если на тело действуют несколько сил, то под $\boldsymbol{F}$ в формулах (2.2) и (2.3) подразумевается их результирующая (т. е. векторная сумма сил).

Надо иметь в виду, что законы Ньютона возникли в результате обобщения данных большого числа опытов и наблюдений и, следовательно, являются экспериментальными законами.

Спроектируем векторы, фигурирующие в формуле (2.3), на координатные оси x, y, z. В результате получим три скалярных уравнения:

$$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y, \quad m\ddot{z} = F_z, \tag{2.4}$$

которые эквивалентны векторному уравнению (2.3). Спроектировав векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{F}$ на произвольное направление, заданное осью, которую мы обозначим, скажем, буквой l, получим уравнение

$$ma_l = F_l. \tag{2.5}$$

Единицей силы является 1 Н = 1 кг · м/с^2.

§ 2.3. Третий закон Ньютона

Воздействие тел, друг на друга всегда носит характер взаимодействия. Если тело 2 действует на тело 1 с силой $\boldsymbol{F}_{12}$, то тело 1 действует на тело 2 с силой $\boldsymbol{F}_{21}$.

Третий закон Ньютона: *силы, с которыми взаимодействуют два тела, равны по модулю и противоположны по направлению,* т. е.

$$\boxed{\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21}}. \tag{2.6}$$

Таким образом, силы всегда возникают попарно.

Подчеркнем, что силы, фигурирующие в соотношении (2.6), приложены к разным телам; поэтому они не могут уравновесить друг друга.

§ 2.4. Силы

Наиболее фундаментальные силы, лежащие в основе всех механических явлений, – это *силы гравитационные и электрические*. Приведем выражения для этих сил в самом простом виде, когда взаимодействующие массы (заряды) покоятся или движутся с малой (нерелятивистской) скоростью.

Сила гравитационного притяжения, действующая между двумя материальными точками. В соответствии с *законом всемирного тяготения* эта сила пропорциональная произведению масс точек m_1 и m_2, обратно пропорциональна квадрату расстояния r между ними и направлена по прямой, соединяющей эти точки:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{2.7}$$

где G – гравитационная постоянная.

Кулоновская сила, действующая между двумя точечными зарядами q_1 и q_2

$$F = k\frac{|q_1 q_2|}{r^2}, \tag{2.8}$$

где r – расстояние между зарядами; k – коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора системы единиц. В системе СИ $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$,

где ε_0 – электрическая постоянная.

В отличие от гравитационной силы кулоновская сила может быть как силой притяжения, так и силой отталкивания.

Однородная сила тяжести

$$\boldsymbol{F} = m\,\boldsymbol{g}, \qquad (2.9)$$

где m – масса тела; $\boldsymbol{g}$ – ускорение свободного падения, g = 9.8 м/с^2.

Заметим, что в отличие от силы тяжести *вес* $\boldsymbol{P}$ – это сила, с которой тело действует на опору (или подвес), *неподвижную* относительно данного тела. Например, если тело с опорой (подвесом) неподвижны относительно Земли, то вес $\boldsymbol{P}$ совпадает с силой тяжести. В противном случае вес $\boldsymbol{P} = m(\boldsymbol{g} - \boldsymbol{a})$, где $\boldsymbol{a}$ – ускорение тела (с опорой) относительной Земли.

Упругая сила – сила, пропорциональная смещению материальной точки из положения равновесия и направленная к положению равновесия:

$$\boldsymbol{F} = -\,k\,\boldsymbol{r}, \qquad (2.10)$$

где $\boldsymbol{r}$ – радиус-вектор, характеризующий смещение частицы из положения равновесия; k – положительный коэффициент, зависящий от «упругих» свойств той или иной конкретной силы (коэффициент упругости).

Примером такой силы является сила упругой деформации при растяжении (сжатии) пружины или стержня; в соответствии с *законом Гука* эта сила определяется как

$$F = k\,\Delta l,$$

где Δl – величина упругой деформации или абсолютное удлинение тела.

Сила трения скольжения, возникающая при скольжении данного тела по поверхности другого тела,

$$F = \mu\,N, \qquad (2.11)$$

где μ – коэффициент трения скольжения, зависящий от природы и состояния соприкасающихся поверхностей (в частности, от их шероховатости); N – сила нормального давления, прижимающая трущиеся поверхности друг к другу.
Сила F направлена в сторону, противоположную направлению движения данного тела относительно другого.

Сила сопротивления, действующая на тело при его поступательном движении в газе или жидкости. Эта сила зависит от скорости $\boldsymbol{V}$ тела относительно среды, причем направлена противоположно вектору $\boldsymbol{V}$:

$$\boldsymbol{F} = -r\,\boldsymbol{V}, \qquad (2.12)$$

где r – положительный коэффициент, характерный для данного тела и данной среды (коэффициент сопротивления).

§ 2.5. Сохраняющиеся величины. Закон сохранения импульса

Совокупность тел, выделенных для рассмотрения, называется *механической системой*. Тела системы могут взаимодействовать как между собой, так и с телами, не входящими в систему.

Внутренними называют силы, с которыми тела системы действуют друг на друга, *внешними* – силы, обусловленные воздействием тел, не принадлежащих системе.

Система, в которой внешние силы отсутствуют, называется *замкнутой* или *изолированной*.

Для замкнутых систем остаются постоянными (сохраняются) три физические величины: энергия, импульс и момент импульса. Соответственно имеются три *закона сохранения*: закон сохранения энергии, закон сохранения импульса и закон сохранения момента импульса. Эти законы тесно связаны со свойствами времени и пространства.

Рассмотрим систему, состоящую из N частиц (материальных точек). Обозначим через $\boldsymbol{f}_{ik}$ внутреннюю силу, с которой k-я частица действует на i-ю (первый индекс указывает номер частицы, на которую действует сила, второй индекс – номер частицы, воздействием которой обусловлена эта сила). Символом $\boldsymbol{F}_i$ обозначим результирующую всех внешних сил, действующих на i-ю частицу. Напишем уравнения движения всех N частиц:

$$\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{p}}_1 = \boldsymbol{f}_{12} + \boldsymbol{f}_{13} + \ldots + \boldsymbol{f}_{1k} + \ldots + \boldsymbol{f}_{1N} + \boldsymbol{F}_1 \quad ,\\
&\dot{\boldsymbol{p}}_2 = \boldsymbol{f}_{21} + \boldsymbol{f}_{23} + \ldots + \boldsymbol{f}_{2k} + \ldots + \boldsymbol{f}_{2N} + \boldsymbol{F}_2 \quad ,\\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot\\
&\dot{\boldsymbol{p}}_i = \boldsymbol{f}_{i1} + \boldsymbol{f}_{i2} + \ldots + \boldsymbol{f}_{ik} + \ldots + \boldsymbol{f}_{iN} + \boldsymbol{F}_i \qquad (k \neq i) \quad ,\\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot\\
&\dot{\boldsymbol{p}}_N = \boldsymbol{f}_{N1} + \boldsymbol{f}_{N2} + \ldots + \boldsymbol{f}_{Nk} + \ldots + \boldsymbol{f}_{N,N-1} + \boldsymbol{F}_N \quad (k \neq N)
\end{aligned}$$

($\boldsymbol{p}_i$ – импульс i-й частицы).

Сложим вместе эти уравнения. Слева получится производная по времени от суммарного импульса системы:

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{P} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{p}_i .$$

Справа отличной от нуля будет только сумма внешних сил $\sum \boldsymbol{F}_i$. Действительно, сумму внутренних сил можно представить в виде комбинаций внутренних сил:

$$(\boldsymbol{f}_{12} + \boldsymbol{f}_{21}) + (\boldsymbol{f}_{13} + \boldsymbol{f}_{31}) + \ldots + (\boldsymbol{f}_{ik} + \boldsymbol{f}_{ki}) + \ldots + (\boldsymbol{f}_{N-1,N} + \boldsymbol{f}_{N,N-1}) .$$

Согласно третьему закону Ньютона каждая из скобок равна нулю. Следовательно, *сумма внутренних сил, действующих на тела системы, всегда равна нулю*:

$$\sum_{\substack{i,k=1\\(i\neq k)}}^{N}\boldsymbol{f}_{ik} = 0. \qquad (2.15)$$

С учетом (2.15) получим, что

$$\boxed{\frac{d}{dt}\boldsymbol{P} = \sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i}. \qquad (2.16)$$

Таким образом, *производная по времени от суммарного импульса системы равна сумме внешних сил, действующих на тела системы*.

Если система *замкнута*, то действием внешних сил в (2.16) можно пренебречь, и правая часть уравнения (2.16) равна нулю. Соответственно $d\boldsymbol{P}/dt = 0$, следовательно,

$$\boxed{\boldsymbol{P} = \sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{p}_i = const}. \qquad (2.16а)$$

Итак, *суммарный импульс замкнутой системы материальных точек остается постоянным* – <u>закона сохранения импульса.</u>

В основе закона сохранения импульса лежит однородность пространства, т. е. одинаковость свойств пространства во всех точках. Параллельный перенос замкнутой системы из одного места в другое без изменения взаимного расположения и скоростей частиц не изменяет механических свойств системы. Поведение системы на новом месте будет таким же, каким оно было бы на прежнем месте.

§ 2.6. Движение центра масс системы

Точка C, положение которой определяется радиус-вектором:

$$\boldsymbol{r}_c = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2 + \ldots + m_N\boldsymbol{r}_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i\boldsymbol{r}_i\,, \qquad (2.17)$$

называется *центром масс* системы материальных точек. Здесь m_i – масса i-й частицы; $\boldsymbol{r}_i$ – радиус-вектор, задающий положение этой частицы; $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_N$ – суммарная масса системы. (Отметим, что в однородном поле сил тяжести центр масс совпадает с центром тяжести системы.)

Продифференцировав $\boldsymbol{r}_C$ по времени, найдем скорость центра масс:

$$\boldsymbol{V}_C = \dot{\boldsymbol{r}}_C = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i\boldsymbol{V}_i = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{p}_i = \frac{\boldsymbol{P}}{m}, \qquad (2.18)$$

где $\boldsymbol{V}_i$ – скорость i-ой материальной точки, $\boldsymbol{p}_i$ – ее импульс, $\boldsymbol{P}$ – импульс системы материальных точек. Из (2.18) следует, что суммарный импульс системы есть

$$\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{V}_C, \qquad (2.19)$$

Из (2.19) и (2.16), получим уравнение движения центра масс:

$$\frac{d}{dt}(m\boldsymbol{V}_C) = m\dot{\boldsymbol{V}}_C = m\boldsymbol{a}_C = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \qquad (2.20)$$

($\boldsymbol{a}_C$ – ускорение центра масс). Таким образом, из уравнения

$$\boxed{m\boldsymbol{a}_C = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i} \qquad (2.20а)$$

следует, что центр масс движется так, как двигалась бы материальная точка с массой, равной массе системы, под действием результирующей всех внешних сил, приложенных к телам системы. Для замкнутой системы $\boldsymbol{a}_C = 0$. Это означает, что *центр масс замкнутой системы движется прямолинейно и равномерно либо покоится*.

Система отсчета, относительно которой центр масс покоится, называется *системой центра масс* (сокращенно *ц*-системой). Эта система является инерциальной.

Контрольные вопросы

1. В каких системах отсчета справедливы законы Ньютона?

2. Какие формулировки второго закона Ньютона вы знаете?

3. Чему равен вес свободно падающего тела?

4. Какой знак имеет скалярное произведение силы трения и скорости тела?

5. Чему равен импульс системы материальных точек в системе центра масс?

6. Чему равно ускорение центра масс тела, имеющего массу m и находящегося под действием сил $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ и $\boldsymbol{F}_3$?

Задачи

1. Пуля пробивает две примыкающие друг к другу коробки с жидкостями: вначале коробку с глицерином, затем такую же коробку с водой. Как изменится конечная скорость пули, если коробки поменять местами? Другими силами, действующими на пулю, кроме силы сопротивления жидкости $\boldsymbol{F} = -r\boldsymbol{V}$, пренебречь.

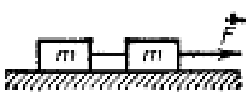
2. Движение материальной точки задано уравнениями $x = \alpha t^3$, $y = \beta t$. Изменяется ли сила, действующая на точку: а) по модулю; б) по направлению?

3. Скорость материальной точки задана уравнениями $\upsilon_x = A \cdot \sin\omega t$, $\upsilon_y = A \cdot \cos\omega t$. Изменяется ли сила, действующая на точку: а) по модулю; б) по направлению?

4. Шарик, висящий на нити длиной l, после горизонтального толчка поднимается на, высоту H, не сходя с окружности. Может ли его скорость оказаться равной нулю: а) при $H < l$ б) при $H > l$?

5. Два тела массами $m_1 > m_2$ падают с одинаковой высоты. Силы сопротивления считать постоянными и одинаковыми для обоих тел. Сравнить время падения тел.

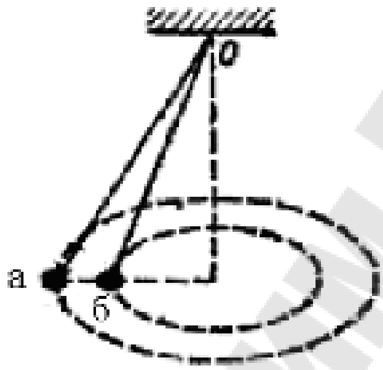
6. Два одинаковых бруска, связанные нитью, движутся по горизонтальной плоскости под действием горизонтальной силы $\boldsymbol{F}$. Зависит ли сила натяжения нити: а) от массы брусков; б) от коэффициента трения брусков о плоскость?



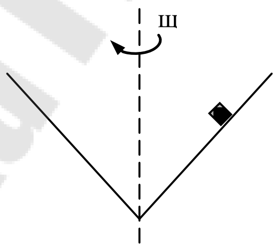
7. Брусок массой $m_1 = 1$ кг покоится на бруске массой $m_2 = 2$ кг. На нижний брусок начала действовать горизонтальная сила, возрас-

тающая пропорционально времени, ее модуль $F = 3t$ (F – в Н, t – в с). В какой момент времени верхний брусок начнет проскальзывать? Коэффициент трения между брусками $\mu = 0{,}1$, трение между нижним бруском и опорой пренебрежимо мало. Принять $g = 10$ м/с^2.

8. Два шарика а и б, подвешенные на нитях в общей точке 0, равномерно движутся по круговым траекториям, лежащим в одной горизонтальной плоскости. Сравнить их угловые скорости.



9. Коническая воронка вращается с постоянной угловой скоростью ω. Внутри воронки на стенке лежит тело, которое может свободно скользить вдоль образующей конуса. При вращении тело находится в равновесии относительно стенки. Является это равновесие устойчивым или неустойчивым?



Глава 3
Работа и энергия

§ 3.1. Работа и кинетическая энергия

*Работой силы **F** на перемещении d**s*** называется проекция F_S этой силы на направление перемещения, умноженная на величину самого перемещения:

$$dA = F_S\, ds = F\, ds \cos\alpha, \tag{3.1}$$

где α – угол между векторами $\boldsymbol{F}$ и $d\boldsymbol{s}$ (рис. 3.1).

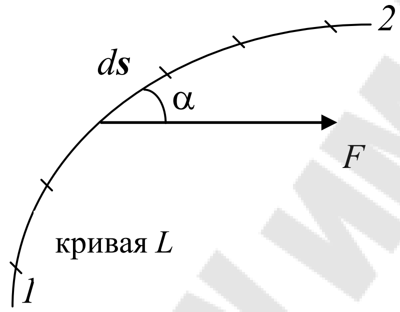


Рис. 3.1

Поскольку перемещение $d\boldsymbol{s}$ предполагается бесконечно малым, величина dA называется также *элементарной работой* в отличие от *работы на конечном перемещении.* Если воспользоваться понятием скалярного произведения, то можно сказать, что *элементарная работа dA* есть скалярное произведение силы $\boldsymbol{F}$ на перемещение $d\boldsymbol{s}$:

$$dA = (\boldsymbol{F} d\boldsymbol{s}). \tag{3.2}$$

В общем случае, когда материальная точка, двигаясь по криволинейной траектории, проходит путь конечной длины, можно мысленно разбить путь на бесконечно малые элементы (рис. 3.1), на каждом из которых сила F может считаться постоянной, а элементарная работа может быть вычислена по формуле (3.1) или (3.2). Если сложить все эти элементарные работы и перейти к пределу, устремив к нулю длины всех элементарных перемещений, а число их – к бесконечности, то такой предел обозначается символом

$$A = \int_L (\boldsymbol{F} d\boldsymbol{s}) \tag{3.3}$$

и называется *криволинейным интегралом* вектора $\boldsymbol{F}$ вдоль траектории L. Этот интеграл, по определению, и *дает работу силы* $\boldsymbol{F}$ *вдоль кривой* L.

Единицей работы в системе СИ является джоуль (Дж). *Джоуль* есть работа силы в один ньютон на перемещение в один метр при условии, что направление силы совпадает с направлением перемещения.

Работа, отнесенная к единице времени, т. е. величина

$$P = \frac{dA}{dt}, \tag{3.4}$$

называется мощностью. Ее единицами является джоуль на секунду, или ватт (Вт).

Подставив в формулу (3.3) $\boldsymbol{F} = \dfrac{d\boldsymbol{p}}{dt}$, $d\boldsymbol{s} = \boldsymbol{V}dt$, придадим этой формуле вид

$$A = \int (\boldsymbol{V}d\boldsymbol{p}). \tag{3.5}$$

Чтобы вычислить интеграл, надо знать связь между скоростью материальной точки $\boldsymbol{V}$ и ее импульсом $\boldsymbol{p}$. По определению импульса $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{V}$, причем в нерелятивистской механике масса m не зависит от скорости, так что $\boldsymbol{V}d\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{V}d\boldsymbol{V}$. Итак, получим ($\boldsymbol{V}d\boldsymbol{V} = VdV$)

$$A_{12} = m\int_{V_1}^{V_2} V\,dV = \frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2},$$

где V_1 – начальная скорость, V_2 – конечная скорость точки.

Букву А мы снабдили индексами 1, 2, чтобы подчеркнуть, что речь идет о работе при перемещении материальной точки из начального положения 1 в конечное положение 2 (см. рис. 3.1). Величина

$$K = \frac{mV^2}{2} = \frac{p^2}{2m} \tag{3.6}$$

называется *кинетической энергией* материальной точки. С помощью этого понятия полученный результат запишется в виде

$$A_{12} = K_2 - K_1. \tag{3.7}$$

Таким образом, *работа силы при перемещении материальной точки равна приращению кинетической энергии этой точки*.

Полученный результат без труда обобщается на случай произвольной системы материальных точек. *Кинетическая энергия систе-*

мы называется сумма кинетических энергий материальных точек, из которых эта система состоит или на которые ее можно мысленно разделить.

Работа этих сил, действующих на систему материальных точек, равна приращению кинетической энергии этой системы.

§ 3.2. Консервативные и неконсервативные силы

Сила называется *центральной,* если она направлена к одной и той же точке (или от одной и той же точки) и зависит только от расстояния до этой точки, называемой центром сил или *силовым центром*. Примером может служить сила гравитационного притяжения, с которой Солнце действует на планету, или сила электростатического взаимодействия двух точечных зарядов.

Все силы, встречающиеся в макроскопической механике, принято разделять на *консервативные* и *неконсервативные.* Если силы взаимодействия зависят только от конфигурации материальных точек системы (т.е. от их координат) и работа этих сил при перемещении системы из произвольного начального положения в произвольное конечное положение не зависит от пути перехода, а определяется только начальной и конечной конфигурациями системы, то такие силы называются *консервативными.*

Сила тяжести и все центральные силы являются силами консервативными.

Можно дать другое определение консервативных сил, эквивалентное приведенному. Пусть система из положения 1 (рис. 3.2) перешла в положение 2 по пути 132. (Мы символически изображаем положение системы точкой на плоскости, а путь перехода – линией, хотя буквально такой способ применим лишь для системы, состоящей всего из одной материальной точки).

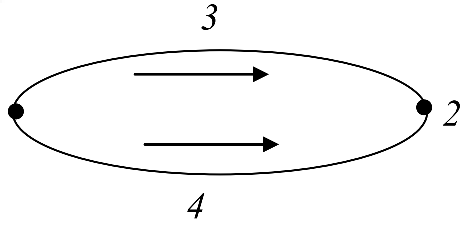


Рис. 3.2

При этом будет совершена работа A_{132}. По определению консервативных сил работа $A_{132} = A_{142}$. Так как силы зависят только от конфигурации системы, то только от конфигурации системы, то $A_{142} = -A_{241}$, где A_{241} – работа, которая была совершена при переходе системы из положения 2 в положение 1 по тому же пути, но в обратном порядке, т. е. по пути 241. Таким образом, $A_{132} + A_{241} = 0$. Но сумма $A_{132} + A_{241}$ есть работа, совершенная силами, когда система вернулась в исходное положение 1. В этом случае говорят о работе по «*замкнутому пути*». Итак, *работа консервативных сил по любому замкнутому пути равна нулю.* Поэтому можно дать еще такое определение консервативных сил. *Консервативными* называются силы, зависящие только от конфигурации системы, и работа которых по любому замкнутому пути равна нулю

$$A = \oint \boldsymbol{F}^{\text{кон}} d\boldsymbol{s} = 0. \tag{3.8}$$

Все силы не являющиеся консервативными, называются *неконсервативными силами*. К ним относятся, прежде всего, так называемые *диссипативные силы*, например силы трения, возникающие при скольжении какого – либо тела по поверхности другого. Сюда же относятся силы сопротивления, испытываемые телом при движении в жидкой или газообразной среде. Все эти силы зависят не только от конфигурации тел, но и от их *относительных скоростей.* Они направлены всегда против скорости тела (относительно поверхности, по которой оно скользит, или относительно сопротивляющейся среды, в которой оно движется). Поэтому, если тело скользит по неподвижной поверхности или движется в «неподвижной» сопротивляющейся среде, то при любом движении тела работа сил трения, действующая на него, отрицательна.

Диссипативными называются такие силы, полная работа которых при любых движениях в замкнутой системе всегда отрицательна.

§ 3.3. Потенциальная энергия. Закон сохранения энергии в механике

Если на систему действуют одни только консервативные силы, то можно для нее ввести понятие *потенциальной энергии*. Какое – либо произвольное положение системы, характеризующееся заданием координат ее материальных точек, условно примем за *нулевое*. Работа, совершаемая консервативными силами при переходе системы из рассматриваемого положения в нулевое, называется *потенциальной энергией системы* в первом положении

$$U_1 = \int_1^0 \boldsymbol{F}^{\text{кон}} d\boldsymbol{s}, \quad U_0 = 0. \qquad (3.9)$$

Работа консервативных сил не зависит от пути перехода, а потому потенциальная энергия системы при фиксированном нулевом положении зависит только от координат материальных точек системы в рассматриваемом положении. Иными словами, *потенциальная энергия системы U является функцией только ее координат.*

Потенциальная энергия системы определена не однозначно, а с точностью до произвольной постоянной. Этот произвол не может отразится на физических выводах, так как ход физических явлений может зависеть не от абсолютных значений самой потенциальной энергии, а лишь от ее разности в различных состояниях. Эти же разности от выбора произвольной постоянной не зависят.

Пусть система перешла из положения 1 в положение 2 по какому – либо пути 12 (рис. 3.3). Работу A_{12}, совершенную консервативными силами при таком переходе, можно выразить через потенциальные энергии U_1 и U_2 в состояниях *1* и *2*. С этой целью вообразим, что переход осуществлен через положение О, т. е. по пути 1О2. Так как силы консервативны, то $A_{12} = A_{1O2} = A_{1O} + A_{O2} = A_{1O} - A_{2O}$. По определению потенциальной энергии $U_1 = A_{1O}$, $U_2 = A_{2O}$. Таким образом,

$$A_{12} = U_1 - U_2, \qquad (3.10)$$

т. е. работа консервативных сил равна убыли потенциальной энергии системы.

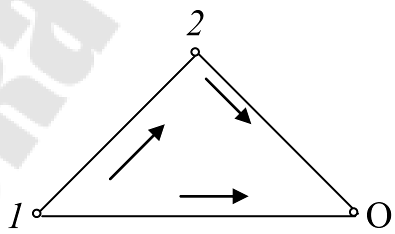


Рис. 3.3

Та же работа A_{12}, как было показано ранее в (3.7), может быть выражена через приращение кинетической энергии по формуле

$$A_{12} = K_2 - K_1 .$$

Приравнивая их правые части, получим $K_2 - K_1 = U_1 - U_2$, откуда

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2.$$

Сумма кинетической и потенциальной энергий системы называется ее *полной энергией* E. Таким образом, $E_1 = E_2$, или

$$E \equiv K + U = \text{const}. \qquad (3.11)$$

В системе с одним только консервативными силами полная энергия остается неизменной. Могут происходить лишь превращения потенциальной энергии в кинетическую и обратно, но полный запас энергии системы измениться не может. Это положение называется законом сохранения энергии в механике.

Вычислим потенциальную энергию в некоторых простейших случаях.

а) Потенциальная энергия тела в однородном поле тяжести. Если материальная точка, находящаяся на высоте h, упадет на нулевой уровень (т. е. уровень, для которого $h = 0$), то сила тяжести совершит работу $A = mgh$. Поэтому на высоте h материальная точка обладает потенциальной энергией $U = mgh + C$, где C – аддитивная постоянная. За нулевой можно принять произвольный уровень, например, уровень пола (если опыт производится в лаборатории), уровень моря и т. д. Постоянная C равна потенциальной энергии на нулевом уровне. Полагая ее равной нулю, получим

$$U = mgh. \qquad (3.12)$$

б) Потенциальная энергия растянутой пружины. Упругие силы, возникающие при растяжении или сжатии пружины, являются центральными силами. Поэтому они консервативны, и имеет смысл говорить о потенциальной энергии деформированной пружины. Ее называют *упругой энергией*. Обозначим через *x растяжение пружины*, т. е. разность $x = l - l_0$ длин пружины в деформированном и недеформированном состояниях. Упругая сила F зависит только от растяжения. Если растяжение x не очень велико, то она пропорциональна ему: $F = -kx$ (закон Гука). При возвращении пружины из деформированного в недеформированное состояние сила F совершает работу

$$A = \int_x^0 -kx dx = \int_0^x F dx = k\int_0^x x\, dx = \frac{1}{2}kx^2.$$

Если упругую энергию пружины в недеформированном состоянии условиться считать равной нулю, то

$$U = \frac{1}{2}k\,x^2. \qquad (3.13)$$

в) Потенциальная энергия гравитационного притяжения двух материальных точек. По закону всемирного тяготения Ньютона гравитационная сила притяжения двух точечных тел пропорциональна произведению их масс *Mm* и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними:

$$F = G\frac{Mm}{r^2}, \tag{3.14}$$

где G – *гравитационная постоянная*.

Сила гравитационного притяжения, как сила центральная, является консервативной. Для ее имеет смысл говорить о потенциальной энергии. При вычислении этой энергии одну из масс, например M, можно считать неподвижной, а другую – перемещающейся в ее гравитационном поле. При перемещении массы m из бесконечности гравитационные силы совершают работу

$$A = \int_r^{\infty} G\frac{Mm}{r^2}dr = G\frac{Mm}{r},$$

где r – расстояние между массами M и m в конечном состоянии.

Эта работа равна убыли потенциальной энергии:

$$A = U_\infty - U(r).$$

Обычно потенциальную энергию в бесконечности U_∞ принимают равной нулю. При таком соглашении

$$U = -G\frac{Mm}{r}. \tag{3.15}$$

Величина (3.15) отрицательна. Это имеет простое объяснение. Максимальной энергией притягивающиеся массы обладают при бесконечном расстоянии между ними. В этом положении потенциальная энергия считается равной нулю. Во всяком другом положении она меньше, т. е. отрицательна.

Допустим теперь, что в системе наряду с консервативными силами действуют также диссипативные силы. Работа всех сил A_{12} при переходе системы из положения 1 в положение 2 по – прежднему равна приращению ее кинетической энергии $K_2 - K_1$. Но в рассматриваемом случае эту работу можно представить в виде суммы работы консервативных сил $A_{12}^{\text{кон}}$ и работы диссипативных сил $A_{12}^{\text{дис}}$. Первая работа может быть выражена через убыль потенциальной энергии системы: $A_{12}^{\text{кон}} = U_1 - U_2$. Поэтому

$$A_{12} = U_1 - U_2 + A_{12}^{\text{дис}}.$$

Приравнивая это выражение к приращению кинетической энергии, получим

$$K_2 - K_1 = U_1 - U_2 + A_{12}^{\text{дис}},$$

или

$$E_2 - E_1 = A_{12}^{\text{дис}}, \tag{3.16}$$

где $E = K + U$ – полная энергия системы. Таким образом, в рассматриваемом случае механическая энергия E системы не остается постоянной, а уменьшается, так как работа диссипативных сил $A_{12}^{\text{дис}}$ отрицательна.

§ 3.4. Абсолютно упругий удар

Удар (соударение). Столкновение двух или более тел, при котором взаимодействие длится очень короткое время.

Центральный удар. Удар, при котором тела от удара движутся вдоль прямой, проходящей через их центры масс. Здесь рассматриваются только *центральные удары.*

Абсолютно упругий удар. Столкновение двух тел, в результате которого в обоих взаимодействующих телах не остается никаких деформаций и вся кинетическая энергия, которой обладали тела до удара, после удара снова превращается в кинетическую энергию.

Для абсолютно упругого удара выполняются закон сохранения импульса и закон сохранения кинетической энергии.

Прямой центральный удар.

В случае прямого центрального удара векторы скоростей шаров до и после удара лежат на прямой, соединяющей их центры. Проекции векторов скорости на линию удара равны модулям скоростей. Их направления учтем знаками: положительное значение припишем движению вправо, отрицательное – движению влево. При указанных допущениях законы сохранения имеют вид

– сохранение импульса

$$m_1V_1 + m_2V_2 = m_1V_1' + m_2V_2', \tag{3.17}$$

– сохранение энергии

$$\frac{m_1V_1^2}{2}+\frac{m_2V_2^2}{2}=\frac{m_1V_1'^2}{2}+\frac{m_2V_2'^2}{2}\,. \qquad (3.18)$$

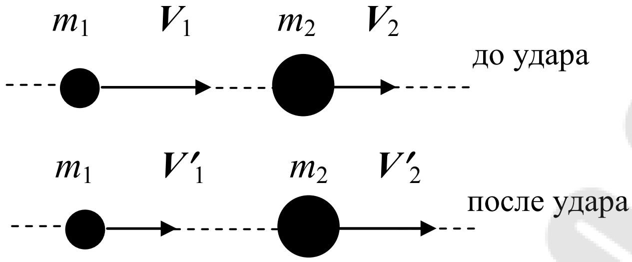


Рис. 3.4

Для определения скоростей шаров после удара, V_1' и V_2', необходимо решить систему уравнений (3.17) и (3.18). Уравнение (3.18) является квадратным, поэтому система уравнений имеет два набора решений, одно из которых является тривиальным, $V_1'=V_1$ и $V_2'=V_2$. Оно соответствует случаю, в котором столкновение шаров не происходит (их скорости не меняются), поэтому эту возможность мы не будет рассматривать в дальнейшем.

Второй набор решений соответствует случаю столкновения шаров, так как он реализуется при условии, что $V_1'\neq V_1$ и $V_2'\neq V_2$. Для упрощения процедуры нахождения решений системы уравнений (3.17) и (3.18) заменим квадратное уравнение (3.18) линейным уравнением. Для этого перепишем систему уравнений в виде

$$m_1(V_1'-V_1)=m_1(V_2-V_2')\,,$$

$$m_1(V_1'^2-V_1^2)=m_1(V_2^2-V_2'^2)\,.$$

Деля левую часть второго уравнения на левую часть первого и, проделывая ту же операцию с правыми частями уравнений, получим линейное уравнение

$$V_1+V_1'=V_2+V_2'. \qquad (3.18а)$$

Решая систему линейных уравнений (3.17) и (3.18а) относительно V_1' и V_2', находим скорости шаров после удара:

$$V_1'=-V_1+2V_C\,, \qquad (3.19)$$

$$V_2'=-V_2+2V_C\,, \qquad (3.20)$$

где $V_C = \dfrac{m_1 V_1 + m_2 V_2}{m_1 + m_2}$ – скорость центра масс шаров.

§ 3.5. Абсолютно неупругий удар

Абсолютно неупругий удар. Столкновение двух тел, в результате которого тела объединяются, двигаясь дальше как единое тело.

Согласно закону сохранения импульса,

$$m_1 \mathbf{V}_1 + m_2 \mathbf{V}_2 = (m_1 + m_2)\mathbf{V} \tag{3.21}$$

(m_1 и m_2 – массы шаров, $\boldsymbol{V}_1$ и $\boldsymbol{V}_2$ – скорости шаров до удара, $\boldsymbol{V}$ – скорость шаров после удара). Тогда

$$\mathbf{V} = \frac{m_1 \mathbf{V}_1 + m_2 \mathbf{V}_2}{m_1 + m_2}. \tag{3.22}$$

Если шары движутся навстречу друг другу, то они вместе будут продолжать двигаться в ту сторону, в которую двигался шар, обладающий большим импульсом. В частном случае если массы шаров равны ($m_1 = m_2$), то

$$\boldsymbol{V} = \frac{\boldsymbol{V}_1 + \boldsymbol{V}_2}{2}. \tag{3.23}$$

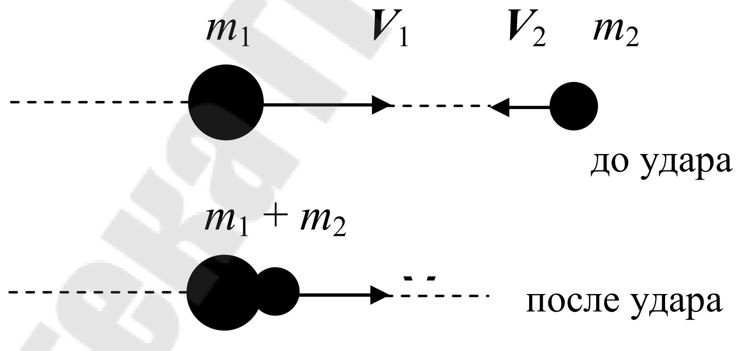


Рис. 3.5

Пример: шары из пластилина (или глины), движущиеся навстречу друг другу.

В данном случае закон *сохранения механической энергии не соблюдается.* Вследствие деформации происходит «потеря» кинетической энергии, перешедшей в тепловую или другие формы энергии.

Эту «потерю» можно определить по разности кинетической энергии тел до и после удара:

$$\Delta K_{\text{к}} = \left(\frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} \right) - \frac{(m_1 + m_2)V^2}{2},$$

или с учетом (3.22) получим

$$\Delta K_{\text{к}} = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(V_1 - V_2)^2 = \frac{\mu (V_1 - V_2)^2}{2}, \tag{3.24}$$

где $\mu = m_1 m_2 /(m_1 + m_2)$ – приведенная масса.

Если ударяемое тело было первоначально неподвижно ($V_2 = 0$), то

$$V = \frac{m_1 V_1}{m_1 + m_2}, \quad \Delta K_{\text{к}} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{m_1 V_1^2}{2}. \tag{3.25}$$

Если $m_2 >> m_1$, то $V << V_1$ и почти вся кинетическая энергия при ударе переходит в другие виды энергии. Поэтому для получения значительной деформации наковальня должна быть массивнее молотка.

§ 3.6. Графическое представление энергии

Потенциальная кривая. График зависимости потенциальной энергии от некоторого аргумента (например, координаты x: ($U = U(x)$). Рассматриваются только консервативные системы: в них взаимные превращения механической энергии в другие виды отсутствуют.

Анализ потенциальной кривой. В общем случае потенциальная кривая может иметь довольно сложный вид, например с несколькими чередующимися максимумами и минимумами (см. рис. 3.6).

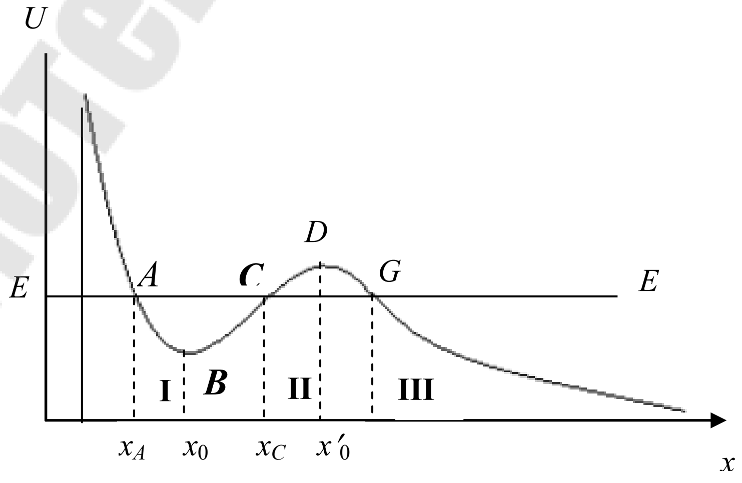


Рис. 3.6

Если E – заданная полная энергия частицы, то частица может находиться только там, где $U(x) \leq E$, т. е. в областях I и III. Переходить из области I в III и обратно частица не может, так как ей препятстсвует потенциальный барьер CDG, ширина которого равна интервалу значений x, при которых $E < U$, а его высота определяется разностью $U_{\max} - E$. Для того чтобы частица смогла преодолеть потенциальный барьер, ей необходимо сообщить дополнительную энергию. В области I частица с полной энергией E оказывается «запертой» в потенциальной яме ABC и совершает колебания между точками с координатами x_A и x_C.

Так как действующая на частицу сила $F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$ (U – функция только одной координаты), а условие минимума потенциальной энергии $\frac{\partial U}{\partial x} = 0$, то в точке B – $F_x = 0$. При смещении частицы из положения x_0 (и влево и вправо) она испытывает действие возвращающейся силы, поэтому положение x_0 является положением устойчивого равновесия. Указанные условия выполняются и для точки x_0' (для $U_{\max}$). Однако эта точка соответствует положению неустойчивого равновесия, так как при смещении частицы из положения x_0' появляется сила, стремящаяся удалить ее от этого положения.

§ 3.7. Внутренняя энергия. Общефизический закон сохранения энергии

Макроскопическая механика учитывает только кинетическую энергию макроскопического движения тел и их макроскопических частей, а также их потенциальную энергию. Но она полностью отвлекается от внутреннего атомистического строения вещества. При ударе, трении и аналогичных процессах кинетическая энергия видимого движения тел не пропадает. Она только переходит в кинетическую энергию невидимого беспорядочного движения атомов и молекул вещества, а также в потенциальную энергию их взаимодействия. Эта часть энергии тела получила название внутренней энергии. Беспорядочное движение атомов и молекул воспринимается нашими органами чувств в виде тепла. Таково физическое объяснение кажущейся потери механической энергии при ударе, трении и пр.

Представление о теплоте как о беспорядочном движении атомов и молекул окончательно утвердилось во второй половине XIX века.

Примерно тогда же в физике утвердился и взгляд на закон сохранения энергии как на общефизический закон, не знающий никаких исключений. Согласно этому закону энергия никогда не создается и не уничтожается, она может только переходить из одной формы в другую. Однако необходимо расширить понятие энергии, введя новые формы ее: энергию электромагнитного поля, ядерную энергию и пр. При этом необходимо заметить, что дать окончательную классификацию различных видов энергии не представляется возможным. Это можно было бы сделать, если бы окончательно были установлены все законы природы, и развитие науки, во всяком случае в ее основах, было бы окончательно завершено.

Деление энергии на кинетическую и потенциальную имеет смысл только в механике и не охватывает всех форм энергии. Кроме того, отнесение энергии к тому или иному виду часто зависит от точки зрения. Например, в макроскопической механике упругая энергия сжатого идеального газа считается потенциальной. Но с молекулярной точки зрения упругость газа объясняется тепловым движением его молекул. Поэтому с этой точки зрения ту же энергию следует считать кинетической.

Общефизический принцип сохранения энергии охватывает, таким образом, не только явления, рассматриваемые в макроскопической механике, но и такие физические явления, к которым законы такой механики не применимы. Поэтому он не может быть выведен из уравнений макроскопической механики, а должен рассматриваться как одно из наиболее широких обобщений опытных фактов.

§ 3.8. Силы и потенциальная энергия

Взаимодействие тел можно описывать либо с помощью сил, либо с помощью потенциальной энергии как функции координат взаимодействующих частиц. В макроскопической механике применимы оба способа. Первый способ обладает несколько большей общностью, так как он применим и к таким силам (например, силам трения), для которых нельзя ввести потенциальную энергию. Второй же способ применим только в случае консервативных сил.

Зная действующие силы как функции координат материальных точек системы, можно вычислить ее потенциальную энергию. Эта задача решается интегрированием. Можно поставить и обратную задачу: вычислить действующие силы по заданной потенциальной энергии как функции координат взаимодействующих материальных точек.

Эта задача решается с помощью более простой математической операции – дифференцирования.

Рассмотрим сначала отдельную материальную точку, находящуюся в силовом поле каких-то неподвижных тел. Если силы консервативные, то можно ввести потенциальную энергию U, которой обладает материальная точка в рассматриваемом силовом поле. Величина U будет функцией радиуса – вектора $\boldsymbol{r}$ этой точки или ее координат x, y, z. Пусть точка претерпела произвольное бесконечно малое перемещение $d\boldsymbol{r}$. Если $\boldsymbol{F}$ – сила, действующая на нее, то работа этой силы при таком перемещении будет равна убыли потенциальной энергии:

$$\boldsymbol{F}d\boldsymbol{r} = -dU \tag{3.26}$$

или это уравнение перепишем:

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = -dU\ . \tag{3.27}$$

Допустим, что перемещение происходит вдоль какой-либо одной координатной оси, например оси X. Тогда

$$F_x dx = -[dU]_{y,z}\,,$$

и, следовательно,

$$F_x dx = -\left(\frac{dU}{dx}\right)_{y,z}. \tag{3.28}$$

Индексы y, z означают, что при смещении, а следовательно, и при дифференцировании координаты y и z должны оставаться постоянными. Иными словами, U (x, y, z) при дифференцировании должна рассматриваться как функция одного аргумента x; остальные два аргумента, y и z, являются параметрами, которые при дифференцировании по x должны оставаться постоянными. Величины, получающиеся в результате такого дифференцирования, называются частными производными функции U. Они обозначаются символом ∂, в отличие от символа d, применяемого при дифференцировании функций одного независимого переменного. Аналогичные соображения справедливы и для проекций силы вдоль остальных двух осей Y и Z. Таким образом

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x},\ F_y = -\frac{\partial U}{\partial y},\ F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \tag{3.29}$$

Если функция $U(x, y, z)$ известна, то нахождение составляющих F_x, F_y, F_z сводится к вычислению ее частных производных по координатам. Разумеется, формулы (3.29) относятся только к случаю консервативных сил.

Пример

Измеряя потенциальную энергию растянутой спиральной пружины, нашли, что она определяется выражением $U = ½\, kx^2$, где x – удлинение пружины, а k – постоянная. Направим ось X вдоль оси пружины, закрепив один конец ее, а другой будем удерживать рукой. Тогда U будет функцией только одной координаты x. Растянутая пружина действует на руку с силой

$$F = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) = -kx.$$

Знак минус указывает, что сила F направлена в сторону, противоположную смещению, т. е. является силой притяжения.

Три формулы (3.29) можно объединить в одну векторную формулу. С этой целью умножим эти формулы на единичные векторы координатных осей $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ и сложим. В результате получим

$$\boldsymbol{F} = -\,\mathrm{grad}U, \tag{3.30}$$

где символом grad U обозначена сумма

$$\mathrm{grad}U \equiv \frac{\partial U}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\boldsymbol{k}\,. \tag{3.31}$$

Она, согласно соотношению (3.31), является вектором. Вектор, определяемый соотношением (3.31), называется градиентом скалярной функции U. Для него, наряду с обозначением grad$U$, применяется также ∇U. Здесь ∇ («набла») означает символический вектор или оператор

$$\nabla = \frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{k}\,,$$

называемый оператором Гамильтона или набла-оператором.

Контрольные вопросы

1. Какова связь между кинетической энергией материальной точки и работой приложенных к точке сил?
2. Как связана потенциальная энергия материальной точки с работой консервативных сил?

3. Работа силы, действующей на материальную точку, на любом пути равна нулю. Что можно сказать о взаимном направлении силы и скорости материальной точки?

4. Сила, действующая на материальную точку, изменяется по закону $\boldsymbol{F}(t)$, а скорость точки — по закону $\mathbf{v}(t)$. Чему равна мощность в момент t?

5. Выведите выражение для потенциальной энергии материальной точки в поле центральных сил.

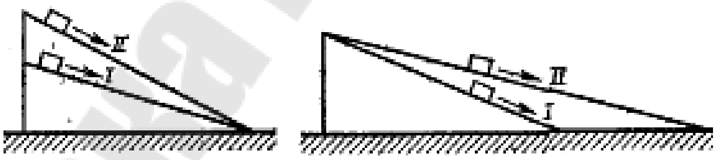
Задачи

1. Внутри жидкости перемещается тело. Являются ли консервативными: а) сила Архимеда; б) сила вязкости?

2. Материальная точка движется равномерно по криволинейной траектории. Отличны ли от нуля: а) сила; б) работа?

3. Шарик катается по круговому вертикальному желобу. Отличны ли от нуля при одном обороте шарика по круговой траектории: а) работа силы нормальной реакции; б) работа силы тяжести; в) работа силы трения?

4. Тело соскальзывает без начальной скорости по наклонной плоскости. Сравнить работы силы трения при движении тела с вершины наклонной плоскости до ее основания в I и II случаях в каждой из ситуаций, изображенных на рисунках *а* и *б*. Коэффициенты трения в случаях I и II одинаковы.



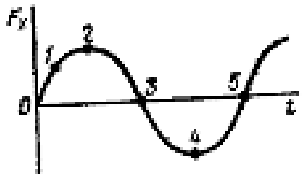
а) *б*)

5. Тело медленно втаскивают в гору. Зависят ли от формы профиля горы:

а) работа силы тяжести; б) работа силы трения? Начальная и конечная точки фиксированы.

6. Тело соскальзывает без начальной скорости с вершины наклонной плоскости. Зависит ли работа силы трения на всем пути движения тела до остановки: а) от угла наклона плоскости б) от коэффициента трения?

7. На тело действует сила, изменяющаяся по гармоническому закону. При t = 0, $\upsilon = 0$. Среди отмеченных на графике точек указать точку, соответствующую максимальной кинетической энергии тела.

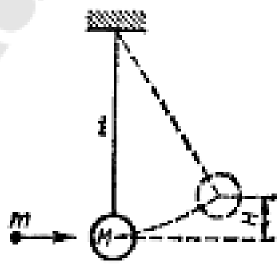


8. Пусть m – масса механической системы; $\boldsymbol{\upsilon}_c$ – скорость ее центра масс. Верны ли в общем случае соотношения: а) импульс системы $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{\upsilon}_c$; б) результирующая сила, действующая на систему, $\boldsymbol{F} = m\dfrac{d\boldsymbol{\upsilon}_c}{dt}$; в) кинетическая энергия системы $K = m\boldsymbol{\upsilon}_c^2/2$.

9. Горизонтально летящая пуля пробивает брусок, лежащий на гладкой горизонтальной плоскости. Сохраняются ли в системе «пуля – брусок»: а) импульс; б) механическая энергия?

10. Снаряд, летящий по параболе, в высшей точке разорвался на два осколка. Возможно ли, чтобы импульсы обоих осколков в момент разрыва были равны по модулю и противоположно направлены: а) вертикально; б) горизонтально?

11. В шар массой M, висящий на нити длиной l, попадает горизонтально летящая пуля массой $m \ll M$. Шар после толчка поднимается на высоту H ($H < l$). Сравнить высоты подъема шара, если: а) пуля застревает в шаре; б) пуля после удара падает вниз, потеряв скорость.



12. По рельсам катится тележка. Человек: а) прыгает с места на тележку перпендикулярно рельсам; б) прыгает с тележки перпендикулярно ее борту. Как изменяется скорость тележки в обоих случаях. Трение пренебрежительно мало.

13. Две заряженные частицы массами m_1 и m_2 ($m_1 > m_2$) начинают притягиваться друг к другу из состояния покоя. Как движется их центр масс?

1) →; 2) ←; 3) покоится.

Глава 4
Динамика вращательного движения твердого тела

§ 4.1. Момент силы и момент импульса относительно неподвижного начала

Пусть *O* – какая-либо точка, относительно которой рассматривается момент вектора силы или вектора импульса. Ее называют *началом* или *полюсом.* Обозначим буквой ***r*** радиус – вектор, проведенный из этой точки к точке приложения силы ***F*** (рис. 4.1). *Моментом силы* ***F*** *относительно точки O* называется векторное произведение радиус – вектора ***r*** на силу ***F***:

$$\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{rF}]. \qquad (4.1)$$

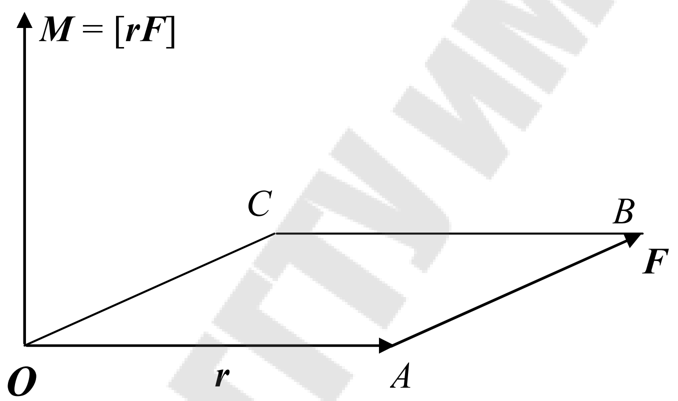


Рис. 4.1

Аналогично определяется *момент импульса* ***p*** материальной точки относительно полюса *O*. Так называется векторное произведение

$$\boldsymbol{L} = [\boldsymbol{rp}]. \qquad (4.2)$$

Целесообразность введения этих двух понятий оправдывается тем, что моменты *импульса и силы связаны между собой важным соотношением*, которое мы сейчас выведем из *уравнений Ньютона*. Предположим сначала, что начало *O* неподвижно. Дифференцируя выражение (4.2) по времени, получим

$$\boldsymbol{L} = [\dot{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{p}] + [\boldsymbol{r}\dot{\boldsymbol{p}}].$$

Так как по предположению начало *O* неподвижно, то производная ***r*** есть скорость материальной точки, связанная с ее импульсом соотношением ***p*** **=** $m\boldsymbol{V}$. Поэтому первое слагаемое равно нулю как векторное произведение коллинеарных векторов $\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{V}$ и $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{V}$. Второе слагаемое можно преобразовать с помощью уравнения Ньютона $\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{F}$. Тогда получится $\dot{\boldsymbol{L}} = [\boldsymbol{rF}]$, или

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{M}.} \tag{4.3}$$

Это соотношение называется *уравнением моментов*: производная по времени момента импульса материальной точки относительно неподвижного начала равна моменту действующей силы относительно того же начала.

Уравнение моментов (4.3) можно обобщить на случай произвольной системы материальных точек. Моментом импульса системы материальных точек относительно некоторого начала называется векторная сумма моментов импульсов всех материальных точек системы относительно того же начала. Аналогично момент всех сил, действующих на систему материальных точек, определяется как векторная сумма моментов отдельных сил.

Предполагая начало неподвижным, напишем уравнения моментов для каждой материальной точки, а затем векторно сложим их. Тогда мы снова придем к соотношению (4.3), но уже для системы материальных точек. Как ясно из вывода, под $\boldsymbol{M}$ следует понимать момент всех сил, как внешних, так и внутренних. Однако внутренние силы можно не принимать во внимание, так как их полный момент относительно любого начала равен нулю. Это объясняется тем, что внутренние силы всегда входят попарно: силе $\boldsymbol{F}_{ik}$, с которой k-я точка действует на i-ю, соответствует равная и противоположно направленная сила $\boldsymbol{F}_{ki}$, с которой i-я точка действует на k-ю. Эти две силы направлены вдоль одной прямой. При вычислении моментов точки их приложения можно перенести в одну и ту же точку на этой прямой. Тогда силы взаимно уничтожаются, а их полный момент будет равен нулю.

Таким образом, третий закон Ньютона позволяет исключить из уравнения (4.3) внутренние силы. Вместо уравнения (4.3) получается более сильный результат:

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{M}^{\text{внеш}}}, \tag{4.4}$$

т. е. *производная по времени от момента импульса системы материальных точек относительно произвольного неподвижного начала равна геометрической сумме моментов всех внешних сил относительно того же начала.*

Если момент внешних сил относительно неподвижного начала O равен нулю, то момент импульса системы относительно того же начала остается постоянным во времени. Это положение называется законом сохранения момента импульса. В частности, момент импульса сохраняется для изолированной системы материальных точек.

Важным является случай центральных сил, когда направления всех сил, действующих на материальные точки системы, проходят через неподвижный центр *O*. Момент таких сил относительно точки *O* равен нулю. Поэтому момент импульса системы относительно точки *O* должен сохраняться, т. е. оставаться постоянным во времени.

§ 4.2. Момент импульса и момент сил относительно неподвижной оси

Векторное уравнение (4.4.) эквивалентно трем скалярным уравнениям:

$$\frac{dL_x}{d\,t} = M_x^{\text{внеш}},\ \frac{dL_y}{d\,t} = M_y^{\text{внеш}},\ \frac{dL_z}{d\,t} = M_z^{\text{внеш}}, \tag{4.5}$$

которые получаются из уравнения (4.4) путем проектирования на неподвижные оси декартовой системы координат. Индекс «внеш.», указывающий на то, что при вычислении момента сил внутренние силы могут не приниматься во внимание, в дальнейшем обычно будет опускаться. Таким образом, под $\boldsymbol{M}$ в уравнении моментов всегда будет подразумеваться момент внешних сил. Величины L_x и M_x называются соответственно *моментами импульса и сил относительно оси X*. Аналогично говорят о моментах импульса и сил относительно координатных осей *Y* и *Z*.

Вообще, моментами L_x и M_x импульса и сил относительно произвольной оси *X* называют проекции векторов $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{M}$ на эту ось в предположении, что начало *O* лежит на рассматриваемой оси.

Уравнение

$$\boxed{\frac{dL_x}{d\,t} = M_x} \tag{4.6}$$

называется *уравнением моментов относительно неподвижной оси X*.

Когда момент внешних сил относительно какой-либо неподвижной оси равен нулю, то момент импульса системы относительно той же оси остается постоянным. Это – *закон сохранения момента импульса относительно неподвижной оси.*

§ 4.3. Уравнение момента импульса для вращения вокруг неподвижной оси. Момент инерции

Применим уравнение моментов относительно оси к рассмотрению *вращательного движения.* За неподвижную ось моментов удобно выбрать *ось вращения.*

Если материальная точка вращается по окружности радиуса r (см. рис.4.2), то момент ее импульса относительно оси вращения O равен $L = mVr$. Пусть ω – угловая скорость вращения, тогда $V = \omega r$ и, следовательно, $L = mr^2\omega$.

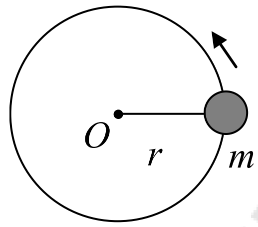


Рис. 4.2

Если вокруг оси O вращается система материальных точек с одной и той же угловой скоростью ω, то $L = \sum_i m_i r_i^2 \omega$, где суммирование производится по всем материальным точкам системы. Величину ω как одинаковую для всех материальных точек можно вынести из-под знака суммы. Тогда получится

$$L = I\omega, \tag{4.7}$$

где

$$I = \sum_i m_i r_i^2. \tag{4.8}$$

Величина I, равная сумме произведений масс материальных точек на квадраты расстояний их до оси вращения, называется *моментом инерции системы* относительно этой оси. Уравнение (4.7) показывает, что при вращении системы момент ее импульса относительно оси вращения равен произведению момента инерции относительно той же оси на угловую скорость.

В этом случае Уравнение (4.6) принимает вид

$$\boxed{\frac{d}{dt}(I\omega) = M}, \tag{4.9}$$

где M – момент внешних сил относительно оси вращения.
Это – *основное уравнение динамики вращательного движения вокруг неподвижной оси.* Оно напоминает уравнение Ньютона для движения материальной точки.

Для вращения неизменяемой системы материальных точек или *твердого тела* вокруг неподвижной оси, для которого $I=const$, уравнение (4.9) переходит в $I\frac{d\omega}{dt}=M$ или

$$\boxed{I\varepsilon = M}, \tag{4.10}$$

где $\varepsilon = d\omega/dt$ – угловое ускорение.

Кинетическая энергия вращающегося твердого тела представляется в виде

$$K=\frac{1}{2}\sum_i m_i V_i^2=\frac{1}{2}\sum_i m_i(\omega r_i)^2=\frac{\omega^2}{2}\sum_i m_i r_i^2,$$

или

$$K=\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{L^2}{2I}. \tag{4.11}$$

§ 4.4. Теорема Штейнера

Найдем связь между моментами инерции тела относительно двух различных параллельных осей. Предполагается, что эти оси перпендикулярны к плоскости рисунка и пересекают ее в точках O и A. Ради краткости будем называть эти самые оси также осями O и A. Разобьем мысленно тело на элементарные массы dm. Радиусы – векторы одной из них, проведенные от осей O и A параллельно плоскости рисунка, обозначим $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{r}'$, соответственно.

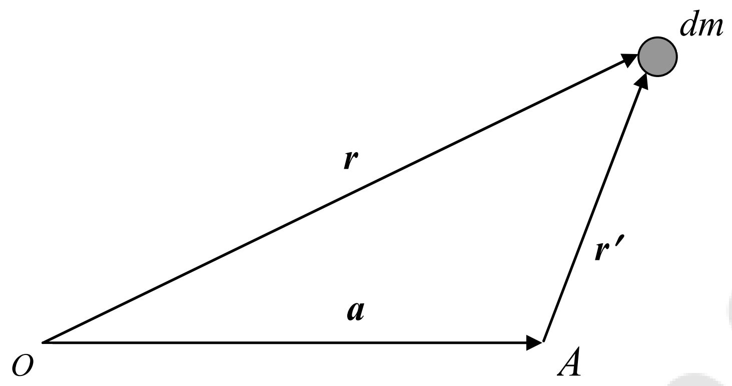


Рис. 4.3

На рис. 4.3 изображен такой случай, когда элементарная масса dm лежит в плоскости рисунка. Тогда $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}$ означает радиус-вектор $\boldsymbol{OA}$. Следовательно, $r'^2 = r^2 + a^2 - 2(\boldsymbol{ar})$. Учитывая, что для твердого тела момент инерции определяется через интеграл $I = \sum_i m_i r_i^2 \to \int r^2 dm$, получим

$$\int r'^2 dm = \int r^2 dm + a^2 \int dm - 2(\boldsymbol{a} \int \boldsymbol{r} dm).$$

Интеграл слева есть момент инерции I_A тела относительно оси A, первый интеграл справа – момент инерции относительно оси O. Последний интеграл можно представить в виде $\int \boldsymbol{r}\, dm = m\boldsymbol{R}_C$, где $\boldsymbol{R}_C$ – радиус-вектор центра масс C тела относительно оси O (точнее, $\boldsymbol{R}_C$ есть слагающая радиуса-вектора центра масс, параллельная плоскости рисунка). Таким образом,

$$I_A = I_O + ma^2 - 2m(\boldsymbol{aR}_C). \tag{4.12}$$

Допустим, что ось O проходит через центр масс C тела. Тогда $R_C = 0$, и предыдущая формула упрощается, принимая вид

$$\boxed{I_A = I_C + ma^2}. \tag{4.13}$$

Это важное геометрическое соотношение называется *теоремой Штейнера.*

Момент инерции тела относительно какой-либо оси равен моменту инерции его относительно параллельной оси, проходящей через центр масс, сложенному с величиной ma^2, где а – расстояние между осями.

§ 4.5. Вычисление моментов инерции

Момент инерции тела относительно какой-либо оси можно найти вычислением. Если вещество в теле распределено непрерывно, то вычисление момента инерции его сводится к вычислению интеграла

$$I = \int r^2 dm, \tag{4.14}$$

в котором r – расстояние от элемента массы dm до оси вращения.

Момент инерции тонкого однородного стержня относительно перпендикулярной оси. Пусть ось проходит через конец стержня A (рис. 4.4).

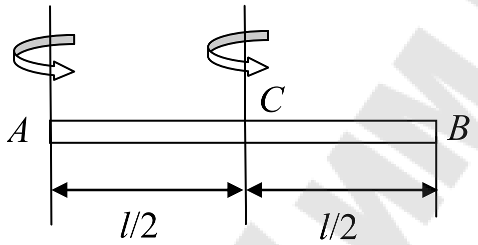


Рис. 4.4

Для момента инерции можно написать $I_A = kml^2$, где l – длина стержня, k – коэффициент пропорциональности. Центр стержня C является его центром масс. По теореме Штейнера $I_A = I_C + m(l/2)^2$. Величину I_C можно представить как сумму моментов инерции двух стержней, CA и CB, длина каждого из которых равна $l/2$, масса $m/2$, а следовательно, момент инерции равен $k\dfrac{m}{2}\left(\dfrac{l}{2}\right)^2$. Таким образом, $I_C = km(l/2)^2$. Подставляя эти выражения в формулу для теоремы Штейнера, получим

$$kml^2 = km\left(\frac{l}{2}\right)^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2,$$

откуда $k = 1/3$. В результате находим

$$I_A = \frac{1}{3}ml^2, \tag{4.15}$$

$$I_C = \frac{1}{12}ml^2. \tag{4.16}$$

Момент инерции бесконечно тонкого круглого кольца (окружности). Момент инерции относительно оси Z (рис. 4.5) равен

$$I_Z = mR^2, \qquad (4.17)$$

где R – радиус кольца. Ввиду симметрии $I_X = I_Y$.

Формула (4.17) очевидно, дает также момент инерции полого однородного цилиндра с бесконечно тонкими стенками относительно его геометрической оси.

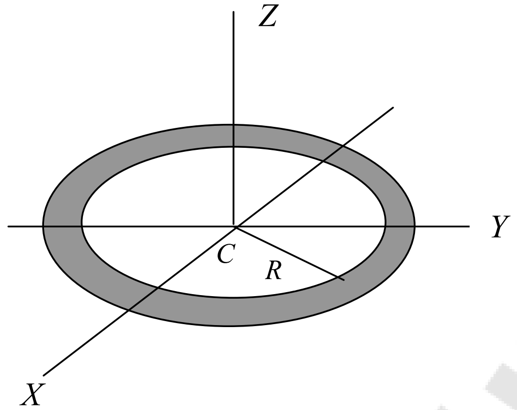


Рис. 4.5

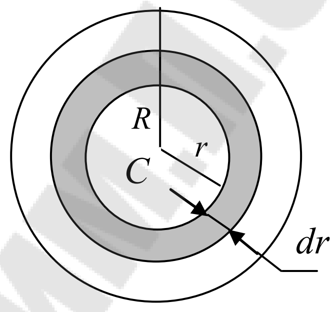


Рис. 4.6

Момент инерции бесконечно тонкого диска и сплошного цилиндра. Предполагается, что диск и цилиндр однородны, т. е. вещество распределено в них с постоянной плотностью. Пусть ось Z проходит через центр диска C перпендикулярно к его плоскости (рис. 4.6). Рассмотрим бесконечно тонкое кольцо с внутренним радиусом r и наружным радиусом $r + dr$. Площадь такого кольца $dS = 2\pi r dr$. Его момент инерции найдется по формуле (4.17), он равен $dI_z = r^2 dm$.

Момент инерции всего диска определяется интегралом $I_z = \int r^2 dm$.

Ввиду однородности диска $dm = m\dfrac{dS}{S} = 2m\dfrac{rdr}{R^2}$, где $S = \pi R^2$ – площадь всего диска. Вводя это выражение под знак интеграла, получим

$$I_z = \frac{2m}{R^2}\int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2} mR^2. \qquad (4.18)$$

Формула (4.18) дает также момент инерции однородного сплошного цилиндра относительно его продольной геометрической оси.

Вычисление момента инерции тела относительно оси часто можно упростить, вычислив предварительно *момент инерции* его *от-*

носительно точки. Сам по себе момент инерции тела относительно точки не играет никакой роли в динамике. Он является чисто вспомогательным понятием, служащим для упрощения вычислений. *Моментом инерции тела относительно точки O* называется *сумма произведений масс материальных точек, из которых тело состоит, на квадраты их расстояний R до точки O*: $\theta = \Sigma mR^2$. В случае непрерывного распределения масс эта сумма сводится к интегралу $\theta = \int R^2 dm$. Само собой понятно, что момент θ не следует смешивать с моментом инерции I относительно оси. В случае момента I массы dm умножаются на квадраты расстояний до этой оси, а в случае момента θ – до неподвижной точки.

Рассмотрим сначала одну материальную точку с массой m и с координатами x, y, z относительно прямоугольной системы координат (рис. 4.7). Квадраты расстояний ее до координатных осей X, Y, Z равны соответственно y^2+z^2, z^2+x^2, x^2+y^2, а моменты инерции относительно тех же осей

$$I_X = m(y^2 + z^2), \quad I_Y = m(z^2 + x^2),$$

$$I_Z = m(x^2 + y^2).$$

Сложим эти три равенства, получим $I_X + I_Y + I_Z = 2m(x^2 + y^2 + z^2)$.

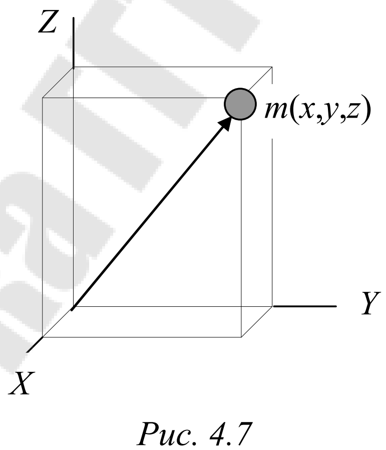


Рис. 4.7

Но $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, где R – расстояние точки m от начала координат O. Поэтому

$$I_X + I_Y + I_Z = 2\theta. \tag{4.19}$$

Это соотношение справедливо не только для одной материальной точки, но и для произвольного тела, так как тело можно рассматривать как совокупность материальных точек. Таким образом, *сумма моментов инерции тела относительно трех взаимно перпендикуляр-*

ных осей, пересекающихся в одной точке O, равна удвоенному моменту инерции того же тела относительно этой точки.

Момент инерции полого шара с бесконечно тонкими стенками. Сначала найдем момент инерции θ относительно центра шара. Очевидно, он равен $\theta = mR^2$. Затем применяем формулу (4.19). Полагая в ней ввиду симметрии $I_X = I_Y = I_Z = I$. В результате находим момент инерции полого шара относительно его диаметра

$$I = \frac{2}{3} mR^2 \ . \qquad (4.20)$$

Момент инерции сплошного однородного шара. Сплошной шар можно рассматривать как совокупность бесконечно тонких сферических слоев с массами dm (см. рис. 4.6). Так как шар по предположению однороден, то $dm = m\frac{dV}{V}$, где $dV = 4\pi r^2 dr$ – объем сферического слоя, а $V = \frac{4\pi}{3}R^3$ – объем всего шара. По формуле (4.20) момент инерции сферического слоя относительно диаметра равен $dI = \frac{2}{3} dm\, r^2 = 2m\frac{r^4 dr}{R^3}$. Интегрируя, получаем момент инерции сплошного шара

$$I = \frac{2}{5} mR^2 \ . \qquad (4.21)$$

§ 4.6. Законы сохранения и симметрия пространства и времени

Закон сохранения энергии является следствием *однородности времени*, закон сохранения импульса – следствием *однородности пространства*, а закон сохранения момента импульса – следствием *изотропии пространства*.

Однородность времени означает, что если в два любых момента времени все тела замкнутой системы поставить в совершенно одинаковые условия, то начиная с этих моментов все явления в ней будут протекать совершенно одинаково.

Однородность пространства означает, что если замкнутую систему тел перенести из одного места пространства в другое, поставив при этом все тела в ней в те же условия, в каких они находились в прежнем положении, то это не отразится на ходе всех последующих явлений.

В том же смысле надо понимать и *изотропию пространства*, только вместо переноса замкнутой системы надо говорить об ее *повороте* в пространстве на любой угол.

Контрольные вопросы

1. Может ли обладать моментом импульса материальная точка, движущаяся по прямолинейной траектории?

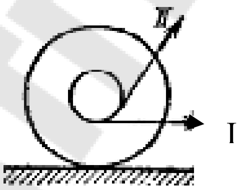
2. От каких величин зависит угловое ускорение твердого тела?

3. В каком случае кинетическая энергия вращающегося тела определяется формулой $I\omega^2 / 2$?

4. Найдите кинетическую энергию катящегося без проскальзывания однородного шара массы M, если скорость его центра масс равна V_c. Как изменится результат, если вместо шара катится однородный цилиндр?

Задачи

1. Катушка покоится на горизонтальной плоскости. В каком направлении покатится катушка, если нить потянуть в направлении I? в направлении II? Качение происходит без проскальзывания. 1)→, ←; 2)←, ←; 3)→,←; 4)←,→.



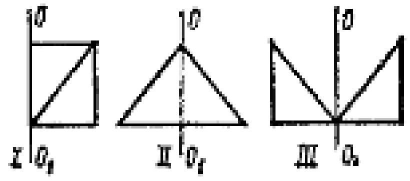
2. Справедливо ли выражение момента инерции тел $I = mr^2$ (m – масса тела) относительно оси в следующих случаях: а) тело – материальная точка, r – расстояние ее до оси; б) тело – однородный шар, r – расстояние центра шара до оси; в) тело произвольное, r – расстояние центра масс тела до оси?

3. Как изменится момент инерции свинцового цилиндра относительно его оси, если цилиндр сплющить в диск?

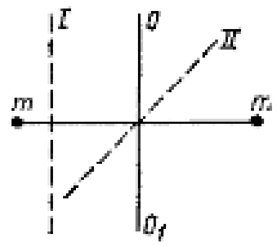
4. Из сплошного однородного цилиндра сделали полый, удалив половину массы. Как изменился момент инерции цилиндра относительно его оси? Уменьшился: 1) в 2 раза; 2) больше, чем в 2 раза; 3) меньше, чем в 2 раза.

5. На рисунке изображены тела, составленные из одинаковых однородных треугольных пластин. Указать фигуры с минимальным и максимальным моментами инерции относительно оси OO_1.

1) I, II; 2) I, III; 3) II, III; 4) III, II; 5) III, I.



6. Как изменится момент инерции двух материальных точек массами m, если ось OO_1 перевести: а) в положение I; б) в положение II?



7. Два диска одинаковой толщины с равными массами, железный и деревянный, вращаются под действием равных по модулю сил, касательных к ободам дисков. Сравнить угловые ускорения дисков.

8. Качается однородный стержень длиной l и массой m. Ось качаний проходит через конец стержня и расположена горизонтально. Какую длину должен иметь математический маятник массой m, чтобы при равных углах отклонения от вертикали оба маятника имели одинаковы угловые ускорения? 1) l; 2) $l/2$; 3) $3l/2$; 4) $2l/3$; 5) $l/6$.

9. С наклонной плоскости одновременно начинают скатываться без проскальзывания цилиндры: а) сплошной б) тонкостенный полый. Найти отношение скоростей (υ_a/υ_b) в данный момент времени.

1) 2; 2) $\sqrt{2}$; 3) $1/\sqrt{2}$; 4) $2/\sqrt{3}$; 5) недостаточно данных.

10. Два диска с равными массами и радиусами R_1 и R_2 ($R_2 = 2R_1$) раскручивают из состояния покоя до одинаковых угловых скоростей. Найти отношение произведенных работ (A_1/A_2).

11. С горки с одной и той же высоты скатываются без проскальзывания два цилиндра: а) сплошной; б) тонкостенный полый. Найти отношение их скоростей в одном и том же месте (υ_a/υ_b).

1) $\sqrt{2}$; 2) $2/\sqrt{3}$; 3) 2; 4) недостаточно данных.

12. Падает шест массой m, высотой H. Найти скорость υ верхнего конца шеста в момент падения на землю. Нижний конец шеста не проскальзывает. Верны ли приведенные этапы решения: а) $I = mH^2/3$; б) $\upsilon = \omega H$; в) $I\omega^2/2 = mgH$, $\upsilon = \sqrt{6gH}$.

13. По наклонной плоскости с одной и той же высоты спускается обруч:

а) скользя без качения с пренебрежимо малым трением;

б) катясь без проскальзывания. Найти отношение скоростей центра колеса в одном и том же месте (υ_a/υ_b).

1) $\sqrt{2}$; 2) 2; 3) 4; 4) $1/\sqrt{2}$; 5) $1/2$.

14. Можно ли утверждать, что в неизолированной системе сохраняются: а) импульс, если сумма внешних сил равна нулю; б) момент импульса относительно оси, если сумма моментов внешних сил относительно этой оси равна нулю; в) механическая энергия, если работа внешних сил равна нулю?

15. Человек, стоящий на вращающейся скамье Жуковскоого, держит в руках гири. В некоторый момент человек выпускает гири из рук. Как изменилась угловая скорость скамьи?

Глава 5
Элементы специальной теории относительности

§ 5.1. Механический принцип относительности. Преобразования Галилея

Механический принцип относительности утверждает, что законы динамики одинаковы во всех инерциальных системах отсчета.

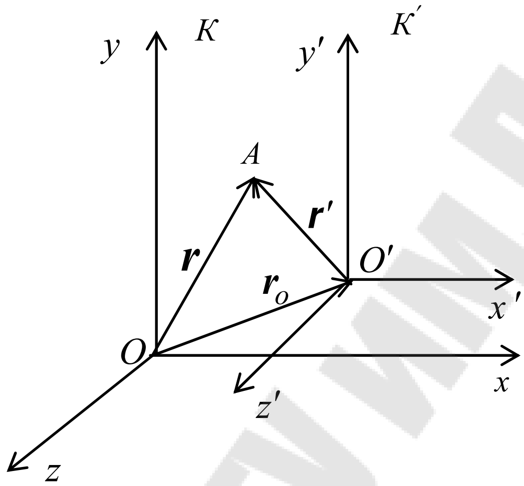


Рис. 5.1

Система K' движется относительно инерциальной системы K равномерно и прямолинейно со скоростью $\boldsymbol{u}\,(\boldsymbol{u} = const)$. Скорость $\boldsymbol{u}$ направлена вдоль OO'. Тогда $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{u}t$.

Преобразования координат Галилея задают связь между радиусами-векторами или координатами произвольной точки A в обеих системах:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{u}t \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = x' + u_x t, \\ y = y' + u_y t, \\ z = z' + u_z t. \end{cases} \qquad (5.1)$$

Правило сложения скоростей в классической механике

Продифференцировав равенство $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{u}t$ по времени и учитывая, что в *классической механике* $t = t'$, получаем

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \boldsymbol{u}. \qquad (5.2)$$

Продифференцировав (5.2) по времени, получим соотношение для ускорений:

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d(\mathbf{x}' + \boldsymbol{u})}{dt} = \frac{d\mathbf{x}'}{dt} = \boldsymbol{a}' .$$

Таким образом, имеем

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}', \tag{5.3}$$

т.е. система K' инерциальна (точка A движется относительно ее равномерно). Это и есть доказательство механического принципа относительности.

Записанные соотношения (5.1)–(5.3) *справедливы лишь в классической механике* *(υ<< с), где с – скорость света в вакууме* $c \approx 3 \cdot 10^8$ *м/с.*

§ 5.2. Постулаты специальной теории относительности (СТО). Преобразования Лоренца

Постулаты Эйнштейна

I. Принцип относительности: никакие опыты (механические, электрические, оптические), проведенные внутри данной инерциальной системы отсчета, не дают возможность обнаружить, покоится ли эта система или движется равномерно и прямолинейно; *все законы природы инвариантны (неизменны)* по отношению к переходу от одной инерциальной системы отсчета к другой.

II. Принцип инвариантности скорости света: *скорость света в вакууме* не зависит от скорости движения источника света или наблюдателя и *одинакова во всех инерциальных системах отсчета.*

Первый постулат Эйнштейна, являясь обобщением механического принципа относительности Галилея *на любые физические процессы,* утверждает, таким образом, что физические законы инвариантны по отношению к выбору инерциальной системы отсчета. Согласно этому постулату, все инерциальные системы отсчета совершенно равноправны. Согласно второму постулату Эйнштейна, *постоянство скорости света – фундаментальное свойство природы,* которое констатируется как опытный факт.

Преобразования Лоренца (при $\upsilon \approx c$)

Система K' движется относительно системы K со скоростью $\boldsymbol{\upsilon} = const$ вдоль оси X (рис. 5.2).

Преобразования Лоренца имеют следующий вид:

$$K \to K' \qquad\qquad K' \to K$$

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - \upsilon t}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = \dfrac{t - \upsilon x / c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{x' + \upsilon t'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ y = y', \\ z = z', \\ t = \dfrac{t' + \upsilon x' / c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \end{cases} \qquad (5.4)$$

где $\beta = \upsilon / c$.

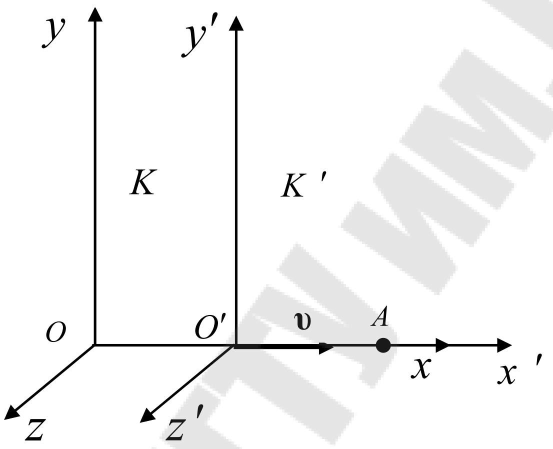


Рис. 5.2

1. Эти уравнения симметричны и отличаются лишь знаком при υ.

2. При υ << c они переходят в классические преобразования Галилея (5.1).

3. В закон преобразования координат входит время, а в закон преобразования времени – пространственные координаты (устанавливается взаимосвязь пространства и времени).

§ 5.3. Следствия из преобразований Лоренца

Относительность одновременности

Пусть в системе K в точках с координатами x_1 и x_2 в моменты времени t_1 и t_2 происходят два события. В системе K' им соответствуют координаты x_1' и x_2' и моменты t_1' и t_2'. Если события в системе K

происходят в одной точке ($x_1 = x_2$) и являются одновременными ($t_1 = t_2$), то, согласно преобразованиям Лоренца (5.4)

$$x_1' = x_2', \; t_1' = t_2', \tag{5.5}$$

т.е. *эти события являются одновременными и пространственно совпадающими для любой инерциальной системы отсчета*.

Если события в системе K пространственно разобщены ($x_1 \neq x_2$), но одновременны ($t_1 = t_2$), то в системе K', согласно преобразованиям Лоренца (5.4)

$$x_1' = \frac{x_1 - \upsilon t}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad x_2' = \frac{x_2 - \upsilon t}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$t_1' = \frac{t_1 - \upsilon x_1 / c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \; t_2' = \frac{t_2 - \upsilon x_2 / c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{5.6}$$

Из (5.6) следует, что $x_1' \neq x_2'$ и $t_1' \neq t_2'$. Таким образом, в системе K' эти события, *оставаясь пространственно разобщенными, оказываются и неодновременными*.

Длительность событий в разных системах отсчета

Пусть в некоторой точке (с координатой x), покоящейся относительно системы K, происходит событие, длительность которого (разность показаний часов в конце и начале события) $\tau = t_2 - t_1$, где индексы 1 и 2 соответствуют началу и концу события. Длительность этого же события в системе K'

$$\tau' = t_2' - t_1', \tag{5.7}$$

где

$$t_1' = \frac{t_1 - \upsilon x / c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad t_2' = \frac{t_2 - \upsilon x / c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{5.8}$$

Подставив (5.8) в (5.7), получаем

$$\tau' = (t_2 - t_1) / \sqrt{1-\beta^2},$$

или

$$\tau' = \tau / \sqrt{1-\beta^2}. \tag{5.9}$$

Отметим, что $\tau < \tau'$, т. е. *длительность события, происходящего в некоторой точке, наименьшая в той инерциальной системе отсчета, относительно которой эта точка неподвижна. Следовательно, часы, движущиеся относительно инерциальной системы отсчета, идут медленнее покоящихся часов, т.е. ход часов замедляется в системе отсчета, относительно которой часы движутся*.

Длина тел в разных системах отсчета

Рассмотрим стержень, расположенный вдоль оси x' и покоящийся относительно системы K'. Длина стержня в системе K' будет $l'_0 = x'_2 - x'_1$, где x'_1 и x'_2 – не изменяющиеся со временем t' координаты начала и конца стержня, индекс ноль показывает, что в системе K' стержень покоится. Определим длину этого стержня в системе K, относительно которой он движется со скоростью υ.

Для этого необходимо измерить координаты его концов x_1 и x_2 в системе K *в один и тот же момент времени t.* Их разность $l = x_2 - x_1$ и даст длину стержня в системе K:

$$l'_0 = x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - \upsilon t}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{x_1 - \upsilon t}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad (5.10)$$

т. е.

$$l'_0 = \frac{l}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (5.11)$$

Размер тела, движущегося относительно инерциальной системы отсчета, уменьшается в направлении движении в $\sqrt{1-\beta^2}$ раз, т. е. *лоренцево сокращение длины тем больше, чем больше скорость движения. При этом поперечные размеры тела не зависят от скорости его движения и одинаковы во всех инерциальных системах отсчета.*

Релятивистский закон сложения скоростей

Пусть материальная точка движется в системе K' вдоль оси x', а K' движется относительно K со скоростью υ (оси x и x' совпадают), тогда из (5.4) получим

$$u_x = \frac{dx}{dt}, \quad u'_x = \frac{dx'}{dt'}, \qquad (5.12)$$

$$dx = \frac{dx' + \upsilon dt'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad dt = \frac{dt' + \upsilon dx'/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{5.13}$$

Подставляя (5.13) в (5.12), получим *релятивистский закон сложения скоростей*:

$$u_x = \frac{dx' + \upsilon dt'}{dt' + \upsilon dx'/c^2} = \frac{dt'(u'_x + \upsilon)}{dt'(1 + \upsilon u'_x/c^2)} = \frac{u'_x + \upsilon}{1 + \upsilon u'_x/c^2}. \tag{5.14}$$

Аналогично получим обратные преобразования

$$u'_x = \frac{u_x - \upsilon}{1 - \upsilon u_x/c^2}. \tag{5.15}$$

Если скорости υ, u'_x и u_x малы по сравнению со скоростью света c, то эти формулы переходят в закон сложения скоростей в классической механике. Релятивистский закон сложения скоростей *не противоречит второму постулату Эйнштейна.* В самом деле, если $u'_x = c$, то $u_x = c$. Если $u_x = c$, то $u'_x = c$, т. е. скорость *c – предельная скорость,* которую невозможно превысить.

§ 5.4. Интервал между событиями

В четырехмерном пространстве Эйнштейна, в котором каждое событие характеризуется четырьмя координатами (*x, y, z, t*), вводится понятие *интервала между событиями:*

$$S_{12} = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2}, \tag{5.16}$$

где $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2} = l_{12}$ – расстояние между точками обычного трехмерного пространства, в которых эти события произошли.

Введя обозначение $t_{12} = t_2 - t_1$, получим

$$S_{12} = \sqrt{c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2}. \tag{5.17}$$

Интервал S_{12} является *инвариантной* по отношению к преобразованию координат величиной, т. е. не зависящей от системы отсчета.

Докажем это утверждение. Обозначим через $\Delta t = t_2 - t_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$ и $\Delta z = z_2 - z_1$, тогда

$$S_{12}^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2. \tag{5.18}$$

Интервал между теми же событиями в системе K' равен

$$(S'_{12})^2 = c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2. \tag{5.19}$$

Согласно преобразованиям Лоренца (5.4), имеем

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - \upsilon\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \Delta y' = \Delta y, \quad \Delta z' = \Delta z, \quad \Delta t' = \frac{\Delta t - \upsilon\Delta x / c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{5.20}$$

Подставив эти формулы в (5.19), получим

$$(S'_{12})^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 = S_{12}^2. \tag{5.21}$$

Теория относительности сформулировала новое представление о пространстве и времени. Пространственно-временные отношения являются не абсолютными величинами, как утверждала механика Галилея – Ньютона, а *относительными.* Следовательно, представления об абсолютном пространстве и времени являются несостоятельными. Кроме того, инвариантность интервала между двумя событиями свидетельствует о том, что пространство и время органически связаны между собой и образуют единую форму существования материи – пространство-время. Пространство и время не существует вне материи и независимо от нее.

§ 5.5. Основной закон релятивистской динамики

Релятивистский импульс *определяется как*

$$\boldsymbol{p} = \frac{m\boldsymbol{\upsilon}}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}, \tag{5.22}$$

где m – масса частицы.

Закон сохранения релятивистского импульса гласит, что релятивистский импульс замкнутой системы сохраняется, т.е. не изменяется с течением времени.

Из принципа относительности Эйнштейна (см. § 5.2), утверждающего инвариантность всех законов природы при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, следует условие инвариантности уравнений физических законов относительно преобразований Лоренца.

Основной закон релятивистской динамики имеет вид*:*

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\boldsymbol{\upsilon}}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}\right), \tag{5.23}$$

где $\boldsymbol{p}$ – *релятивистский импульс* материальной точки.

Это уравнение *инвариантно по отношению к преобразованиям Лоренца* и, следовательно, удовлетворяет *принципу относительности Эйнштейна*. Следует учитывать, что ни импульс, ни сила не являются инвариантными величинами.

Из приведенных формул (5.22) и (5.23) следует, что при скоростях, значительно меньших *с*, они переходят в формулы классической механики. Следовательно, условием применимости законов классической (ньютоновской) механики является условие $\upsilon \ll c$. Законы классической механики получаются как следствие теории относительности для предельного случая $\upsilon \ll c$ (формально переход осуществляется при $c \to \infty$). Таким образом, *классическая механика – это механика макротел, движущихся с малыми скоростями* (по сравнению со скоростью света в вакууме).

§ 5.6. Энергия в релятивистской динамике

Полная энергия релятивистской частицы *определяется как*

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}, \qquad (5.24)$$

где m – масса частицы, υ – ее скорость. Полная энергия в разных системах отсчета различна.

Энергия покоящегося тела (при $\upsilon = 0$)

$$E_0 = mc^2. \qquad (5.25)$$

Классическая механика энергию покоя E_0 не учитывает, считая, что при $\upsilon = 0$ энергия покоящегося тела равна нулю.

Закон сохранения энергии *в релятивистской механике гласит, что* полная энергия замкнутой системы сохраняется, т.е. не изменяется с течением времени.

Кинетическая энергия тела *определяется формулой*

$$K = E - E_0 = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} - 1\right), \qquad (5.26)$$

поскольку полная энергия в релятивистской динамике — это сумма кинетической энергии и энергии покоя.

Из формул (5.22) и (5.24) легко получить выражение, связывающее энергию и импульс:

$$E^2 - p^2c^2 = \frac{m^2c^4}{1-\upsilon^2/c^2} - m^2\upsilon^2c^2 = m^2c^4 = E_0^2. \qquad (5.27)$$

Отсюда получим

$$E^2 = m^2c^4 + p^2c^2. \qquad (5.28)$$

Учитывая, что $E = K + E_0 = K + mc^2$, отсюда получим

$$pc = \sqrt{K(K+2mc^2)}. \qquad (5.29)$$

Контрольные вопросы

1. Какие принципы лежат в основе специальной теории относительности?
2. Как связаны друг с другом преобразования Галилея и преобразования Лоренца?
3. Какие вы знаете инвариантные величины?
4. Напишите формулу, выражающую импульс частицы через ее энергию и скорость.
5. Напишите формулу, выражающую энергию частицы через ее импульс.
6. Что характерно для частиц с нулевой массой?
7. Соблюдается ли закон сохранения импульса в специальной теории относительности?

Задачи

1. Во сколько раз замедляется ход времени при скорости движения часов υ = 240 000 км/с?
2. Найти относительную скорость двух частиц, движущихся навстречу друг другу со скоростью $\upsilon = c/2$.
3. Написать выражение для полной энергии частицы, ее кинетической энергии, энергии покоя, импульса частицы. Каким соотношением связаны энергии и импульс релятивистской частицы?
4. В ходе эксперимента были определены импульс и энергия частицы. Найти ее скорость и массу.
5. Электрон начинает ускоряться в однородном электрическом поле, напряженность которого направлена вдоль оси x. Нарисовать качественно графики зависимости от x: а) полной E и кинетической K энергий электрона; б) импульса электрона; в) скорости электрона.
6. Почему при $\upsilon = c$ преобразования Лоренца теряют смысл?

7. Может ли при аннигиляции электрона ($q = -e$) и позитрона ($q = +e$) образоваться один фотон? Ответ обосновать с помощью законов сохранения энергии и импульса.

Глава 6
Колебательное движение

§ 6.1. Общие сведения о колебаниях

Колебаниями называются процессы, отличающиеся той или иной степенью повторяемости.

Таким свойством повторяемости обладают, например, качания маятника часов, колебания струны или ножек камертона, напряжение между обкладками конденсатора в контуре радиоприемника и т. п.

В зависимости от физической природы повторяющегося процесса различают колебания:

– механические;
– электромагнитные;
– электромеханические и т. д.

В зависимости от характера воздействия на колеблющуюся систему различают:

– свободные (или собственные);
– вынужденные;
– автоколебания;
– параметрические колебания.

Свободными или *собственными* называются такие колебания, которые происходят в системе, предоставленной самой себе после того, как ей был сообщен толчок либо она была выведена из положения равновесия. Примером могут служить колебания шарика, подвешенного на нити (маятник).

Вынужденными называются такие колебания, в процессе которых колеблющаяся система подвергается воздействию внешней периодически изменяющейся силы.

Автоколебания сопровождаются воздействием на колеблющуюся систему внешних сил, однако моменты времени, когда осуществляются эти воздействия, задаются самой колеблющейся системой — система сама управляет внешним воздействием. Примером автоколебательной системы являются часы, в которых маятник получает толчки за счет энергии поднятой гири или закрученной пружины, причем эти толчки происходят в моменты прохождения маятника через среднее положение.

При *параметрических* колебаниях за счет внешнего воздействия происходит периодическое изменение какого-либо параметра системы, например длины нити маятника.

Простейшими являются *гармонические колебания*, т. е. такие колебания, при которых колеблющаяся величина (например, отклонение маятника) изменяется со временем по закону синуса или косинуса.

§ 6.2. Кинематика гармонического колебательного движения

Важнейшим среди колебательных движений является так называемое простое или гармоническое колебательное движение.

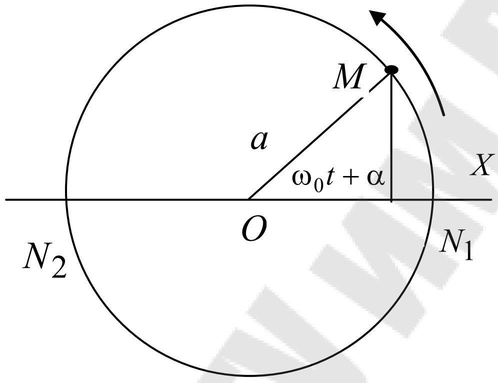


Рис. 6.1

Характер такого движения лучше всего раскрывается с помощью следующей кинематической модели. Допустим, что геометрическая точка *M* равномерно вращается по окружности радиуса а с постоянной угловой скоростью ω_0 (рис. 6.1). Ее проекция *N* на диаметр, например на ось *X*, будет совершать колебательное движение от крайнего положения N_1 до другого крайнего положения N_2 и обратно. Такое колебание точки *N* называют простым или гармоническим колебанием.

Чтобы его описать, надо найти координату *x* точки *N* как функцию времени *t*. Допустим, что в начальный момент времени $t = 0$ радиус OM образовал с осью *X* угол α. Спустя время t этот угол получит приращение $\omega_0 t$ и сделается равным $\omega_0 t + \alpha$. Из рис. 6.1. видно, что

$$x = a\cos(\omega_0 t + \alpha)\,. \tag{6.1}$$

Это формула и описывает аналитически гармоническое колебательное движение точки *N* вдоль диаметра $N_1 N_2$.

Величина *a* дает максимальное отклонение колеблющейся точки от положения равновесия. Она называется *амплитудой* колебания. Величина ω_0 называется *циклической частотой*. Величину $\omega_0 t+\alpha$ называют *фазой* колебания, а ее значение при $t=0$, т. е. величину α – *начальной* фазой. По истечении времени

$$T=\frac{2\pi}{\omega_0} \tag{6.2}$$

фаза получает приращение 2π, а колеблющаяся точка возвращается в свое исходное положение с сохранением начального направления движения. Время *T* называется периодом колебания.

Скорость колеблющейся точки найдется дифференцированием выражения (6.1) по времени. Это дает

$$V=\dot{x}=-\omega_0 a\sin(\omega_0 t+\alpha). \tag{6.3}$$

Дифференцируя вторично, получаем ускорение

$$w=\dot{V}=-\omega_0^2 a\cos(\omega_0 t+\alpha), \tag{6.4}$$

или, используя (6.1),

$$w=-\omega_0^2 x. \tag{6.5}$$

Сила, действующая на материальную точку при гармоническом колебании, равна

$$F=m\ddot{x}=-m\omega_0^2 x. \tag{6.6}$$

Она пропорциональна отклонению x и имеет противоположное направление. Она всегда направлена к положению равновесия.

Рассмотрим гармонические колебания груза на пружине, один конец которой закреплен, а к другому подвешено тело массы *m* (рис. 6.2). Пусть l_0 – длина не деформированной пружины. Если пружину растянуть или сжать до длины *l*, то возникает сила *F*, стремящаяся вернуть тело в положение равновесия. При небольших растяжениях $x=l-l_0$ справедлив *закон Гука* – сила пропорциональна растяжению пружины: $F=-kx$. В этих условиях уравнение движения тела имеет вид

$$m\ddot{x}=-kx\ . \tag{6.7}$$

Постоянная *k* называется *коэффициентом* упругости или жесткости пружины. Знак минус означает, что сила *F* направлена в сторону, противоположную смещению *x*, т. е. к положению равновесия.

При выводе уравнения (6.7) предполагалось, что никакие другие силы на тело не действуют. Покажем, что тому же уравнению подчиняется движение тела, подвешенного на пружине в однородном поле тяжести. Обозначим в этом случае буквой X удлинение пружины, т. е. разность $X = l - l_0$. Пружина тянет груз вверх с силой kX, сила тяжести – вниз. Уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{X} = -kX + mg.$$

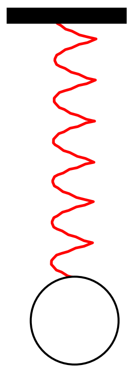


Рис. 6.2

Пусть X_0 означает удлинение пружины в положении равновесия. Тогда $-kX_0 + mg = 0$. Исключая вес mg, получим $m\ddot{X} = -k(X - X_0)$. Ведем обозначение $x = X - X_0$, тогда уравнение движения примет прежний вид (6.7). Величина x по-прежнему означает смещение груза из положения равновесия. Однако положение равновесия смещается под действием силы тяжести. Кроме того, при наличии тяжести меняется смысл величины $-kx$. Теперь она означает равнодействующую сил натяжения пружины и веса груза. Но все это не затрагивает математическую сторону процесса. Поэтому можно рассуждать так, как если бы силы тяжести совсем не было. Так мы и поступим.

Результирующая сила $F = -kx$ имеет такой же вид, что и сила в выражении (6.6). Если положить $m\omega_0^2 = k$, то уравнение (6.7) перейдет в

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}. \qquad (6.8)$$

Это уравнение совпадает с уравнением (6.5). Функция (6.1) является решением такого уравнения при любых значениях постоянных a и α. Это есть общее решение. Из изложенного следует, что груз на пружине будет совершать гармонические колебания с круговой частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{6.9}$$

и периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,. \tag{6.10}$$

Колебания, описываемые уравнением (6.8) являются *свободными* (или *собственными*).

Потенциальная и кинетическая энергии тела даются выражениями

$$U = \frac{1}{2}kx^2, \quad K = \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2\,. \tag{6.11}$$

Каждая из них меняется во времени. Однако их сумма E во времени должна оставаться постоянной:

$$E = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \text{const.} \tag{6.12}$$

Если воспользоваться выражением (6.1), то из формул (6.11) найдем

$$U = \frac{1}{2}ka^2\cos^2(\omega_0 t + \alpha), \quad K = \frac{1}{2}m\omega_0^2 a^2\sin^2(\omega_0 t + \alpha),$$

или в силу соотношения (6.9)

$$K = \frac{1}{2}ka^2\sin^2(\omega_0 t + \alpha).$$

Эти формулы можно также записать в виде

$$U = \frac{1}{4}ka^2\left[1 + \cos 2(\omega_0 t + \alpha)\right], \quad K = \frac{1}{4}ka^2\left[1 - \cos 2(\omega_0 t + \alpha)\right].$$

Они показывают, что кинетическая и потенциальная энергии в отдельности не остаются постоянными, а совершают гармонические колебания вокруг общего среднего значения $\frac{1}{4}ka^2$ с удвоенной круговой частотой $2\omega_0$. Когда кинетическая энергия проходит через максимум, потенциальная обращается в нуль и обратно. Однако полная энергия $E = K + U$ остается постоянной и связана с амплитудой a соотношением

$$E = \frac{1}{2} k a^2 . \qquad (6.13)$$

Все изложенное здесь применимо к гармоническим колебаниям любых механических систем с одной степенью свободы. Мгновенное положение механической системы с одной степенью свободы может быть определено с помощью какой-либо одной величины q, называемой обобщенной координатой, например, угла поворота, смещения вдоль некоторой линии и пр. Производная $\dot{q}$ обобщенной координаты по времени называется обобщенной скоростью. При рассмотрении колебаний механических систем с одной степенью свободы за исходное удобнее брать не уравнение движения Ньютона, а уравнение энергии. Допустим, что механическая система такова, что ее потенциальная и кинетическая энергии выражаются формулами вида

$$U = \frac{\delta}{2} q^2, \quad K = \frac{\beta}{2} \dot{q}^2, \qquad (6.14)$$

где δ и β – положительные постоянные (параметры системы). Тогда закон сохранения энергии приводит к уравнению

$$E = \frac{\delta}{2} q^2 + \frac{\beta}{2} \dot{q}^2 = \mathrm{const} . \qquad (6.15)$$

Оно отличается от уравнения (6.12) только обозначениями, что при математическом рассмотрении не имеет значения. Из математической тождественности уравнений (6.12) и (6.15) следует, что и общие решения их одинаковы. Поэтому, если уравнение энергии приводится к виду (6.15), то

$$q = q_0 \cos(\omega_0 t + \alpha) , \qquad (6.16)$$

т. е. обобщенная координата q совершает гармоническое колебание с круговой частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\delta}{\beta}} . \qquad (6.17)$$

§ 6.3. Физический и математический маятники

Физическим маятником называется твердое тело, которое может качаться вокруг неподвижной горизонтальной оси. Точка пересечения ее A вертикальной плоскостью, проходящей через центр масс маятника, называется точкой подвеса маятника (рис. 6.3). Положение тела в каждый момент времени можно характеризовать углом отклонения его из положения равновесия φ. Угол φ играет роль обобщенной координаты q. Кинетическая энергия качающегося физического маятника определяется выражением

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} I\dot{\varphi}^2,$$

где I – момент инерции маятника относительно оси A.

Потенциальная энергия равна

$$U = mgh,$$

где h – высота поднятия центра масс C над его самым нижним положением. Обозначим через a расстояние между центром масс C и точкой подвеса A. Тогда

$$U = mga(1 - \cos\varphi) = 2mga \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

В случае малых колебаний синус угла $\varphi/2$ можно приближенно заменить самим углом. В этом приближении

$$U = \frac{mga}{2}\varphi^2.$$

Таким образом, для малых колебаний потенциальная и кинетическая энергии приводятся к виду (6.14), причем $\delta = mga$, $\beta = I$. Отсюда следует, что малые колебания физического маятника будут приблизительно гармоническими с циклической частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mga}{I}} \tag{6.18}$$

и периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mga}}. \tag{6.19}$$

Частным случаем физического маятника является *математический маятник*. Так называется маятник, вся масса которого практически сосредоточена в одной точке – в центре масс маятника C.

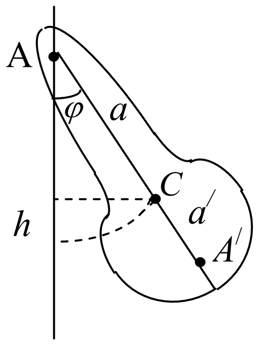


Рис. 6.3

Примером математического маятника может служить шарик, подвешенный на длинной нити. В случае математического маятника

$$a = l, \quad I = ml^2,$$

где l – длина маятника.

Формула (6.19) переходит в

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{6.20}$$

Сравнивая формулы (6.19) и (6.20), заключаем, что физический маятник колеблется так же, как математический маятник с длиной

$$l = \frac{I}{ma}, \tag{6.21}$$

которая называется приведенной длиной физического маятника.

Отложим от точки подвеса A вдоль прямой AС отрезок AA', длина которого равна приведенной длине физического маятника l (см. рис. 6.3). Точка A' называется центром качания. Центр качания можно определить как математическую точку, в которой надо сосредоточить всю массу физического маятника, чтобы период его колебаний остался без изменений.

По теореме Штейнера

$$I = I_C + ma^2,$$

где I_C – момент инерции маятника относительно параллельной оси, проходящей через центр масс C. Подставив это выражение в формулу (6.21), придадим ей вид

$$l = a + \frac{I_C}{ma}. \tag{6.22}$$

Отсюда следует, во-первых, что $l > a$, т. е. точка подвеса A и центр качания A' лежат по разные стороны от центра масс С и, во-вторых, что всем точкам подвеса, одинаково удаленным от центра масс маятника, соответствует одна и та же приведенная длина l, а следовательно, один и тот же период колебаний T.

Точка подвеса и центр качания являются взаимными или сопряженными точками в следующем смысле. Если маятник подвесить за центр качания A', то его период не изменится и прежняя точка подвеса A сделается новым центром качания.

§ 6.4. Сложение колебаний одинакового направления

Решение ряда вопросов, в частности сложение нескольких колебаний одинакового направления значительно облегчается и становится наглядным, если изображать колебания графически в виде векторов на плоскости. Полученная таким способом схема называется векторной диаграммой. Возьмем ось, которую обозначим буквой X (рис. 6.4). Из точки O, взятой на оси, отложим вектор длины $\boldsymbol{a}$, образующий с осью угол α. Если привести этот вектор во вращение с угловой скорость ω_0, то проекция конца вектора будет перемещаться по оси X в пределах от $-a$ до $+a$, причем координата этой проекции будет изменяться со временем по закону (6.1). Следовательно, проекция конца вектора на ось будет совершать гармонический колебания с амплитудой, равной длине вектора, с круговой частотой, равной угловой скорости вращения вектора, и с начальной фазой, равной углу, образуемому вектором с осью в начальный момент времени. Рассмотрим сложение двух гармонических колебаний одинакового направления и одинаковой частоты:

$$x_1 = a_1\cos(\omega_0 t + \alpha_1),$$

$$x_2 = a_2\cos(\omega_0 t + \alpha_2)\ .$$

Результирующее колебание есть:

$$x = x_1 + x_2. \tag{6.23}$$

Соответствующая векторная диаграмма приведена на рис. 6.4. Результирующий вектор $\boldsymbol{a}$ вращается с той же угловой скоростью ω_0, как векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$, так что результирующее движение будет гармоническим колебанием с частотой ω_0, амплитудой a и

$$x = a\cos(\omega_0 t + \alpha). \tag{6.24}$$

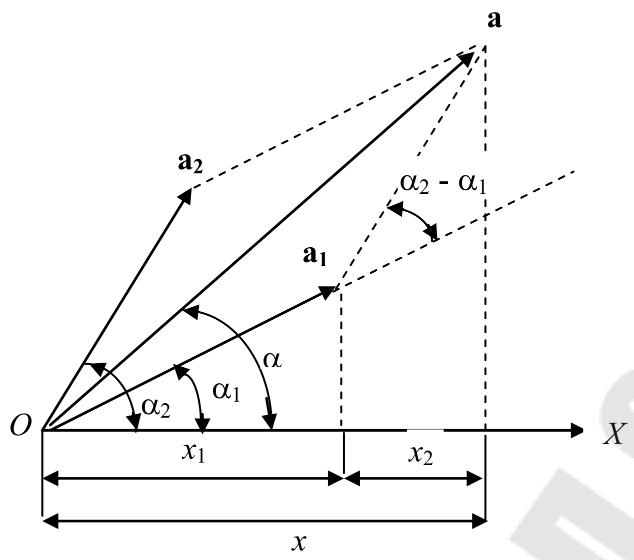


Рис. 6.4

Необходимо определить амплитуду a и фазу α. Из рис. 6.4 видно, что

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 \cos[\pi - (\alpha_2 - \alpha_1)] = \\ = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1). \tag{6.25}$$

Здесь мы воспользовались теоремой косинусов. Далее из рисунка находим

$$tg\alpha = \frac{a_1 \sin\alpha_1 + a_2 \sin\alpha_2}{a_1 \cos\alpha_1 + a_2 \cos\alpha_2} \ . \tag{6.26}$$

§ 6.5. Биения

Биениями называется сумма двух гармонических колебаний одного направления мало различающихся по частоте.

Обозначим частоту одного из колебаний буквой ω, частоту второго колебания $\omega + \Delta\omega$. По условию имеем: $\Delta\omega \ll \omega$. Амплитуды обоих колебаний будем полагать одинаковыми и равными a. Допустим, что начальные фазы обоих колебаний равны нулю. Тогда уравнения колебаний будут иметь следующий вид:

$$x_1 = a\cos(\omega t),\ \ x_2 = a\cos[(\omega + \Delta\omega)t].$$

Их сумма есть

$$x \ = x_1 + x_2 = 2\cos\left[\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\right]\cos(\omega t). \tag{6.27}$$

Во втором множители мы пренебрегли членом $\Delta\omega/2$ по сравнению с ω. График функции (6.27) изображен на рис. 6.5, *а*. График построен для $\Delta\omega/\omega = 10$.

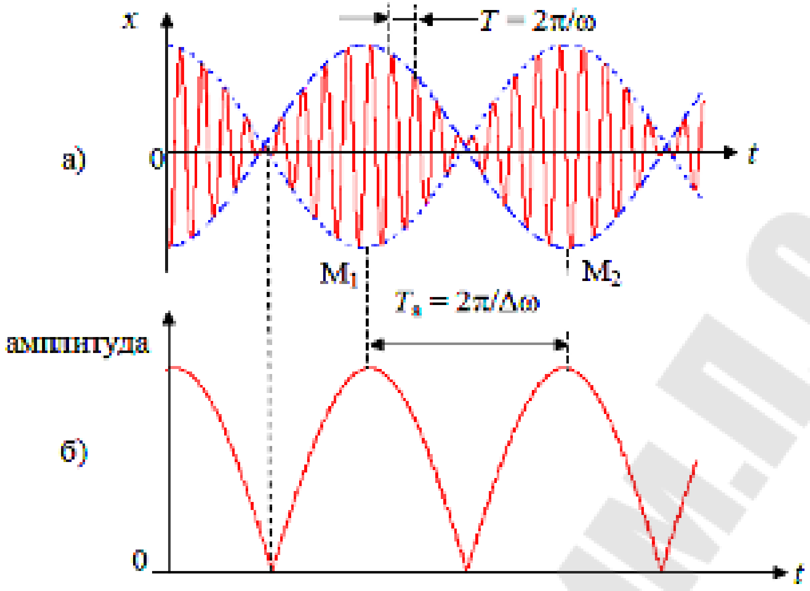


Рис. 6.5

Заключенный в квадратные скобки множитель в формуле (6.27) изменяется гораздо медленнее, чем второй множитель. Ввиду условия $\Delta\omega << \omega$ за то время, за которое множитель $\cos(\omega t)$ совершает несколько полных колебаний, множитель стоящий в квадратных скобках, почти не изменяется. График амплитуды показан на рис. 6.5, *б*. Аналитическое выражение для амплитуды, очевидно, имеет вид

$$\text{Амплитуда} = \left| 2a\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \right|. \qquad (6.28)$$

Функция (6.28) – периодическая функция с частотой, в два раза превышающей частоту выражения, стоящего под знаком модуля. Таким образом, частота пульсаций амплитуды – ее называют *частотой биения* – равна разности частот складываемых колебаний.

§ 6.6. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

Допустим, что материальная точка может совершать колебания как вдоль оси X, так и вдоль перпендикулярной к ней оси Y. В этом случае, материальная точка будет двигаться по некоторой, вообще говоря, криволинейной траектории, форма которой зависит от разности фаз обоих колебаний.

Выберем начало отсчета времени так, чтобы начальная фаза первого колебания была равна нулю. Тогда уравнения колебаний запишутся следующим образом:

$$x = a\cos(\omega t),\ \ y = b\cos(\omega t + \alpha), \tag{6.29}$$

где α – разность фаз обоих колебаний.

Выражения (6.29) представляют собой заданной в параметрической форме уравнение траектории, по которой движется тело, участвующее в обоих колебаниях. Чтобы получить уравнение траектории в обычном виде, нужно исключить из уравнений (6.29) параметр t. Из первого уравнения следует, что

$$\cos(\omega t) = x/a. \tag{6.30}$$

Следовательно,

$$\sin(\omega t) = \pm\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}. \tag{6.31}$$

Теперь развернем косинус во втором из уравнений (6.29) по формуле для косинуса суммы, подставляя при этом вместо $\cos(\omega t)$ и $\sin(\omega t)$ их значения (6.30) и (6.31). В результате получим

$$\frac{y}{b} = \frac{x}{a}\cos\alpha \mp \sin\alpha\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Перенося $\frac{x}{a}\cos\alpha$ в левую часть равенства и возводя обе части в квадрат, получим

$$\left(\frac{y}{b} - \frac{x}{a}\cos\alpha\right)^2 = \sin^2\alpha\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Перепишем последнее равенство в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab}\cos\alpha = \sin^2\alpha. \tag{6.32}$$

Уравнение (6.32) есть уравнение эллипса, оси которого повернуты относительно координатных осей x и y. Ориентация эллипса и значения его полуосей зависят довольно сложным образом от амплитуд a и b и разности фаз α.

Определим форму траектории для некоторых частных случаев.

$\alpha = 0$. В этом случае уравнение (6.32) принимает вид

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2 = 0,$$

откуда получается уравнение прямой

$$y = \frac{b}{a}x. \qquad (6.33)$$

Результирующее движение является гармоническим колебанием вдоль этой прямой с частотой ω и амплитудой, равной $\sqrt{a^2 + b^2}$ (рис. 6.6).

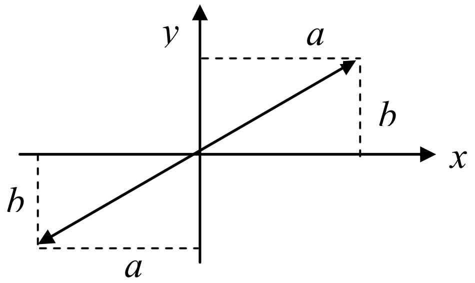


Рис. 6.6

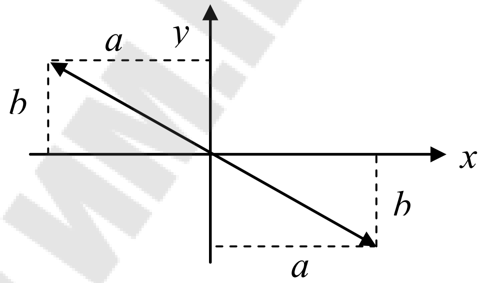


Рис. 6.7

$\alpha = \pm\pi$. Уравнение (6.32) имеет вид

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 = 0, \qquad (6.34)$$

откуда получается, что результирующее движение представляет собой гармоническое колебание вдоль прямой (рис. 6.7)

$$y = -\frac{b}{a}x.$$

При $\alpha = \pm\pi/2$ имеем

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (6.35)$$

т. е. в уравнение эллипса, приведенного к координатным осям, причем полуоси эллипса равны соответствующим амплитудам колебаний. При равенстве амплитуд a и b эллипс вырождается в окружность.

Случаи $\alpha = +\pi/2$ и $\alpha = -\pi/2$ различаются направлением движения по эллипсу или по окружности.

Если частоты взаимно перпендикулярных колебаний не одинаковы, то траектория результирующего движения имеет вид довольно сложных кривых называемых *фигурами Лиссажу*. На рис. 6.8 показана одна из простейших траекторий, получающихся при отношении частот 1:2 и разности фаз π/2. Уравнения колебаний имеют вид

$$x = a\cos(\omega t),\ \ y = b\cos(2\omega t + \pi/2).$$

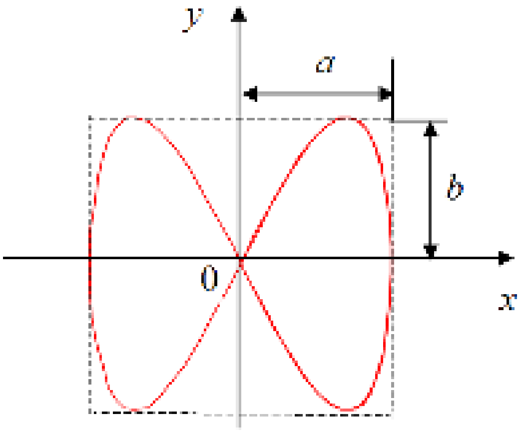


Рис. 6.8

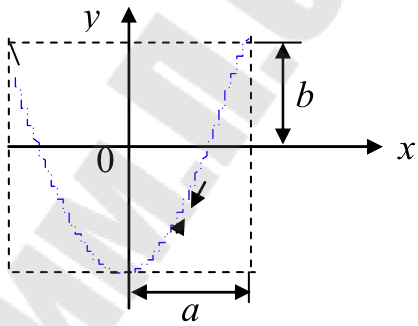


Рис. 6.9

§ 6.7. Затухающие колебания

Во всякой реальной колебательной системе имеются силы сопротивления, действие которых приводит к уменьшению энергии системы. Если убыль энергии не восполняется за счет работы внешних сил, колебания будут затухать. В простейшем, и вместе с тем наиболее часто встречающемся случае, сила сопротивления F^* пропорциональна скорости:

$$F_x^* = -r\dot{x}\,. \qquad (6.36)$$

Здесь r – постоянная, называемая *коэффициентом сопротивления*.

Знак минус обусловлен тем, что сила $\boldsymbol{F}^*$ и скорость $\boldsymbol{V}$ имеют противоположные направления; следовательно, их проекции на ось X имеют разные знаки.

Уравнение второго закона Ньютона при наличии сил сопротивления имеет вид

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}\,. \qquad (6.37)$$

Используя обозначения

$$2\beta = r/m,\ \ \omega_0^2 = k/m, \tag{6.38}$$

перепишем уравнение (6.37) следующим образом:

$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}. \tag{6.39}$$

Это дифференциальное уравнение описывает затухающие колебания системы.

Отметим, что ω_0 представляет собой ту частоту, с которой совершались бы свободные колебания системы в отсутствие сопротивления среды (при $r = 0$). Эту частоту называют *собственной частотой* системы.

При не слишком сильном затухании ($\beta < \omega_0$) общее решение уравнения (6.39) имеет вид

$$x = a_0\exp(-\beta t)\cos(\omega t + \alpha). \tag{6.40}$$

Здесь a_0 и α – произвольные постоянные; ω – величина, определяемая формулой

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \tag{6.41}$$

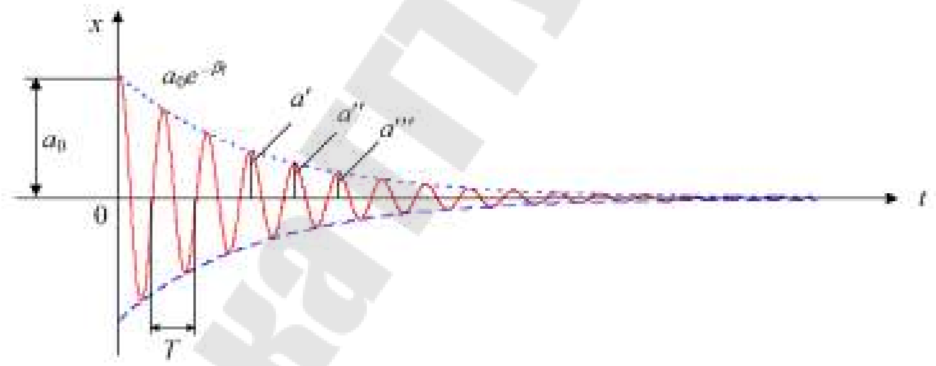


Рис. 6.10

На рис. 6.10 дан график функции (6.40). Штриховыми линиями показаны пределы, в которых находится смещение колеблющейся точки x. Движение системы можно рассматривать как гармоническое колебание с частотой ω с амплитудой, изменяющейся по закону $a(t) = a_0\exp(-\beta t)$.

Скорость затухания колебаний определяется величиной $\beta = r/2m$, которую называют *коэффициентом затухания.* Найдем время τ, за которое амплитуда уменьшается в e раз. По определению

$$\exp(-\beta\tau) = \exp(-1),$$

откуда $\beta\tau = 1$. Следовательно, коэффициент затухания обратен по величине тому промежутку времени, за который амплитуда уменьшается в e раз.

Вообще отношение значений амплитуд, соответствующих моментам времени, различающимся на период, равно

$$\frac{a(t)}{a(t+T)} = \exp(\beta T).$$

Это отношение называется *декрементом затухания*, а его логарифм – *логарифмическим декрементом затухания:*

$$\lambda = \ln\frac{a(t)}{a(t+T)} = \beta T. \tag{6.42}$$

Выразив в соответствии с (6.42) β через λ и T, можно закон убывания амплитуд со временем записать в виде

$$a = a_0 \exp\left(-\frac{\lambda}{T}t\right).$$

За время τ, за которое амплитуда уменьшается в e раз, система успевает совершить $N_e = \tau/T$ колебаний. Из условия $\exp[-(\lambda/T)\tau] = \exp(-1)$ получается, что $\lambda(\tau/T) = \lambda N_e = 1$. Следовательно, логарифмический декремент затухания обратен по величине числу колебаний, совершаемых за тоже время, за которое амплитуда уменьшается в e раз.

Из формулы (6.41) следует, что с ростом коэффициента затухания период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \tag{6.43}$$

увеличивается. При $\beta = \omega_0$ период колебаний обращается в бесконечность, т. е. движение перестает быть периодическим. При $\beta > \omega_0$ движение носит *апериодический* (непериодический) характер – выведенная из положения равновесия система возвращается в положение равновесия, не совершая колебаний. На рис. 6.11 показаны два возможных способа возвращения системы к положению равновесия при апериодическом движении. Каким из этих способов система приходит в положение равновесия, зависит от начальных условий. Движение, изображаемое кривой 2, получается в том случае, когда система начинает двигаться из положения, характеризуемого смещением x_0, к положению равновесия с начальной скоростью V_0. Это условие будет выполнено в том случае, если выведенной из положения равновесия системе сообщить достаточно сильный толчок к положению равновесия. Если, отведя систему из положения равновесия, отпустить ее без толчка (т. е. с $V_0 = 0$), движение будет происходить в соответствии с кривой 1.

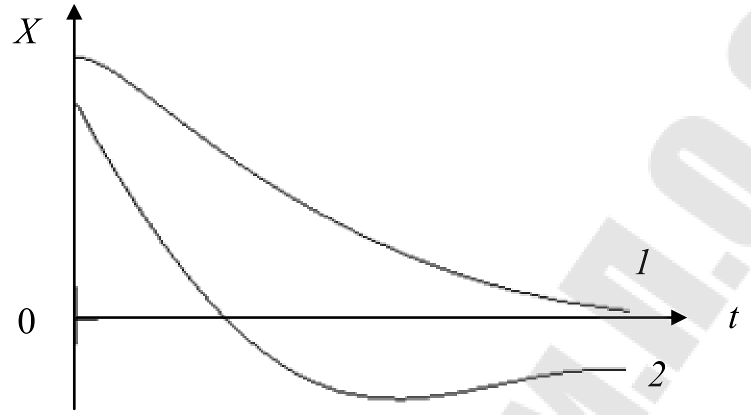


Рис. 6.11

§ 6.8. Вынужденные колебания

Пусть колебательная система подвергается действию внешней силы, изменяющейся со временем по гармоническому закону:

$$F_x = F_0 \cos \Omega t, \tag{6.44}$$

где Ω – круговая частота вынуждающей силы.

Как и в рассмотренных выше случаях на колебательную систему действуют силы упругости и сопротивления. В этом случае уравнение второго закона Ньютона имеет вид

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos \Omega t\,. \tag{6.45}$$

Введя обозначения

$$2\beta = \frac{r}{m}\ , \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}\ , \quad f_0 = \frac{F_0}{m}, \tag{6.46}$$

запишем уравнение (6.45) следующим образом:

$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\,\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \Omega t}. \tag{6.47}$$

Дифференциальное уравнение (6.47) описывает вынужденные колебания. Это уравнение является неоднородным. Здесь мы опускаем процедуру нахождения общего решения уравнения (6.47), а приведем лишь его окончательное выражение:

$$x = A\cos(\Omega t + \alpha), \tag{6.48}$$

где амплитуда колебания

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}, \tag{6.49}$$

а начальная фаза

$$\alpha = -\mathrm{arctg}\frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \tag{6.50}$$

Подставляя выражения (6.48)–(6.50) в формулу (6.47), легко убедиться в том, что (6.48) действительно является решением дифференциального уравнения (6.47).

Таким образом, функция (6.48) описывает установившиеся вынужденные колебания. Они представляют собой гармонические колебания с частотой, равной частоте вынуждающей силы. Амплитуда (6.49) вынужденных колебаний пропорциональна амплитуде вынуждающей силы. Для данной колебательной системы (определенных ω_0 и β) амплитуда зависит от частоты вынуждающей силы.

Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы приводит к тому, что при некоторой определенной для данной системы частоте амплитуда колебаний достигает максимального значения. Это явление называется *резонансом,* а соответствующая частота – *резонансной частотой.*

Чтобы определить резонансную частоту $\Omega_{рез}$, нужно найти максимум функции (6.49) или, что то же самое, минимум выражения, стоящего под корнем в знаменателе. Продифференцировав это выражение по Ω и приравняв к нулю, мы получим условие, определяющее $\Omega_{рез}$:

$$-4(\omega_0^2 - \Omega^2)\Omega + 8\beta^2\Omega = 0. \tag{6.51}$$

Уравнение (6.51) имеет три решения:

$$\Omega = 0 \;, \quad \Omega = \pm\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}\,.$$

Решение, равное нулю, соответствует максимуму знаменателя. Из остальных двух решений отрицательное должно быть отброшено как не имеющее физического смысла (частота не может быть отрицательной). Таким образом, для резонансной частоты получается одно значение:

$$\Omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}\,. \tag{6.52}$$

Подставив это значение частоты в (6.49), получим выражение для амплитуды при резонансе:

$$A_{рез} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \qquad (6.53)$$

Из (6.53) следует, что при отсутствии сопротивления среды амплитуда при резонансе обращалась бы в бесконечность. Согласно (6.52) резонансная частота при тех же условиях (при $\beta = 0$) совпадает с собственной частотой колебаний системы ω_0.

Контрольные вопросы

1. От чего зависят амплитуда и начальная фаза гармонических механических колебаний?

2. Можно ли с помощью векторной диаграммы найти результат сложения трех одинаково направленных гармонических колебаний одной частоты?

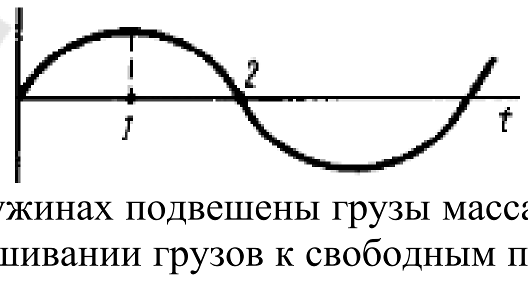
3. Как по виду фигуры Лиссажу найти отношение частот складываемых колебаний? В каких случаях это можно сделать?

4. Будет ли справедлива формула (6.41), если коэффициент β зависит от времени?

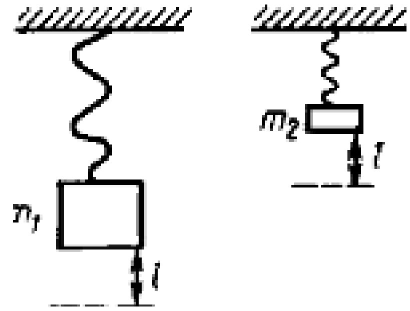
5. Почему в теории вынужденных колебаний уделяют такое большое внимание случаю, когда внешнее воздействие на колебательную систему изменяется по гармоническому закону?

Задачи

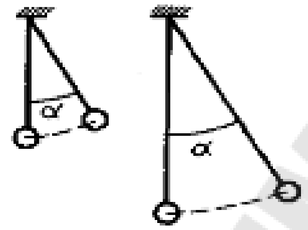
1. Колебания материальной точки совершаются по гармоническому закону. В какой из моментов – 1 или – 2 больше кинетическая энергия точки и в какой – больше потенциальная. В какой момент ускорение точки имеет максимальное значение (по модулю)?



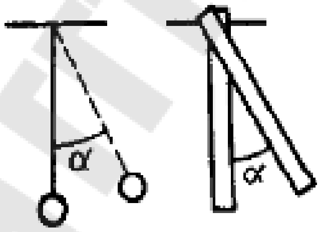
2. На двух пружинах подвешены грузы массами m_1 и m_2, причем $m_1 > m_2$. При подвешивании грузов к свободным пружинам последние получили одинаковые удлинения. У какого груза больше период колебаний и какой из грузов при одинаковых амплитудах облает большей энергией? Массой пружин можно пренебречь.



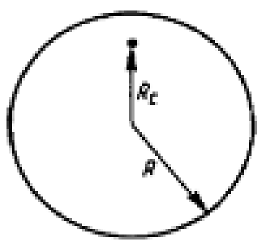
3. Два математических маятника, имеющих одинаковые массы, но разную длину, колеблются с одинаковыми угловыми амплитудами. У какого из маятников энергия колебаний больше?



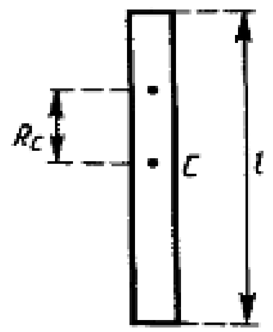
4. Два маятника – физический в виде однородного стержня и математический, – обладающие одинаковой массой и одинаковой длиной колеблются с одинаковыми угловыми амплитудами. У какого из маятников энергия колебания больше?



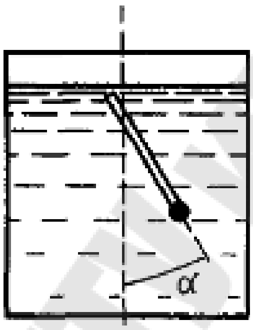
5. Сквозь диск радиусом R и массой m проходит ось на расстоянии R_c от центра диска. С каким периодом диск должен колебаться относительно неподвижной оси?



6. Физический маятник представляет собой однородный стержень длиной l. На каком расстоянии R_c от центра тяжести должна быть расположена точка подвеса, чтобы частота колебаний была максимальной?

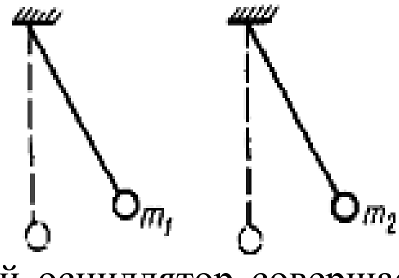


7. В вязкой среде находится маятник. Вязкость среды, масса и длина маятника таковы, что движение его апериодическое. Отведем маятник от положения равновесия и отпустим. Как должен меняться модуль его скорости (непрерывно расти, непрерывно убывать, проходить через максимум, проходить через минимум)?



8. Груз, подвешенный на пружине, двигаясь в вязкой среде, совершает затухающие колебания. Как надо изменить длину пружины (сохраняя все ее характеристики: толщину проволоки, плотность витков и т. п.), чтобы движение груза стало апериодическим? При ответе считать массу пружины весьма малой по сравнению с массой груза.

9. Два шара одинакового диаметра, но обладающие разной массой, подвешены на нитях одинаковой длины. Если их отклонить от положения равновесия, то какой будет колебаться с большим периодом и у какого будет больше логарифмический декремент затухания, если их колебания происходят в реальной среде, обладающей вязкостью?



10. Гармонический осциллятор совершает колебания. Какие из перечисленных величин достигают максимального значения в крайнем положении груза: скорость υ, ускорение a, упругая сила F, кине-

тическая энергия K, потенциальная энергия U? 1) υ, F, U; 2) υ, F, K; 3) a, υ, U; 4) υ, F; 5) υ, a, K, U.

11. Пружину растянули на длину Δl, затем еще на Δl. Найти отношение произведенных работ (большей к меньшей), считая деформацию упругой.

12. Две скрепленные между собой пружины с жестокостями k_1 и k_2 ($k_1 = 2k_2$) растянуты силой $\boldsymbol{F}$. Найти отношение потенциальных энергий пружин U_1/U_2 считая деформации упругими.1) $\sqrt{2}$; 2) 2; 3) 4; 4) 1/2; 5) 1/4.

13. В лифте, поднимающемся вверх с постоянным ускорением, гармонически колеблются: а) вертикальный пружинный маятник; б) шарик на нити. Зависят ли периоды колебаний маятников в обоих случаях от ускорения лифта?

14. Из трех гармонических одинаково направленных колебаний с равными амплитудами и частотами, но различными начальными фазами: а) $2\pi/3$; б) $11\pi/3$; в) $14\pi/3$ отобрать пары таких, которые при сложении гасят друг друга. 1) а и б; 2) б и в; 3) а и в; 4) а и б, а также а и в; 5) а и б, а также б и в.

Глава 7
Волны

§ 7.1. Волновые процессы. Механизм образования механических волн в упругой среде

Один из самых простых способов продемонстрировать волновое движение – это взять свободный конец длинной веревки, второй конец которой закреплен, и дернуть его вверх и вниз. Вдоль веревки побегут горбы и впадины волн, и если бы веревка была бесконечно длинной, то такие волны можно было бы назвать *бегущими волнами* – так называются волны, распространяющиеся в неограниченной среде, где нет отражения (рис.7.1).

Если размеры среды ограничены, например если веревку заменить скрипичной струной с закрепленными обоими концами, то бегущие волны, распространяющиеся по струне, отражались бы от обоих концов. Тогда колебания струны представляли бы собой комбинацию таких волн, распространяющихся взад и вперед по струне, и образовались бы *стоячие волны*.

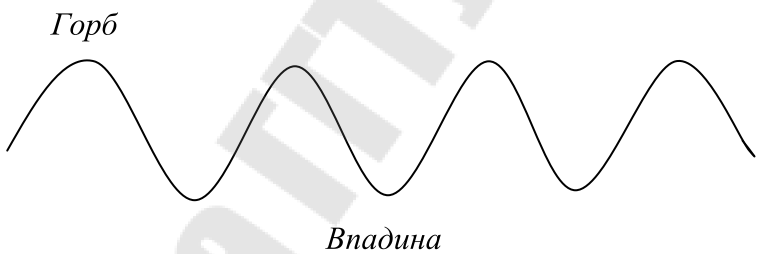


Рис. 7.1 Поперечные бегущие волны, распространяющиеся вдоль струны

Процесс распространения колебаний в пространстве называется волной. Частицы среды, в которой распространяется волна, не вовлекаются волной в поступательное движение, они лишь совершают колебания около своих положений равновесия. В зависимости от направления колебаний частиц по отношению к направлению, в котором распространяется волна, различают *продольные* и *поперечные* волны. В продольной волне частицы среды колеблются вдоль направления распространения волны. Упругие поперечные волны могут возникнуть лишь в среде, обладающей сопротивлением сдвигу. Поэтому в жидкой и газообразной средах возможно возникновение только продольных волн. В твердой среде возможно возникновение как продольных так и поперечных волн.

Геометрическое место точек до которых доходят колебания к моменту времени t, называется фронтом волны (*или волновым фронтом*). Фронт волны представляет собой ту поверхность, которая отделяет часть пространства, уже вовлеченную в волновой процесс, от области в которой колебания еще не возникли.

Геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе, называется волновой поверхностью.

Волновых поверхностей существует бесконечное множество, в то время как волновой фронт каждый момент времени только один. Волновые поверхности могут быть любой формы. В простейших случаях они имеют форму плоскости или сферы. Соответственно волна в этих случаях называется *плоской* или *сферической*.

Плоскими волнами называются волны, поверхности одинаковой фазы которых представляют собой плоскости.

Сферическими волнами называются волны, поверхности одинаковой фазы которых представляют собой сферы.

Пусть плоская волна распространяется вдоль оси x. Тогда все точки среды, положения равновесия которых имеют одинаковую координату x (но различные значения координат y и z), колеблются в одинаковой фазе. На рис. 7.2 изображена кривая, которая дает смещение Ψ из положения равновесия точек с различными x в некоторый момент времени.

Расстояние λ*, на которое распространяется волна за время, равное периоду колебаний частиц среды, называется длиной волны.*

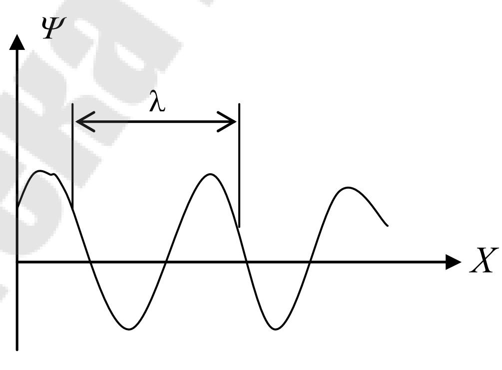


Рис. 7.2

Очевидно, что

$$\lambda = \upsilon T\,, \tag{7.1}$$

где υ – скорость волны, T – период колебаний.

Длину волны можно определить также как расстояние между ближайшими точками среды, колеблющимися с разностью фаз, равной 2π (рис. 7.2).

Заменив в соотношении (7.1) T через $1/\nu$ (ν – частота колебаний), получим

$$\lambda \nu = \upsilon. \qquad (7.2)$$

При волновом движении существует три скорости, которые представляют собой совершенно различные величины, хотя они и связаны математически.

Скорость частиц. Это скорость простых гармонических колебаний частиц среды около их положений равновесия.

Волновая, или фазовая скорость. Это скорость с которой перемещается в среде поверхности одинаковой фазы, т.е. горбы или впадины.

Групповая скорость. Путем сложения ряда волн с разными частотами (длинами волн) и скоростями можно получить группу волн, или волновой пакет. Волны редко существуют в виде отдельных монохроматических компонент. Импульс белого света имеет сплошной спектр частот, поэтому движение такого импульса описывается его групповой скоростью. Конечно, такой пакет расплывается со временем, поскольку волновые скорости каждой компоненты неодинаковы во всех средах, кроме свободного пространства. Только в свободном пространстве импульс белого света остается неизменным.

Мы рассмотрим вопрос о групповой скорости отдельно в одном из последующих разделов данной главы. Групповая скорость имеет важное значение как скорость, с которой переносится энергия в волновой группе. В случае монохроматической волны групповая и волновая скорости одинаковы.

§ 7.2. Уравнение плоской и сферической волн

Уравнением волны называется выражение, которое дает смещение колеблющейся частицы как функцию ее координат x, y, z и времени t:

$$\Psi = \Psi(x, y, z; t) \qquad (7.3)$$

(имеются ввиду координаты равновесного положения частицы).

Найдем вид функции Ψ в случае плоской волны, предполагая, что колебания носят гармонический характер. Для упрощения направим оси координат так, чтобы ось X совпала с направлением распространения волны. Тогда волновые поверхности будут перпендикулярными к оси x и, поскольку все точки волновой поверхности колеблются одинаково, смещение Ψ будет зависеть только от x и t: $\Psi = \Psi(x, t)$.

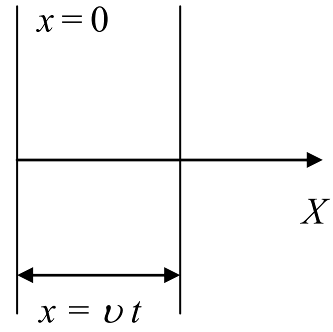


Рис. 7.3

Пусть колебания точек, лежащих в плоскости $x = 0$ (рис.7.3), имеют вид

$$\Psi(0, t) = a\cos(\omega t + \alpha).$$

Найдем вид колебания точек в плоскости, соответствующей произвольному значению x. Для того чтобы пройти путь от плоскости $x = 0$ до этой плоскости, волне требуется время $\tau = x/\upsilon$ (υ– скорость распространения волны). Следовательно, колебания частиц, лежащих в плоскости x, будут отставать по времени на τ от колебаний частиц в плоскости $x = 0$, т. е. будут иметь вид

$$\Psi(x,\, t) = a\cos\left[\omega\,(t-\tau)+\alpha\right] = a\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{\upsilon}\right)+\alpha\right].$$

Итак, уравнение плоской волны (и продольной, и поперечной), распространяющейся в направлении оси x, выглядит следующим образом:

$$\Psi = a\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{\upsilon}\right)+\alpha\right]. \qquad (7.4)$$

Зафиксируем какое либо значение фазы, стоящей в уравнении (7.4), положив

$$\omega\left(t-\frac{x}{\upsilon}\right)+\alpha = \mathrm{const}. \qquad (7.5)$$

Это выражение определяет связь между временем t и тем местом x, в котором фаза имеет зафиксированное значение. Вытекающее из него значение dx/dt дает скорость, с которой перемещается данное значение фазы. Продифференцировав выражение (7.5), получим

$$dt - \frac{1}{\upsilon} dx = 0,$$

откуда

$$\frac{dx}{dt} = \upsilon. \tag{7.6}$$

Таким образом, скорость распространения волны υ в уравнении (7.4) есть скорость перемещения фазы, в связи с чем ее называют *фазовой скоростью*.

Согласно (7.6) $dx/dt > 0$. Следовательно, уравнение (7.4) описывает волну, распространяющуюся в сторону возрастания x. Волна, распространяющаяся в противоположном направлении, описывается уравнением

$$\Psi = a\cos\left[\omega\left(t + \frac{x}{\upsilon}\right) + \alpha\right]. \tag{7.7}$$

Уравнению плоской волны можно придать симметричный относительно x и t вид. Для этого введем величину

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \tag{7.8}$$

которая называется *волновым числом.* Умножив числитель и знаменатель выражения (7.8) на частоту ν, можно представить волновое число в виде

$$k = \frac{2\pi\nu}{\nu\lambda} = \frac{\omega}{\lambda / T} = \frac{\omega}{\mathrm{v}}. \tag{7.9}$$

Раскрыв в (7.4) круглые скобки и приняв во внимание (7.9), придем к следующему уравнению плоской волны, распространяющемуся вдоль оси x:

$$\boxed{\Psi = a\cos(\omega t - k x + \alpha)}. \tag{7.10}$$

Уравнение волны, распространяющейся в сторону убывания x, отличается от (7.10) только знаком при члене kx:

$$\boxed{\Psi = a\cos(\omega t + k x + \alpha)}. \tag{7.11}$$

Теперь найдем уравнение сферической волны. Всякий реальный источник волн обладает некоторой протяженностью. Однако, если ограничится рассмотрением волны на расстояниях от источника, значительно превышающих его размеры, то источник можно считать *точечным*. В изотропной и однородной среде волна, порождаемая точечным источником, будет сферической. Допустим, что фаза колебаний источника равна $(\omega t + \alpha)$. Тогда точки, лежащие на волновой поверхности радиуса *r*, будут колебаться с фазой $\omega(t - r/\upsilon) + \alpha = \omega t - kr + \alpha$ (чтобы пройти путь *r*, волне требуется время $\tau = r/\upsilon$). Амплитуда колебаний в этом случае убывает с расстоянием от источника по закону $1/r$.

Следовательно, уравнение сферической волны имеет вид

$$\boxed{\Psi = \frac{a}{r}\cos(\omega t - k r + \alpha)}, \tag{7.12}$$

где α – постоянная величина, численно равная амплитуде на расстоянии от источника, равном единице.

Рассмотрим более общий случай плоской волны, распространяющийся в произвольном направлении. Для этого введем единичный вектор ***n*** нормали к волновой поверхности.

Вектор

$$\boldsymbol{k} = k\,\boldsymbol{n}, \tag{7.13}$$

равный по модулю волновому числу $k = 2\pi/\lambda$ и имеющий направление нормали к волновой поверхности, называется *волновым вектором*. Общее уравнение плоской волны можно представить в виде

$$\Psi(\mathrm{r}, t) = a\cos(\omega t - \boldsymbol{kr} + \alpha) = a\cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \alpha). \tag{7.14}$$

Мы получили уравнение плоской незатухающей волны, распространяющейся в направлении, определяемом волновым вектором ***k*.**

§ 7.3. Волновое уравнение

Уравнение любой волны является решением дифференциального уравнения, называемого *волновым*.

Установим его вид. Для этого найдем вторые частные производные по координатам и времени от функции (7.14):

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -\omega^2 a\cos(\omega t - \boldsymbol{kr} + \alpha) = -\omega^2 \Psi,$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -k_x^2 a \cos(\omega t - \boldsymbol{kr} + \alpha) = -k_x^2 \Psi,$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -k_y^2 a \cos(\omega t - \boldsymbol{kr} + \alpha) = -k_y^2 \Psi,$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = -k_z^2 a \cos(\omega t - \boldsymbol{kr} + \alpha) = -k_z^2 \Psi.$$

Сложение производных по координатам дает

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)\Psi = -k^2 \Psi\,. \qquad (7.15)$$

Сопоставив эту сумму с производной по времени и заменив k^2 / ω^2 через $1/\upsilon^2$ (см. (7.9)), получим волновое уравнение

$$\boxed{\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}}. \qquad (7.16)$$

Легко убедится в том, что волновому уравнению удовлетворяет функция (7.14).

Для плоской волны, распространяющейся вдоль оси *X*, волновое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}\;. \qquad (7.17)$$

§ 7.4. Стоячие волны

Принцип суперпозиции (наложения) волн гласит, что если в среде распространяется одновременно несколько волн, то колебания частиц среды оказываются геометрической суммой колебаний, которые совершали бы частицы при распространении каждой из волн в отдельности.

В случае, когда колебания, обусловленные отдельными волнами в каждой из точек среды, обладают постоянной разностью фаз, волны называются *когерентными.* При сложении когерентных волн возникает явление *интерференции*, заключающееся в том, что колебания в одних точках усиливают, а в других точках ослабляют друг друга.

Колебательный процесс, возникающий в результате наложения двух встречных плоских волн с одинаковой амплитудой, называется стоячей волной.

Напишем уравнения двух плоских волн, распространяющихся вдоль оси x и в противоположном направлении:

$$\Psi_1 = a\cos(\omega t - kx + \alpha_1),$$

$$\Psi_2 = a\cos(\omega t + kx + \alpha_2). \quad (7.18)$$

Сложив вместе эти уравнения и преобразовав результат по формуле для суммы косинусов, получим *уравнение стоячей волны*

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 = 2a\cos\left(kx + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right)\cos\left(\omega t + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\right). \quad (7.19)$$

Чтобы упростить его, выберем начало отсчета x так, чтобы разность $\alpha_2 - \alpha_1$ стала равной нулю, а начало отсчета t – так, чтобы оказалась равной нулю сумма $\alpha_1 + \alpha_2$. Кроме того, заменим волновое число k его значением $2\pi/\lambda$. Тогда уравнение (7.19) примет вид

$$\Psi = \left(2a\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}\right)\cos\omega t. \quad (7.20)$$

Амплитуда стоячей волны зависит от x:

$$\text{амплитуда} = \left|2a\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}\right|.$$

В точках, координаты которых удовлетворяют условию

$$2\pi\frac{x}{\lambda} = \pm n\pi \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \quad (7.21)$$

амплитуда колебаний достигает максимального значения. Эти точки называются *пучностями* стоячей волны. Из (7.21) получаются значения координат пучностей:

$$x_{\text{пучн}} = \pm n\frac{\lambda}{2} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \quad (7.22)$$

В точках, координаты которых удовлетворяют условию

$$2\pi\frac{x}{\lambda} = \pm\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

амплитуда колебаний обращается в нуль. Эти точки называются *узлами* стоячей волны. Точки среды, находящиеся в узлах, колебаний не совершают. Координаты узлов имеют значения

$$x_{\text{узл}} = \pm\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{7.23}$$

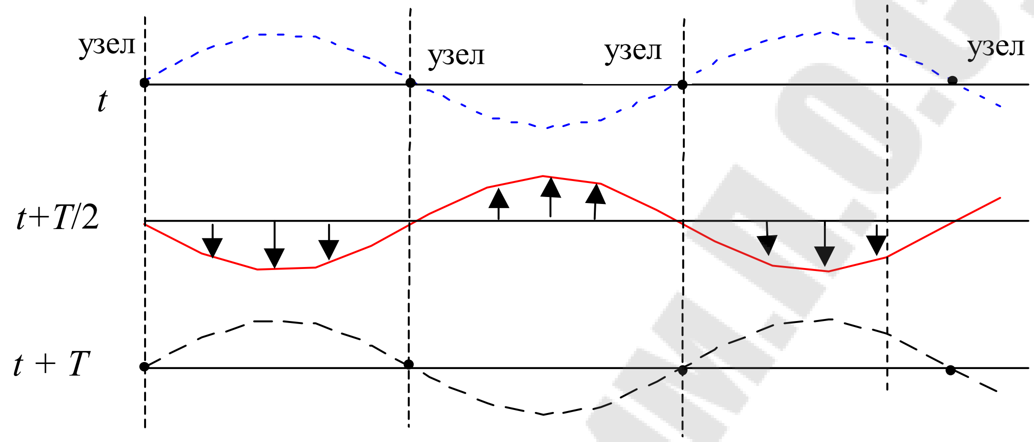


Рис. 7.4

На рис. 7.4. изображено колебание стоячей волны в различные моменты времени, отличающиеся на пол-периода. Стрелками показаны скорости частиц.

§ 7.5. Волновые пакеты и групповая скорость

Выше мы рассматривали только монохроматические волны, имеющие одну частоту и длину волны. Значительно более общим является случай, когда волны существуют в виде набора или группы частных гармоник. Например, белый свет имеет сплошной спектр, занимающий участок видимого диапазона примерно от 3000Å в голубой области до 7000Å в красной области. Анализ поведения таких пакетов приводит к понятию групповой скорости, упомянутому в начале главы.

Рассмотрим пакет из двух компонент с одинаковой амплитудой, но с разными частотами ω_1 и ω_2, различающимися на малую величину. Их отдельные смещения описываются формулами

$$\Psi_1 = a\cos(\omega_1 t - k_1 x), \quad \Psi_2 = a\cos(\omega_2 t - k_2 x). \tag{7.24}$$

Складывая Ψ_1 и Ψ_2, получаем выражение

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 =$$
$$= 2a\cos\left[\frac{(\omega_1-\omega_2)t}{2} - \frac{(k_1-k_2)x}{2}\right]\cos\left[\frac{(\omega_1+\omega_2)t}{2} - \frac{(k_1+k_2)x}{2}\right], \quad (7.25)$$

описывающее волну с частотой $(\omega_1+\omega_2)/2$, которая очень близка к частоте любой из двух компонент. Амплитуда волны, имеющая максимальное значение $2a$, модулирована в пространстве и времени очень медленно меняющейся огибающей с частотой $(\omega_1-\omega_2)/2$ и с волновым числом $(k_1-k_2)/2$. Поведение такой волны представлено на рис. 7.5. Скорость новой волны равна

$$\frac{\omega_1-\omega_2}{k_1-k_2} = \upsilon\frac{k_1-k_2}{k_1-k_2} = \upsilon, \quad (7.26)$$

где через υ обозначена фазовая скорость: $\upsilon = \omega_1/k_1 = \omega_2/k_2$. Следовательно, частотные гармоники и их сумма, т. е. *пакет*, будут распространяться с одинаковой скоростью, причем профиль пакета, изображенного на рис. 7.5, не изменяется.

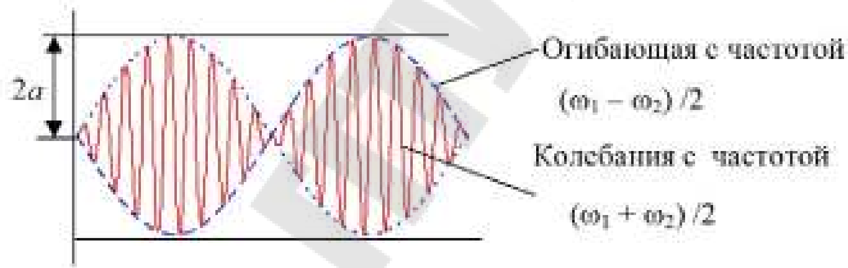


Рис. 7.5.

Теперь предположим, что две гармоники, рассмотренные в предыдущем разделе, имеют разные фазовые скорости и $\omega_1/k_1 \neq \omega_2/k_2$. Скорость максимума амплитуды пакета, т. е. *групповая скорость*,

$$u = \frac{\omega_1-\omega_2}{k_1-k_2} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \quad (7.27)$$

теперь отлична от каждой из этих скоростей. Вид суперпозиции двух волн уже не будет сохраняться неизменным, и профиль пакета будет изменяться со временем.

Среда, в которой фазовая скорость зависит от частоты (отношение ω/k не является постоянным), называется *диспергирующей средой*. Зависимость ω от k выражается дисперсионной формулой. Если пакет состоит из гармоник с почти одинаковыми частотами, то исходное выражение для групповой скорости записывается следующим образом:

$$u = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk}. \tag{7.28}$$

Групповая скорость есть скорость максимальной амплитуды пакета, а потому эта скорость, с которой переносится энергия пакета.

Поскольку $\omega = k\upsilon$, где υ – фазовая скорость, групповая скорость равна

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(k\upsilon) = \upsilon + k\frac{d\upsilon}{dk} = \upsilon - \lambda\frac{d\upsilon}{d\lambda}, \tag{7.29}$$

где $k = 2\pi/\lambda$.

Обычно производная $d\upsilon/d\lambda$ положительна, так что $u < \upsilon$. Это случай *нормальной дисперсии*. Но возможна *аномальная дисперсия* – когда производная $d\upsilon/d\lambda$ отрицательна и $u > \upsilon$. В фиксированный момент времени волновой пакет дает волновую картину, показанную на рис. 7.6.

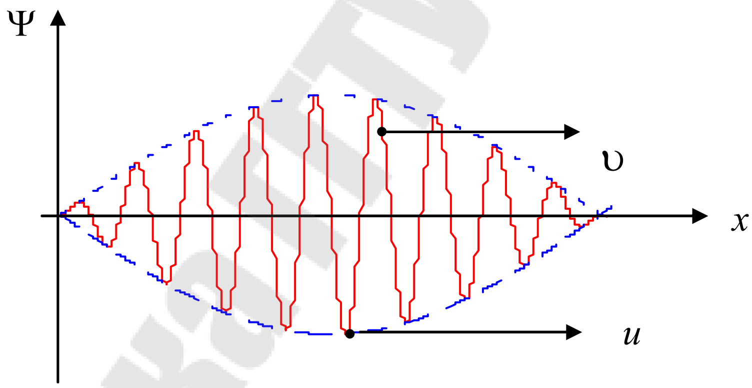


Рис. 7.6.

При рассмотрении электромагнитных волн мы увидим, что для таких волн электрический проводник обладает аномальной дисперсией, а диэлектрик – нормальной дисперсией всюду, кроме небольших областей около собственных резонансных частот атомов, образующих диэлектрик.

Контрольные вопросы

1. Возможно ли образование сходящейся сферической волны?

2. Что понимается под уравнением волны и волновым уравнением?

3. Каковы должны быть свойства среды, чтобы для механических волн в этой среде выполнялся принцип суперпозиции?

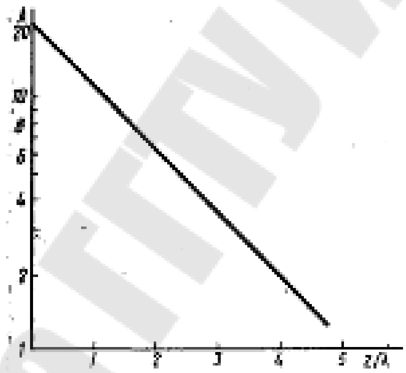
4. Каков физический смысл групповой скорости?

5. От чего зависит фазовая скорость волн в упругой среде?

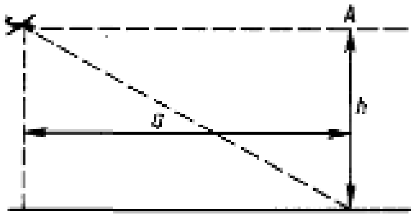
Задачи

1. При отражении от преграды в образующихся стоячих волнах отношение амплитуды в пучности к амплитуде в узле равно δ. Какая часть энергии уходит за преграду?

2. Волна распространяется в среде с затуханием. На графике по оси абсцисс отложено расстояние от источника колебаний, причем это расстояние выражено в длинах волн. По оси ординат отложен десятичный логарифм амплитуды. Написать на основании этого графика формулу, представляющую зависимость амплитуды от расстояния.



3. Самолет летит над землёй на высоте h со сверхзвуковой скоростью. На каком наименьшем расстоянии a (по горизонтали) от стоящего на земле наблюдателя должна находится такая точка, из которой звук самолёта доходит до наблюдателя раньше, чем из точки A над его головой?



4. Складываются два одинаково направленных колебания: $x_1 = A\sin 2\pi\nu t$, $x_2 = A\sin(2\pi\nu t + 2\pi/3)$. Сравнить амплитуду A с амплитудой результирующего колебания.

Глава 8
Основы молекулярной физики и термодинамики

§ 8.1. Статистический и термодинамический методы исследования

Макроскопические процессы в телах, связанные с огромным числом содержащихся в телах атомов и молекул *изучает молекулярная физика и термодинамика.*

Молекулярная физика это раздел физики, изучающий строение и свойства вещества исходя из молекулярно-кинетических представлений, основывающихся на том, что все тела состоят из молекул, находящихся в непрерывном хаотическом движении.

Термодинамика это раздел физики, изучающий общие свойства макроскопических систем, находящихся в состоянии термодинамического равновесия, и процессы перехода между этими состояниями.

Существует два способа описания процессов, происходящих в макроскопических телах (т. е. телах, состоящих из очень большого числа частиц-атомов и молекул), – *статистический* и *термодинамический*.

Статистической физикой называется раздел физики, посвященный изучению свойств макроскопических тел, исходя из свойств образующих тело частиц и взаимодействий между ними.

Статистический метод составляет основу молекулярной физики, это метод исследования систем из большого числа частиц, оперирующий статистическими закономерностями и средними значениями физических величин, характеризующих всю совокупность частиц (например, средние значения скоростей теплового движения молекул и их энергий).

В отличие от статистического метода, *термодинамический метод*, нацелен на исследование систем из большого числа частиц, не рассматривая ее микроструктуры и совершающихся в системе микропроцессов. Данный метод оперирует величинами, характеризующими систему в целом (например, давление, объем, температура), на основе законов сохранения энергии.

Термодинамической системой называется совокупность макроскопических тел, которые взаимодействуют и обмениваются энергией как между собой, так и с другими телами (внешней средой). Примером может служить жидкость и находящийся в соприкосновении с ней пар или газ.

Термодинамические системы не обменивающиеся с внешней средой ни энергией, ни веществом, называются *изолированными* или *замкнутыми*.

Термодинамическими параметрами или параметрами состояния называется совокупность физических величин, характеризующих свойства термодинамической системы. Обычно это температура (T), давление (p) и объем (V).

Состояние, в котором хотя бы один из параметров не имеет определенного значения, называется *неравновесным*.

Состояние термодинамической системы называется *равновесным*, если все термодинамические параметры имеют определенные значения, не изменяющиеся с течением времени.

Термодинамическим процессом называется переход системы из одного состояния в другое, при котором происходит изменение хотя бы одного из ее термодинамических параметров. Говорят, что система находится в термодинамическом равновесии, если ее состояние с течением времени не меняется, а соответствующий процесс называется *равновесным* или *квазистатическим* (почти статическим).

Если по координатным осям откладывать значения каких-либо двух параметров (p и V, p и T, и т. д.), то равновесное состояние системы можно изобразить точкой на координатной плоскости (рис. 8.1), а термодинамический процесс – сплошной линией. Стрелка на линии указывает направление процесса.

Процесс, при котором система после ряда изменений возвращается в исходное состояние, называется *круговым* процессом или *циклом*. Обратимый цикл изображается на координатной плоскости замкнутой кривой (1–2–1).

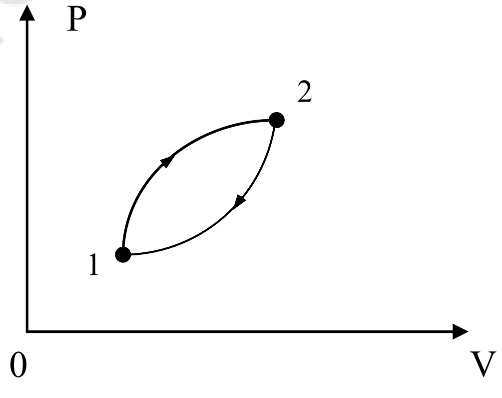


Рис. 8.1

§ 8.2. Уравнение состояния идеального газа

Согласно молекулярно-кинетическим представлениям любое тело состоит из мельчайших частиц, называемых молекулами. Эти частицы находятся в беспорядочном, хаотическом движении, интенсивность которого зависит от температуры тела. Такое движение молекул называется *тепловым*.

Основные положения молекулярно-кинетической теории:

• Все вещества состоят из мельчайших частиц – атомов и молекул, т. е. вещества имеют дискретное (прерывистое) строение.

• Молекулы и атомы любого вещества (жидкого, твердого и газообразного) находятся в непрерывном хаотическом (тепловом) движении. При нагревании вещества интенсивность движения частиц увеличивается.

Опытное обоснование основных положений*:*

1. Проницаемость, сжимаемость, растворимость, наблюдение молекул и атомов в электронных микроскопах	Молекулярное строение вещества
2. Способность газов неограниченно расширяться, наблюдение броуновского движения, диффузия	Тепловое движение
3. Прочность, упругость тел, смачивание, поверхностное натяжение в жидкости	Силы взаимодействия между молекулами

Единица количества вещества называется *молем* (*моль*).

Моль равен количеству вещества системы, содержащей столько же частиц, сколько содержится атомов в 0,012 кг углерода ^{12}C.

Отношение числа молекул N к количеству вещества (ν) называется *постоянной Авогадро* N_A:

$$N_A = \frac{N}{\nu} \qquad (8.1)$$

Постоянная Авогадро равна $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$, она показывает, сколько атомов или молекул содержится в одном моле вещества.

Количество вещества ν можно найти как отношение числа N атомов или молекул вещества к постоянной Авогадро N_A:

$$\nu = \frac{N}{N_A}. \qquad (8.2)$$

Молярной массой μ называется величина, равная отношению массы вещества m к количеству вещества ν:

$$\mu = \frac{m}{\nu}; \quad [\mu] = \frac{\text{кг}}{\text{моль}} \qquad (8.3)$$

Равновесные состояния термодинамической системы часто описывают *уравнениями состояния*, связывающими параметры состояния:

$$F(x_1, x_2, \ldots x_i, \ldots x_n) = 0, \qquad (8.4)$$

где x_i – параметры состояния.

В простейшем случае равновесное состояние тела определяется значениями трех параметров *p, V, T,* тогда уравнение состояния имеет вид

$$F(p, V, T) = 0 \qquad (8.5)$$

Температура — это физическая величина, характеризующая состояние термодинамического равновесия макроскопической системы и определяющая направление теплообмена между телами.

В международной практической шкале температура градуируется в градусах Цельсия ($0^{\circ}C$). В физике чаще пользуются *термодинамической температурой.* Единица термодинамической температуры – *кельвин (К)* является одной из основных единиц СИ. Числовые значения кельвина и градуса одинаковы. Они связаны соотношением

$$T = t + 273{,}15. \qquad (8.6)$$

Температура, равная 0 *К*, называется *абсолютным нулем температуры*; ему соответствует $t = -273{,}15^\circ C$. Температуре $t = 0^\circ C$ соответствует $T = 273{,}15\ K$.

Газ считается *идеальным,* если в рассматриваемых условиях он подчиняется следующим требованиям:

• Объем молекул газа пренебрежимо мал по сравнению с объемом сосуда;

• Между молекулами газа отсутствуют силы взаимодействия;

• Столкновения молекул газа между собой и со стенками сосуда абсолютно упругие.

Существуют в действительности газы (водород, гелий, кислород, воздух и т. д.), которые в условиях близких к нормальным ($p_0 = 10^5$ Па, T = 273 *K*), хорошо описываются моделью идеального газа. Напротив, водяной пар и CO_2 при таких же условиях существенно отличаются от модели идеального газа.

Уравнение состояния идеального газа основано на эмпирических законах Бойля, Мариотта и Гей-Люссака. Оно имеет вид

$$\boxed{pV = \frac{m}{\mu}RT = \nu RT = N kT}. \tag{8.7}$$

Здесь p – давление; V – объем; T – температура; m – масса; μ – масса одного моля; ν – количество вещества; N – число молекул; R – универсальная газовая постоянная; k – постоянная Больцмана. Это есть уравнение КлапейронаМенделеева для массы m газа. Эти постоянные связаны соотношением

$$R = N_A k, \tag{8.8}$$

где N_A – число Авогадро. Их значения равны: $R = 8{,}314$ Дж/(К $\cdot$ моль); $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К.

§ 8.3. Давление газа на стенку сосуда

При выводе уравнения состояния идеального газа будем считать молекулы маленькими твердыми шарами, заключенными в ящик объемом V (рис. 8.2). Предположение о твердых шарах означает, что между молекулами происходят упругие соударения. Рассмотрим сначала одну такую молекулу, отражающуюся от левой стенки ящика.

Средняя сила, действующая на стенку на протяжении времени Δt, равна

$$\overline{F} = \Delta p_x / \Delta t . \tag{8.9}$$

В результате соударения импульс изменяется на величину

$$\Delta\, p_x = m\upsilon_x - (-m\upsilon_x) = 2m\upsilon_x . \tag{8.10}$$

Поскольку время между соударениями молекулы с этой стенкой

$$\Delta t = 2l / \upsilon_x , \tag{8.11}$$

то на стенку со стороны одной молекулы действует средняя сила

$$\overline{F} = \frac{2m\upsilon_x}{\dfrac{2l}{\upsilon_x}} = \frac{m\upsilon_x^2}{l} . \tag{8.12}$$

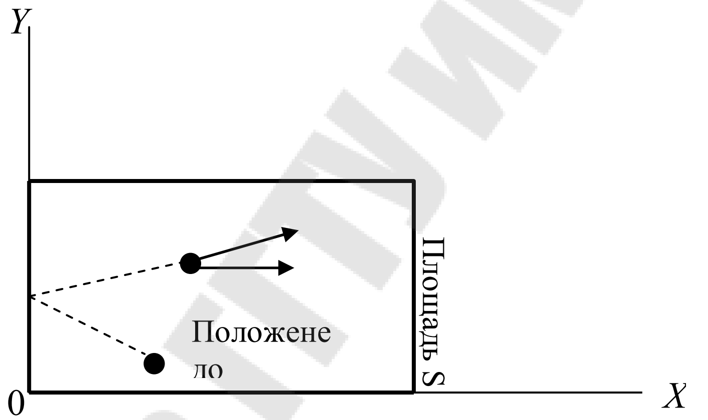


Рис. 8.2 Частица в сосуде объемом *lS* после отражения от левой стенки

Полная сила, с которой все *N* молекул в ящике действуют на стенку, дается выражением

$$F = N\frac{m\overline{\upsilon_x^2}}{l} , \tag{8.13}$$

где $\overline{\upsilon_x^2}$ – усредненный по всем частицам квадрат скорости (υ_x^2).

Эта величина называется среднеквадратичной скоростью в направлении оси *X*. Разделив обе части этого соотношения на площадь стенки *S*, получим давление

$$p = Nm\overline{\upsilon_x^2} / Sl . \tag{8.14}$$

Заменим *S l* на объем *V*; тогда

$$p = Nm\overline{\upsilon_x^2}/V, \tag{8.15}$$

откуда

$$pV = Nm\overline{\upsilon_x^2}. \tag{8.16}$$

Уже отсюда видно, что для данного количества газа произведение pV остается постоянным при условии, что кинетическая энергия частиц сохраняется без изменения. Правую часть формулы (8.16) можно записать через υ. Действительно,

$$\overline{\upsilon^2} = \overline{\upsilon_x^2} + \overline{\upsilon_y^2} + \overline{\upsilon_z^2}.$$

Поскольку молекулы совершенно одинаково отражаются от всех шести граней, то

$$\overline{\upsilon_x^2} = \overline{\upsilon_y^2} = \overline{\upsilon_x^2}.$$

Тогда

$$\overline{\upsilon^2} = 3\overline{\upsilon_x^2}, \quad \text{или} \quad \overline{\upsilon_x^2} = \overline{\upsilon^2}/3.$$

Подставим теперь в (8.16) вместо $\overline{\upsilon_x^2}$ величину $\overline{\upsilon^2}/3$:

$$pV = Nm(\overline{\upsilon^2}/3). \tag{8.17}$$

Мы будем определять абсолютную температуру как величину, прямо пропорциональную средней кинетической энергии молекул в сосуде:

$$T \equiv \left(\frac{2}{3k}\right)\frac{m\overline{\upsilon^2}}{2} = \left(\frac{2}{3k}\right)\overline{K} \tag{8.18}$$

(определение температуры), где $\overline{K}$ – средняя кинетическая энергия, приходящаяся на одну частицу.

Коэффициент пропорциональности ($2/3k$) представляет собой константу. Значение постоянной k (*постоянной Больцмана*) зависит от выбора шкалы температуры. Один из способов выбора шкалы основан на том, что интервал температур между точками кипения и замерзания воды при нормальном давлении полагается равным 100 градусам (=100 *K*). Таким образом, величина k определяется путем измерения свойств воды. Экспериментально найдено, что

$$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \text{Дж/К} \tag{8.19}$$

(*постоянная Больцмана*). Если с помощью (8.18) исключить величину $\overline{\upsilon^2}$ из (8.17), то получим

$$\boxed{pV = N\,k\,T}. \tag{8.20}$$

(*уравнение состояния идеального газа*).
Таким образом, применив уравнения ньютоновской механики к отдельным молекулам, т. е. использовав их на микроскопическом уровне, мы ввели важное соотношение между макроскопическими величинами p, V и T (ср. (8.20) с (8.7)).

Учитывая равенство (8.20), уравнение состояния идеального газа можно переписать в виде

$$p = \frac{N}{V}k\,T = n\,k\,T = \frac{2}{3}n\,\overline{K}, \tag{8.21}$$

где n есть концентрация молекул. Так как для одноатомного газа средняя кинетическая энергия совпадает со средней энергией поступательного движения $\overline{E}_{\text{пост}}$, уравнение (8.21) представим как

$$p = \frac{2}{3}n\overline{E}_{\text{пост}}. \tag{8.22}$$

Произведение $n\overline{E}_{\text{пост}}$ дает суммарную энергию поступательного движения n молекул. Таким образом, *давление равно двум третям энергии поступательного движения молекул, содержащихся в единице объема газа.*

§ 8.4. Средняя энергия молекул

Из равенств (8.20), (8.21) и (8.22) следует, что

$$\overline{E}_{\text{пост}} = \frac{3}{2}kT. \tag{8.23}$$

Таким образом, термодинамическая температура есть величина пропорциональная средней энергии поступательного движения молекул.
Следует подчеркнуть, что средняя энергия молекул зависит только от температуры и не зависит от массы молекулы.

Получим выражение для средней квадратичной скорости молекул. Последняя определяется как

$$\overline{\upsilon}_{кв} = \sqrt{\overline{\upsilon^2}} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\upsilon_i^2}. \tag{8.24}$$

Из формулы (8.18) следует, что средняя квадратичная скорость молекул есть

$$\bar{\upsilon}_{кв} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}, \tag{8.25}$$

где m – масса молекулы.

Только поступательно движутся лишь одноатомные молекулы. Двух- и многоатомные молекулы, кроме поступательного, могут совершать также вращательное и колебательное движения. Число независимых видов движения абсолютно твердого тела определяется числом степеней свободы.

Число независимых переменных, полностью определяющих положение системы в пространстве, называется числом степеней свободы.

Положение материальной точки определяется значениями трех ее координат, например, декартовых координат x, y, z. В соответствии с этим материальная точка имеет три степени свободы.

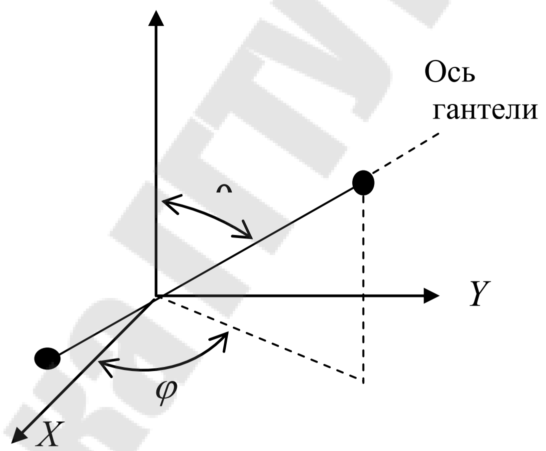


Рис. 8.3 Ориентация двухатомной молекулы (гантели) определяется заданием углов θ и φ

Если двухатомную молекулу представить в виде двух материальных точек, находящихся на расстоянии l друг от друга (форма гантели), которое остается неизменным, то число степеней свободы равно пяти. Действительно положение в пространстве можно задать координатами x, y, z центра масс системы, а углы θ и φ, определяют направление в пространстве прямой l (рис. 8.3). Следовательно, три степени свободы будут поступательными и две вращательными (вращение материальных точек вокруг оси гантели лишено смысла).

Экспериментально установлено, что при определении числа степеней свободы молекулы, атомы нужно рассматривать как материальные точки. Общая формула для числа степеней свободы многоатомной молекулы с жесткой связью имеет вид:

$$i = 3n - f, \tag{8.26}$$

где n – число атомов в молекуле; f – число жестких связей (перемычек) между атомами.

Для одноатомной молекулы газа	$n = 1$, $f = 0$, $i = 3$.
Для двухатомной молекулы газа (рис. 8.3)	$n = 2$, $f = 1$, $i = 5$.
Для трехатомной молекулы (рис. 8.4)	$n = 3$, $f = 3$, $i = 6$.

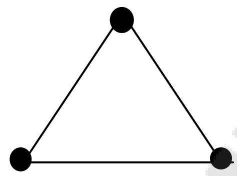


Рис. 8.4. Трехатомная молекула

Отметим, что для всех рассмотренных типов молекул число поступательных степеней свободы равно 3. Оставшиеся – приходятся на вращательные степени свободы. Кроме того, если в двухатомной молекуле две материальные точки связаны так, что между ними существует не жесткая связь, а действует упругая сила, то число степеней свободы увеличится на единицу и равно $i = 6$. Изменение расстояния l между точками обуславливается колебаниями в системе, в связи с чем степень свободы, соответствующую изменениям l, называют *колебательной*.

Согласно *закону равнораспределения энергии по степеням свободы молекулы на каждую степень свободы (поступательную, вращательную и колебательную) в среднем приходится одинаковая кинетическая энергия, равная $kT/2$.*

Система, совершающая гармонические колебания, называется *гармоническим осциллятором.* В теории колебаний доказывается что средние значения кинетической и потенциальной энергий гармонического осциллятора одинаковы. Отсюда следует, что колебательная степень свободы молекулы обладает удвоенной энергетической емкостью, т. е. равна kT.

Итак, из закона равнораспределения энергии по степеням свободы следует:

$$\boxed{\overline{E} = i\frac{kT}{2}}, \tag{8.27}$$

где

$$i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вращ}} + 2i_{\text{колеб}}. \tag{8.28}$$

§ 8.5. Закон Максвелла о распределении молекул по скоростям

Движение молекул газа подчиняется законам статистической физики. В среднем скорости и энергии всех молекул одинаковы. Однако в каждый момент времени энергия и скорости отдельных молекул могут значительно отличаться от среднего значения.

С помощью теории вероятности Максвеллу удалось вывести формулу для относительной частоты, с которой в газе при данной температуре встречаются молекулы со скоростями в определенном интервале значений.

Закон распределения Максвелла определяет относительное число молекул dN/N, скорости которых лежат в интервале (υ, $\upsilon + d\upsilon$). Оно имеет вид:

$$\frac{dN}{Nd\upsilon} = \frac{4\upsilon^2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m_0}{2kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_0\upsilon^2}{2kT}} \tag{8.29}$$

где N – общее число молекул газа; dN – число молекул, скорости которых заключены в определенном интервале; υ – нижняя граница интервала скоростей; $d\upsilon$ – величина интервала скоростей; T– температура газа; $e = 2{,}718\ldots$ – основание натуральных логарифмов;
$k = 1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана; m_0 – масса молекулы.

При получении этой формулы Максвелл основывался на следующих предположениях:

1. Газ состоит из большого числа N одинаковых молекул.
2. Температура газа постоянна.
3. Молекулы газа совершают тепловое хаотическое движение.
4. На газ не действуют силовые поля.

Отметим, что под знаком экспоненты в формуле (8.29) стоит отношение кинетической энергии молекулы $\frac{m_0\upsilon^2}{2}$ к величине kT, характеризующей среднее (по молекулам) значение этой энергии.

Распределение Максвелла показывает, какая доля dN/N общего числа молекул данного газа обладает скоростью в интервале от υ до υ + dυ.

График функций распределения (рис. 8.5) асимметричен. Положение максимума характеризует наиболее часто встречающуюся скорость, которую называют *наиболее вероятной скоростью* υ_m. Скорости, превышающие υ_m, встречаются чаще, чем меньшие скорости. С повышением температуры максимум распределения сдвигается в направлении больших скоростей.

Одновременно кривая становится более плоской (площадь, заключенная под кривой, не может измениться, так как число молекул N остается постоянным).

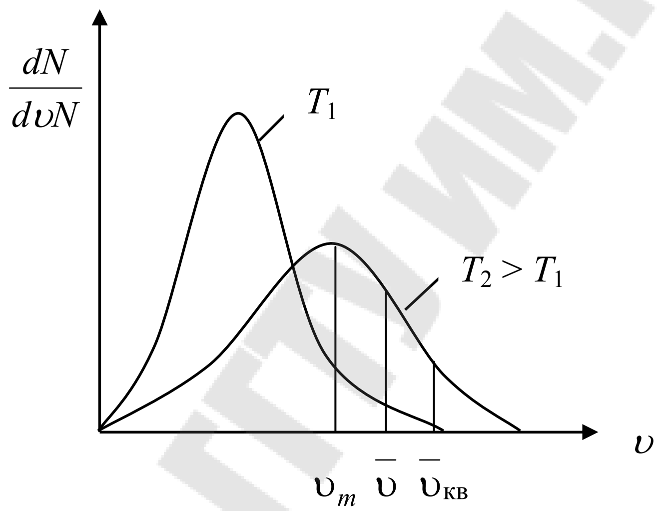


Рис. 8.5

Для определения наиболее вероятной скорости нужно исследовать на максимум функцию распределения Максвелла (приравнять первую производную к нулю и решить относительно υ). В результате получаем

$$\frac{d}{d\upsilon}\left[\exp\left(-\frac{m_0\upsilon^2}{2kT}\right)\upsilon^2\right]=0.$$

Мы опустили множители, не зависящие от υ. Осуществив дифференцирование, придем к уравнению

$$\exp\left(-\frac{m_0\upsilon^2}{2kT}\right)\left(2-\frac{m_0\upsilon^2}{kT}\right)\upsilon=0.$$

Первый сомножитель (экспонента) обращается в нуль при $\upsilon = \infty$, а третий сомножитель (υ) при $\upsilon = 0$. Однако из графика (рис. 8.5) видно, что значения $\upsilon = 0$ и $\upsilon = \infty$ соответствуют минимумам функции (8.29). Следовательно, значение υ, отвечающее максимуму, получается из равенства нулю второй скобки: $(2 - m_0\upsilon^2 / kT) = 0$. Отсюда

$$\upsilon_m = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}. \tag{8.30}$$

Введем обозначения для функции распределения молекул по скоростям (8.29):

$$f(\upsilon) = \frac{dN}{Nd\upsilon}. \tag{8.31}$$

Известно, что среднее значение некоторой физической величины $\varphi(x)$ можно вычислить по формуле

$$\overline{\varphi} = \int \varphi(x) f(x) dx. \tag{8.32}$$

Из (8.32) получим выражения для среднего значения модуля скорости υ и среднего значения квадрата υ:

$$\overline{\upsilon} = \int_0^\infty \upsilon\, f(\upsilon)\, d\upsilon = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}}, \tag{8.33}$$

$$\overline{\upsilon^2} = \int_0^\infty \upsilon^2 f(\upsilon)\, d\upsilon = \frac{3kT}{m_0}. \tag{8.34}$$

Таким образом, средняя скорость молекул (ее называют также средней арифметической скоростью) имеет значение

$$\boxed{\overline{\upsilon} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}}}. \tag{8.35}$$

Квадратный корень из выражения (8.34) дает среднюю квадратичную скорость молекул:

$$\boxed{\overline{\upsilon}_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}}. \tag{8.36}$$

Отметим, что она совпадает с формулой (8.24). На рис. 8.5 приведен график функции распределения Максвелла. Вертикальными линиями отмечены три характерные скорости υ_m, $\overline{\upsilon}$, $\overline{\upsilon}_{кв}$.

§ 8.6. Барометрическая формула. Распределение Больцмана

Пусть поле тяготения однородно, температура постоянна и масса всех молекул одинакова. Если атмосферное давление на высоте h равно p, то на высоте $h+dh$ оно равно $p+dp$ (при $dh>0$ и $dp<0$, так как давление с высотой убывает). Разность давлений p и $p+dp$ равна весу газа, заключенного в объеме цилиндра высотой dh с площадью основания, равной единице площади:

$$p-(p+dp)=\rho g dh\ , \tag{8.37}$$

где ρ – плотность газа на высоте h, далее

$$dp=-\rho g dh. \tag{8.38}$$

Учитывая, что $\rho = m/V$, а $pV = (m/\mu)RT$ (m – масса газа, μ – молярная масса газа), получаем

$$dp=-\frac{\mu g}{RT}\,p dh\text{, или}\quad \frac{dp}{p}=-\frac{\mu g}{RT}\,dh.$$

С изменением высоты от h_1 до h_2 давление изменяется от p_1 до p_2, т. е.

$$\int\limits_{p_1}^{p_2}\frac{dp}{p}=-\frac{\mu g}{RT}\int\limits_{h_1}^{h_2}dh, \tag{8.39}$$

откуда получаем *барометрическую формулу*

$$p_2=p_1 e^{-\mu g(h_2-h_1)/(RT)}. \tag{8.40}$$

Обычно высоты определяются относительно уровня моря, тогда (8.40) можно записать в виде

$$p=p_0 e^{-\mu g h/(RT)} \tag{8.41}$$

где p – давление на высоте h. Используя уравнение состояния $p = nkT$, получаем

$$n=n_0 e^{-\mu g h/(RT)}, \tag{8.42}$$

где n – концентрация молекул на высоте h, n_0 – то же, на высоте $h = 0$.

Так как $\mu = m_0 N_A$ (N_A – постоянная Авогадро, m_0 – масса одной молекулы), а $R = kN_A$, то

$$n = n_0 e^{-m_0 gh/(kT)}, \tag{8.43}$$

где $m_0 gh = U$ – потенциальная энергия молекулы в поле тяготения, т. е.

$$\boxed{n = n_0 e^{-U/(kT)}}. \tag{8.44}$$

Формула (8.44) выражает *распределение Больцмана*, откуда следует, что при постоянной температуре плотность газа больше там, где меньше потенциальная энергия его молекул.

Контрольные вопросы

1. Что такое моль?
2. Какой характер имеет взаимодействие молекул идеального газа?
3. Какие вам известны формы записи уравнения идеального газа?
4. Как связано давление газа с энергией поступательного движения молекул, находящихся в единице объема?
5. Чем отличается статистический метод исследования от термодинамического?
6. Почему формула для давления идеального газа на стенки сосуда одинакова для упругого и неупругого столкновений молекул со стенкой?
7. Какие предположения делаются в законе распределения молекул по скоростями и кинетическим энергиям теплового движения?
8. Какие из скоростей молекул больше — средняя или наиболее вероятная?
9. Термодинамическая температура газа изменилась на 1 %. На сколько процентов изменилась при этом средняя скорость молекул?

Глава 9
Основы термодинамики.

§ 9.1. Внутренняя энергия термодинамической системы

Тело как система из составляющих его частиц обладает внутренней энергией. С позиций молекулярно-кинетической теории *внутренняя энергия – это сумма потенциальной энергии взаимодействия частиц, составляющих тело, и кинетической энергии их беспорядочного теплового движения.*

Вычислим внутреннюю энергию идеального газа. Если потенциальная энергия взаимодействия молекул равна нулю, внутренняя энергия идеального газа равна сумме кинетических энергий хаотического теплового движения всех его молекул. Внутренняя энергия 1-го моля газа равна сумме кинетических энергий N_A молекул:

$$U_m = i\frac{kT}{2}N_A = \frac{i}{2}RT. \qquad (9.1)$$

Внутренняя энергия массы m газа равна:

$$\boxed{U = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2}RT = \nu\frac{i}{2}RT}, \qquad (9.2)$$

где $\nu = \dfrac{m}{\mu}$ – количество вещества.

§ 9.2. Работа газа при изменении его объема

Если газ, расширяясь, передвигает поршень на расстояние *dl,* то производит над ним работу $dA = Fdl = pS\,dl = pdV$ (рис. 9.1), т. е.

$$dA = pdV. \qquad (9.3)$$

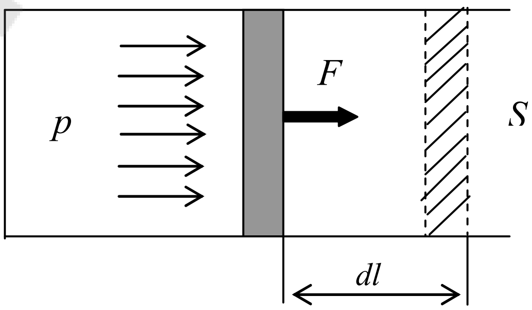


Рис. 9.1

Полная работа A, совершаемая газом при изменении его объема от V_1 до V_2,

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV . \qquad (9.4)$$

Изменение давления газа при его расширении можно представить графически (рис. 9.2).

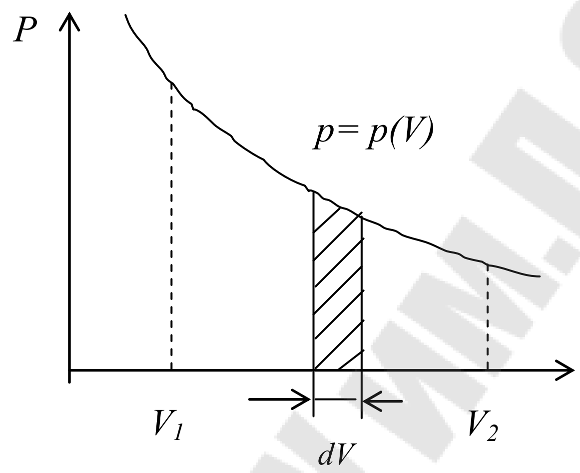


Рис. 9.2

При увеличении объема на dV совершаемая газом работа равна pdV, т.е. определяется площадью заштрихованной полоски. Полная работа, совершаемая газом при расширении от объема V_1 до объема V_2 определяется площадью, ограниченной осью абсцисс, кривой $p(V)$ и прямыми V_1 и V_2.

§ 9.3. Первое начало термодинамики

Термодинамическое состояние каждого газа определяется тремя величинами: давлением, объемом и температурой, называемыми параметрами состояния. Изменение двух или сразу всех трех параметров состояния системы называется термодинамическим процессом. Все термодинамические процессы сопровождаются обменом или превращением энергии. При этом всегда выполняется первый закон (начало) термодинамики.

Первое начало термодинамики это закон сохранения и превращения энергии применительно к термодинамическим процессам: количество теплоты, сообщенное системе, идет на приращение внутренней энергии системы и на совершение системой работы над внешними телами

$$\boxed{dQ = dU + dA}, \tag{9.5}$$

где $dA = pdV$ – для газов.

§ 9.4. Теплоемкость

Удельная теплоемкость это величина, определяемая количеством теплоты, необходимым для нагревания 1 кг вещества на 1 К

$$c = \frac{\Delta Q}{m\Delta T}. \tag{9.6}$$

Единицей теплоемкости является *Дж/(кг·К).*

Молярная теплоемкость это величина, определяемая количеством теплоты, необходимым для нагревания 1-го моля вещества на 1 К.

$$C = \frac{\Delta Q}{\nu\,\Delta T}, \tag{9.7}$$

где $\nu = m/\mu$ – количество вещества. Из (9.6) и (9.7) получаем $C = c\mu$.

Различают теплоемкости (удельную и молярную) при *постоянном объеме* (c_V и C_V) и *постоянном давлении* (c_p и C_p), если в процессе нагревания вещества его объем или давление поддерживаются постоянными.

§ 9.5. Молярная теплоемкость при постоянном объеме

Записав первое начало термодинамики

$$dQ = dU + dA$$

и учитывая, что $dA = pdV$, $C = \dfrac{dQ}{\nu\,dT}$, для 1-го моля газа получим

$$CdT = dU + pdV. \tag{9.8}$$

При $V = \text{const}$, $pdV = 0$, поэтому сообщаемая газу извне теплота идет только на увеличение его внутренней энергии:

$$C_V = \frac{dU}{dT} = \frac{d}{dT}\left(\frac{i}{2}RT\right) = \frac{i}{2}R. \tag{9.9}$$

Таким образом, молярная теплоемкость равна

$$\boxed{C_V = \frac{i}{2} R}. \qquad (9.10)$$

§ 9.6. *Молярная теплоемкость при постоянном давлении. Уравнение Майера*

Если газ нагревается при постоянном давлении, то выражение (9.8) можно записать в виде

$$C_p = \frac{dU}{dT} + \frac{pdV}{dT}, \qquad (9.11)$$

где $\frac{dU}{dT}$ не зависит от вида процесса (внутренняя энергия идеального газа не зависит ни от p, ни от V, а определяется лишь T) и всегда равна C_V. Дифференцируя уравнение состояния идеального газа для 1-го моля $pV=RT$ по T(p = const), получаем

$$C_p = C_V + R. \qquad (9.12)$$

Это есть уравнение Майера. C_p всегда больше C_V на величину молярной газовой постоянной. Это объясняется тем, что при нагревании газа при постоянном давлении требуется еще дополнительное количество теплоты на совершение работы расширения газа, так как постоянство давления обеспечивается увеличением объема газа.

Учитывая, что $C_V = \frac{i}{2} R$, из уравнения Майера получаем

$$\boxed{C_p = \frac{i+2}{2} R}. \qquad (9.13)$$

При рассмотрении термодинамических процессов важно знать характерное для каждого газа соотношение C_p и C_V :

$$\boxed{\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i}}. \qquad (9.14)$$

C_p и C_V определяются лишь числом степеней свободы и не зависят от температуры. Это утверждение молекулярно-кинетической теории справедливо в довольно широком интервале температур лишь для одноатомных газов. Уже у двухатомных газов число степеней свободы, проявляющееся в теплоемкости, зависит от температуры. Молекула двухатомного газа обладает тремя поступательными, двумя вращательными и одной колебательной степенями свободы, однако, последние проявляются лишь при высоких температурах.

Расхождение теории теплоемкостей идеального газа с экспериментом.

Формулы для теплоемкости (9.10) и (9.13) дают хорошее совпадение с экспериментом для одноатомных и многих двухатомных газов при комнатной температуре, например водорода, азота, кислорода и др. Для них теплоемкость оказывается весьма близкой к $C_V = 5/2R$. Однако у двухатомного газа (хлора Cl_2) теплоемкость равна примерно $6/2R$, что невозможно объяснить (у двухатомной молекулы в принципе C_V может быть равно либо $5/2R$, либо $7/2R$).

У трехатомных газов наблюдается систематические отклонения от предсказаний теории.

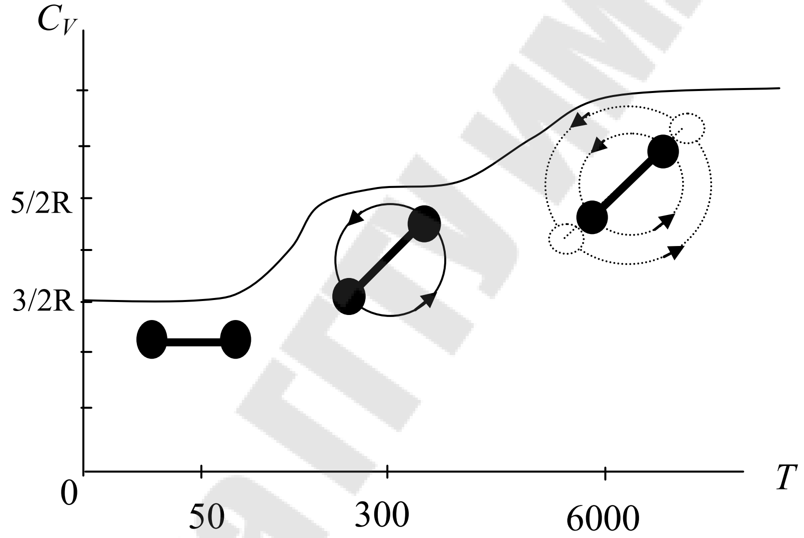


Рис. 9.3. Молярная теплоемкость молекулярного водорода

У жестких молекул трехатомных газов, если только молекулы не лежат на одной прямой, теплоемкость должна быть $6/2R$. Эксперимент дает несколько большую величину, которую, однако, нельзя объяснить возбуждением какой-то дополнительной степени свободы. Эксперимент показал, что теплоемкость зависит от температуры, что находится в полном противоречии с формулами (9.10) и (9.13). Рассмотрим для примера более подробно теплоемкость молекулярного водорода. Молекула водорода двухатомна. Достаточно разреженный водородный газ очень близок к идеальному и является удобным объектом для проверки теории. Для двухатомного газа C_V равно либо $5/2R$, либо $7/2R$, но от температуры теплоемкость не должна зависеть, однако в действительности теплоемкость молекулярного водорода зависит от температуры (рис. 9.3): при низкой температуре (в области 50 К) его теплоемкость равна $3/2R$, при комнатной – $5/2R$, а при очень высокой температуре теплоемкость становится равной $7/2R$. Таким образом, молекула водорода ведет себя при низкой температуре как точечная частица, у которой отсутствуют внутренние движения, при нормальной температуре – как жесткая гантель и наряду с поступательным движением также совершает вращательное движение, а при очень высокой температуре к этим движениям добавляются также колебательные движения атомов, входящих в молекулу. Дело происходит так как будто благодаря изменению температуры происходит включение (или выключение) различных степеней свободы: при малой температуре включены лишь поступательные, а затем и колебательные степени свободы.

Однако переход от одного режима движения к другому происходит не скачком при определенной температуре, а постепенно в некотором интервале температур. Это объясняется тем, что при определенной температуре возникает возможность для молекул переходить в другой режим движения. Но эта возможность не реализуется сразу всеми молекулами, а лишь их частью. По мере изменения температуры все большая доля молекул переходит в другой режим движения и поэтому кривая теплоемкости изменяется плавно в некотором интервале температур.

При достаточно малой температуре движение молекулы водорода между столкновениями подобно поступательному движению твердого тела. Когда температура повышается, включаются вращательные степени свободы и картина движения молекулы несколько изменяется – молекула в процессе прямолинейного движения между столкновениями вращается. При дальнейшем повышении температуры включаются колебательные степени свободы и движение молекулы еще более усложняется, поскольку в процессе поступательного движения составляющие ее атомы колеблются вдоль оси, изменяющей свою ориентацию в пространстве.

Объяснить зависимость теплоемкости от температуры классической теории не удалось. Количественную характеристику зависимости, обусловленной квантовыми закономерностями движения, можно дать лишь на основе решения уравнений движения квантовой механики.

§ 9.7. Применение первого начала термодинамики к изопроцессам

Изопроцессы — это равновесные процессы, в которых один из основных параметров сохраняется постоянным.

Изобарный процесс — это процесс, протекающий при постоянном давлении (p= const).

Диаграмма этого процесса *(изобара)* в координатах *p, V* изображается прямой, параллельной оси *V* (рис. 9.4.). При изобарном процессе работа газа при увеличении объема от V_1 до V_2

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p(V_2 - V_1) \tag{9.15}$$

и определяется площадью закрашенного прямоугольника. Используя уравнение Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu} RT$, получаем

$$V_2 - V_1 = \frac{m}{\mu} \frac{R}{p} (T_2 - T_1). \tag{9.16}$$

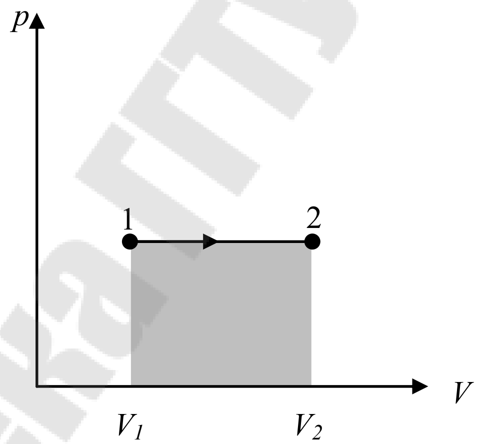


Рис. 9.4

Поэтому *работа изобарного расширения*

$$\boxed{A = \frac{m}{\mu} R(T_2 - T_1)}. \tag{9.17}$$

В изобарном процессе при сообщении газу массой *m* количества теплоты

$$dQ = \frac{m}{\mu} C_p dT \tag{9.18}$$

его внутренняя энергия возрастает на величину

$$dU = dQ - dA = \frac{m}{\mu} C_p dT - \frac{m}{\mu} RdT = \frac{m}{\mu}(C_p - R)dT = \frac{m}{\mu} C_V dT \, .$$

Итак,

$$dU = \frac{m}{\mu} C_V dT \, . \qquad (9.19)$$

Изохорный процесс— это процесс, протекающий при постоянном объеме (V=const). Диаграмма этого процесса (изохора) в координатах *p, V* изображается прямой, параллельной оси ординат (на рис. 9.5. процесс 1–2 – изохорное нагревание). В изохорном процессе газ над внешними телами работы не совершает:

$$\boxed{dA = pdV = 0} \, . \qquad (9.20)$$

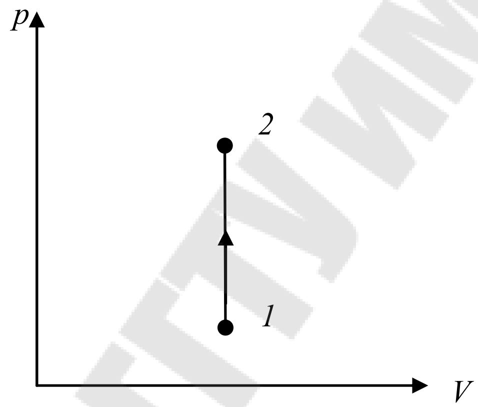


Рис. 9.5

Из первого начала термодинамики ($dQ = dU + dA$) для изохорного процесса следует, что вся теплота, сообщаемая газу, идет на увеличение его внутренней энергии: $dQ = dU$.

Согласно формуле (9.9) $dU = C_V dT$. Тогда для произвольной массы газа

$$dQ = dU = \frac{m}{\mu} C_V dT \, . \qquad (9.21)$$

Изотермический процесс — это процесс, протекающий при постоянной температуре (T = const). Диаграмма этого процесса (*изотерма*) в координатах *p, V* изображается гиперболой (*pV=const*), (рис. 9.5).

Учитывая, что $pV = \frac{m}{\mu} RT$, работа изотермического расширения газа есть:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{m}{\mu} RT \frac{dV}{V} = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Итак,

$$\boxed{A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \frac{m}{\mu} RT \ \ln \frac{V_2}{V_1}}. \qquad (9.22)$$

Из первого начала термодинамики $dQ = dU + dA$ следует, что в изотермическом процессе $dQ = dA$, т. е. все количество теплоты, сообщаемое газу, расходуется на совершение им работы против внешних сил:

$$\begin{aligned} Q = A = \frac{m}{\mu} RT \ \ln \frac{V_2}{V_1} = \\ = \ \frac{m}{\mu} RT \ \ln \frac{p_1}{p_2} \end{aligned} \qquad (9.23)$$

Чтобы при работе расширения температура не уменьшалась, к газу в течение изотермического процесса необходимо подводить количество теплоты, эквивалентное внешней работе расширения.

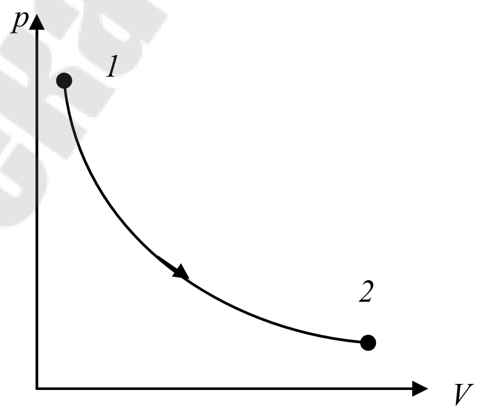


Рис. 9.6

Адиабатный процесс – это такой процесс, при котором отсутствует теплообмен между системой и окружающей средой ($dQ = 0$).

Из первого начала термодинамики $(dQ = dU + dA)$ для адиабатического процесса следует, что $dA = -dU$, т. е. внешняя работа совершается за счет изменения внутренней энергии системы. Перепишем это уравнение с учетом того, что $dA = pdV$, $\quad dU = \frac{m}{\mu} C_V dT$:

$$pdV = -\frac{m}{\mu} C_V dT. \tag{9.24}$$

Возьмем полный дифференциал от левой и правой частей уравнения $pV = \frac{m}{\mu} RT$:

$$pdV + Vdp = \frac{m}{\mu} RdT. \tag{9.25}$$

Разделив уравнение (9.25) на (9.24) и учитывая, что $R = C_p - C_V$ и $C_p / C_V = \gamma$ есть *показатель адиабаты* (9.14), найдем

$$\frac{dp}{p} = -\gamma \frac{dV}{V}. \tag{9.26}$$

Интегрируя это уравнение в пределах от p_1 до p_2 и соответственно от V_1 до V_2, а затем потенциируя, придем к выражению

$$p_1 V_1^{\gamma} = p_2 V_2^{\gamma}. \tag{9.27}$$

Состояния (p_1, V_1) и (p_2, V_2) произвольны, поэтому искомое уравнение:

$$\boxed{pV^{\gamma} = \mathrm{const}}. \tag{9.28}$$

Уравнение (9.28) называется *уравнением Пуассона.*

Используя уравнение Клапейрона-Менделеева $pV = \frac{m}{\mu} RT$, можно из уравнения Пуассона найти связь между p и T, а также V и T в адиабатическом процессе:

$$\boxed{pT^{\frac{-\gamma}{\gamma-1}} = \mathrm{const}, \quad VT^{\frac{1}{\gamma-1}} = \mathrm{const}}. \tag{9.29}$$

Диаграмма адиабатного процесса (*адиабата*) в координатах p, V изображается гиперболой, правда, более крутой, чем изотерма (см. рис. 9.7). Это объясняется тем, что при адиабатном сжатии 1-3 увеличение

p обусловлено не только уменьшением V (как при изотермическом процессе), но и повышением T.

Вычислим работу газа в адиабатном процессе. Из равенств $dA = -dU$, $dA = -\frac{m}{\mu} C_V dT$, получим

$$A = -\frac{m}{\mu} C_V \int_{T_1}^{T_2} dT = \frac{m}{\mu} C_V (T_1 - T_2). \tag{9.30}$$

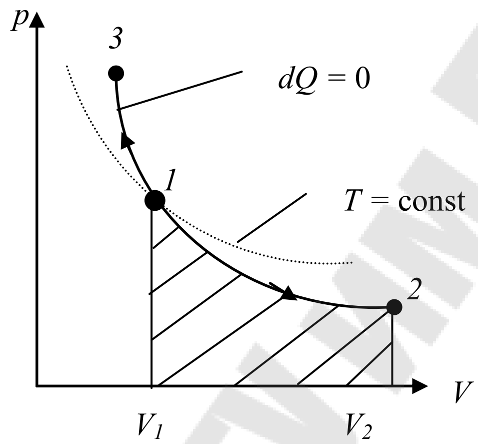


Рис. 9.7

Работа адиабатного расширения 1–2 (на рис. 9.7 определяется заштрихованной площадью) меньше, чем в изотермическом процессе. При адиабатном расширении температура поддерживается постоянной за счет притока извне эквивалентного количества теплоты.

В табл. 9.1 приведены сводные данные о характеристиках изопроцессов в газах.

§ 9.8. Круговые процессы (циклы). Цикл Карно

Напомним, что совокупность процессов, в результате которых система возвращается в исходное состояние, называется *круговым процессом* (*циклом*). В основе работы всех циклических тепловых машин лежат круговые процессы.

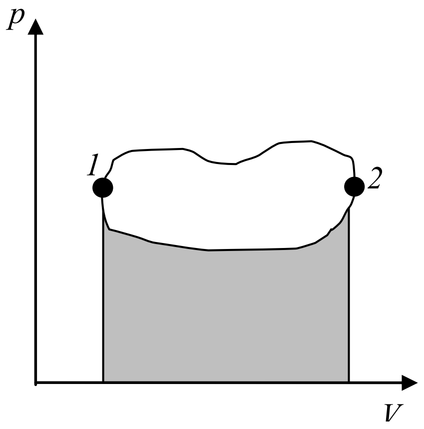


Рис. 9.8

На $p - V$ диаграмме циклический процесс изображается замкнутой кривой (рис. 9.8). Точки 1 и 2 соединяются двумя различными кривыми. Производимая системой работа при переходах из одного состояния в другое измеряется площадью под соответствующей кривой. Если циклический процесс происходит по направлению часовой стрелки, то площадь ограниченная кривыми, соответствует работе, производимой системой (тепловой двигатель), а если против часовой стрелки, то во время процесса работа совершается над системой (холодильники и тепловые насосы).

Таблица 9.1

Название процесса				
	Изохорический	**Изобарический**	**Изотермический**	**Адиабатический**
Условие протекания процесса	$V = \text{const}$	$p = \text{const}$	$T = \text{const}$	$dQ = 0$
Связь между параметрами состояния	$\frac{p}{T} = \text{const}$	$\frac{V}{T} = \text{const}$	$pV = \text{const}$	$pV^{\gamma} = \text{const}$, $pT^{\gamma/(1-\gamma)} = \text{const}$ $VT^{1/(\gamma-1)} = \text{const}$
Работа в процессе	$dA = 0$, $A = 0$	$dA = pdV$, $A = p(V_2 - V_1)$	$dA = pdV$, $A = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1}$	$dA = pdV =$ $= -dU$, $A = -\Delta U =$ $= C_V(T_1 - T_2)$
Количество теплоты, сообщенное в процессе	$dQ = C_V dT$, $Q = C_V(T_2 - T_1)$	$dQ = C_p dT$, $Q = C_p(T_2 - T_1)$	$dQ = dA$, $Q = A$	$dQ = 0$, $Q = 0$

Изменение внутренней энергии	$dU = dQ$, $U = Q$	$dU = C_V dT$, $U = C_V(T_2 - T_1)$	$dU = 0$, $\Delta U = 0$	$dU = -dA = = C_V dT$, $\Delta U = -A = = C_V(T_2 - T_1)$
Теплоемкость	$C_V = \frac{m}{\mu}\frac{R}{(\gamma - 1)}$	$C_p = \frac{m}{\mu}\frac{\gamma R}{(\gamma - 1)}$	$C_T = \infty$	$C_{ад} = 0$

В процессе, происходящем по направлению часовой стрелки, тепловая энергия превращается в механическую (рис. 9.9):

$$Q \rightarrow A.$$

В процессе, происходящем против часовой стрелки, механическая энергия превращается в тепловую (рис. 9.9):

$$A \rightarrow Q.$$

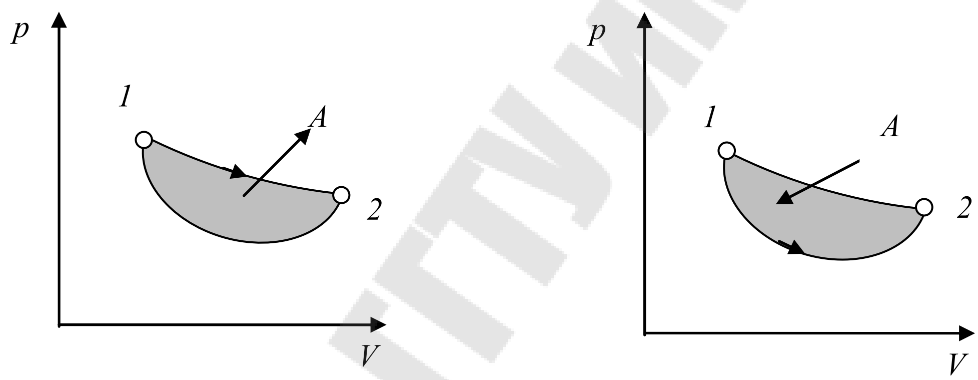


Рис. 9.9

В тепловых двигателях стремятся достичь наиболее полного превращения тепловой энергии в механическую. Карно обнаружил, что наиболее благоприятные соотношения получаются в том случае, когда газ совершает определенный цикл. Этот цикл состоит из четырех последовательных термодинамических процессов (рис. 9.10)

1. *Изотермическое расширение* (1-2):

$$T_1 = \text{const}, \quad V_2 > V_1, \;\; p_2 < p_1.$$

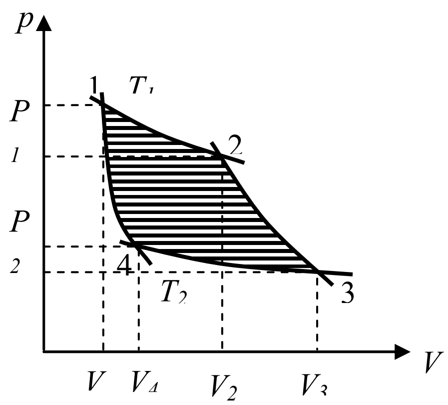


Рис. 9.10

Подведенная теплота (9.23) $Q_{\text{подв}} = Q_{12} = \dfrac{m}{\mu} RT_1 \ln \dfrac{V_2}{V_1}$.

Произведенная системой работа $A_{12} = Q_{12}$.

Адиабатическое расширение (2-3):

$$T_2 < T_1,\ \ V_3 > V_2,\ \ p_3 < p_2.$$

Подведенная теплота

$$Q_{23} = 0.$$

Произведенная системой работа

$$A_{23} = \frac{m}{\mu} C_V (T_1 - T_2).$$

Изотермическое сжатие (3–4):

$$T_2 = \text{const},\ \ V_4 < V_3,\ \ p_4 > p_3.$$

Отведенная теплота

$$Q_{\text{отв}} = Q_{34} = \frac{m}{\mu} RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3}.$$

Совершенная над системой работа

$$A_{34} = Q_{34}.$$

Адиабатическое сжатие (4–1):

$$T_1 > T_2,\ \ V_1 < V_4,\ \ p_1 > p_4.$$

Отведенная теплота

$$Q_{41} = 0.$$

Совершенная над системой работа

$$A_{41} = \frac{m}{\mu} C_V (T_2 - T_1).$$

Площадь, заключенная между кривыми 1-2-3 (рис. 9.10) и осью абсцисс, соответствуют механической работе, произведенной газом при расширении, а площадь, заключенная между кривыми 3-4-1 и осью абсцисс, соответствует механической работе, затраченной на сжатие газа. Разность обеих площадей дает механическую работу, произведенную во время цикла. Отсюда следует, что количество теплоты $Q_{\text{подв}}$, полученное газом от нагревателя при переходе из состояния 1 в состояние 2, должно быть больше количества теплоты $Q_{\text{отв}}$, отданного газом холодильнику при переходе из состояния 3 в состояние 4: $|Q_{\text{подв}}| > |Q_{\text{отв}}|$. Часть полученного газом тепла расходуется тогда на произведение механической работы. *Превращение теплоты в механическую энергию происходит не полностью, а лишь частично.*

Коэффициент полезного действия (КПД) показывает, какая часть теплоты, полученной газом от нагревателя, превращается в механическую работу.

Если

$Q_{\text{подв}}$ – количество теплоты, полученное газом от нагревателя при более высокой температуре T_1 ($Q_{\text{подв}} > 0$),

$Q_{\text{отв}}$ – количество теплоты, отданное газом холодильнику при более низкой температуре T_2 ($Q_{\text{отв}} < 0$),

$$\eta \text{ – термический КПД} = \frac{\text{Произведенная механическая работа } A}{\text{Подведенное количество теплоты } Q_{\text{подв}}} =$$

$$= \frac{A}{Q_{\text{подв}}}, \tag{9.31}$$

то, поскольку $Q = Q_{\text{подв}} + Q_{\text{отв}}$ ($Q_{\text{отв}} < 0$), получим *КПД тепловых двигателей*

$$\eta = \frac{Q_{\text{подв}} + Q_{\text{отв}}}{Q_{\text{подв}}}. \tag{9.32}$$

В случае цикла Карно это общее равенство можно соответствующим образом преобразовать.

Поскольку процессы 2-3 и 4-1 представляют собой адиабатические процессы, для них из формулы (9.29) следует

$$\frac{T_1}{T_2}=\left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{\gamma-1} \quad \text{и} \quad \frac{T_1}{T_2}=\left(\frac{V_4}{V_1}\right)^{\gamma-1}. \qquad (9.33)$$

Таким образом

$$\frac{V_3}{V_2}=\frac{V_4}{V_1}, \quad \text{а} \quad \frac{V_2}{V_1}=\frac{V_3}{V_4}.$$

Термический КПД запишется тогда в виде

$$\eta=\frac{Q_{\text{подв}}+Q_{\text{отв}}}{Q_{\text{отв}}}=\frac{m/\mu\ RT_1\ln(V_2/V_1)-m/\mu\ RT_2\ln(V_3/V_4)}{m/\mu\ RT_1\ln(V_2/V_1)}. \qquad (9.34)$$

После упрощения получим *термический КПД цикла Карно*:

$$\boxed{\eta=\frac{T_1-T_2}{T_1}=1-\frac{T_2}{T_1}}. \qquad (9.35)$$

КПД цикла Карно не зависит от природы рабочего тела и является функцией только температуры холодильника и нагревателя. Максимальное значение КПД (идеальный случай) любых тепловых двигателей всегда меньше единицы и определяется по формуле (9.35). В действительности КПД всегда меньше этого значения вследствие потерь и прочих причин. Таким образом, формула (9.35) определяет верхний предел КПД: $\eta_{\text{идеал}}$.

§ 9.9. Второй закон (начало) термодинамики. Энтропия

Согласно первому закону термодинамики, могут протекать только такие процессы, при которых полная энергия системы остается неизменной. Например, превращение тепловой энергии целиком в механическую не связано с нарушением первого закона; тем не менее оно не возможно. Второй закон термодинамики еще больше ограничивает возможные процессы превращения.

Теплоту можно превратить в работу только при условии, что часть этой теплоты одновременно перейдет от горячего тела к холодному (принцип действия тепловых двигателей).

Устройство, которое вопреки этому закону получало бы тепловую энергию от нагревателя и производило равное количество механической энергии, называется *вечным двигателем второго рода*. (Пример: камень, который охлаждаясь поднимался бы вверх!)

Чтобы теплота могла перейти от холодного тела к горячему, необходимо затратить механическую работу (принцип действия холодильных машин). Отсюда следует, что в замкнутой системе в отсутствие каких-либо процессов не может сама по себе возникнуть и разность температур, т. е. теплота не может самопроизвольно перейти от более холодных частей системы к более горячим.

Все термодинамические процессы, протекающие в замкнутой системе, можно подразделить на обратимые и необратимые.

Термодинамический процесс *обратим*, если, протекая в обратном направлении, он возвращает систему в исходное состояние без затрат энергии.

В противном случае термодинамические процессы называются *необратимыми*. Они протекают самопроизвольно только в одном направлении.

Примеры обратимых процессов: движение планет, незатухающие колебания маятника, упругий удар, цикл Карно.

Примеры необратимых процессов: затухающие колебания маятника, неупругий удар, процессы с трением, диффузия, теплопередача, теплообмен.

Большинство процессов в технике представляют собой необратимые процессы или по крайней мере содержат этапы, являющиеся необратимыми процессами.

Из уравнений (9.32) и (9.35) для цикла Карно (обратимого) следует

$$\frac{Q_1+Q_2}{Q_1}=\frac{T_1-T_2}{T_1} \quad \text{и} \quad 1+\frac{Q_2}{Q_1}=1-\frac{T_2}{T_1},$$

$$\frac{Q_2}{Q_1}=-\frac{T_2}{T_1} \text{ и наконец, } \frac{Q_1}{T_1}+\frac{Q_2}{T_2}=0 \qquad (9.36)$$

Это уравнение означает, что количество теплоты, полученное или отданное телом при обратимом процессе, пропорционально температуре. Отношение Q/T называется *приведенным количеством теплоты.* Сумма приведенных количеств теплоты при любом обратимом процессе равна нулю:

$$\sum\frac{Q_{\text{обр}}}{T}=0, \qquad (9.37)$$

или в дифференциальной форме

$$\oint\frac{dQ_{\text{обр}}}{T}=0. \qquad (9.38)$$

Знак $\oint$ означает, что интеграл берется по замкнутому контуру (круговой процесс). В каждом цикле обратимого процесса все термодинамические параметры принимают исходные значения, т.е. их изменение равно нулю, можно определить термодинамический параметр состояния — *энтропию* S как функцию, дифференциал которой равен

$$dS = \frac{dQ_{\text{обр}}}{T}. \qquad (9.39)$$

Единица СИ энтропии $[S] = $ Дж/К.

Поскольку в уравнения обычно входит не сама энтропия, а ее изменение, за нулевое значение энтропии в технике обычно произвольно принимают ее значение, соответствующее температуре $T_0 = 273{,}15\ K = 0^\circ C$.

Воспользовавшись уравнением (9.39), получим следующее выражение для *изменения энтропии* при переходе из состояния 1 в состояние 2:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ_{\text{обр}}}{T}. \qquad (9.40)$$

При обратимом процессе изменение энтропии $\Delta S = 0$.

При необратимом процессе изменение энтропии $\Delta S > 0$.

Все процессы в природе протекают в направлении увеличения энтропии.

Использование понятия энтропии позволяет очень просто сформулировать *второй закон термодинамики*:

$$\boxed{\Delta S \geq 0}. \qquad (9.41)$$

Энтропия замкнутой системы не может уменьшаться!

Неравенство (9.41) называется *неравенством Клаузиуса*.

§ 9.10. Энтропия идеального газа

Изменение энтропии, происходящее при термодинамических процессах в идеальном газе, можно найти, исходя из первого закона термодинамики (9.5) и определения энтропии (9.39):

$$dS = \frac{dQ_{\text{обр}}}{T} \quad \text{и} \quad dQ = dU + pdV \text{, откуда}$$

$$dS = \frac{dU + pdV}{T}.$$

Так как $dU = C_V \frac{m}{\mu} dT$ (9.19) и $p = \frac{mRT}{\mu V}$ (8.7), имеем $dS = C_V \frac{m}{\mu}\frac{dT}{T} + \frac{mR}{\mu}\frac{dV}{V}$. Выполнив интегрирование $\int_{S_1}^{S_2} dS = C_V \frac{m}{\mu} \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} + \frac{m}{\mu} R \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V}$, получим *изменение энтропии идеального газа*

$$\Delta S = S_2 - S_1 = C_V \frac{m}{\mu} \ln\frac{T_2}{T_1} + \frac{m}{\mu} R \ln\frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{\mu}\left(C_V \ln\frac{T_2}{T_1} + R \ln\frac{V_2}{V_1}\right).$$

Итак,

$$\boxed{\Delta S = \frac{m}{\mu}\left(C_V \ln\frac{T_2}{T_1} + R \ln\frac{V_2}{V_1}\right)}. \tag{9.42}$$

При адиабатическом процессе $\Delta S = 0$, поскольку $dQ_{\text{обр}} = 0$.

При изотермическом процессе $(T_1 = T_2)$ из формулы (9.42) следует, что $\Delta S = \frac{m}{\mu} R \ln(V_2 / V_1)$.

При изохорическом процессе $(V_1 = V_2)$ из формулы (9.42) следует, что $\Delta S = C_V \frac{m}{\mu} \ln(T_2 / T_1)$.

§ 9.11. Энтропия и вероятность

Увеличение энтропии системы означает переход в состояние, имеющее большую вероятность.

Если

S – энтропия,

w – вероятность термодинамического состояния,

$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана,

то

$\boxed{S = k \ln w}$ – *формула Больцмана.* (9.43)

Термодинамическая вероятность состояния w определяет *число способов*, которыми может быть реализовано данное состояние макроскопической системы, или число микросостояний, осуществляющих данное макросостояние.

Согласно определению $w \geq 1$, т. е. термодинамическая вероятность не есть вероятность в математическом смысле (последняя ≤ 1!). *Возрастание энтропии*, что следует из второго начала термодинамики, означает переход системы *из менее вероятных в более вероятные состояния*.

Обычно интерес представляет только изменение энтропии. При переходе из состояния 1, которому отвечает вероятность w_1, в состояние 2, энтропия изменяется от S_1 до S_2. Тогда из формулы (9.43) следует

$$\Delta S = S_2 - S_1 = k \ln \frac{w_2}{w_1}. \tag{9.44}$$

Необратимые процессы протекают самопроизвольно до тех пор, пока система не достигнет состояния, которому отвечает наибольшая вероятность; энтропия при этом достигает своего максимума.

Примеры:

1) полное перемешивание молекул двух газов в результате диффузии;

2) выравнивание температур двух тел с различными исходными температурами.

Энтропия характеризует вероятность, с которой устанавливается то или иное состояние. Кроме того, энтропия является мерой хаотичности или необратимости.

§ 9.12. Реальные газы. Уравнение Ван-дер-Ваальса

Газовые законы, рассмотренные в предыдущих разделах, точно выполняются только для идеальных газов, которые не конденсируются при охлаждении их вплоть до абсолютного нуля температуры.

Свойства большинства газов близки к свойствам идеального газа, когда они находятся при температурах, достаточно далеких от точки конденсации, т. е. когда между молекулами отсутствует взаимодействие и когда собственный объем молекул газа мал по сравнению с объемом газа.

Вблизи точки конденсации (при высоком давлении и низкой температуре) свойство газов значительно отличается от свойств идеального газа. В этих случаях говорят о реальных газах.

Уравнение состояния для 1-го моля идеального газа $pV_m = RT$ (V_m – молярный объем) видоизменяется в случае реальных газов. Для реальных газов необходим учет собственного объема молекул. Наличие сил отталкивания, которые противодействуют проникновению в занятый молекулой объем других молекул, сводится к тому, что фактический свободный объем, в котором могут двигаться молекулы реального газа, будет не V_m, а $V_m - b$, b – объем, занимаемый самими молекулами. Объем b равен учетверенному собственному объему молекул.

Действие сил притяжения газа приводит к появлению дополнительного давления на газ, называемого внутренним давлением. По вычислениям Ван-дер-Ваальса, внутреннее давление обратно пропорционально квадрату молярного объема, т. е.

$$p' = a / V_m^2,$$

где a – постоянная Ван-дер-Ваальса, характеризующая силы межмолекулярного притяжения.

Вводя поправки в уравнение $pV_m = RT$ для идеального газа, получим уравнение Ван-дер-Ваальса для 1-го моля газа

$$\left(p + a / V_m^2\right)\left(V_m - b\right) = RT\,. \tag{9.45}$$

Учитывая, что $V = \nu V_m$ $(\nu = m / \mu)$, получим уравнение *для произвольного количества вещества*:

$$\boxed{\left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)\left(\frac{V}{\nu} - b\right) = RT.} \tag{9.46}$$

Поправки Ван-дер-Ваальса (a и b) являются постоянными для каждого газа величинами. Для их определения записывают уравнения для двух известных из опыта состояний газа и решаются относительно a и b.

Уравнение (9.45) можно записать в виде

$$pV_m^3 - (RT + pb)V_m^2 + aV_m - ab = 0\,.$$

При заданных p и T – это уравнение третьей степени относительно V_m, следовательно, оно может иметь либо три вещественных корня, либо один вещественный и два мнимых, причем физический смысл имеют лишь вещественные положительные корни.

Изотермами Ван-дер-Ваальса называются кривые зависимости p *от* V_m *при заданных* T*, определяемые уравнением Ван-дер-Ваальса для моля газа*.

При некоторой температуре T_k – *критической температуре* – на изотерме (рис. 9.11) только одна точка перегиба (в этой точке касательная к ней параллельна оси абсцисс). Точка K – *критическая точка*, соответствующие этой точке объем V_k и давление p_k называются также *критическими*. Изотерма при T_k называется *критической изотермой*.

При высокой температуре ($T > T_k$) изотерма реального газа отличается от изотермы идеального газа только некоторым искажением ее формы, оставаясь монотонно спадающей кривой. При низкой температуре ($T<T_k$) изотермы имеют волнообразный участок, сначала монотонно опускаясь вниз, затем монотонно поднимаясь вверх и снова монотонно опускаясь.

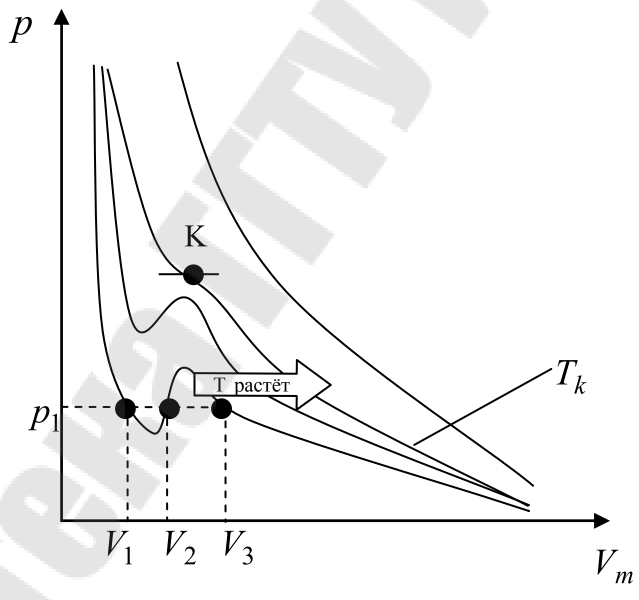


Рис. 9.11

Изотермам при низкой температуре ($T < T_k$) одному значению давления например, p_1 соответствует три значения объема V_1, V_2 и V_3, а при $T > T_k$ — одно значение объема. В критической точке все три объема (три корня) совпадают и равны V_k.

Рассмотрим изотерму при $T < T_k$ на рис. 9.12.

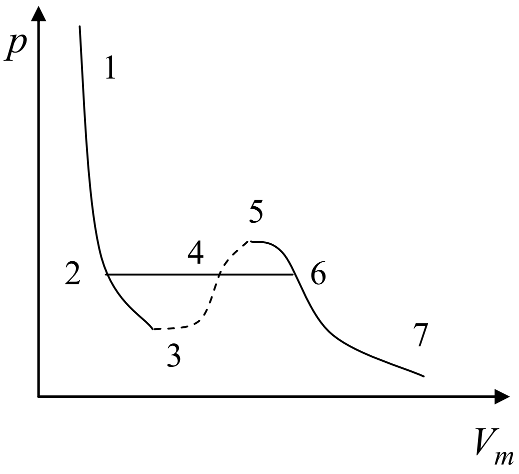


Рис. 9.12

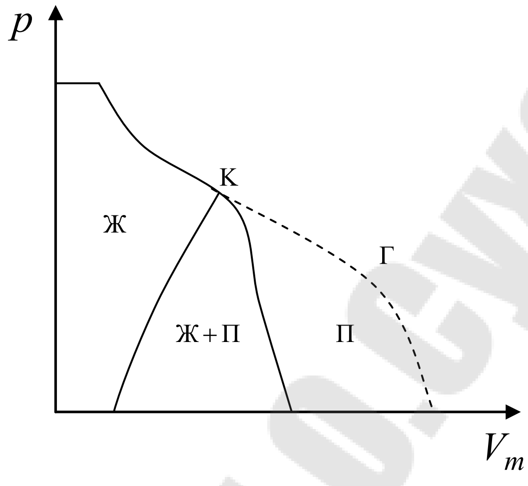


Рис. 9.13

На участках 1–3 и 5–7 при уменьшении объема V_m давление p возрастает. На участке 3–5 сжатие вещества приводит к уменьшению давления; практика же показывает, что такие состояния в природе не осуществляются. Наличие участка 3–5 означает, что при постепенном изменении объема вещество не может оставаться все время в виде однородной среды; в некоторый момент должно наступить скачкообразное изменение состояния и распад вещества на две фазы. Таким образом, истинная изотерма имеет вид ломанной линии 7–6–2–1. Часть 7–6 отвечает газообразному состоянию, а часть 2–1 — жидкому. В состояниях, соответствующих горизонтальному участку изотермы 6–2, наблюдается равновесие жидкой и газообразной фаз вещества.

Если через крайние точки горизонтальных участков семейства изотерм провести линию, то получится колокообразная кривая (рис. 9.13), ограничивающая область двухфазных состояний вещества. Эта кривая и критическая изотерма делят диаграмму p, V_m под изотермой на три области: под колокообразной кривой располагается область двухфазных состояний (жидкость и *насыщенный пар*), слева от нее находится область жидкого состояния, а справа – область *пара*. *Пар* – вещество, находящееся в газообразном состоянии при температуре ниже критической. *Насыщенный пар* – пар, находящийся в равновесии со своей жидкостью.

Контрольные вопросы

1. Газ совершает над граничащими с ним телами отрицательную работу. Что происходит при этом с объемом газа?

2. Может ли случится, что газ получает теплоту, а его внутренняя энергия уменьшается?

3. Изменяется ли внутренняя энергия идеального газа при изотермическом расширении?

4. Всегда ли справедливо соотношение $C_p - C_V = R$?

5. В ходе какого процесса работа, совершаемая телом, пропорциональна изменению его объема?

6. Чему равна работа, совершаемая в изохорическом процессе?

7. В ходе какого процесса работа, совершаемая телом, равна убыли его внутренней энергии?

8. Что такое вечный двигатель второго рода?

9. Может ли энтропия убывать в ходе необратимого процесса?

10. Какие величины, которыми пренебрегают, рассматривая идеальные газы, учитывает уравнение Ван-дер-Ваальса?

Задачи к главам 8, 9

1. Рассмотрим модель идеального газа, заключенного в сосуд. Завышены или занижены по сравнению с реальным газом (при заданных V и T) значения: а) внутренней энергии; б) давления газа на стенку сосуда?

2. Внутренняя энергия некоторого газа 55 МДж, причем на долю энергии вращательного движения приходится 22 МДж. Сколько атомов в молекуле данного газа?

3. Молекулы какого из перечисленных газов, входящих в состав воздуха, в равновесном состоянии обладают наибольшей средней арифметической скоростью? 1)N_2; 2) O_2; 3) H_2; 4) CO_2.

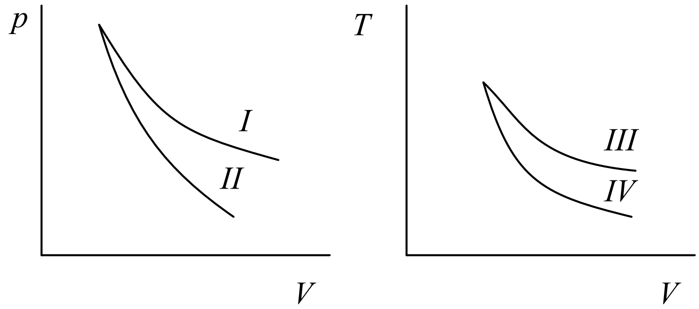
4. Некоторый газ с неизменной массой переводится из одного равновесного состояния в другое. Изменяется ли в распределении молекул по скоростям: а) положение максимума кривой Максвела; б) площадь под этой кривой?

5. Объем газа увеличивается, а температура уменьшается. Как изменяется давление? Масса постоянна.

6. При адиабатном расширении газа объем его изменяется от V_1 до V_2. Сравнить отношения давлений (p_1/p_2), если газ: а) одноатомный; б) двухатомный.

7. Аэростат с эластичной герметической оболочкой поднимается в атмосфере. Температура и давление воздуха уменьшаются с высотой. Зависит ли подъемная сила аэростата: а) от давления воздуха; б) от температуры?

8. На рисунке изображены адиабаты для двух газов H_2 и Ar. Указать какие графики соответствуют H_2. 1)I, III; 2)I, IV; 3)II, III; 4)II,IV.



9. Сравнить работы расширения газа при изотермическом изменении объема от 1 до 2 м^3 и от 2 до 4 м^3.

10. Газ, расширяясь, переходит из одного и того же состояния с объемом V_1 до объема V_2: а) изобарно; б) адиабатно; в) изотермически. В каких процессах газ совершает наименьшую и наибольшую работы?

11. Какой из указанных газов при комнатной температуре имеет наибольшую удельную теплоемкость?

1) O_2 ; 2) H_2 ; 3) He; 4) Ne; 5) I_2.

12. Как изменяется внутренняя энергия газа в процессах расширения: а) в изобарном; б) в адиабатном?

13. Дан неизвестный газ. Можно ли узнать, какой это газ, если заданны:

а) p, V, T, m; б) p, T, ρ ; в) γ, C_V? К газу применима классическая теория теплоемкостей.

14. Определить знаки молярной теплоемкости газа (m=const, молекулы газа жесткие) в процессе, для которого T^2V=const, если газ: а) одноатомный; б) двухатомный.

15. Перейдем от модели идеального газа к модели, в которой учитываются силы притяжения между молекулами. Как изменяются молярные теплоемкости C_V и C_p при заданных V и T?

16. Идеальный газ, содержащий N молекул, расширяется при постоянной температуре. По какому закону увеличивается число микросостояний газа w? 1) $w \sim V$; 2) $w \sim V^N$; 3) $w \sim \ln V$; 4) не приведено верного соотношения.

Литература

1. Савельев, И. В. Курс общей физики / И. В. Савельев. – Кн. 1. Механика. – М. : Наука, 1998.

2. Савельев, И. В. Курс общей физики / И. В. Савельев. – Кн. 3. Молекулярная физика и термодинамика. – М. : Наука, 1998.

3. Трофимова, Т. И. Краткий курс физики / Т. И. Трофимова. – М. : Высш. шк., 2000.

4. Сивухин, Д. В. Общий курс физики / Д. В. Сивухин. – М. : Наука, 1974. – Т. 1. Механика.

5. Сивухин, Д. В. Общий курс физики / Д. В. Сивухин. – М. : Наука, 1975. – Т. 2. Термодинамика и молекулярная физика.

6. Иродов, И. Е. Основные законы механики / И. Е. Иродов. – М. : Высш. шк., 1983.

7. Матвеев, А. Н. Механика и теория относительности / А. Н. Матвеев. – М. : Высш. шк., 1986.

8. Фейнман, Р. Феймановские лекции по физике / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. – М. : Мир, 1977. – Т. 1, 2, 4

9. Орир Дж. Физика. Т.1. – М.: «Мир», 1981.

10. Кнойбюль, Ф. К. Пособие для повторения физики / Ф. К. Кнойбюль. – М.: «Энергоиздат», 1981.

11. Китель, Ч. Курс физики / Ч. Киттель, У. Найт, М. Рудерман. – М. : Наука, 1971. – Т. 1. Механика.

12. Шварц К. Поиски закономерностей в физическом мире / К. Шварц, Т. Гольдфарб. – М. : Мир, 1977.

13. Tuma J. J. Handbook of physical calculations. – McGraw-Hill Book Company, N.Y., 1976.

14. Панков, А. А. Оптика, атомная и ядерная физика : конспект лекций по курсу «Физика» для студентов днев. и заоч. форм обучения / А. А. Панков, П. А. Хило. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2009. – 170 с.

Приложение 1

Физические единицы

Международная система единиц (СИ)

Эта система единиц была принята в качестве предпочтительной XI Генеральной конференцией по мерам и весам, Париж, 1960.

Основные единицы:

длины – метр (м);

массы – килограмм (кг);

времени – секунда (с);

электрического тока – ампер (А);

температуры – кельвин (К);

силы света – кандела (кд).

Дольные и кратные единицы

10^3 кило (к)	10^{-3} милли (м)
10^6 мега (М)	10^{-6} микро (мк)
10^9 гига (Г)	10^{-9} нано (н)
10^{12} тера (Т)	10^{-12} пико (п)
10^{-1} деци (д)	10^{-15} фемто (ф)
10^{-2} санти (с)	10^{-18} атто (а)

Плоские углы

Плоские углы в физике измеряются мерой соответствующей дуги. Дуговая мера есть длина пути, которая вырезается данным углом из концентрической окружности единичного радиуса.

Единица: 1 радиан = 1 рад = $360°/ 2\pi = 57,29578° = 57°17'44''$.

Длина окружности единичного радиуса 2π.

Телесные углы

Телесные углы в физике измеряются площадью проекции телесного угла на поверхность концентрической сферы единичного радиуса.

Единица: стерадиан (ср).

Поверхность сферы единичного радиуса: 4π.

Единицы механических величин

Время: секунда (с).

Длина: метр (м).

Частота: 1 Гц = 1 $с^{-1}$.

Скорость: 1 м · $с^{-1}$.

Ускорение: 1 м · $с^{-2}$.

Масса: килограмм (кг).

Плотность: кг· $м^{-3}$.

Момент инерции: 1 кг· $м^2$.

Импульс: 1 кг · м · $с^{-1}$.

Момент импульса: 1 кг · $м^2$ · $с^{-1}$ = 1 Дж · с.

Сила: ньютон 1 Н.

Давление: паскаль; 1 Па = 1 Н · $м^{-2}$ = 1 кг · $м^{-1}$ · $с^{-2}$; 1 бар = 10^5 Н · $м^{-2}$.

Механический вращательный момент: 1 Н · м.

Динамическая вязкость: 1 Н · $м^{-2}$ · с = 1 Па · с = 1 кг· $м^{-1}$ · $с^{-1}$.

Кинематическая вязкость: 1 $м^2$ · $с^{-1}$.

Работа и энергия: джоуль**;** 1 Дж = 1 Вт · с ;1 Н · м = 1кг · $м^2$· $с^{-2}$; киловатт · час; 1 кВт · ч = 3,6 · 10^6 Дж.

Мощность: ватт; 1 Вт = 1 Дж · $с^{-1}$ = 1 В · А = 1 кг · $м^2$· $с^{-3}$.

Действие: 1 Дж · с = 1 $м^2$· кг · $с^{-1}$.

Единицы термодинамических величин.

Температура:

<u>Единица СИ:</u> кельвин (К).

<u>Метрологическая единица:</u> градус Цельсия (°С).

Разность температур:

<u>Единица СИ:</u> кельвин (К); 1°С = 1 град.

Количество теплоты: джоуль; 1 Дж = 1 Вт·с.

Количество вещества:

химическая единица: киломоль; 1 кмоль = 6,022 · 10^{26} молекул или атомов .

Удельные величины:

<u>определение:</u> удельный – приходящийся на массу ($кг^{-1}$).

Молярные величины:

<u>определение:</u> молярный – приходящийся на моль или киломоль ($моль^{-1}$ или $кмоль^{-1}$).

Энтропия: 1 Дж · $К^{-1}$ = 1 $м^2$ · кг · $с^{-2}$ · $К^{-1}$.

Приложение 2

Физические константы

Постоянная тяготения	$G = 6{,}673 \cdot 10^{-11}$ м$^3 \cdot$ кг$^{-1} \cdot$ с$^{-2}$
Скорость света	$c = 2{,}9979 \cdot 10^8$ м $\cdot$ с$^{-1}$
Элементарный электрический заряд	$e = 1{,}6022 \cdot 10^{-19}$ А $\cdot$ с
Постоянная Планка	$h = 6{,}6262 \cdot 10^{-34}$ Дж $\cdot$ с $\bar{h} = h/2\pi = 1{,}0546 \cdot 10^{-34}$ Дж $\cdot$ с
Постоянная Больцмана	$k = 1{,}3806 \cdot 10^{-23}$ Дж $\cdot$ К$^{-1}$
Магнитная постоянная (определение)	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ В $\cdot$ с $\cdot$ (А $\cdot$м)$^{-1}$ = $1{,}2566 \cdot 10^{-6}$ В $\cdot$ с $\cdot$ (А $\cdot$ м)$^{-1}$
Электрическая постоянная	$\varepsilon_0 = 8{,}8542 \cdot 10^{-12}$ А $\cdot$ с $\cdot$ (В $\cdot$ м)$^{-1}$
Число Авогадро или Лошмидта	$N_А = L = 6{,}0222 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
Атомная единица массы	$m_a = 1{,}6605 \cdot 10^{-27}$ кг
Постоянная Фарадея	$F = 9{,}6487 \cdot 10^4$ А $\cdot$ с $\cdot$ (г $\cdot$ экв)$^{-1}$
Универсальная газовая постоянная	$R = 8{,}3143$ Дж $\cdot$ К$^{-1}$ $\cdot$ моль$^{-1}$
Молярный объем газа при нормальных условиях	$V_m = 22{,}414 \cdot 10^{-3}$ м^3 $\cdot$ моль$^{-1}$
Постоянная СтефанаБольцмана	$\sigma = 5{,}6696 \cdot 10^{-8}$ Вт $\cdot$ м$^{-2}$ $\cdot$ К$^{-4}$
Постоянная Вина	$\lambda_{макс}\, T = 2{,}8978 \cdot 10^{-3}$ К $\cdot$ м
Масса Земли	$M_З = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ кг
Масса Луны	$M_З = 7{,}36 \cdot 10^{22}$ кг
Масса Солнца	$M_З = 1{,}99 \cdot 10^{30}$ кг
Расстояние Земля-Луна	$3{,}80 \cdot 10^5$ км
Радиус Земли	$R_З = 6{,}35 \cdot 10^3$ кг

Ускорение свободного падения на Земле g, м $\cdot$ с$^{-2}$

стандартное	9,80665
на уровне моря на экваторе	9,78052
на широте 45°	9,8062
на полюсе	9,83233
Берлин (Потсдам)	9,81263

Электрон

Масса покоя	$m_e = 9{,}10096 \cdot 10^{-31}$ кг
Энергия покоя	$m_e c^2 = 0{,}51100$ МэВ
Классический радиус	$r_e = 2{,}8179 \cdot 10^{-15}$ м
Комптоновская длина волны	$\lambda_e = 2{,}4263 \cdot 10^{-12}$ м
Магнитный момент	$\mu_e = 9{,}2848 \cdot 10^{-24}$ А $\cdot$ м^2
g-Фактор	$g = 2{,}002319$

Протон

Масса покоя	$m_p = 1{,}6726 \cdot 10^{-27}$ кг $m_p / m_e = 1836{,}1$
Энергия покоя	$m_p c^2 = 938{,}26$ МэВ
Комптоновская длина волны	$\lambda_p = 1{,}3214 \cdot 10^{-15}$ м
Магнитный момент	$\mu_p = 1{,}4106 \cdot 10^{-26}$ А $\cdot$ м^2
Ядерный магнетон	$\mu_N = 5{,}0510 \cdot 10^{-27}$ А $\cdot$ м^2

Нейтрон	
Масса покоя	$m_n = 1{,}6749 \cdot 10^{-27}$ кг
Энергия покоя	$m_n c^2 = 939{,}55$ МэВ
Комптоновская длина волны	$\lambda_n = 1{,}3196 \cdot 10^{-15}$ м
Магнитный момент	$\mu_n = -9{,}6632 \cdot 10^{-27}$ А · м^2
Атом водорода	
Боровский радиус	$a_0 = 5{,}2918 \cdot 10^{-11}$ м
Постоянная Ридберга	$R_\infty = 1{,}09737 \cdot 10^{7}$ м$^{-1}$ $c R_\infty = 3{,}2898 \cdot 10^{15}$ с$^{-1}$ $h c R_\infty = 2{,}1799 \cdot 10^{-18}$ Дж = 13,6058 эВ
Постоянная тонкой структуры	$\alpha = 7{,}2974 \cdot 10^{-3}$ $\alpha^{-1} = 137{,}036$

Содержание

Панков Александр Альбертович

МЕХАНИКА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

Курс лекций
по курсу «Физика»
для студентов всех специальностей
дневной формы обучения

Подписано к размещению в электронную библиотеку
ГГТУ им. П. О. Сухого в качестве электронного
учебно-методического документа 26.11.12.
Рег. № 47Е.
http://www.gstu.by