Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Гидропневмоавтоматика»

Д. В. Лаевский, Д. Л. Стасенко

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОПНЕВМОСИСТЕМ

ПРАКТИКУМ

**по одноименному курсу
для студентов специальности
1-36 01 07 «Гидропневмосистемы мобильных
и технологических машин»
дневной и заочной форм обучения**

Гомель 2017

УДК 681.523(075.8)
ББК 34.447.6я73
Л15

Рекомендовано научно-методическим советом машиностроительного факультета ГГТУ им. П. О. Сухого (*протокол № 10 от 13.06.2016 г.*)

Рецензент: зам. директора по перспективному развитию ОАО «САЛЕО-Гомель» канд. техн. наук *Е. П. Борисов*

Лаевский, Д. В.

Л15 Математическое моделирование гидропневмосистем : практикум по одноим. курсу для студентов специальности 1-36 01 07 «Гидропневмосистемы мобильных и технологических машин» днев. и заоч. форм обучения / Д. В. Лаевский, Д. Л. Стасенко – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2017. – 84 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: https://elib.gstu.by. – Загл. с титул. экрана.

Приведены краткие теоретические материалы, задачи и варианты индивидуальных заданий. Представлены примеры решения поставленных задач.

Для студентов специальности 1-36 01 07 «Гидропневмосистемы мобильных и технологических машин».

УДК 681.523(075.8)
ББК 34.447.6я73

Практическая работа № 1
Моделирование гидромеханической системы на макроуровне

Цель работы: построить динамическую модель в виде знаков; построить математическую модель в виде системы уравнений.

Теоретическая часть

Моделирование гидромеханической системы

Рассмотрим более сложный технический объект, принципиальная схема которого дана на рис. 1. Это схема гидропривода, который включает насос 1, переливной клапан 2, гидрораспределитель 3, гидравлическую магистраль, состоящую из трех участков 4, 5 и 6, и два гидродвигателя 7 и 8, выполненных в виде гидравлических цилиндров с возвратными пружинами 9 и 10. Гидродвигатели приводят в действие рабочие органы некоторой машины или механизма. Взаимодействие гидродвигателей с рабочими органами характеризуется функциями внешних воздействий на систему гидропривода$F_{в1}$ и $F_{в2}$. Функция $h(t)$ характеризует состояние и процесс включения или выключения гидрораспределителя. Обычно время включения гидрораспределителя существенно меньше времени переходного процесса гидропривода, поэтому при моделировании полагают мгновенное включение гидрораспределителя.

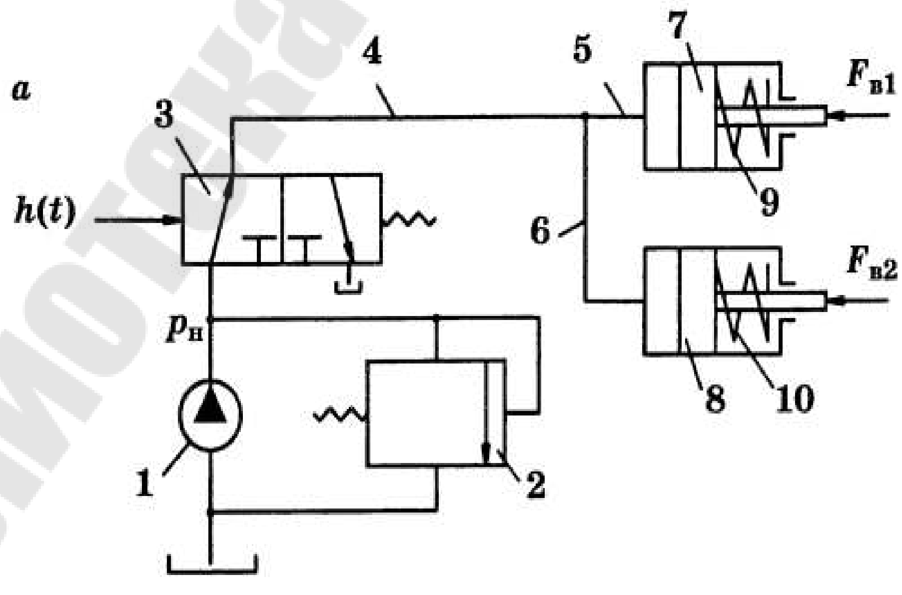


Рисунок 1.1 – Принципиальная схема

На макроуровне построение математической модели выполняется на основе динамической модели.

Динамическая модель – это абстрактное графическое изображение основных физических свойств объекта и характеристик его взаимодействий с внешней средой. Физические свойства технического объекта в динамической модели макроуровня отображаются совокупностью взаимодействующих дискретных элементов. В гидравлической системе фазовыми переменными типа потока являются расходы (Q, м^3/с), а фазовыми переменными типа потенциал является давление (p, Па).

Типы элементов:

1) инерционные (массовые $m = \dfrac{pV}{s^2}$), 

2) диссипативные (сопротивление $\mu = \dfrac{2\xi l}{s}$, где ξ – коэффициент жидкости по длине провода) 

3) упругие $C = \dfrac{E}{V}$, 

4) типа потенциал, Е 

5) источник потока 

Варианты задания приведены в таблице 1.1.

Пример работы представлен в приложении А.

Контрольные вопросы:

1. В чем заключается моделирование гидромеханической системы на макроуровне?

2. Динамическая модель – это…?

3. Основные типы элементов?

Таблица1.1 – Варианты заданий к практической работе №1

Вариант	Количество цилиндров	Количество отводов
1	2	4
2	1	1
3	6	22
4	1	2
5	6	6
6	4	1
7	2	5
8	8	2
9	2	7
10	1	12
11	5	14
12	2	8
13	3	6
14	3	3
15	6	2
16	3	11
17	4	7
18	1	18
19	1	7
20	5	1
21	4	16
22	3	5
23	1	14
24	5	7
25	3	3
26	1	13
27	3	4
28	3	17

Практическая работа №2

Построение динамической модели механической системы

Цель работы: построить кинематическую, эквивалентную, динамическую модели и орг. граф.

Теоретическая часть

Графические формы представления математических моделей

В инженерной практике часто используют графические формы представления математических моделей. Для использования графических форм должно существовать правило однозначного соответствия условных изображений элементов графической модели и компонентов инвариантной математической модели.

Одной из форм отображения физических свойств технического объекта является динамическая модель. Графические изображения элементов динамической модели отождествляются с их компонентными уравнениями, а соединения элементов соответствуют топологическим уравнениям. Следовательно, динамическую модель можно рассматривать в качестве математической модели технического объекта в графической форме.

Структурирование динамической модели и идентификация ее элементов позволяют формализовать процесс составления математической модели технического объекта в инвариантной форме. Для этого удобно использовать графические формы моделей в виде графов и эквивалентных схем.

Граф представляет структурную математическую модель системы и отображает ее топологию, а эквивалентная схема – функциональную модель и отображает топологию и компонентный состав, так же как и динамическая модель. Если ввести обозначения ветвей графа, то он будет содержать ту же информацию, что и эквивалентная схема.

Трансформаторные и фрикционные элементы отображают специфические особенности внутренних свойств системы и ее взаимодействия с внешней средой.

Характеристики процессов функционирования объекта определяются не только его внутренними физическими свойствами, но и внешними воздействиями. Математические описания этих воздействий также являются компонентами математической модели. Воздействия представляют собой источники потенциалов

$U_в = f_1(I,t)$ и источники потоков $I_в = f_2(U,t)$. При построении полной математической модели в инвариантной форме все компонентные уравнения посредством топологических уравнений сводят в единую систему. Это наиболее удобно осуществлять с помощью графов.

Граф представляет собой совокупность узлов (вершин) и соединяющих их ветвей (ребер). Такое же определение имеет и эквивалентная схема. Определение графа может быть записано в следующем виде: Г = (У, В, И), где У – множество узлов; В – множество ветвей; И – инцидентор – указатель способа соединения ветвей.

Ветви графа и эквивалентной схемы соответствуют компонентам математической модели. Они отображают математические описания инерционных, упругих и диссипативных элементов динамической модели и источников внешних воздействий.

Узлы графа и эквивалентной схемы соответствуют узлам дискретизации непрерывных объектов в геометрическом пространстве, вводимым при переходе от моделей микроуровня к моделям макроуровня. При дискретизации системы методом сосредоточенных масс узлы дискретизации совпадают с сосредоточенными массами, представляемыми в динамической модели материальными точками или твердыми телами. Состояние технической системы и характер протекающих в ней процессов определяются фазовыми координатами узлов дискретизации. Эти координаты представляют собой потоковые переменные (например, в механической системе – скорости или геометрические координаты).

Сосредоточенные массы динамической модели обладают дуальными свойствами: они отображают инерционные свойства технической системы и одновременно являются носителями информации о ее состоянии. Последнее выражается в том, что систему фазовых координат динамической модели связывают непосредственно с сосредоточенными массами.

Граф и эквивалентная схема позволяют эти свойства сосредоточенных масс дифференцировать более четко: инерционные свойства отображаются ветвями, а носители информации о состоянии технической системы – узлами. В результате каждая сосредоточенная масса отображается узлом графа или эквивалентной схемы, а ее физические свойства – ветвью инерционного элемента.

Узлы графа обозначают точками, а ветви линиями (рис. 2.1). Узлам присваивают номера сосредоточенных масс, а ветвям дают обозначения параметров отождествляемых ими элементов динамической модели или обозначения источников внешних воздействий (источник потенциалов $U_в$ или источник потоков $I_в$). Один из узлов графа и эквивалентной схемы отображает инерциальную систему отсчета фазовых координат типа потока. Его называют базовым узлом (или базой) и ему присваивается нулевой номер.

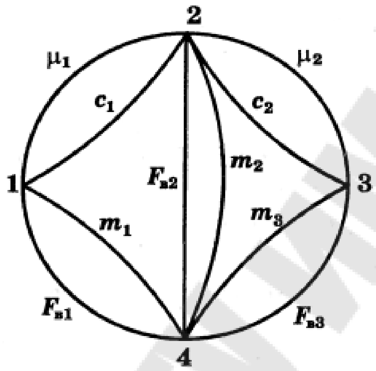


Рисунок 2.1– Пример графа механической системы

Для обозначения различных ветвей эквивалентной схемы рекомендуется применять графические изображения, показанные на рис.2. Ветви эквивалентной схемы и графа, отображающие внутренние свойства технического объекта, можно именовать так же, как и соответствующие им элементы динамической модели, т.е. инерционные, упругие и диссипативные. Поскольку эти ветви суть компоненты математической модели в графической форме, то и компоненты имеют те же наименования, что и ветви.

На эквивалентных схемах и графах применяют обозначения параметров элементов и источников внешних воздействий соответственно виду моделируемой технической системы На рис. 2.2 использованы обозначения для механической поступательной системы.

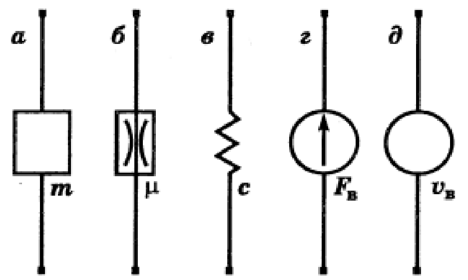


Рисунок 2.2– Обозначение ветвей эквивалентной схемы: а – инерционной; б – диссипативной; в – упругой; г – источника потенциала; д – источника потока

Рассмотрим особенности построения эквивалентной схемы и графа на примере механической вращательной системы, динамическая модель которой приведена на рис. 2.3.

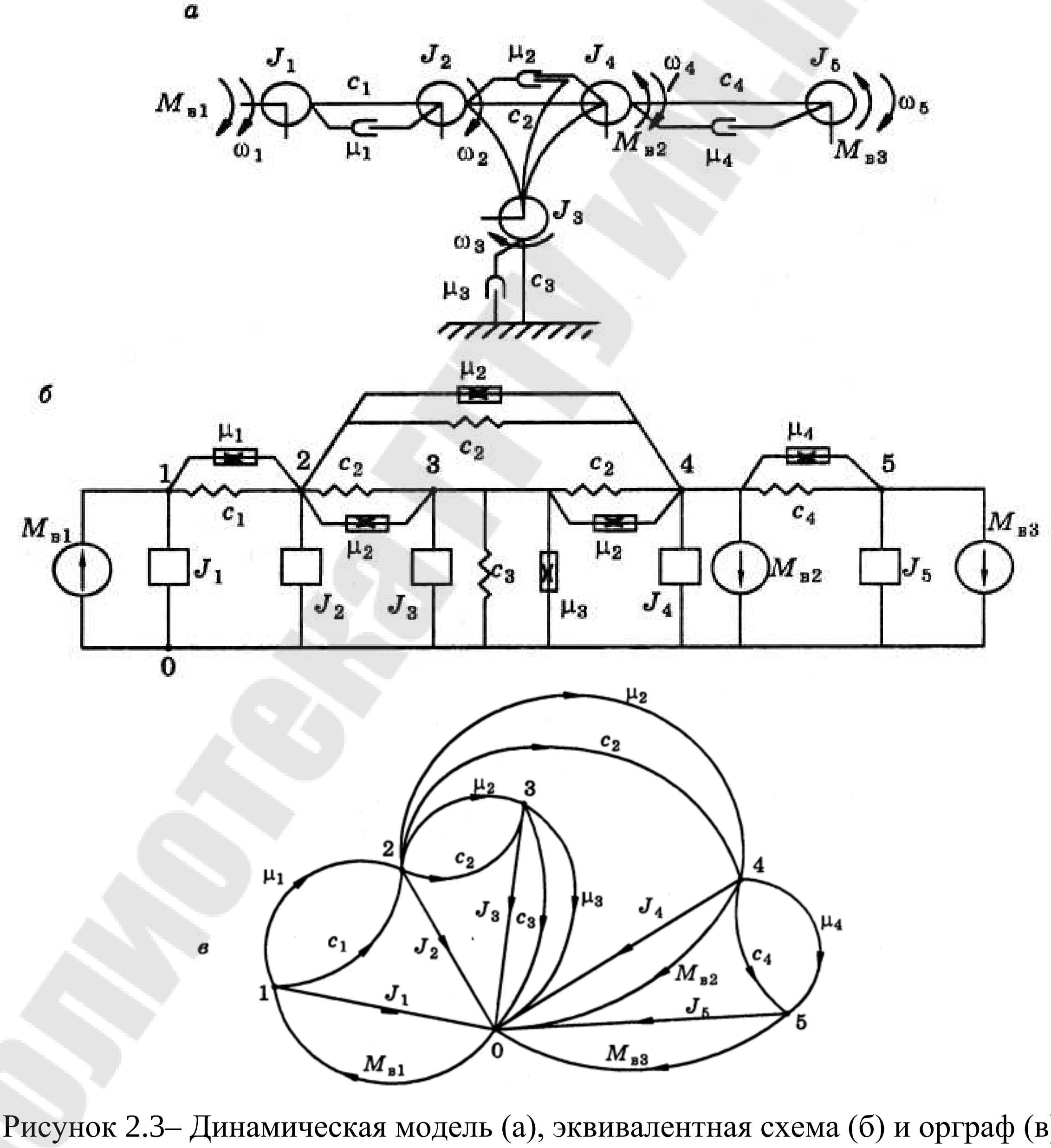


Рисунок 2.3– Динамическая модель (а), эквивалентная схема (б) и орграф (в) механической вращательной системы

Модель отображает инерционные, упругие и диссипативные элементы системы и внешние воздействия на нее. Элементы динамической модели обозначаются на схеме их параметрами с цифровыми индексами, соответствующими порядковым номерам элементов: J_i– моменты инерции вращающихся твердых тел (сосредоточенных масс); C_j, μ_j – коэффициенты жесткостей и сопротивлений соответственно упругих и диссипативных элементов. На динамической модели необходимо также отобразить внешние воздействия на технический объект. Источники потенциалов $M_{вk}$ воздействуют непосредственно на сосредоточенные массы, а источники потоков $\omega_{вk}$ – на упругие и диссипативные элементы. Рассматриваемый объект подвержен воздействиям только источников потенциалов $M_{вk}$, k = 1,3.

Варианты задания приведены в таблице 2.1.

Пример работы представлен в приложении Б.

Контрольные вопросы:

1. Основные принципы построение динамической модели механической системы?
2. Графические формы представления математических моделей?
3. Принципы построения эквивалентной схемы и орграф механической вращательной системы?

Таблица 2.1 –Варианты заданий к практической работе №2

Вариант	Задания
1	$1*4+2$
2	$2*4+2+2$
3	$2*2+2+2+2$
4	$2*3+2$
5	$2*3+2+2$
6	$2*3+2+2+2$
7	$1*2+2+2$
8	$1*6+2$
9	$1*8+2+2$
10	$4*3+2$
11	$2*3+2+2+2+2$
12	$4*2+2$
13	$4*4+2$
14	$2*2+2$
15	$2*2+2+2+2+2$
16	$4*1+2+2$
17	$4*3+2+2$
18	$1*4+2+2$
19	$2*4+2$
20	$2*4+2+2+2$
21	$2*4+4$
22	$1*4+2+2$
23	$1*4+2+2+2$
24	$3*2+2+2$
25	$3*4$
26	$3*2+2$
27	$4*2+2+2$
28	$2*6+2$
29	$1*8+2$
30	$1*8+2+2$

Практическая работа №3

Построение плана многофактороного эксперемента

Цель работы: Построить план многофакторного эксперимента.

Теоретическая часть

Особенности экспериментальных факторных моделей

Наряду с теоретическими математическими моделями при функциональном проектировании технических систем широко применяются экспериментальные факторные математические модели.

Теоретические модели имеют то преимущество, что они непосредственно описывают физические свойства технической системы. Коэффициенты уравнений теоретических моделей представляют собой параметры элементов технической системы (внутренние параметры системы) или некоторые комбинации этих параметров, а зависимые переменные – фазовые координаты системы. Они позволяют осуществлять имитационное моделирование процессов функционирования технической системы во времени, детально изучать изменение фазовых координат в зависимости от внешних воздействий (возмущающих и управляющих), анализировать устойчивость системы, качество переходных процессов, эффективность функционирования в условиях случайных внешних воздействий, близких к реальным. Т.е. оценивать ее функциональную работоспособность и выполнение технических требований к системе.

Но функциональные теоретические модели сложных технических объектов представляют собой системы нелинейных дифференциальных уравнений высокого порядка (обычно не ниже 30-го порядка). Однократное решение такой системы уравнений на самых современных ЭВМ требует значительной затраты машинного времени. Следует при этом учитывать, что задачи проектирования носят ярко выраженный оптимизационный характер. Целью функционального проектирования является выбор структуры на основе некоторого множества вариантов и определение оптимальных параметров технического объекта. Процедуры выбора структуры и оптимизационные алгоритмы требуют выполнения множества итераций, количество которых может достигать чисел второго и третьего порядков, причем, на каждой итерации решается исходная система дифференциальных уравнений. Поэтому решение одной проектной задачи характеризуется огромными затратами машинного времени. Этим объясняется медленное внедрение методов функционального проектирования в конструкторских организациях. Вместе с тем без выполнения работ по функциональному проектированию невозможно обеспечить высокий технический уровень и конкурентоспособность создаваемых сложных технических объектов.

Затраты времени можно значительно сократить, если на этапе оптимизации параметров использовать экспериментальную факторную математическую модель. *Экспериментальные факторные модели*, в отличие от теоретических, не используют физических законов, описывающих происходящие в объектах процессы, а представляют собой некоторые формальные зависимости выходных параметров от внутренних и внешних параметров объектов проектирования.

Экспериментальная факторная модель может быть построена на основе проведения экспериментов непосредственно на самом техническом объекте (*физические эксперименты*), либо *вычислительных экспериментов* на ЭВМ с теоретической моделью. При создании новых технических объектов физический эксперимент проводится на прототипах или аналогах, а иногда на макетных образцах. Однако физические эксперименты требуха огромных затрат материальных и временных ресурсов, поэтому их выполняют обычно в тех случаях, когда возникает необходимость поиска путей совершенствования существующих технических систем, когда сложность этих систем и условий их функционирования не позволяет надеяться на требуемую точность их математического описания теоретическими методами.

При функциональном проектировании факторные модели наиболее часто получают на основе вычислительных экспериментов на ЭВМ с теоретической моделью.

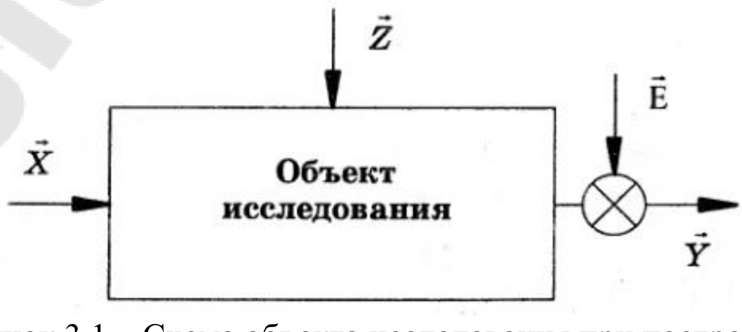


Рисунок 3.1 – Схема объекта исследования при построении экспериментальной факторной модели

При построении экспериментальной факторной модели объект моделирования (проектируемая техническая система) представляется в виде «черного ящика», на вход которого подаются некоторые переменные $\vec{X}$ и $\vec{Z}$, а на выходе можно наблюдать и регистрировать переменные $\vec{Y}$ (рис. 3.1). В число входных переменных $\vec{X}$ и $\vec{Z}$ входят внутренние и внешние параметры объекта проектирования, подлежащие оптимизации, а выходными переменными «черного ящика» являются выходные параметры объекта, характеризующие его эффективность и качество процессов функционирования, выбираемые в качестве критериев оптимальности.

В процессе проведения эксперимента изменение переменных $\vec{X}$ и $\vec{Z}$ приводит к изменениям выходных переменных $\vec{Y}$. Для построения факторной модели необходимо регистрировать эти изменения и осуществить необходимую их статистическую обработку для определения параметров модели.

При проведении физического эксперимента переменными $\vec{X}$ можно управлять, изменяя их величину по заданному закону. Переменные $\vec{Z}$ – неуправляемые, принимающие случайные значения. При этом значения переменных $\vec{X}$ и $\vec{Z}$ можно контролировать и регистрировать с помощью соответствующих измерительных приборов. Кроме того, на объект воздействуют некоторые переменные $\vec{E}$, которые нельзя наблюдать и контролировать. Переменные $\vec{X}=(x_1, x_2, ..., x_n)$ называют *контролируемыми и управляемыми*; переменные $\vec{Z}=(z_1, z_2, ..., z_m)$ – *контролируемыми, но неуправляемыми*, а переменные $\vec{E}=(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_l)$ – *неконтролируемыми и неуправляемыми*.

Переменные $\vec{X}$ и $\vec{Z}$ называют *факторами*. Факторы $\vec{X}$ являются управляемыми и изменяются как *детерминированные переменные*, а факторы $\vec{Z}$ неуправляемые, изменяемые во времени случайным образом, т.е. $\vec{Z}$ представляют собой *случайные процессы*. Пространство контролируемых переменных – факторов $\vec{X}$ и $\vec{Z}$ – образует *факторное пространство*.

Выходная переменная $\vec{Y}$ представляет собой вектор зависимых переменных моделируемого объекта. Ее называют *откликом*, а зависимость $\vec{Y}$ от факторов $\vec{X}$ и $\vec{Z}$ – *функцией отклика*.

Геометрическое представление функции отклика называют *поверхностью отклика*.

Переменная $\vec{E}$ действует в процессе эксперимента бесконтрольно. Если предположить, что факторы $\vec{X}$ и $\vec{Z}$ стабилизированы во времени и сохраняют постоянные значения, то под влиянием переменных $\vec{E}$ функция отклика $\vec{Y}$ может меняться как систематическим, так и случайным образом. В первом случае говорят о *систематической помехе*, а во втором – о *случайной помехе*. При этом полагают, что случайная помеха обладает вероятностными свойствами, не изменяемыми во времени.

Возникновение помех обусловлено ошибками методик проведения физических экспериментов, ошибками измерительных приборов, неконтролируемыми изменениями параметров и характеристик объекта и внешней среды, включая воздействия тех переменных, которые в принципе могли бы контролироваться экспериментатором, но не включены им в число исследуемых факторов (вследствие трудностей их измерения, по ошибке или незнанию). Помехи могут быть также обусловлены неточностью физического или математического моделирования объектов.

В вычислительных экспериментах объектом исследования является теоретическая математическая модель, на основе которой необходимо получить экспериментальную факторную модель. Для ее получения необходимо определить структуру и численные значения параметров модели.

Под *структурой* модели понимается вид математических соотношений между факторами $\vec{X}$, $\vec{Z}$ и откликом $\vec{Y}$. *Параметры* представляют собой коэффициенты уравнения факторной модели. Структуру модели обычно выбирают на основе априорной информации об объекте с учетом назначения и последующего использования модели. Задача определения параметров модели полностью формализована. Она решается методами *регрессионного анализа. Экспериментальные факторные модели* называют также *регрессионными моделями*.

Регрессионную модель можно представать выражением

$$\vec{Y} = \vec{\varphi}\left(\vec{X}, \vec{Z}, \vec{b}\right),$$

где $\vec{b}$ – вектор параметров факторной модели.

Вид вектор-функции φ определяется выбранной структурой модели н при выполнении регрессионного анализа считается заданным, а параметр $\vec{b}$ подлежат определению на основе результатов эксперимента, проводимого в условиях действия помехи $\vec{E}$, представляемой в виде аддитивной составляющей функции отклика $\vec{Y}$ (рис.3.1).

Эксперимент – это система операций, воздействий и (или) наблюдений, направленных на получение информации об объекте при исследовательских испытаниях.

Опыт – воспроизведение исследуемого явления в определенных условиях проведения эксперимента при возможности регистрации его результатов. Опыт – отдельная элементарная часть эксперимента.

Различают эксперименты пассивные и активные.

Пассивным называется такой эксперимент, когда значениями факторов управлять нельзя, и они принимают случайные значения. Это характерно для многих технических объектов при проведении на них физических экспериментов. В таком эксперименте существуют только факторы $\vec{Z}$. В процессе эксперимента в определенные моменты времени измеряются значения факторов $\vec{Z}$ и функций откликов $\vec{Y}$. После проведения N опытов полученная информация обрабатывается статистическими методами, позволяющими определить параметры факторной модели. Такой подход к построению математической модели лежит в основе *метода статистических испытаний* (*Монте-Карло*).

Активным называется такой эксперимент, когда значениями факторов задаются и поддерживают их неизменными на заданных уровнях в каждом опыте в соответствии с планом эксперимента.

Следовательно, в этом случае существуют только управляемые факторы $\vec{X}$. Однако в связи с тем, что в активном эксперименте также действует аддитивная помеха $\vec{E}$, реализации функций отклика $\vec{Y}$ представляют собой случайные величины, несмотря на то, что варьируемые факторы $\vec{X}$ детерминированы. Поэтому здесь так же, как и в пассивном эксперименте, построение экспериментальной факторной модели требует статистической обработки получаемых результатов опытов.

Основные особенности экспериментальных факторных моделей следующие: они статистические; представляют собой сравнительно простые функциональные зависимости между оценками математических ожиданий выходных параметров объекта от его внутренних и внешних параметров; дают адекватное описание установленных зависимостей лишь в области факторного пространства, в которой реализован эксперимент. Статистическая регрессионная модель описывает поведение объекта в среднем, характеризуя его неслучайные свойства, которые в полной мере проявляются лишь при многократном повторении опытов в неизменных условиях.

Основные принципы планирования эксперимента

Для получения адекватной математической модели необходимо обеспечить выполнение определенных условий проведения эксперимента. Модель называют *адекватной*, если в оговоренной области варьирования факторов X полученные с помощью модели значения функций отклика Y отличаются от истинных не более чем на заданную величину.

Методы построения экспериментальных факторных моделей рассматриваются в *теории планирования эксперимента*.

Цель планирования эксперимента – получение максимума информации о свойствах исследуемого объекта при минимуме опытов. Такой подход обусловлен высокой стоимостью экспериментов, как физических, так и вычислительных, и вместе с тем необходимостью построения адекватной модели.

Планирование осуществляют как активного, так и пассивного эксперимента. Планируемый активный эксперимент при прочих равных условиях точнее и информативнее, а иногда и дешевле пассивного. Это следует учитывать при выборе вида эксперимента. В вычислительном эксперименте, в отличие от физического, нет никаких ограничения на выбор управляемых факторов и характер их изменения. Поэтому вычислительные эксперименты обычно всегда реализуются как активные. В дальнейшем будут рассматриваться в основном вопросы, связанные с планированием активных экспериментов.

При планировании активных экспериментов используются следующие принципы:

отказ от полного перебора всех возможных состояний объекта;

постепенное усложнение структуры математической модели;

сопоставление результатов эксперимента с величиной случайных помех;

рандомизация опытов;

оптимальное планирование эксперимента.

Детальное представление о свойствах поверхности отклика может быть получено лишь при условии использования густой дискретной сетки значений факторов, покрывающей все факторное пространство. В узлах этой многомерной сетки находятся точки плана, в которых проводятся опыты. В этом случае в принципе можно получить факторную модель, которая будет практически почти полностью соответствовать исходной теоретической модели. Однако в большинстве случаев при решении практических задач, для которых используется факторная модель, такого детального описания не требуется. Выбор структуры факторной модели основан на постулировании определенной степени гладкости поверхности отклика. Поэтому с целью уменьшения количества опытов принимают небольшое число точек плана, для которых осуществляется реализация эксперимента.

В отсутствие априорной информации о свойствах функции отклика нет смысла сразу строить сложную математическую модель объекта. Если проверка этой модели на адекватность не дает удовлетворительного результата, ее постепенно усложняют путем изменения структуры (например, повышая степень полинома, принятого в качестве факторной модели, или вводя в модель дополнительные факторы и т.п.). При этом используются результаты опытов, выполненных при построении простой модели, и проводится некоторое количество дополнительных опытов.

При большом уровне случайной помехи получается большой разброс значений функции отклика Y в опытах, проведенных в одной и той же точке плана. В этом случае оказывается, что чем выше уровень помехи, тем с большей вероятностью простая модель окажется работоспособной. Чем меньше уровень помехи, тем точнее должна быть факторная модель.

Кроме случайной помехи при проведении эксперимента может иметь место систематическая помеха. Наличие этой помехи практически никак не обнаруживается и результат ее воздействия на функцию не поддается контролю. Однако если путем соответствующей организации проведения опытов искусственно создать случайную ситуацию, то систематическую помеху можно перевести в разряд случайных. Такой принцип организации эксперимента называют *рандомизацией* систематически действующих помех.

Наличие помех приводит к ошибкам эксперимента. *Ошибки* подразделяют на *систематические* и *случайные*, соответственно наименованиям вызывающих их факторов – помех.

В вычислительных активных экспериментах ошибки характерны только для определяемых значений функций отклика. Если исходить из целей построения факторных моделей на основе теоретических моделей, полагая, что теоретические модели дают точное описание физических свойств технического объекта, а регрессионная модель является ее аппроксимацией, то значения функций отклика будут содержать только случайную ошибку. В этом случае необходимости в рандомизации опытов не возникает.

Рандомизацию опытов осуществляют только в физических экспериментах. Следует отметить, что в этих экспериментах систематическую ошибку может порождать наряду с отмеченными в предыдущем параграфе факторами также неточное задание значений управляемых факторов, обусловленное некачественной калибровкой приборов для их измерения (инструментальная ошибка), конструктивными или технологическими факторами.

К факторам в активном эксперименте предъявляются определенные требования. Они должны быть:

1)*управляемыми* (установка заданных значений и поддержание постоянными в процессе опыта);

2)*совместными* (их взаимное влияние не должно нарушать процесс функционирования объекта);

3)*независимыми* (уровень любого фактора должен устанавливаться независимо от уровней остальных);

4)*однозначными* (одни факторы не должны быть функцией других);

5)*непосредственно влияющими на выходные параметры*.

В вычислительном эксперименте реализация трех первых требований не создает никаких затруднений, а в физическом эксперименте могут возникнуть сложности и даже невозможность их осуществления, что приведет к необходимости замены активного эксперимента пассивным.

Функции отклика должны быть:

1) *численно измеряемыми*;

2) *иметь четкий физический смысл*;

3) *однозначными* (характеризовать только одно свойство объекта);

4) *информативными* (полностью характеризовать определенное свойство объекта);

5) *статистически эффективными* (измеряться с достаточной точностью с целью сокращения дублирования опытов).

План эксперимента

При проведении активного эксперимента задается определенный план варьирования факторов, т.е. эксперимент заранее планируется.

План эксперимента – совокупность данных, определяющих число, условия и порядок реализации опытов.

Планирование эксперимента – выбор плавя эксперимента. удовлетворяющего заданным требованиям.

Точка плана - упорядоченная совокупность численных значений факторов, соответствующая условиям проведения опыта, т.е. точка факторного пространства, в которой проводится эксперимент. Точке плана с номером *i* соответствует вектор-строка

$$\vec{X}_i = \left(X_{i1}, X_{i2}, ..., X_{in}\right).$$

Общая совокупность таких векторов $\vec{X}_i$, $i = \overline{1, L}$, образует план эксперимента, а совокупность различающихся векторов, число которых обозначим *N*, – *спектр плана*.

В активном эксперименте факторы могут принимать только фиксированные значения. Фиксированное значение фактора называют *уровнем фактора*. Количество принимаемых уровней факторов зависит от выбранной структуры факторной модели и принятого плана эксперимента. Минимальный $X_{j\min}$ и максимальный $X_{j\max}$, $j = \overline{1, n}$ (n – число факторов), уровни всех факторов выделяют в факторном пространстве некоторый гиперпараллелепипед, представляющий собой *область планирования*. В области планирования находятся все возможные значения факторов, используемые в эксперименте.

Вектор $\vec{X}^0 = \left(X_1^0, X_2^0, ..., X_n^0\right)$ задает точку центра области планирования. Координаты этой точки X_j^0, обычно выбирают из соотношения

$$X_j^0 = \left(X_{j\max} + X_{j\min}\right)/2. \qquad (3.1)$$

Точку $\vec{X}^0$ называют *центром эксперимента*. Она определяет основной уровень факторов X_j^0, $j = \overline{1, n}$. Центр эксперимента стремятся выбрать как можно ближе к точке, которая соответствует искомым оптимальным значениям факторов. Для итого используется априорная информация об объекте.

Интервалом (или *шагом*) *варьирования фактора* X_j называют величину, вычисляемую по формуле

$$\Delta X_j = \left(X_{j\max} - X_{j\min}\right)/2,\ j = \overline{1,n}. \qquad (3.2)$$

Факторы нормируют, а их уровни кодируют. В кодированном виде верхний уровень обозначают +1, нижний -1, а основной 0. Нормирование факторов осуществляют на основе соотношения

$$x_j = \left(X_j - X_j^0\right)/\Delta X_j,\ j = \overline{1,n}. \qquad (3.3)$$

Для переменных x_j начало координат совмещено с центром эксперимента, а в качестве единиц измерения используются интервалы варьирования факторов. Геометрическое представление области планирования при двух факторах показано на рис. 3.2. Центр эксперимента находится в точке 0 с координатами X_1^0, X_2^0. Точки 1, 2, 3, 4 являются точками плана эксперимента. Например, значения факторов X_1 и X_2 в точке 1 равны соответственно $X_{1\min}$ и $X_{2\min}$, а нормированные их значения $x_{1\min} = -1$, $x_{2\min} = -1$.

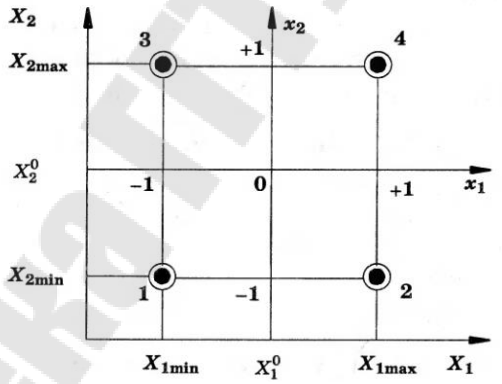


Рисунок 3.2 – Геометрическое представление области планирования при двух факторах: X_1, X_2

В дальнейшем будем предполагать, что в планах активных экспериментов факторы нормированы. План эксперимента удобно представлять в матричной форме. План эксперимента задается либо матрицей плана, либо матрицей спектра плана в совокупности с матрицей дублирования.

Матрица плана представляет собой прямоугольную таблицу, содержащую информацию о количестве и условиях проведения опытов. Строки матрицы плана соответствую опытам, а столбцы – факторам. Размерность матрицы плана $L \times n$, где L – число опытов, n

– число факторов. При проведении повторных (дублирующих) опытов в одних и тех же точках матрица плана содержит ряд совпадающих строк.

Матрица спектра плана – это матрица, в которую входят только различающиеся между собой строки матрицы плана. Размерность матрицы спектра плана $N \times n$, где N – число точек плана, различающихся между собой хотя бы одной координатой $X_{ij}, i = \overline{1, N}, j = \overline{1, n}$

Матрица спектра плана имеет вид

$$X = \begin{bmatrix} \vec{X}_1 \\ \vec{X}_2 \\ \ldots \\ \vec{X}_i \\ \ldots \\ \vec{X}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \ldots & X_{1j} & \ldots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \ldots & X_{2j} & \ldots & X_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ X_{i1} & X_{i2} & \ldots & X_{ij} & \ldots & X_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ X_{N2} & X_{N2} & \ldots & X_{Nj} & \ldots & X_{Nn} \end{bmatrix}, \tag{3.4}$$

где $\vec{X}_i$ – вектор, определяющий нормированные значения координат точки плана в i-м опыте; X_{ij} – нормированное значение j-го фактора в i-м опыте.

Матрица дублирования – квадратная диагональная матрица m, диагональные элементы которой равны числам параллельных опытов в соответствующих точках спектра плана:

$$m = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & m_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & m_N \end{bmatrix}. \tag{3.5}$$

Опыты при выполнении эксперимента проводятся в последовательности, предусмотренной матрицей плана. Эта матрица составляется лишь, при необходимости рандомизации опытов, когда в результатах эксперимента можно ожидать наличие систематических ошибок. Для выбора случайной последовательности опытов используется таблица равномерно распределенных случайных чисел. Первое число таблицы выбирают произвольно, желательно случайным образом, а затем, начиная с этого числа, выписывают L чисел таблицы, где L – число опытов (с учетов их дублирования).

При этом числа, большие L, а также уже выписанные, отбрасываются.

Равномерно распределенные псевдослучайные числа приведены в табл. 7 приложения.

В вычислительных экспериментах опыты проводят в соответствии с матрицей спектра плана, так как предполагается отсутствие систематических ошибок и поэтому нет необходимости в рандомизации опытов.

План дробного факторного эксперимента

Наряду с отмеченными положительными качествами полного факторного эксперимента он имеет существенный недостаток: увеличение количества факторов приводит к быстрому росту числа опытов, что обусловлено степенной зависимостью. Например, при n = 10 спектр плана содержит $N = 2^{10} = 1024$ опыта. Кроме того, необходимо дублирование опытов.

ПФЭ позволяет построить регрессионную модель, которая учитывает влияние на функцию отклика выбранных факторов и всех возможных сочетаний взаимодействий этих факторов. Но поскольку структура модели выбирается на основе априорной ин формации о физических свойствах исследуемого объекта, то весьма сложно представить себе влияние на характеристики его функционирования аффектов взаимодействий выше второго или третьего порядка. Обычно при построении многофакторной регрессионной модели ограничиваются парными или, в крайнем случае, отдельными тройными взаимодействиями факторов. В этом случае ПФЭ оказывается избыточным, так как число точек спектра плана N значительно больше количества коэффициентов регрессии $N_{в}$. В результате возникает возможность сокращения числа опытов. Но при этом, естественно, должно соблюдаться условие возможности оценки коэффициентов регрессии по результатам опытов, которое выражается соотношением $N \geq N_{в}$.

Во многих случаях на начальной стадии моделирования технической системы в связи с отсутствием необходимой информации о влиянии на ее выходные параметры различных факторов (внутренних или внешних параметров) строят линейную модель.

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_n x_n, \tag{3.6}$$

Например, при трех факторах выбирают модель в виде

$$y = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 \tag{3.7}$$

В этом уравнении четыре коэффициента регрессии, а при n=3 спектр плана ПФЭ, согласно выражению $N = 2^n$, содержит 8 точек т.е. предусматривает 8 опытов в различных точках факторного пространства. Следовательно, четыре опыта оказываются избыточными и их можно было бы исключить, естественно, при условии выполнения принятых предпосылок регрессивного анализа, прежде всего ортогональности столбцов матрицы базисных функций F.

При построении математических моделей, использующих упрощённые уравнения регрессий, когда $N \geq N_в$, применяют дробные факторные эксперименты (ДФЭ).

Наибольшее распространение имеют регулярные планы ДФЭ типа 2^{n-p}, т.е. ДФЭ2^{n-p}, где n – число факторов, p – степень дробности ДФЭ. Планы ДФЭ принято называть репликами с указанием их степени дробности. Так, план ДФЭ2^{n-p} называют пелурепликой ДФЭ2^n (1/2-репдика); ДФЭ2^{n-p} – 1/4- реплика ДФЭ2^n; ДФЭ2^{n-3} – 1/8- реплика ДФЭ2^n и т.д. Полуреплика сокращает число опытов в два раза по сравнению с ПФЭ, 1/4- реплика – в четыре раза и т.д.

При построении матрицы спектра плана необходимо обеспечить выполнение условий, описываемых выражениями (3.8) – (3.11),

1).*Свойством симметричности относительно центра эксперимента* – алгебраическая сумма элементов каждого столбца матрицы базисных функций, кроме столбца $f_0(\vec{X})$, равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{N} f_j(\vec{X}_i) = 0,\ j = 1, d = Nв - 1, \tag{3.8}$$

где $f_j(\vec{X}_i)$– значение j-й, базисной функции, соответствующее i-й строке матрицы F; i – номер точки спектра плана; N – число точек спектра плана; $N_в$ – количество базисных функций.

2). *Свойством ортогональности столбцов* – сумма построчных произведений элементов любых двух столбцов равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{N} f_j(\vec{X}_i) f(\vec{X}_i)_k = 0,\ j \neq k;\ j,k = 0, d \tag{3.9}$$

3). *Свойством нормировки* – сумма квадратов элементов каждого столбца матрицы базисных функций равна числу точек N спектрап плана:

$$\sum_{i=1}^{N}\left[f_j(\vec{X}_i)\right]^2 = N,\ j=\overline{0,d} \qquad (3.10)$$

4). Для столбца базисной функции $f_0(\overline{X})$ сумма элементов также равна N:

$$\sum_{i=1}^{N} f_j(\vec{X}_i) = N \qquad (3.11)$$

принимая во внимание, что число точек спектра этого плана определяется по формуле

$$N = 2^{n-p} \qquad (3.12)$$

Условия (3.8) – (3.11) удовлетворяется, если в матрице базисных функций F отсутствуют полностью совпадающие или полностью противоположные столбцы, что позволяет получить раздельное оценивание всех коэффициентов регрессии. При степени дробности ДФЭ должно выполняться условие

$$N \geq N_{\text{в}}$$

Выбранные базисные функции для ДФЭ составляют лишь некоторую часть базисных функций соответствующего ПФЭ. Назовем эти функции существенными переменными, характеризующими в наибольшей мере физические свойства технического объекта.

Процедура построения спектра плана ДФЭ2^{n-p} содержит четыре этапа.

Этап 1. Выбор структуры уравнения регрессии и определение степени дробности ДФЭ. Потом исходят из условия выполнения соотношения (3.12).

Этап 2. Выбор ведущих факторов и построение для них матрицы спектра плана, определяющего программу их изменения в ходе эксперимента.

Число k ведущих факторов принимают равным разности между количеством факторов n и степенью дробности ДФЭ:

$$k = n - p \qquad (3.13)$$

Для выбранных ведущих факторов x_1, x_2, ... ,x_k строят план ПФЭ2^k, используя изложенное в предыдущем параграфе правило чередования знаков.

Этап 3. Построение матрицы X спектра плана ДФЭ2^{n-p}. Часть этой матрицы составляет матрица спектра плана ПФЭ2^k, а во вторую часть должны войти столбцы матрицы для остальных факторов $x_{k+1},x_{k+2},\ldots,x_n$ количество которых равно

$$p = n - k$$

Столбцы матрицы X, соответствующие этим факторам, определяют путем перемножения соответствующих столбцов ведущих факторов. Для этого используют генерирующие соотношения. Генерирующим соотношением называется алгебраическое выражение, устанавливающее связь между одним из факторов $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ и произведением какой-либо комбинации ведущих факторов $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

Чтобы получаемые столбцы были ортогональными, для каждого из них задается отдельное генерирующее соотношение (количество этих соотношений равно p). Выбор генерирующих соотношений, вообще говоря, произволен. Однако в качестве генерирующих нельзя использовать те произведения ведущих факторов, которые входят в состав существенных переменных, так как в этом случае в матрице базисных функций F окажутся совпадающие столбцы: для одного из факторов $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ и одного из взаимодействий факторов из числа существенных переменных.

Генерирующее соотношение имеет вид

$$X_{k+i} = X_j X_l X_m, \ldots, i = \overline{1, d} \qquad (3.14)$$

где X_{k+i} – фактор, не включенный в число ведущих (для него определяется столбец матрицы X спектра плана ДФЭ2^{n-p});

$X_j X_l X_m$ – ведущие факторы.

Количество ведущих факторов, входящих в генерирующее соотношение (3.14), может быть произвольным, но соотношения (3.14) для всех X_{k+i} должны быть разными.

Этап 4. Проверка пригодности полученного спектра плана.

Для этого необходимо построить матрицу базисных функций F и проверить, нет ли в ней совпадающих или полностью противоположных столбцов, т.е. выяснить, обладает ли матрица F свойством ортогональности столбцов, определяемым выражением (3.9). Если в матрице F нет совпадающих или противоположных столбцов, полученный спектр плана ДФЭ2^{n-p} пригоден для решения поставленной задачи. В противном случае выполняются последовательно следующие процедуры до тех пор, пока не будет обеспечена ортогональность:

выбираются иные генерирующие соотношения;

изменяется набор ведущих факторов;

уменьшается степень дробности плана p.

При ограниченных возможностях проведения опытов степень дробности плана сохраняют, а изменят структуру уравнения регрессии (например, используют иные взаимодействия факторов или исключат какую-либо базисную функцию, соответствующую одному из взаимодействий высшего порядка).

Таким образом, регулярные планы ДФЭ2^n обладают теми же свойствами, что и планы. Матрица F удовлетворяет выражениям (3.8) – (3.11). Информационная матрица Фишера Φ диагональная и имеет вид

$$\Phi = \begin{bmatrix} N & 0 & \dots & 0 \\ 0 & N & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & N \end{bmatrix}. \tag{3.15}$$

Дисперсию оценок коэффициентов регрессии определяют по формуле:

$$\sigma_{b_j}^2 = \sigma_\varepsilon^2 / N \tag{3.16}$$

Планы ДФЭ2^{n-p} ортогональны, для линейных моделей они ротатабельны A- и E-оптимальны, а насыщенные планы B-оптимальны. Поскольку планы ДФЭ значительно экономичнее планов ПФЭ получили широкое практическое применение. В частности, их используют для анализа чувствительности целевой функции к вариации параметров технических объектов в процессе их отсеивании и отбора для осуществления оптимизации.

Задание для выполнения работы

Индивидуальный вариант задания студенту определяется номером зачетной книжки студента и порядковым номером в журнале. Поэтому первоначально выбираются исходные данные для расчёта: общие из раздела 3.1; значение поправочного коэффициента ℓ на базовые данные из раздела 3.2 (последняя цифра номера зачетной книжки) и используя рекомендации раздела 3.3 будут выбраны значения базовых данных.

3.1. Общие данные

Значения нулевых уровней факторов: x_{01}=0.3
x_{02}=2
x_{03}=15

Значения интервалов варьирования : E_1=0.1

E_2=0.5

E_3=5

В расчетах используется 5% уровень значимости .

3.2. Общие данные для студенческой группы ℓ

(выбирается по последней цифре номера в зачетной книжке)

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ℓ	0	5	15	25	30	45	50	55	60	75

Примечание: в случае увеличения количества групп студентов целесообразно изменять значение ℓ с интервалом, например, равным 5 от -15 до +75.

3.3. Индивидуальное задание студенту

Номер таблицы базовых данных выбирается исходя из порядкового номера записи студента в учебном журнале группы. Например, студент записан в журнале группы под номером 7. Следовательно, номер таблицы базовых данных для него будет равен 7.

Порядок выполнения работы

Используя план проведения эксперимента переводим кодированные значения изучаемых факторов (± I,U, ±   ) в натуральные и проводим эксперимент дублируя его, например, в нашем случае, три раза в каждой точке факторного пространства (при выполнении данной расчётно-графической работы проведение эксперимента не предусмотрено). Причём последовательность проведения эксперимента определяется таблицей случайных чисел, чтобы обеспечить рандомизацию. Проведя эксперимент и получив значение зависимой переменной в зависимости от сочетаний значений независимых переменных приступают к математической обработке результатов эксперимента.

Варианты задания приведены в таблице 3.1- 3.32

Пример работы представлен в приложении В.

Контрольные вопросы:

1. Функции отклика должны быть…?
2. Выполнение каких условий необходимо обеспечить при построении матриц спектра плана?
3. Какие этапы содержат процедуры построения спектра плана?

Базовые данные

Таблица 3.1

№ опыта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_1	46.7	42.0	40.0	35.4	39.9	35.3	34.4	29.5	41.1	43.1
y_2	46.9	42.1	39.9	35.5	39.6	35.5	33.6	29.6	41.0	43.3
y_3	46.8	41.9	39.8	35.4	39.7	35.4	33.5	29.7	41.2	43.2

Продолжение таблицы 3.1

№ опыта	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y_1	43.2	34.0	32.6	32.3	37.3	37.2	37.2	37.	37.1	37.2
y_2	43.3	34.1	32.5	32.5	37.2	37.3	37.1	37.	37.0	37.3
y_3	43.4	34.9	32.4	32.4	37.1	37.1	37.0	37.	37.2	37.4

Базовые данные

Таблица 3.2

№ опыта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_1	43.7	40.4	36.8	33.7	36.4	33.7	30.2	28.1	37.4	40.9
y_2	43.6	40.5	36.6	33.9	36.3	33.8	30.3	28.9	37.5	40.8
y_3	43.5	40.3	36.7	33.8	36.5	33.9	30.4	28.0	37.3	40.7

Продолжение таблицы 3.2

№ опыта	10	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y_1	40.8	32.8	30.1	30.1	34.8	34.7	34.7	34.8	34.9	34.6
y_2	41.0	32.9	30.2	30.0	34.9	34.8	34.6	34.0	34.8	34.7
y_3	40.9	33.0	30.0	29.9	34.7	34.9	34.8	34.9	35.0	34.8

Базовые данные

№ опыта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_1	42.7	38.0	37.6	32.9	37.7	33.4	32.4	28.3	38.6	39.9
y_2	42.8	38.1	37.4	32.0	37.5	33.3	32.9	28.5	38.8	39.8
y_3	42.9	38.9	37.5	32.1	37.6	33.5	32.2	28.4	38.7	39.7

Таблица 3.3

Продолжение таблицы 3.3

№ опыта	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y_1	39.6	31.5	31.2	31.2	34.8	34.8	34.8	34.6	34.9	34.7
y_2	39.5	31.6	31.0	31.4	34.9	34.7	34.6	34.7	34.0	34.9
y_3	39.7	31.7	31.1	31.3	34.0	34.9	34.7	34.8	34.8	34.8

Базовые данные

Таблица 3.4

№ опыта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_1	44.5	40.7	37.5	34.2	38.3	34.9	32.2	29.1	39.0	41.8
y_2	44.3	40.9	37.6	34.1	38.4	34.8	32.4	28.9	39.1	41.7
y_3	44.4	40.8	37.4	34.3	38.5	34.7	32.3	29.0	38.9	41.9

Продолжение таблицы 3.4

№ опыта	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y_1	41.3	33.3	31.3	31.8	36.0	35.8	35.6	35.7	35.0	35.7
y_2	41.2	33.4	31.1	31.7	35.9	35.7	35.8	35.6	35.8	35.8
y_3	41.1	33.5	31.4	31.9	36.8	35.9	35.7	35.8	35.9	35.9

Базовые данные

Таблица 3.5

№ опыта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_1	45.2	41.7	38.2	35.1	37.9	35.0	31.9	29.1	38.8	42.4
y_2	45.1	41.5	38.3	34.9	38.1	34.1	31.8	29.2	38.9	42.2
y_3	45.3	41.6	38.4	35.0	38.0	35.9	32.0	29.3	39.0	42.3

Продолжение таблицы 3.5

№ опыта	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y_1	42.5	33.7	31.6	316.	36.5	36.2	36.1	36.2	36.4	36.4
y_2	42.3	33.8	31.7	31.4	36.4	36.3	36.3	36.1	36.2	36.5
y_3	42.4	33.9	31.5	31.5	36.3	36.4	36.2	36.3	36.3	36.3

Базовые данные

Таблица 3.6

№ опыта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_1	45.1	41.3	38.9	35.0	38.1	34.6	32.4	29.2	39.5	41.8
y_2	45.2	41.2	38.8	34.8	38.0	34.5	32.5	29.0	39.7	41.7
y_3	45.3	41.1	39.0	34.9	37.9	34.7	32.6	29.1	39.6	41.9

Продолжение таблицы 3.6

№ опыта	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y_1	42.4	33.5	31.9	31.5	36.2	36.3	36.1	36.2	36.2	36.0
y_2	42.3	33.7	32.0	31.4	36.4	36.2	36.0	36.3	36.1	36.2
y_3	42.2	33.6	31.8	31.3	36.3	36.1	36.2	36.4	36.3	36.1

Базовые данные

Таблица 3.7

№ опыта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_1	41.3	39.1	34.4	32.6	35.2	33.3	29.2	27.5	35.3	39.5
y_2	41.2	39.3	34.2	32.7	35.3	33.1	29.1	27.4	35.4	39.3
y_3	41.1	39.2	34.3	32.5	35.1	33.2	29.0	27.3	35.2	39.4

Продолжение таблицы 3.7

№ опыта	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y_1	38.7	32.3	28.6	29.3	33.4	33.4	33.2	33.4	33.4	33.4
y_2	38.8	32.2	28.8	29.4	33.5	33.3	33.4	33.2	33.5	33.3
y_3	38.9	32.4	28.7	29.5	33.6	33.5	33.3	33.3	33.6	33.5

Базовые данные

Таблица 3.8

№ опыта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_1	42.9	40.3	35.9	33.7	36.9	34.3	30.7	28.7	36.9	40.9
y_2	42.7	40.4	36.0	33.8	36.7	34.5	30.8	28.6	36.7	40.8
y_3	42.8	40.5	35.8	33.9	36.8	34.4	30.9	28.5	36.8	40.0

Продолжение таблицы 3.8

№ опыта	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y_1	40.3	33.3	30.2	31.0	34.8	34.8	34.9	34.9	34.9	34.8
y_2	40.4	33.2	30.3	31.8	34.9	34.7	34.1	34.1	34.7	34.9
y_3	40.2	33.1	30.4	31.9	34.0	34.9	34.8	34.8	34.8	34.0

Базовые данные

Таблица 3.9

№ опыта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_1	41.1	36.2	36.4	32.1	35.8	31.7	31.2	27.5	37.4	37.8
y_2	41.2	36.3	36.6	31.9	36.9	31.8	31.3	27.3	37.3	37.9
y_3	41.0	36.4	36.5	32.0	35.0	31.6	31.4	27.4	37.2	37.7

Продолжение таблицы 3.9

№ опыта	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y_1	38.2	30.1	30.2	30.0	33.4	33.5	33.2	33.3	33.4	33.5
y_2	38.3	30.2	30.4	29.8	33.3	33.4	33.4	33.4	33.2	33.4
y_3	38.1	30.3	30.3	29.9	33.5	33.6	33.3	33.5	33.3	33.6

Базовые данные

Таблица 3.10

№ опыта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_1	41.9	39.5	35.7	33.4	34.7	33.0	29.2	27.6	35.9	39.3
y_2	42.1	39.6	35.8	33.3	34.8	33.1	29.4	27.4	35.8	39.4
y_3	41.0	39.7	35.6	33.2	34.9	32.9	29.3	27.5	36.0	39.5

Продолжение таблицы 3.10

№ опыта	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y_1	39.8	32.6	29.5	28.9	33.7	33.9	34.0	33.8	33.9	33.7
y_2	39.9	32.4	29.6	29.0	33.6	33.8	33.8	34,0	33.8	33.8
y_3	40.0	32.5	29.4	29.1	33.8	33.7	33.9	33.9	33.7	33.6

Базовые данные

Таблица 3.11

№ опыта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_1	43.7	40.7	37.3	34.4	36.5	34.3	31.0	28.7	37.5	41.0
y_2	43.6	40.9	37.4	34.5	36.3	34.2	30.8	28.6	37.3	40.9
y_3	43.5	40.8	37.2	34.6	36.4	34.1	30.9	28.8	37.4	40.8

Продолжение таблицы 3.11

№ опыта	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y_1	41.4	40.3	31.0	30.4	35.3	35.1	35.4	35.2	35.2	35.3
y_2	41.3	40.4	31.1	30.6	35.2	35.3	35.5	35.4	35.3	35.4
y_3	41.5	40.5	31.9	30.5	35.4	35.2	35.3	35.3	35.1	35.5

Базовые данные

Таблица 3.12

№ опыта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_1	42.8	39.9	36.6	33.6	36.8	33.9	31.4	28.4	37.5	40.4
y_2	42.9	39.0	36.4	33.7	36.7	34.0	31.2	28.5	37.6	40.5
y_3	42.7	39.1	36.5	33.8	36.9	34.1	31.3	28.6	37.4	40.6

Продолжение таблицы 3.12

№ опыта	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y_1	40.1	33.1	30.6	30.9	35.0	35.1	35.0	34.8	35.0	34.9
y_2	40.3	33.0	30.5	30.8	34.8	35.0	34.9	34.7	34.9	34.7
y_3	40.2	32,9	30.7	30.7	34.9	34.9	35.1	34.9	35.8	34.8

Базовые данные

Таблица 3.13

№ опыта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_1	41.9	40.0	35.0	33.3	34.9	33.4	28.8	27.6	35.1	39.9
y_2	42.1	40.1	35.1	33.5	34.8	33.3	28.7	27.7	35.2	40.0
y_3	42.0	39.9	35.2	33.4	34.7	33.5	28.6	27.5	35.3	39.8

Продолжение таблицы 3.13

№ опыта	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y_1	39.9	32.9	29.1	29.1	33.8	33.9	34.0	34.0	33.7	33.8
y_2	40.1	32.8	29.2	29.0	34.0	33.8	34.1	34.1	33.8	34.0
y_3	39.0	32.7	29.3	29.2	33.9	33.7	33.9	33.9	33.9	33.9

Базовые данные

Таблица 3.14

№ опыта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_1	45.3	40.5	38.6	34.7	38.7	33.1	32.6	28.3	39.0	41.8
y_2	45.4	40.6	38.7	34.0	38.6	33.2	32.5	28.2	39.9	41.7
y_3	45.5	407.	38.8	34.9	38.5	33.3	324.	28.1	39.8	41.6

Продолжение таблицы 3.14

№ опыта	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y_1	42.4	32.9	31.0	301.	35.1	35.0	35.3	35.8	35.8	35.3
y_2	42.5	32.8	31.9	30.2	35.9	35.9	35.2	35.7	35.9	35.4
y_3	42.6	32.7	31.8	30.0	35.0	35.8	35.1	35.6	35.0	35.5

Базовые данные

Таблица 3.15

№ опыта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_1	42.4	37.5	36.3	32.1	36.0	33.7	31.7	28.2	37.5	39.3
y_2	42.5	37.6	36.2	32.2	36.9	33.8	31.8	28.1	37.4	39.2
y_3	42.6	37.7	36.1	32.0	36.8	33.9	31.9	28.0	37.3	39.1

Продолжение таблицы 3.15

№ опыта	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y_1	39.1	31.4	303.	30.8	34.7	34.2	34.5	34.5	34.6	34.8
y_2	39.2	31.5	30.2	30.9	34.8	34.1	34.4	34.3	34.7	34.9
y_3	39.3	31.6	30.1	30.0	34.9	34.0	34.3	344.	34.5	34.0

Базовые данные

Таблица 3.16

№ опыта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_1	41.1	37.2	36.6	32.8	36.8	32.2	31.2	27.8	37.1	38.2
y_2	41.2	37.1	36.7	32.9	36.0	32.0	31.4	27.9	37.2	38.1
y_3	41.3	37.3	36.5	32.0	36.9	32.1	31.3	27.0	37.3	38.3

Продолжение таблицы 3.16

№ опыта	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y_1	38.2	31.6	31.6	30.6	33.0	33.5	33.5	33.4	33.0	33.1
y_2	38.3	31.5	31.5	30.4	33.1	33.4	33.4	33.5	33.9	33.2
y_3	38.1	31.4	31.4	30.5	33.2	33.3	33.3	33.3	33.1	33.3

Базовые данные

Таблица 3.17

№ опыта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_1	45.4	40.2	39.1	34.8	39.2	34.8	33.1	29.2	40.3	42.3
y_2	45.5	40.1	39.2	34.9	39.3	34.9	33.2	29.1	40.1	42.6
y_3	45.6	40.0	39.3	34.0	39.4	34.0	33.3	29.0	40.2	42.5

Продолжение таблицы 3.17

№ опыта	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y_1	42.6	33.6	31.8	32.2	36.2	36.7	36.7	36.1	36.1	36.8
y_2	42.5	33.5	31.9	32.1	36.3	36.8	36.6	36.9	36.2	36.9
y_3	42.4	33.4	31.0	320.	36.4	36.9	36.5	36.0	36.3	36.0

Базовые данные

Таблица 3.18

№ опыта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_1	43.4	39.3	36.0	33.4	36.0	32.4	316.	28.1	38.6	39.7
y_2	43.3	39.2	36.9	33.3	36.1	32.3	31.5	28.2	38.5	39.8
y_3	43.2	39.1	36.8	33.2	36.2	32.2	31.4	28.3	38.4	39.9

Продолжение таблицы 3.18

№ опыта	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y_1	40.2	32.1	31.2	29.8	34.7	34.4	34.3	34.4	34.0	34.2
y_2	40.1	32.2	31.1	29.9	34.8	34.5	34.2	34.3	34.9	34.1
y_3	40.0	32.3	31.3	29.0	34.9	34.6	34.1	34.2	34.8	34.0

Базовые данные

Таблица 3.19

№ опыта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_1	38.2	33.5	28.7	28.2	36.1	32.2	31.5	27.1	36.1	37.8
y_2	38.3	33.4	28.8	28.1	36.0	32.1	31.6	27.2	36.2	37.9
y_3	38.1	33.3	28.9	28.0	36.9	32.0	31.7	27.3	36.0	37.0

Продолжение таблицы 3.19

№ опыта	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y_1	34.3	29.5	28.2	30.1	32.1	32.6	32.6	32.7	32.0	32.2
y_2	34.4	29.6	28.3	30.9	32.2	32.7	32.7	32.8	32.9	32.1
y_3	34.5	29.7	28.4	30.0	32.0	32.8	32.8	32.9	32.8	32.0

Базовые данные

Таблица 3.20

№ опыта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_1	42.1	38.3	35.3	31.8	38.8	34.8	32.0	28.5	38.7	40.8
y_2	42.2	38.4	35.5	31.9	38.0	34.9	32.1	28.4	38.8	40.9
y_3	42.3	38.5	35.4	31.0	38.9	34.0	32.2	28.3	38.9	40.0

Продолжение таблицы 3.20

№ опыта	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y_1	37.1	31.3	30.3	32.7	34.0	35.8	35.0	35.4	34.4	34.7
y_2	37.2	31.4	30.5	32.6	34.9	35.9	35.1	35.3	34.5	34.6
y_3	37.3	31.5	30.4	32.5	34.8	35.0	835.2	35.2	34.6	34.5

Базовые данные

Таблица 3.21

№ опыта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_1	41.2	36.0	36.8	31.9	37.8	32.2	31.1	27.1	38.1	39.9
y_2	41.3	36.1	36.9	31.8	37.7	32.1	31.0	27.2	38.2	39.8
y_3	41.4	36.2	36.0	31.7	37.9	32.0	31.2	27.3	38.3	39.7

Продолжение таблицы 3.21

№ опыта	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y_1	38.4	30.3	30.5	31.8	34.7	34.8	34.1	34.8	34.0	34.2
y_2	38.3	30.2	30.4	31.9	34.8	34.7	34.2	34.9	34.1	34.0
y_3	38.2	30.1	30.3	31.0	34.9	34.9	34.3	34.0	34.2	34.1

Базовые данные

Таблица 3.22

№ опыта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_1	44.1	40.4	37.0	33.9	37.0	34.6	316.	28.8	38.0	41.0
y_2	44.2	40.5	37.9	33.0	37.9	34.7	318	28.7	38.1	41.2
y_3	44.3	406.	37.1	33.1	37.8	34.8	317	28.6	38.2	41.1

Продолжение таблицы 3.22

№ опыта	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y_1	41.2	32.2	31.2	31.3	35.4	35.9	35.0	35.9	35.0	35.3
y_2	41.3	32.4	31.3	31.2	35.5	35.8	35.9	35.8	35.1	35.2
y_3	41.4	32.3	31.4	31.1	35.6	35.7	35.8	35.7	35.2	35.1

Базовые данные

Таблица 3.23

№ опыта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_1	39.3	36.1	34.2	31.6	34.7	31.8	29.8	26.2	34.2	37.7
y_2	39.2	362	34.1	31.5	34.8	31.9	29.9	26.1	34.3	37.6
y_3	39.1	363	34.3	31.4	34.9	31.0	29.0	26.0	34.4	37.5

Продолжение таблицы 3.23

№ опыта	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y_1	37.5	30.2	281.	28.8	32.8	32.2	32.2	32.2	32.6	32.5
y_2	37.6	30.3	28.2	28.9	32.9	32.1	32.3	32.4	32.7	32.6
y_3	37.7	30.4	28.3	28.0	32.0	32.0	32.4	32.3	32.5	32.7

Базовые данные

Таблица 3.24

№ опыта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_1	39.1	37.3	32.2	30.7	33.2	31.2	27.0	25.5	33.2	37.6
y_2	39.3	37.1	32.3	30.6	33.1	31.3	27.1	25.4	33.4	37.3
y_3	39.2	37.2	32.4	30.5	33.3	31.1	27.2	25.3	33.3	37.4

Продолжение таблицы 3.24

№ опыта	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y_1	36.7	30.4	26.7	27.4	33.5	33.3	33.2	33.4	33.5	33.5
y_2	36.8	30.3	26.6	27.5	33.4	33.4	33.4	33.2	33.4	33.6
y_3	36.9	30.2	26.8	27.3	33.3	33.5	33.3	33.3	33.6	33.4

Базовые данные

Таблица 3.25

№ опыта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_1	39.2	35.3	34.4	30.6	33.9	30.7	29.3	25.9	35.3	36.3
y_2	39.1	35.1	34.6	30.4	34.0	30.6	29.2	25.8	35.2	36.5
y_3	39.3	35.2	34.5	30.5	34.1	30.5	29.4	26.0	35.1	36.4

Продолжение таблицы 3.25

№ опыта	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y_1	36.5	29.1	28.6	28.3	31.9	31.6	317.	31.8	32.0	31.8
y_2	36.7	29.2	28.5	28.2	31.0	31.8	31.8	31.7	32.8	31.7
y_3	36.6	29.3	28.4	28.4	31.8	31.7	31.9	31.6	32.9	31.9

Базовые данные

Таблица 3.26

№ опыта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_1	40.7	38.4	34.0	31.7	34.8	32.5	28.8	26.6	34.7	38.8
y_2	40.8	38.5	34.8	31.8	34.7	32.3	28.7	26.5	34.9	38.9
y_3	40.9	38.3	34.9	31.9	34.9	32.4	28.6	26.7	34.8	38.0

Продолжение таблицы 3.26

№ опыта	11	22	13	14	15	16	17	18	19	20
y_1	38.3	31.1	28.4	28.9	32.8	32.8	33.1	32.7	33.0	32.8
y_2	38.4	31.3	28.3	28.8	32.9	32.9	32.9	32.8	32.9	32.0
y_3	38.2	31.2	28.2	28.0	32.7	33.0	33.0	32.9	33.1	32.9

Базовые данные

Таблица 3.27

№ опыта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_1	36.8	32.0	31.4	27.1	34.5	30.5	29.2	25.5	34.5	35.6
y_2	36.9	31.9	31.5	27.0	34.7	30.3	29.3	25.4	34.6	35.5
y_3	36.7	32.1	31.6	26.9	34.6	30.4	29.4	25.3	34.4	35.7

Продолжение таблицы 3.27

№ опыта	11	22	13	14	15	16	17	18	19	20
y_1	38.3	31.3	28.4	28.9	32.8	32.8	33.1	32.9	33.0	32.8
y_2	38.4	31.3	28.3	28.4	32.9	32.7	32.2	32.8	32.7	32.1
y_3	38.2	31.2	28.1	28.1	32.2	33.1	33.3	32.7	33.1	32.9

Базовые данные

Таблица 3.28

№ опыта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_1	39,6	36,5	34,2	31,5	34,5	31,8	29,1	26,7	34,9	37,5
y_2	39,5	36,4	34,4	31,3	34,4	31,7	29,2	26,8	35,1	37,3
y_3	39,7	36,3	34,3	31,4	34,3	31,9	29,0	26,9	35,0	37,4

Продолжение табл. 3.28

№ опыта	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y_1	37,3	30,5	28,7	28,8	32,8	32,7	32,6	32,9	32,7	32,9
y_2	37,2	30,6	28,8	28,9	33,0	32,9	32,7	32,6	32,6	32,8
y_3	37,1	30,4	28,6	29,0	32,9	32,8	32,8	33,0	32,8	32,7

Базовые данные

Таблица 3.29

№ опыта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_1	39,1	37,3	32,2	30,7	33,2	31,2	27,0	25,5	33,2	37,6
y_2	39,3	37,1	32,3	30,6	33,1	31,3	27,1	25,4	33,4	37,3
y_3	39,2	37,2	32,4	30,5	33,3	31,1	27,2	25,3	33,3	37,4

Продолжение табл. 3.29

№ опыта	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y_1	36,7	30,4	26,7	27,4	33,5	33,3	33,2	33,4	33,5	33,5
y_2	36,8	30,3	26,6	27,5	33,4	33,4	33,4	33,2	33,4	33,6
y_3	36,9	30,2	26,8	27,3	33,3	33,5	33,3	33,3	33,5	33,4

Базовые данные

Таблица 3.30

№ опыта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_1	40,9	36,1	33,9	29,3	36,5	32,5	30,4	26,6	36,9	39,1
y_2	40,8	35,9	34,0	29,4	36,7	32,3	30,5	26,7	36,8	39,0
y_3	40,7	36,0	33,8	29,6	36,6	32,4	30,6	26,5	37,0	38,9

Продолжение табл. 3.30

№ опыта	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y_1	35,9	29,9	28,4	30,0	32,9	33,1	32,9	32,9	33,3	33,0
y_2	35,6	29,7	28,3	29,8	33,2	33,2	33,1	32,8	33,0	33,2
y_3	35,8	29,8	28,2	30,1	33,1	32,9	32,8	33,0	33,1	33,3

Базовые данные

Таблица 3.31

№ опыта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_1	37,6	34,3	32,4	29,5	32,3	29,8	27,0	24,9	33,0	35,5
y_2	37,7	34,4	32,2	29,3	32,4	29,7	27,2	24,8	33,1	35,4
y_3	37,5	34,5	32,3	29,4	32,5	29,9	27,1	24,7	32,9	35,3

Продолжение табл. 3.31

№ опыта	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y_1	35,1	28,6	26,7	26,8	30,9	31,0	30,7	30,7	30,8	30,9
y_2	35,3	28,5	26,6	26,9	30,7	30,9	30,8	30,6	30,9	30,7
y_3	35,2	28,4	26,8	27,0	30,8	30,8	30,6	30,8	31,0	30,8

Базовые данные

Таблица 3.32

№ опыта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_1	27,3	23,3	21,5	17,8	21,4	18,2	16,2	13,0	22,4	24,5
y_2	27,2	23,5	21,4	17,6	21,5	18,3	16,0	13,1	22,2	24,6
y_3	27,1	23,4	21,3	17,7	21,6	18,4	16,1	13,05	22,3	24,7

Продолжение табл .3.32

№ опыта	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y_1	24,3	16,6	15,35	15,6	19,2	19,4	19,3	19,3	19,2	19,4
y_2	24,5	16,55	15,3	15,7	19,3	19,3	19,1	19,2	19,4	19,3
y_3	24,4	16,5	15,4	15,5	19,4	19,5	19,2	19,1	19,3	19,5

Практическая работа №4

Определение коэфициентов регрессии по результатам экспереементальных данных

Цель работы: Определение коэфициентов регрессии.

Теоретическая часть

Регрессионный анализ проводится с целью получения по экспериментальным данным регрессионных моделей, представляющие собой экспериментальные факторные модели. Задачей регрессионного анализа является определение параметров экспериментальных факторных моделей объектов проектирования или исследования, т.е. определение коэффициентов уравнений моделей при выбранной их структуре. Регрессионный анализ включал три основных этапа:

1) статистический анализ результатов эксперимента;

2) получение коэффициентов регрессионной модели;

3) оценку адекватности *x* работоспособности полученной экспериментальной факторной модели технической системы.

Поскольку параметры фактических моделей $\vec{b}$ определяют по результатам ограниченного количества опытов, то получаемые их значения являются оценками истинных коэффициентов регрессии $\vec{\beta}$.

Под структурой экспериментальной факторной математической модели понимается вид математических соотношений между факторами $\vec{X}, \vec{Z}$ и откликом $\vec{Y}$. В качестве факторов принимают внутренние и внешние параметры технической системы, подлежащие оптимизации в процессе ее проектирования. Внутренние параметры системы – это параметры ее элементов, внешние – это параметры внешней среды, в условиях воздействий которой осуществляется функционирование системы. Функциями отклика $\vec{Y}$ являются выходные параметры технической системы, характеризующие её эффективность и качество процессов функционирования. Выходные параметры системы принимаются в качестве критериев оптимальности.

Как уже отмечалось, структура факторной модели выбирается на основе априорной информации, используя принцип постепенного ее усложнения. Параметры факторной математической модели определяются методами регрессионного анализа. При определении параметров этими методами нет необходимости различать виды факторов, т.е. подразделить факторы на управляемые $\vec{X}$ и неуправляемые $\vec{Z}$. Поэтому в дальнейшем все они будут обозначаться буквой $\vec{X}$. Тогда факторную модель можно представить векторным уравнением регрессии вида

$$\vec{Y} = \vec{\varphi}(\vec{X}, \vec{b}). \tag{4.1}$$

Определение параметров $\vec{b}$ этой модели будем рассматривать на примере одного уравнения $Y = \varphi(\vec{X}, \vec{b})$. Для определения параметров используются результаты эксперимента. Результаты эксперимента можно представить функцией вида

$$Y = \varphi(\vec{X}) + \varepsilon, \tag{4.2}$$

где ε – аддитивная помеха случайного характера с нормальным законом распределения.

Так как каждый опыт проводится при определенном сочетании уровней факторов $\vec{X}$, то функцию $\varphi(\vec{X})$ представим выражением

$$\varphi(\vec{X}) = \sum_{j=0}^{d} B_j f_j(\vec{X}) \tag{4.3}$$

где β_j – j-й элемент вектора искомых коэффициентов уравнения регрессии: $\vec{\beta} = (\beta_0, \beta_1, ..., \beta_d)^T$; $f_j(\vec{X})$– j-я базисная функции – элемент вектора базисных функций $\vec{f}(\vec{X}) = \left[f_0(\vec{X}), f_1(\vec{X}), ..., f_d(\vec{X})\right]^T$.

В качестве базисных функций используют переменные простейших полиномов, системы ортогональных полиномов (Эрмита, Лежандра, Лаггера и др.), тригонометрические функции. Наиболее часто пользуются простейшими полиномами первой и второй степеней. Например, полином первой степени, описывающий функцию отклика y при двух факторах x_1 и x_2, может иметь вид

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2, \tag{4.4}$$

или

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_1x_2, \tag{4.5}$$

а полипом второй степени

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_1x_2 + b_4x_1^2 + b_5x_2^2. \tag{4.6}$$

Базисные функции в случае использования последнего выражения имеют вид:

$$f_0(\vec{X}) = 1;\ f_1(\vec{X}) = x_1;\ f_2(\vec{X}) = x_2;\ f_3(\vec{X}) = x_1 x_2;\ f_4(\vec{X}) = x_1^2;$$
$$f_5(\vec{X}) = x_2^2.$$

Если уравнение регрессии имеет вид выражений (4.4). (4.5), ею называют уравнением линейной регрессии (линейной регрессией или регрессией первого порядке), а если содержит факторы во второй и более высокой степени – нелинейной регрессией (регрессией соответствующего порядка).

Линейная регрессия может представлять как линейную математическую модель, тек и нелинейную, в зависимости от того, содержит ли она линейные эффекты (как в выражения (4.4)), или наряду с ними также эффекты взаимодействия (как в выражения (4.5)). Линейным называют аффект, характеризующий линейную зависимость выходного параметра y от соответствующего фактора x_i. Эффектом взаимодействия называют эффект, характеризующий совместное влияние нескольких факторов на y (например, в выражении (4.5) $x_1 x_2$). Эффекты взаимодействия двух факторов называют парным взаимодействием, трех факторов – тройным взаимодействием и т.д.

Как всякий статистический метод, регрессионный анализ применим при определенных предпосылках (постулатах).

1). Аддитивная помеха ε – случайная нормально распределенная величина с параметрами $m_\varepsilon = 0$ и $\sigma_\varepsilon^2 = const$. В этом случае функция отклика Y также случайная величина с нормальным законом распределения. Гипотезу о нормальном распределении Y можно проверить по критерию Пирсона.

2). Постоянство дисперсия помехи означает, что интенсивность ошибки определения Y не меняется при изменении уровня факторов в процессе эксперимента. Выполнение этого постулата проверяется по критерию однородности дисперсии в разных точках спектра плана.

3). Значения факторов в активном эксперименте – неслучайные величины. Это означает, что установление каждого фактора на заданном уровне и удерживание его на этом уровне во время опыта точнее, чем ошибка воспроизводимости. В вычислительном эксперименте это выполняется однозначно, а в физическом вклад, вносимый ошибками измерения факторов $\vec{X}$, должен быть пренебрежительно малым в сравнении с действием других неконтролируемых факторов, образующих ошибку ε определения функция Y.

4). Значения помехи ε в различных точках опыта не коррелированы. Для обеспечения этого требования используется рандомизации опытов.

В пассивном эксперименте условие некоррелированности помехи обеспечивают путем соответствующего выборе временного интервала съема информации об условиях и результатах опытов.

5). Векторы-столбцы базисных функций должны быть линейно независимыми. Выполнение этого требования необходимо для получения раздельных оценок $\vec{b}$ всех коэффициентов регрессии $\vec{\beta}$. В активном эксперименте оно обеспечивается соответствующим выбором спектра плана эксперимента. При этою число опытов N (без учета дублирования) должно быть не меньше, чем число оцениваемых коэффициентов $N_в, N \geq N_в$.

В пассивном эксперименте линейная зависимость между столбцами практически исключена, так как факторы неуправляемы н принимают случайные значения в резных опытах, но может наблюдаться сильная коррелированность, столбцов, что повлечет за собой большие ошибки вычисления коэффициентов регрессии. Для выявления коррелированности столбцов проводят корреляционный анализ результатов пассивного эксперимента.

Оценка параметров регрессионной модели

Исходными данными для получения оценок параметров регрессионной модели технической системы (т.е. оценок $\vec{b}$ искомых коэффициентов регрессии $\vec{\beta}$) является информация о значениях управляемых факторов $\vec{\mathrm{X}}$ (или неуправляемых – при проведении пассивного эксперимента) и функция отклика Y. Эту информацию можно представать в виде матрицы X значений факторов во всех N опытах, предусмотренных спектром плана эксперимента, и вектора-столбца $\vec{\mathrm{Y}}$ полученных в этих опытах значений функции отклика Y:

$$X = \begin{bmatrix} \vec{X}_1 \\ \vec{X}_2 \\ \dots \\ \vec{X}_i \\ \dots \\ \vec{X}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1j} & \dots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2j} & \dots & X_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{i1} & X_{i2} & \dots & X_{ij} & \dots & X_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{N2} & X_{N2} & \dots & X_{Nj} & \dots & X_{Nn} \end{bmatrix}; \qquad (4.7)$$

$$\vec{Y} = (y_1, y_2, ..., y_i, ..., y_N)^T,$$

где $\vec{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, ..., X_{in})$ – вектор-строк значений факторов в $i-$м опыте; X_{ij} – значение $j-$го фактора в $i-$ом опыте; n – количество факторов; $N-$ количество опытов; y_i, – значение функции отклика Y в $i-$ом опыте (если проводились параллельные опыты, т.е. осуществлялось дублирование опытов, то в место y_i, используются оценки их математических ожиданий. т.е. выборочные средние $\bar{y}_i$).

Значения базисных функций ю всех опытах представляют собой матрицу F, называемую матрицей базисных функций

$$F = \begin{bmatrix} \vec{f}_1(\vec{X}_1) \\ \vec{f}_2(\vec{X}_2) \\ ... \\ \vec{f}_i(\vec{X}_i) \\ ... \\ \vec{f}_N(\vec{X}_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{10} & f_{11} & f_{12} & ... & f_{1k} & ... & f_{1d} \\ f_{20} & f_{21} & f_{22} & ... & f_{2k} & ... & f_{2d} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ f_{i0} & f_{i1} & f_{i2} & ... & f_{ik} & ... & f_{id} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ f_{N0} & f_{N1} & f_{N2} & ... & f_{Nk} & ... & f_{Nd} \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

где $f_{jk}-$значение $k-$ой базисной функции в $i-$ом опыте; $\vec{f}_i(\vec{X}_i) = (f_{i0}, f_{i1}, f_{i2}, ..., f_{ik}, ..., f_{id})-$вектор-сотроке значений базисных функций в $i-$ом опыте.

Используя информацию об $X, \vec{Y}$ и F, необходимо найти оценки коэффициентов регрессии, представляемые вектором - столбцом

$$\vec{b}^T = (b_0, b_1, b_2, ..., b_k, ..., b_d), \quad (4.9)$$

где b_k – значение оценки коэффициента регрессии при базисной функции

Так как функция отклика $Y-$случайная величина, поскольку на ее значения в различных опытах оказывает влияние случайная помеха ε, то оценка коэффициентов регрессии будут случайными величинами.

Уравнение регрессии устанавливает зависимость между оценкой математического ожидания функции отклика $\bar{y}$ и факторами $\vec{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Общий вид этой зависимости

$$\bar{y} = \sum_{k=0}^{d} b_k f_k(\vec{X}). \quad (4.10)$$

В связи с наличием помехи значение функции отклика в $i-$ом опыте y_i будет отличаться от $\bar{y}_i$. Для определения y_i можно составить выражение:

$$y_i = b_0 f_{i0} + b_1 f_{i1} + ... + b_k f_{ik} + ... + b_d f_{id} + \varepsilon_i, i = \overline{1}, \overline{N}, \qquad (4.11)$$

где $\varepsilon_i -$ невязка уравнения регрессии в $i-$м опыте.

Невязка характеризует отклонение значений функции отклика в опытах от получаемых с помощью регрессионной модели (4.10). Она возникает по двум причинам: из-за ошибки эксперимента и из-за непригодности (приближенности) выбранной структуры факторной математической модели. Причем эти причины смешаны и нельзя сказать, какая из них преобладает.

Если постулировать, что модель пригодна, то невязка будет порождаться только ошибкой опыта. Тогда для определения коэффициентов уравнения (4.10) невязку надо минимизировать. Для этого в регрессионном анализе используется метод наименьших квадратов (МНК). Составляется функция, представляющая собой сумму квадратов невязок, и осуществляется ее минимизация:

$$E = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i^2 \to \min. \qquad (4.12)$$

Подставим значение ε_i из выражения (4.11):

$$E = \sum_{i=1}^{N} [y_i - (b_0 f_{i0} + b_1 f_{i1} + ... + b_k f_{ik} + ... + b_d f_{id})]^2 \to \min. \qquad (4.13)$$

В выражении (4.13) коэффициенты b_k рассматриваются как неизвестные переменные, которые наилучшим образом соответствуют полученным результатам эксперимента. Значения этих коэффициентов, при которых достигается минимум функции E, принимаются в качестве оценок коэффициентов регрессии. Минимум функции E имеет место при равенстве нулю частных производных этой функции по переменным $b_0, b_1, ..., b_d$:

$$\frac{\partial E}{\partial b_0} = -2\sum_{i=1}^{N}\left[y_i - (b_0 f_{i0} + b_1 f_{i1} + ... + b_k f_{ik} + ... + b_d f_{id})\right] f_{i0} = 0;$$

$$\frac{\partial E}{\partial b_1} = -2\sum_{i=1}^{N}\left[y_i - (b_0 f_{i0} + b_1 f_{i1} + ... + b_k f_{ik} + ... + b_d f_{id})\right] f_{i1} = 0;$$

....

$$\frac{\partial E}{\partial b_d} = -2\sum_{i=1}^{N}\left[y_i - (b_0 f_{i0} + b_1 f_{i1} + ... + b_k f_{ik} + ... + b_d f_{id})\right] f_{id} = 0;$$

После преобразований получим систему линейных неоднородных алгебраических уравнений относительно искомых оценок коэффициентов регрессии $b_0, b_1, ..., b_d$:

$$\left.\begin{array}{l} b_0\sum_{i=1}^{N} f_{i0}^2 + b_1\sum_{i=1}^{N} f_{i1} f_{i0} + ... + b_d\sum_{i=1}^{N} f_{id} f_{i0} = \sum_{i=1}^{N} y_i f_{i0}; \\ b_0\sum_{i=1}^{N} f_{i1} f_{i0} + b_1\sum_{i=1}^{N} f_{i1}^2 + ... + b_d\sum_{i=1}^{N} f_{id} f_{i1} = \sum_{i=1}^{N} y_i f_{i1}; \\ .... \\ b_0\sum_{i=1}^{N} f_{i1} f_{id} + b_1\sum_{i=1}^{N} f_{i1}^2 f_{id} + ... + b_d\sum_{i=1}^{N} f_{id}^2 = \sum_{i=1}^{N} y_i f_{id} \end{array}\right\} \quad (4.14)$$

Очевидно, что коэффициенты при неизвестных переменных $\vec{b}$ этой системы уравнений являются элементами матрицы Φ, определяемой из выражения

$$\Phi = F^T F \quad (4.15)$$

в котором F представляет собой матрацу базисных функций (4.8). Значения элементов матрицы F известны из проведенного эксперимента. Следовательно, элементы матрицы Φ оказываются известными коэффициентами системы уравнений (4.14). Выпишем матрицу Φ

$$\Phi = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} f_{i0}^2 & \sum_{i=1}^{N} f_{i1} f_{i0} & ... & \sum_{i=1}^{N} f_{id} f_{i0} \\ \sum_{i=1}^{N} f_{i0} f_{i1} & \sum_{i=1}^{N} f_{i1}^2 & ... & \sum_{i=1}^{N} f_{id} f_{i1} \\ ... & ... & ... & ... \\ \sum_{i=1}^{N} f_{i0} f_{id} & \sum_{i=1}^{N} f_{i1} f_{id} & ... & \sum_{i=1}^{N} f_{id}^2 \end{bmatrix}. \quad (4.16)$$

Матрицу Φ называют информационной матрицей Фишера. Она содержит $(d+1)$ строк и $(d+1)$ столбцов, причем элемент $j-$й строки $k-$го столбца представляет собой сумму $\sum_{i=1}^{N} f_{ij} f_{ik}$. Матрица Φ симметрична относительно главной диагонали, что упрощает составление системы алгебраических уравнений (4.14) для регрессионной модели.

Систему уравнений (4.14) можно также записать в матричной форме

$$\Phi\vec{b} = F^T\vec{\mathrm{Y}}. \qquad (4.17)$$

Система уравнений (4.14) имеет единственное решение, если определитель матрицы Φ не равен нулю. В этом случае матрица Φ будет не вырожденной. Выполнение пятой предпосылки регрессионного анализа, изложенной в предыдущем параграфе, исключает возникновение вырожденности.

Решение системы уравнений (4.14) обычно осуществляют методом Гаусса. При небольшом числе определяемых коэффициентов b_k можно использовать правило Крамера.

Полученные методом наименьших квадратов оценки $b_0, b_1, ..., b_d$ действительных значений коэффициентов регрессии $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_d$ обладают следующими свойствами:

1) математические ожидания оценок $M[b_j] = \beta_j,\ j = \overline{0, d}$, т.е. оценки b_j несмещенные;

2) дисперсии оценок коэффициентов регрессии минимальны и равны

$$\sigma_{b_j}^2 = M\{(b_j - M[b_j])^2\} = M\{(b_j - \beta_j)^2\} = \sigma_\varepsilon^2 C_{jj}, \qquad (4.18)$$

а корреляционный момент

$$\mu_{11}(b_j, b_k) = M\{(b_j - M[b_j])(b_k - M[b_k])\} = M\{(b_j - \beta_j)(b_k - \beta_k)\} = \sigma_\varepsilon^2 C_{jk}. \qquad (4.19)$$

где C_{jj}, C_{jk} – элементы матрицы Φ^{-1}, обратной к информационной; σ_ε^2 - дисперсия случайной помехи;

3) оценки $b_0, b_1, ..., b_d$ подчиняются совместному $(d+1)-$мерному нормальному распределению.

Порядок выполнения работы

1)Определяем значение коэффициентов А и С по формулам:

$$A = \frac{1}{\left(((k+2)\cdot l - k)\cdot 2l\right)}$$

$$C = \frac{N}{\left(2^{k-p} + 2\cdot a^2\right)}$$

2)Определяем параметры математической модели по следующим формулам:

$$b_0 = (2l^2 \cdot (k+2)\cdot \sum_{j=1}^{N} Y_j - 2\cdot l \cdot C \cdot \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{N}(Y_j \cdot (X_{ij})^2))\cdot \frac{A}{N}$$

$$b_i = \sum_{j=1}^{N}(\frac{Y_j \cdot X_{i,j}}{2^{k-p} + 2\cdot a^2})$$

$$b_{im} = \sum_{j=1}^{N}(Y_j \cdot X_{i,j}\ \frac{X_{mj}}{2^{k-p}})$$

$$b_0 = (C^2 \cdot ((k+2)\cdot l -$$

$$-k)\cdot \sum_{j=1}^{N} Y_j \cdot (X_{ij})^2 + C^2 \cdot (1-l) - 2\cdot l\cdot C \cdot \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{N}(Y_j \cdot (X_{ij})^2) - 2l\cdot C\cdot \sum_{j=1}^{N}\ Y_j)\cdot \frac{A}{N}$$

Варианты задания приведены в таблице 3.1-3.32.

Пример работы представлен в приложении Г.

Контрольные вопросы:

1. С какой целью проводится регрессионный анализ?
2. Какие основные этапы включает регрессионный анализ?
3. Какие исходные данные для получения оценок параметров регрессионной модели технической системы?

Практическая работа №5

Проверка адекватности регресионных, полученных методом рационального планирования

Цель работы: Проверить адекватность регрессионных.

Теоретическая часть

Статический анализ результатов активного эксперимента

Прежде чем определять коэффициенты регрессии, необходимо выполнить статистический анализ результатов эксперимента с целью оценки их качества их пригодности для построения регрессионной модели. Статистический анализ включает оценку ошибок параллельных опытов, отсеивание грубых ошибок, проверку однородности дисперсий опытов и определение дисперсии воспроизводимости эксперимента.

Ошибки параллельных опытов. В условиях наличия случайных помех с целью уменьшения случайных погрешностей эксперимента и повышения точности получаемой регрессионной модели осуществляется дублирование опытов, т.е. проведение параллельных опытов. Каждый опыт, предусмотренный матрицей спектра плана, повторяется m= 2...5 раз. Рекомендуется число m принимать одинаковым для всех N точек плана. В результате проводится $L = Nm$ опытов в соответствии с матрицей плана, предусматривающей при этом рандомизацию опытов.

Повторные опыты в одной и той же точке плана при наличии помехи дают различные результаты при определении функции отклика. Разброс результатов относительно оценки математического ожидания функции отклика называют *ошибкой воспроизводимости опыта*. Эту ошибку надо оценить.

Для каждой точки плана по результатам параллельных опытов находят *выборочное среднее* $\bar{y}_i$, равное среднему арифметическому полученных опытных значений функции отклика

$$\bar{y}_i = \frac{1}{m}\sum_{u=1}^{m} y_{iu}\ , i = \overline{1, N}, \tag{5.1}$$

где u – номер параллельного опыта; y_{iu} – значение функции отклика в u-м параллельном опыте i-й точки спектра плана.

Для оценки отклонения функции отклика от ее среднего значения $\bar{y}_i$ вычисляется *дисперсия воспроизводимости* опыта по данным m параллельных опытов в каждой i-й точке спектра плана

$$S_i^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{u=1}^{m}(y_{iu} - \bar{y}_i)^2,\ i = \overline{1, N}. \tag{5.2}$$

При вычислении S_i^2 принимают число степеней свободы k на единицу меньше, чем число параллельных опытов, т.е. $k = m - 1$, так как одна степень свободы уже использована для вычисления $\bar{y}_i$. Это обеспечивает несмещенность оценки дисперсии воспроизводимости опыта S_i^2.

Отсеивание грубых ошибок. Формула (5.1) справедлива лишь при нормальном распределении случайной величины y. При наличии грубых ошибок опыта распределение y отклоняется от нормального, что противоречит предпосылкам 1 и 2 (см. практическую работу 4), положенным в основу регрессионного анализа. Поэтому грубые ошибки надо вначале исключить, а затем определять $\bar{y}_i$ и S_i^2. Грубые ошибки – это брак повторных опытов. Для обнаружения брака используют t-критерий Стьюдента

$$t_{tu} = (y_{iu} - \bar{y}_i^*) / S_i^*, \tag{5.3}$$

где S_i^* — среднее квадратическое отклонение.

Значения $\bar{y}_i^*$ и S_i^* определяются по формулам (5.1) и (5.2), но без учета оцениваемого результата опыта y_{iu}.

Полученное значение t-критерия сравнивается с табличным $t_{\text{Т}}$ при выбранном уровне значимости $q = P\lfloor t > t_{k,q} \rfloor$и числе степеней свободы k. Уровень значимости q характеризует вероятность ошибки. Если $t > t_{\text{Т}}$, то это соответствует браку данного опыта и результат его не может быть использован. В атом случае опыт подлежит повторному проведению.

Значения t-критерия Стьюдента в зависимости от числа степеней свободы k и уровня значимости q.

Проверка однородности дисперсии. Принимается нулевая гипотеза об однородности дисперсий воспроизводимости опытов. Однородность дисперсий означает, что среди всех дисперсий S_i^2 нет таких, которые бы значительно превышали все остальные. Для проверки однородности дисперсий во всех точках спектра плана используется либо критерий Кохрена G, либо критерий Фишера F.

Критерий Кохрена основан на распределении отношения максимальной дисперсии $S_{i\max}^2$ к сумме всех дисперсий:

$$G = S_{i\max}^2 / \sum_{i=1}^{N} S_i^2 \tag{5.4}$$

Критерий Кохрена применяется, если количество сравниваемых дисперсий больше двух, а число повторных опытов во всех точках плана одинаково. Определив число степеней свободы $k_1 = m - 1$ и

$$k_2 = N$$

где N – число точек спектра плана, m – количество повторных опытов в каждой точке плана, находят табличное значение критерия Кохрена $G_{\text{Т}}$ Если $G < G_{\text{Т}}$, гипотеза об однородности дисперсий и воспроизводимости результатов принимается. Это означает, что предпосылки 1 и 2, положенные в основу регрессионного анализа, выполняются. В этом случае каждая из дисперсий S_i^2 оценивает одну и ту же дисперсию помехи σ_ε^2. Следовательно, полученные результаты эксперимента качественные и могут быть использованы для построения регрессионной модели. В противном случае следует увеличить число параллельных опытов или повторить эксперимент при строгом соблюдении методики и схемы проведения опытов, предприняв необходимые меры для исключения грубых ошибок.

Если выяснится, что непостоянство дисперсии помехи σ_ε^2 обусловлено внутренними свойствами объекта, то необходимы более сложные способы обработки результатов эксперимента. Можно, например, вводить некоторую функцию от y: $\ln y$, $\sqrt{y}$ и др.

Критерий Фишера позволяет сравнивать две дисперсии и определяется из соотношения

$$F = S_{\max}^2 / S_{\min}^2 \tag{5.5}$$

Дисперсии однородны, если $F < F_{\text{Т}}$, где $F_{\text{Т}}$ – табличное значение критерия Фишера, определяемое при числах степеней свободы k_1 и k_2 и принятом уровне значимости q.

Следует отметить, что уровень значимости q по всем критериям, применяемым в процессе статистического анализа и обработки результатов эксперимента (Кохрена, Стьюдентя, Фишера), должен быть одинаков. Для технических систем рекомендуется принимать $q = 0{,}05$.

Дисперсия воспроизводимости эксперимента. Если дисперсии S_i^2 однородны, то их усредняют и находят *дисперсию воспроизводимости эксперимента*

$$S_y^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} S_i^2. \tag{5.6}$$

Дисперсия S_y^2 представляет собой оценку дисперсии помехи σ_ε^2. Так как число степеней свободы при определении дисперсии S_i^2 равно $k = m - 1$, то число степеней свободы, связанное с оценкой S_y^2, вычисляется по формуле

$$k = N(m-1). \tag{5.7}$$

Формула годится, если число повторных опытов во всех точках спектра плана одинаково. Если число опытов различно, используют формулу

$$S_y^2 = \frac{S_1^2 k_1 + S_2^2 k_2 + \ldots + S_N^2 k_N}{k_1 + k_2 + \ldots + k_N} = \left(\sum_{i=1}^{N} S_i^2 k_i\right) \Bigg/ \left(\sum_{i=1}^{N} k_i\right), \tag{5.8}$$

где k_i – число степеней свободы в i-й точке спектра плана; $k_i = m_i - 1$; m_i – число параллельных опытов в этой точке.

Определение коэффициентов регрессионной модели и проверка их значимости

Параметрами регрессионной модели являются коэффициенты регрессии b_j, $j = \overline{0, N_в - 1}$, где $N_в$ – количество базисных функций. Значения коэффициентов регрессии можно получить, решив систему алгебраических уравнений . В этих уравнениях величина индекса d в обозначении базисных функций f_{id} и коэффициента регрессии b_d равна $d = N_в - 1$. Так как информационная матрица Фишера Ф для ПФЭ и ДФЭ диагональная и все диагональные элементы ее одинаковы и равны N, то выражение для определения всех коэффициентов уравнения регрессии одинаково и имеет простой вид:

$$b_j = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_j\left(\vec{X}_i\right)\bar{y}_i, \tag{5.9}$$

где N – число точек спектра пламя; $f_j\left(\vec{X}_i\right)$ – значение j-й базисной функции в i-й точке спектра плана; $\bar{y}_i$ – выборочное среднее функции отклика в той же точке, определяемое по формуле (11.61).

Значения базисных функций $f_j\left(\vec{X}_i\right)$ для отдельных факторов равны X_{ij}, а для взаимодействия факторов – $X_{ik}X_{il}X_{im}...$. С учетом этого на основе выражения (5.9) можно записать следующие формулы для вычисления значений коэффициентов уравнения регрессии:

для коэффициентов при факторах x_j, включая также свободный член уравнения,

$$b_j = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_{ij}\bar{y}_i,\ j = \overline{0,n}; \tag{5.10}$$

для коэффициентов при взаимодействиях факторов

$$b_g = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_{ik}X_{il}X_{im}...\bar{y}_i,\ g = \overline{n+1,d}; \tag{5.11}$$

$$k,l,m = \overline{1,n};\ k \neq l \neq m,$$

где n – количество факторов.

Формулы (5.10) и (5.11) применяются для планов первого порядка. Для плана ПФЭ $N = 2^n$, а для ДФЭ $N = 2^{n-p}$. При определении коэффициента b_0 (свободного члена уравнения регрессии) $X_{i0} = 1,\ i = \overline{1,N}$.

Поскольку полученные значения коэффициентов регрессии b_j, $j = \overline{0, N_в - 1}$, – случайные числа, в связи с действием случайной помехи в процессе эксперимента, то они являются оценками истинных значений коэффициентов регрессии β_j. Погрешность определения b_j оценивают дисперсией S_{bj}^2.

Дисперсии S_{bj}^2 оценок всех коэффициентов регрессии, одинаковы. Величина дисперсии S_{bj}^2 зависит только от ошибки воспроизводимости эксперимента S_y^2 и числя опытов:

$$S_{bj}^2 = S_y^2/(Nm), \tag{5.12}$$

где m – число повторных опытов (значение m должно быть одинаковым для всех точек N спектра плана).

После определения коэффициентов регрессии b_j проверяют их значимость. Принимается нулевая гипотеза о незначимости полученных коэффициентов и отсутствии влияния соответствующих им базисных функций на функцию отклика y. Проверка гипотезы осуществляется с использованием t-критерия Стьюдента, значение которого находят из соотношения

$$t_j = \left|b_j\right| / S_{bj}, \; j = \overline{0, N_B - 1}, \tag{5.13}$$

где S_{bj} – среднее квадратическое отклонение погрешности оценки b_j; $N_в$ – общее число коэффициентов уравнения регрессии, равное количеству используемых базисных функций для построения регрессии.

Полученное значение t_j для каждого коэффициента регрессии b_j сравнивают с табличным t_T, определяемым при принятом уровне значимости q и числе степеней свободы $k = N(m-1)$, с которым определялась дисперсия воспроизводимости S_y^2. Если $t_j < t_T$, нулевая гипотеза о незначимости коэффициента b_j принимается и член уравнения регрессии, включающий этот коэффициент, исключается из математической модели. Если же $t_j > t_T$, полагают, что данный коэффициент значимо (неслучайно) отличается от нуля и его следует сохранить в регрессионной модели. В этом случае значение коэффициента b_j больше ошибки опыта, которую можно оценить величиной доверительного интервала ε_{bj}. Доверительный интервал находят по формуле

$$\varepsilon_{bj} = \pm t_T S_{bj}. \tag{5.14}$$

Следует, однако, отметить, что дисперсия воспроизводимости эксперимента S_y^2 зависит от очень многих факторов: выбора центра эксперимента, интервалов варьирования факторов, наличия экстремумов функции отклика в области планирования, соотношения величины отклика и помехи (так называемое отношение сигнал – шум) и др. В этой связи при небольшом различии между t_j и t_T следует весьма осторожно относиться к оценке значимости коэффициентов регрессии. Лучше такие коэффициенты сохранить в модели, а влияние соответствующего фактора (или взаимодействия факторов) проверить в дальнейшем на более сложной модели или в иных условиях планирования эксперимента.

После исключения незначимых коэффициентов уравнение регрессии приобретает вид

$$\widehat{y} = \sum_{j=0}^{N_{\text{в}}^{*}-1} b_j f_j\left(\vec{X}\right), \qquad (5.15)$$

где $N_{\text{в}}^{2}$ – количество значимых коэффициентов регрессии.

Так как часть коэффициентов регрессии исключена из модели, то $N_{\text{в}}^{2} < N_{\text{в}} \leq N$.

Если все коэффициенты оказались значимыми, суммирование в формуле (5.15) осуществляется до $N_{\text{в}} - 1$.

Проверка адекватности и работоспособности регрессионной модели

По уравнению регрессии (5.15) можно вычислить предсказанные значения функции отклика $\widehat{y}$ во всех точках спектра плана: $\vec{X}_1, \vec{X}_2, ..., \vec{X}_N$.В результате будет получено N значений $\widehat{y}: \widehat{y}_1, \widehat{y}_2, ..., \widehat{y}_N$. Если регрессионная модель получена на основе ПФЭ и все коэффициенты регрессии признаны значимыми, то в формуле (5.15) $N_{\text{в}}^{*} = N_{\text{в}} = N$. Тогда значения $\widehat{y}_i$ должны совпадать со средними выборочными значениями $\bar{y}_i$, полученными в результате эксперимента для каждой точки спектра плана. Следовательно, поверхность отклика $Y = \varphi\left(\vec{X}\right)$ проходит через все точки $\bar{y}_i$, $i = \overline{1, N}$, и полученная модель адекватна. Значения $\widehat{y}_i$ в атом случае используют для проверки правильности вычислений коэффициентов регрессии.

Если же незначимые коэффициенты b_j исключены из регрессионной модели, то $N_{\text{в}}^{*} < N$. Тогда $\widehat{y}_i \neq \bar{y}_i$. Это же характерно для моделей, полученных на основе ДФЭ. Разности $\left(\widehat{y}_i - \bar{y}_i\right)$ несут информацию об ошибках предсказания по уравнению регрессии и их можно использовать для последующего анализа свойств полученной модели - ее адекватности и работоспособности.

Для оценки рассеяния эмпирических значений $\bar{y}_i$ относительно расчетных $\widehat{y}_i$, полученных по уравнению регрессии, используют дисперсию адекватности

$$S_{\text{ад}}^{2} = \frac{m}{N - N_{\text{в}}^{*}} \sum_{i=1}^{N} \left(\bar{y}_i - \widehat{y}_i\right)^2, \qquad (5.16)$$

где m – число параллельных опытов; N – число точек спектра плана; $N_{\text{в}}^{*}$ – количество значимых коэффициентов регрессии.

Если число параллельных опытов в различных точках спектра плана неодинаково, то для вычисления $S_{\text{ад}}^2$ используют формулу

$$S_{\text{ад}}^2 = \frac{1}{N - N_{\text{в}}^*} \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\bar{y}_i - \hat{y}_i\right)^2, \tag{5.17}$$

где m_i — число параллельных опытов в i-й точке спектра плана.

При оценке регрессионной модели принимается нулевая гипотеза о том, что полученная модель обеспечивает адекватное описание результатов эксперимента. Проверка адекватности осуществляется путем сопоставления дисперсии адекватности $S_{\text{ад}}^2$ и дисперсии воспроизводимости эксперимента S_y^2. У адекватной модели значение $S_{\text{ад}}^2$ обусловлено в основном действием случайной помехи, поэтому различие между $S_{\text{ад}}^2$ и S_y^2 должно быть небольшим, так как они оценивают одну и ту же дисперсию помехи σ_ε^2 .

Проверку гипотезы об адекватности модели (гипотезы о равенстве дисперсий $S_{\text{ад}}^2$ и S_y^2) выполняют по критерию Фишера

$$F = S_{\text{ад}}^2 / S_y^2. \tag{5.18}$$

В формулах (5.16) и (5.17) учтено, что чем больше число т параллельных опытов, тем е большей достоверностью оцениваются средние значения функции отклика y. Поэтому требования к различиям между экспериментальными $\bar{y}_i$ и расчетными $\hat{y}_i$ значениями становятся более жесткими, что отражается в увеличении F-критерия.

Полученные значения статистики F сравнивают с табличным значением критерия Фишера $F_{\text{Т}}$, определяемым в зависимости от уровня значимости q и чисел степеней свободы k_1 и k_2, с которыми определялись дисперсии $S_{\text{ад}}^2$ н S_y^2:

$$k_1 = N - N_{\text{в}}^*; \tag{5.19}$$

$$k_2 = N - (m - 1). \tag{5.20}$$

Если $F < F_{\text{Т}}$, регрессионная модель вчитается адекватной.

Различие между дисперсиями $S_{\text{ад}}^2$ и S_y^2 обусловлено систематической ошибкой при определении функции отклика по уравнению регрессии из-за его приближенности. Если модель описывает физические свойства исследуемого объекта неудовлетворительно, систематическая ошибка приводит к значительному возрастанию дисперсия адекватности и, следовательно, к увеличению статистики F.

При $F > F_{\text{Т}}$. гипотеза адекватности модели отвергается. В таком случае нужно либо изменить структуру математической модели, либо уменьшить интервалы варьирования факторов и провести повторно эксперимент с моделью прежней структуры.

В первом варианте реализуется принцип постепенного усложнения структуры математической модели. Если использовалось упрощенное уравнение регрессии первого порядка, учитывающее влияние на функцию отклика только факторов, или факторов и некоторого количества аффектов их взаимодействий низших порядков, что характерно для ДФЭ, то в модель можно дополнительно ввести новые члены, содержащие другие аффекты взаимодействия тех же порядков или более высоких порядков. Однако во многих случаях такой путь оказывается неэффективным, так как, согласно выражению (5.16), при увеличении количества членов уравнения регрессии и неизменном числе точек спектра плана N дисперсия адекватности может возрасти, несмотря на снижение разности $(\bar{y}_i - \hat{y}_i)$, поскольку при этом увеличивается $N_{\text{в}}^*$ и, следовательно, уменьшается знаменатель выражения (5.16). Кроме того, следует иметь в виду, что с увеличением порядка аффекта взаимодействия возрастает вероятность незначимости коэффициента регрессии b_j при этом аффекте. В этой связи наиболее целесообразно перейти к планированию второго порядка, используя регрессионное уравнение в виде полного квадратного полинома.

После обеспечения адекватности регрессионной модели осуществляют проверку ее работоспособности.

Адекватность регрессионной модели еще не гарантирует ее пригодность к практическому использованию в задачах прогнозирования и поиска оптимальных решений. Модель может оказаться неработоспособной из-за низкой ее точности. Для проверки работоспособности модели используют *коэффициент детерминации,* представляющий собой числовую интегральную характеристику точности уравнения регрессии. Его значение вычисляют по формуле

$$R^2 = 1 - \frac{\left(N - N_{\text{в}}^*\right)S_{\text{ад}}^2 + N(m-1)S_y^2}{m\sum_{i=1}^{N}(\bar{y}_i - \bar{y})^2 + N(m-1)S_y^2}, \tag{5.21}$$

где $\bar{y}$ — среднее значение отклика:

$$\bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\bar{y}_i\,. \qquad (5.22)$$

Модель считается работоспособной при $R^2 \geq 0{,}75$. В атом случае обеспечивается уменьшение ошибки предсказания, полученного по уравнению регрессии, по крайней мере, в 2 раза в сравнении с предсказанием по среднему значению отклика $\bar{y}$ без учета влияния факторов $\vec{X}$ на функцию отклика y.

Порядок выполнения работы

При математической обработке результатов эксперимента используются кодированные значения изучаемых факторов. Только в этом случае можно пользоваться зависимостями (10) – (17) из [см. пр. раб. №3]. В противном случае, когда используются натуральные значения переменных, придётся для определения значений коэффициентов регрессии решать систему линейных уравнений (в нашем случае – систему из десяти линейных уравнений), что значительно усложняет проведение расчётов.

Из раздела 3.3 выбираются и записываются базовые данные (в виде таблицы), и каждому значению которых прибавим значение поправочного коэффициента ℓ и, таким образом, получим “Результаты эксперимента“, которые оформляем в виде отдельной таблицы. В этой же таблице целесообразно указать средние значение y_u параллельных наблюдений в каждой точке факторного пространства. После этого начинается непосредственная обработка экспериментальных данных.

Первоначально определяются значения λ_y, A и C. При этом необходимо определить ряд значений сумм, которые используются для расчёта C и значений коэффициентов регрессии. После вычисления коэффициентов регрессии определяем дисперсии воспроизводимости и коэффициентов регрессии. Затем устанавливаем доверительные интервалы и значимость коэффициентов регрессии. Ручной расчёт заканчивается проверкой гипотезы об адекватности модели. Причём, в этом случае, целесообразно определять значения $\hat{y}_u$ по полученной модели с использованием специальных данных, в 3-5 колонках которой “0” , “+”, и “-” соответствуют “0”, “± i”, “± ” плана эксперимента. Для первого опыта значение $\hat{y}_u$ будет равняться сумме всех коэффициентов регрессии, т.к. все значения x_i =+1. Для второго опыта – сумма всех коэффициентов регрессии кроме стоящих перед x_1 в первой степени, которые суммируются с противоположным знаком, т.к. в плане эксперимента x_1= -1; x_2 = +1; x_3 = +1 и т.д

Пример выполнения работы представлен в приложении Д.

Контрольные вопросы:

1. В чем заключается ошибка параллельных опытов?
2. Как высчитывается оценка отклонения функции отклика?
3. По каким параметрам происходит отсеивание грубых ошибок?

Приложение А
Пример практической работы №1
Практическая часть

Строим схему по заданным параметрам.

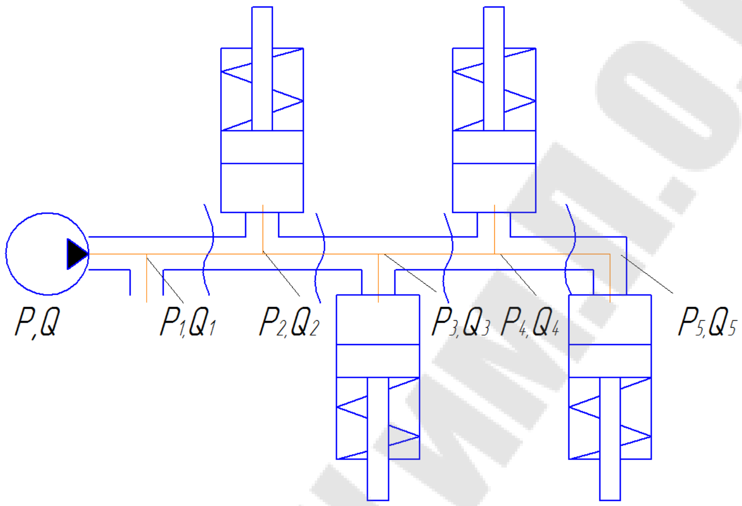


Рисунок 1.1 – Эквивалентная схема

Разделим гидросхему на участки, чтобы получить динамическую модель

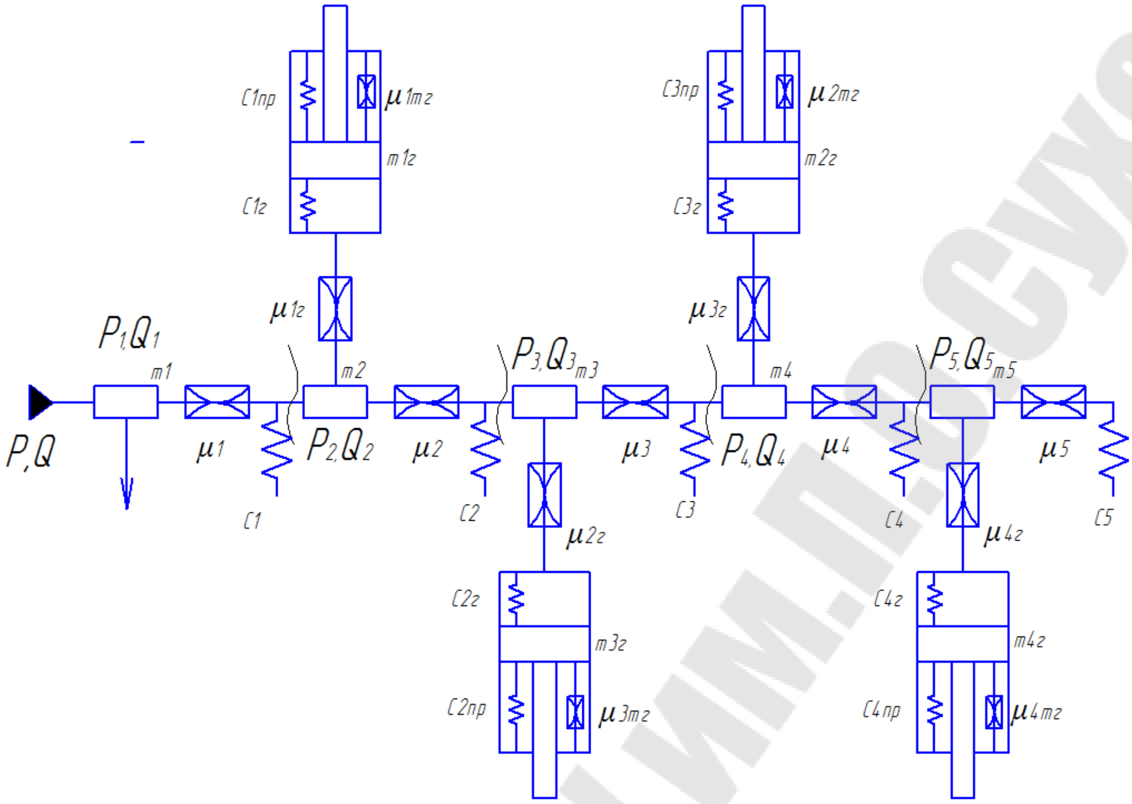


Рисунок 1.2 – Динамическая модель

Составим системы уравнений для каждого из участков

Для цилиндров:

$$\begin{cases} C_{1\text{пр}} = Ex \\ \mu_{1\text{гт}} = KF \\ m'_{1\text{г}} = m_1 g \end{cases} \qquad \begin{cases} m_{1\text{г}} = \dfrac{\rho \cdot V_1}{S_1{}^2} \\ \mu_{1\text{г}} = \dfrac{2 \cdot \xi \cdot l_1}{S_1} \\ C_{1\text{г}} = \dfrac{E}{V_1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_{2\text{пр}} = Ex \\ \mu_{2\text{гт}} = KF \\ m'_{2\text{г}} = m_2 g \end{cases} \qquad \begin{cases} m_{2\text{г}} = \dfrac{\rho \cdot V_2}{S_2{}^2} \\ \mu_{2\text{г}} = \dfrac{2 \cdot \xi \cdot l_2}{S_2} \\ C_{2\text{г}} = \dfrac{E}{V_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_{3np} = Ex \\ \mu_{3гm} = KF \\ m'_{3г} = m_3 g \end{cases} \quad \begin{cases} m_{3г} = \dfrac{\rho \cdot V_3}{S_3{}^2} \\ \mu_{3г} = \dfrac{2 \cdot \xi \cdot l_3}{S_3} \\ C_{3г} = \dfrac{E}{V_3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_{4np} = Ex \\ \mu_{4гm} = KF \\ m'_{4г} = m_4 g \end{cases} \quad \begin{cases} m_{4г} = \dfrac{\rho \cdot V_4}{S_4{}^2} \\ \mu_{4г} = \dfrac{2 \cdot \xi \cdot l_4}{S_4} \\ C_{4г} = \dfrac{E}{V_4} \end{cases}$$

Для отводов:

$$\begin{cases} m_1 = \dfrac{\rho \cdot V_5}{S_5^2} \\ \mu_1 = \dfrac{2 \cdot \xi \cdot l_5}{S_5} \\ C_1 = \dfrac{E}{V_5} \end{cases}$$

Объединяем системы принимая задавшись условием:
$V_0 = V_5$– объём жидкости в трубопроводе
$l_0 = l_5$– длина тубы отвода трубопровода
$S_0 = S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5$– площадь поперечного сечения отводов и поводов к цилиндрам
$V_ц = V_1 = V_2 = V_3 = V_4$– объём жидкости в цилиндре
$l_ц = l_1 = l_2 = l_3 = l_4$– длина цилиндра
$m = m_1 = m_2 = m_3 = m_4$– масса поршня цилиндра
x– ход поршня цилиндра

Получаем общую систему уравнений:

$$\begin{cases} m = \dfrac{\rho V}{S_o^2} + 4mg + \dfrac{4\rho V_ц}{S_ц^2} \\ \mu = 4KF + \dfrac{8\xi l_ц + 2\xi l_o}{S_o} \\ C = \dfrac{E}{V_o} + 4Ex + \dfrac{4E}{V_ц} \end{cases}$$

Приложение Б
Пример практической работы №2
Практическая часть

Исходные данные: 2×3+2+2

По исходным данным строим кинематическую схему системы

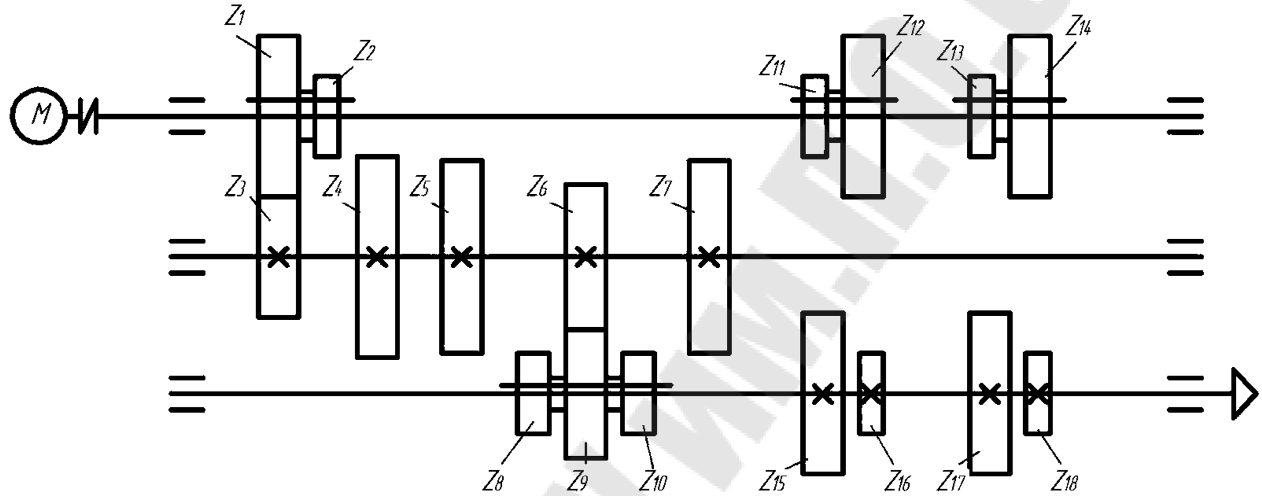


Рисунок 2.1 – Кинематическая схема

По кинематической схеме строи эквивалентную схему.

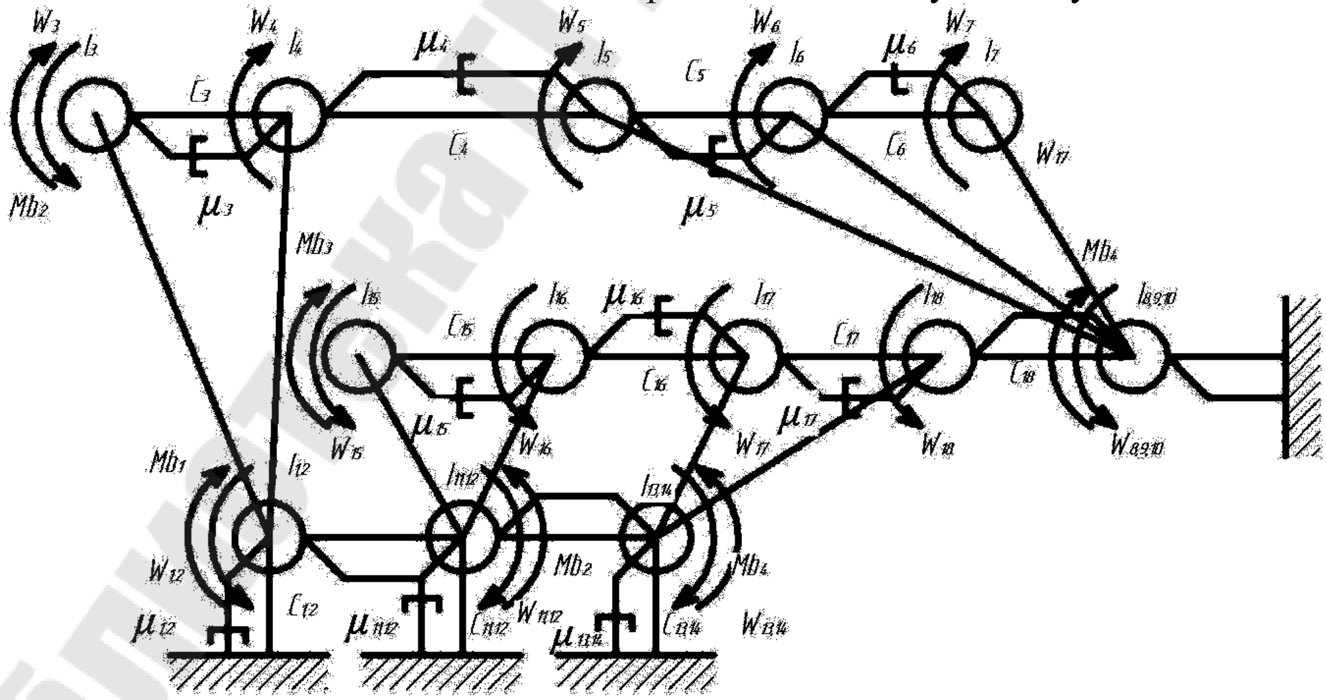


Рисунок 2.2 – Эквивалентная схема

По эквивалентной схеме строим динамическую модель.

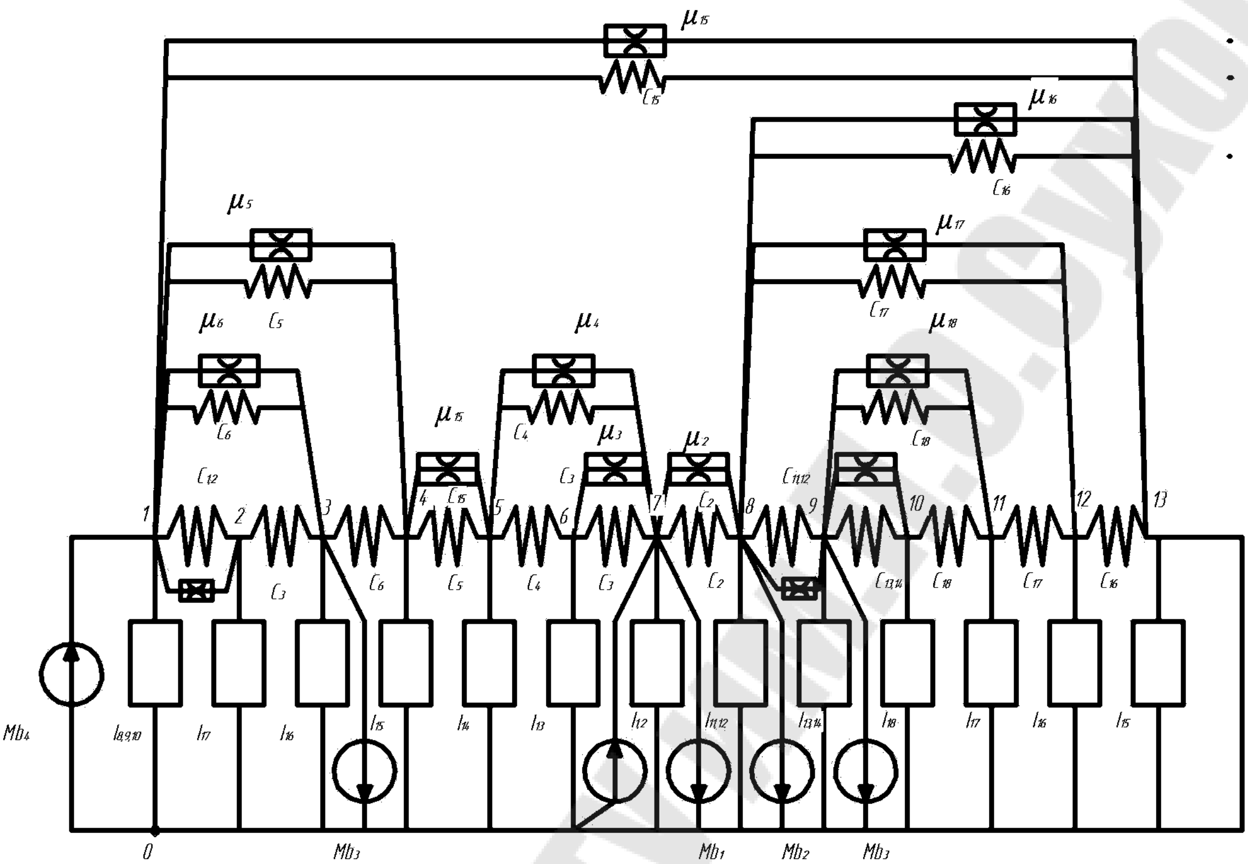


Рисунок 2.3 – Динамическая модель

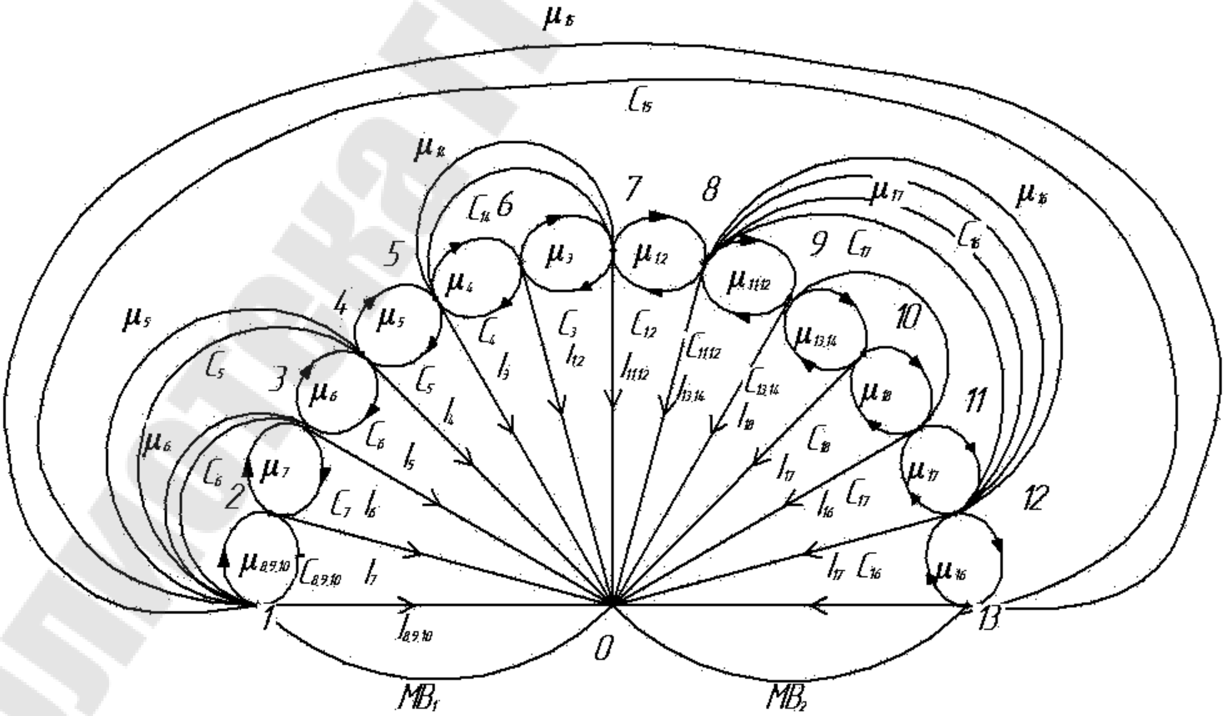


Рисунок 2.4– Орг. Граф

Приложение В
Пример практической работы №3

Практическая часть

Исходные данные для расчета.

Значение нулевых уравнений факторов: $x_{o_1} = 0{,}3$; $x_{o_2} = 2$; $x_{o_3} = 15$.

Значение интервалов варьирования факторов (на уровне ± 1)

$$E_1 = 0{,}1;\ E_2 = 0{,}5;\ E_3 = 5.$$

Используем 5% уровень значимости.

Значения поправочного коэффициента $l = 15$

Проведение расчёта

Из таблицы 9[3] имеет для трёхфакторного эксперимента:

k=3 – количество факторов; KPR=0 (полный факторный эксперимент);

Число точек ядра $N_C = 8$;

Число центральных точек $N_O = 6$;

Общее число опытов $N_I = 20$;

Величина плана для звёздных точек $\alpha = 2^{k/4} = 1{,}68179$

Число звёздных точек равно: $N_I - N_C - N_O = 20 - 8 - 6 = 6$,

так как KP=K- KPR=3-0=3, то план эксперимента используем из таблицы 1 Данный план приведен в таблице 1.

Для проведения эксперимента перейдем от значений переменных *k* натуральным с использованием следующих зависимостей:

$$\frac{X_i - X_{oi}}{\varepsilon_i} = \pm 1 \quad \text{и} \quad \frac{X_i - X_{oi}}{\varepsilon_i} = \pm 2i$$

Для первого фактора имеем:

в точке «+1» - x_1=0,1+0,3=0,4

в точке «-1» - x_1 = -0,1+0,3=0,2

в точке «+2» - x_1 = 1,80179$\times$0,1+0,3=0,46818

в точке «-2» - x_1 = -1,68179$\times$0,1+0,3=0,13182

в точке «0» - x_1 =0,3

Для второго фактора имеем:

в точке «+1» - x_2=0,5+2,0=2,5

в точке «-1» - x_2 = -0,5+2,0=1,5

в точке «+2» - x_2= 1,68179$\times$0,5+2,0=2,84089

в точке «-2» - x_2 = -1,68179$\times$0,5+2,0=1,15910

в точке «0» - x_2 =2,0

Для третьего фактора имеем:

в точке «+1» - x_3=5+15=20

в точке «-1» - x_3 = -5+15=10

в точке «+2» - x_3= 1,68179$\times$5+15=23,40896

в точке «-2» - x_3 = -1,68179$\times$5+15=6,59104

в точке «0» - x_3 =15

Таблица 1– План проведения эксперимента

№$_{опыта}$	Факторы			Примечание
	1	2	3	
1	+1	+1	+1	Ядро плана
2	-1	+1	+1	
3	+1	-1	+1	
4	-1	-1	+1	
5	+1	+1	-1	
6	-1	+1	-1	
7	+1	-1	-1	
8	-1	-1	-1	
9	+2	0	0	Звёздные точки плана
10	0	+2	0	
11	0	0	+2	
12	-2	0	0	
13	0	-2	0	
14	0	0	-2	
15	0	0	0	Центральные точки плана
16	0	0	0	
17	0	0	0	
18	0	0	0	
19	0	0	0	
20	0	0	0	

Проставив натуральные значения x_i в таблицу 1, получим план эксперимента, на основании которого он проводится (таблица 2).

Таблица 2 –План эксперимента в натуральных значениях факторов

№$_{опыта}$	Факторы		
	x_1	x_2	x_3
1	0,4	2,5	20
2	0,2	2,5	20
3	0,4	1,5	20
4	0,2	1,5	20
5	0,4	2,5	10
6	0,2	2,5	10
7	0,4	1,5	10
8	0,2	1,5	10
9	0,46818	2	15
10	0,3	2,84087	23,40896

11	0,3	2	15
12	0,13182	2	15
13	0,3	1,15910	6,59104
14	0,3	2	15
15	0,3	2	15
…	...	...	…
20	0,3	2	15

Базовые данные приведены в таблице 3(взяты из условия, таблиц XX – номер варианта по списку).

Таблица 3 – Базовые данные

№ опыта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_1	45.4	40.2	39.1	34.8	39.2	34.8	33.1	29.2	40.3	42.3
y_2	45.5	40.1	39.2	34.9	39.3	34.9	33.2	29.1	40.1	42.6
y_3	45.6	40.0	39.3	34.0	39.4	34.0	33.3	29.0	40.2	42.5

Продолжение таблицы 3

№ опыта	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y_1	42.6	33.6	31.8	32.2	36.2	36.7	36.7	36.1	36.1	36.8
y_2	42.5	33.5	31.9	32.1	36.3	36.8	36.6	36.9	36.2	36.9
y_3	42.4	33.4	31.0	320.	36.4	36.9	36.5	36.0	36.3	36.0

Прибавив к каждому значению базовых данных таблица 3 значение поправочного коэффициента $l = 15$, получим данные результатов эксперимента (таблица 4), которые и подвергнем математической обработке (в этой же таблице приведены средние значения для каждого опыта $\bar{y}_n$).

Таблица 4– Результаты эксперимента

№ опыта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_1	45.4	40.2	39.1	34.8	39.2	34.8	33.1	29.2	40.3	42.3
y_2	45.5	40.1	39.2	34.9	39.3	34.9	33.2	29.1	40.1	42.6
y_3	45.6	40.0	39.3	34.0	39.4	34.0	33.3	29.0	40.2	42.5

Продолжение таблицы 4

№ опыта	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y_1	42.6	33.6	31.8	32.2	36.2	36.7	36.7	36.1	36.1	36.8
y_2	42.5	33.5	31.9	32.1	36.3	36.8	36.6	36.9	36.2	36.9
y_3	42.4	33.4	31.0	320.	36.4	36.9	36.5	36.0	36.3	36.0

Определим количество экспериментальных центральных:

$$n_c = N - n_0 = 20 - 6 = 14, \text{ т. к. } n_0 = N_0 = 6 \text{ и } N = N \cdot \mathrm{I} = 20$$

Затем определим значение α_4 и A:

$$\alpha_4 = \frac{k \cdot (n_c + n_0)}{(k+2) \cdot n \cdot c} = \frac{3 \cdot (14+6)}{(3+2) \cdot 14} = \frac{60}{70} = 0{,}8571$$

$$A = \frac{1}{2\alpha_4 \cdot [(k+2) > 4 - k]} = \frac{1}{2 \cdot 0{,}8571 \cdot [(3+2) \cdot 0{,}8571 - 3]} = 0{,}4538$$

Выполним вычисление сумм, которые потребуются для дальнейших расчетов, с использованием таблицы 5.

Таблица 5– Определение сумм

№ опыта	x_1	x_2	x_3	$\mathrm{Y_j}$	$x^2{}_1$	$x^2{}_2$	$x^2{}_3$	$x_1^2\mathrm{Y_j}$	$x_2^2\mathrm{Y_j}$	$x_3^2\mathrm{Y_j}$
1	+1	+1	+1	45,5	1	1	1	45,5	45,5	45,5
2	-1	+1	+1	40,2	1	1	1	40,2	40,2	40,2
3	+1	-1	+1	39,2	1	1	1	39,2	39,2	39,2
4	-1	-1	+1	34,6	1	1	1	34,6	34,6	34,6
5	+1	+1	-1	39,3	1	1	1	39,3	39,3	39,3
6	-1	+1	-1	34,6	1	1	1	34,6	34,6	34,6
7	+1	-1	-1	33,2	1	1	1	33,2	33,2	33,2
8	-1	-1	-1	29,1	1	1	1	29,1	29,1	29,1
9	+1,682	0	0	40,2	2,826	0	0	113,6	0	0
10	0	+1,682	0	42,5	0	2,826	0	0	120,1	0
11	0	0	+1,682	42,5	0	0	2,826	0	0	120,1
12	-1,682	0	0	33,5	2,826	0	0	94,6	0	0
13	0	-1,681	0	31,6	0	2,826	0	0	89,3	0
14	0	0	-1,682	32,1	0	0	2,826	0	0	90,71
15	0	0	0	36,3	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	36,8	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	36,6	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	36,3	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	36,2	0	0	0	0	0	0
20	0	0	0	36,6	0	0	0	0	0	0
Суммы				736,7				503,988	504,93	506,53

Примечание:

1) в данной таблице приведено значение $\sum\limits_{n=4}^{n=14} \mathbf{Y}_{\mathrm{j}}$, а для дальнейших расчетов потребуется

$$\sum_{n=1}^{20} \mathrm{Y_j} = \sum_{n=1}^{14} \mathrm{Y_j} + \sum_{n=15}^{20} \mathrm{Y_j} = 518{,}1 + 36{,}3 + 36{,}8 + 36{,}6 + 36{,}3 + 36{,}2 + \\ + 36{,}6 = 736{,}9$$

2) потребуются такие значения $\sum\limits_{m=1}^{л} \sum\limits_{m}$

$$x_{14}^2 \mathrm{Y_j} = 503{,}9 + 504{,}9 + 506{,}5 = 1515{,}454$$

Пример практической работы №3 в МС Excel

k	3	число факторов
a	1,681792831	звездное плечо
n_{α}	6	число звездных точек
1	0,838516481	
n_0	6	число опытов в центре
N	20	общее число строк плана
1	0,857864376	

X01	0,30	E1	0,1
X02	2,00	E2	0,5
X03	15,00	E3	5

X01	Значение нулевых уровней факторов
X02	
X03	

E1	Значение интервалов варьирования
E2	
E3	

Таблица уровней варьирования факторов

X01{-1}	0,20	Нижний	X02{-1}	1,50	Нижний
X01{+1}	0,40	Верхний	X02{+1}	2,50	Верхний
X010	0,30	Основной	X020	2,00	Основной
ES	0,1	Шаг изменения факторов	em	0,5	Шаг изменения факторов
X01{-a}	0,131820717	Звездные точки	X02{-a}	1,159103585	Звездные точки
X01{+a}	0,468179283		X02{+a}	2,840896415	
X03{-1}	10,00	Нижний			
X03{+1}	20,00	Верхний			
X03{-a}	6,591035847	Звездные точки			
X03{+a}	23,40896415				
X030	15,00	Основной			

Матрица планирования эксперимента

Название части плана	Номер опыта	Уровни фактора		
		X1	X2	X3
План Z^3 "ядро плана" N=8	1	1	1	1
	2	-1	1	1
	3	1	-1	1
	4	-1	-1	1
	5	1	1	-1
	6	-1	1	-1
	7	1	-1	-1
	8	-1	-1	-1
"Звездные точки" n_k=6 a=1,682	9	1,681792831	0	0
	10	0	1,681792831	0
	11	0	0	1,681792831
	12	-1,681792831	0	0
	13	0	-1,681792831	0
	14	0	0	-1,68179283
"Нулевые точки" n_0=6	15	0	0	0
	16	0	0	0
	17	0	0	0
	18	0	0	0
	19	0	0	0
	20	0	0	0

Рабочая матрица с результатами проведения эксперимента 2-го порядка, содержащая натуральные значения факторов

N	X01	X02	X03	t'	t''	t'''	Yj
1	0,4	2,5	20	45,4	45,5	45,6	45,5
2	0,2	2,5	20	40,2	40,1	40	40,1
3	0,4	1,5	20	39,1	39,2	39,3	39,2
4	0,2	1,5	20	34,8	34,9	34	34,56666667
5	0,4	2,5	10	39,2	39,3	39,4	39,3
6	0,2	2,5	10	34,8	34,9	34	34,56666667
7	0,4	1,5	10	33,1	33,2	33,3	33,2
8	0,2	1,5	10	29,2	29,1	29	29,1
9	0,468179283	2	15	40,3	40,1	40,2	40,2
10	0,3	2,840896415	23,40896415	42,3	42,6	42,5	42,46666667
11	0,3	2	15	42,6	42,5	42,4	42,5
12	0,131820717	2	15	33,6	33,5	33,4	33,5
13	0,3	1,159103585	6,591035847	31,8	31,9	31	31,56666667
14	0,3	2	15	32,2	32,1	32	32,1
15	0,3	2	15	36,2	36,3	36,4	36,3
16	0,3	2	15	36,7	36,8	36,9	36,8
17	0,3	2	15	36,7	36,6	36,5	36,6
18	0,3	2	15	36,1	36,9	36	36,33333333
19	0,3	2	15	36,1	36,2	36,3	36,2
20	0,3	2	15	36,8	36,9	36	36,56666667

Среднее значение функции отклика в центре эсперимента Yo 36,46666667

Расчетная матрица для определения М.М.

	b0	b1	b2	b3	b12	b13	b23	b11	b22
N	X0	X1	X2	X3	X1*X2	X1*X3	X2*X3	$X1^2$	$X2^2$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1
3	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1
4	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
5	1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1
6	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1
7	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1
8	1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1
9	1	1,681792831	0	0	0	0	0	2,82842712	0
10	1	0	1,681792831	0	0	0	0	0	2,82842712
11	1	0	0	1,68179283	0	0	0	0	0
12	1	-1,681792831	0	0	0	0	0	2,82842712	0
13	1	0	-1,68179283	0	0	0	0	0	2,82842712
14	1	0	0	-1,6817928	0	0	0	0	0
15	1	0	0	0	0	0	0	0	0
16	1	0	0	0	0	0	0	0	0
17	1	0	0	0	0	0	0	0	0
18	1	0	0	0	0	0	0	0	0
19	1	0	0	0	0	0	0	0	0
20	1	0	0	0	0	0	0	0	0

b33						
$X3^3$	Yj	Yj, n_0	$Yj*X1^2$	$YjX2^2$	$YjX3^2$	
1	45,5	45,5	45,5	45,5	45,5	
1	40,1	40,1	40,1	40,1	40,1	
1	39,2	39,2	39,2	39,2	39,2	
1	34,5666667	34,56666667	34,56666667	34,5667	34,5667	
1	39,3	39,3	39,3	39,3	39,3	
1	34,5666667	34,56666667	34,56666667	34,5667	34,5667	
1	33,2	33,2	33,2	33,2	33,2	
1	29,1	29,1	29,1	29,1	29,1	
0	40,2	295,5333333	113,7027704	0	0	
0	42,4666667		0	120,114	0	
2,828427125	42,5		0	0	120,208	
0	33,5		94,75230868	0	0	
0	31,5666667		0	89,284	0	
2,828427125	32,1		0	0	90,7925	
0	36,3		0	0	0	
0	36,8		0	0	0	
0	36,6		0	0	0	
0	36,3333333		0	0	0	
0	36,2		0	0	0	
0	36,5666667		0	0	0	
Сумма Yj	736,666667		503,9884124	504,931	506,534	1515,45

Приложение Г
Пример практической работы №4

Практическая часть

1) Определяем значение коэффициентов A и C по формулам:

$$A = \frac{1}{\left(((k+2)\cdot l - k)\cdot 2l\right)} = 0{,}452054$$

$$C = \frac{N}{\left(2^{k-p} + 2\cdot a^2\right)} = 1{,}464466$$

2) Определяем параметры математической модели по следующим формулам рассчитывая в MC Excel:

$$b_0 = (2l^2 \cdot (k+2)\cdot \sum_{j=1}^{N} Y_j - 2\cdot l\cdot C\cdot \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{N}(Y_j \cdot (X_{ij})^2))\cdot \frac{A}{N} = 36{,}471497$$

$$b_{11} = \sum_{j=1}^{N}\left(\frac{Y_j \cdot X_{i,j}}{2^{k-p} + 2\cdot a^2}\right) = 0{,}103957$$

$$b_{22} = \sum_{j=1}^{N}(Y_j \cdot X_{i,j}\,\frac{X_{mj}}{2^{k-p}}) = 0{,}162882$$

$$b_{33} = (C^2 \cdot ((k+2)\cdot l -$$

$$-k)\cdot \sum_{j=1}^{N} Y_j \cdot (X_{ij})^2 + C^2 \cdot (1-l) - 2\cdot l\cdot C\cdot \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{N}(Y_j \cdot (X_{ij})^2) - 2l\cdot C\cdot \sum_{j=1}^{N} Y_j)\cdot \frac{A}{N} =$$

$$= 0{,}263056$$

Пример практической работы №4 в MC Excel

Для расчета коэфициентов регресии используются данные расчетной матрицы	
A (2.24)	0,452053689
C (2.25)	1,464466094

Таблица расчета коэффициентов регрессии

Расчет коэффициентов регрессии

b1	b2	b3	b12	b13
45,5	45,5	45,5	45,5	45,5
-40,1	40,1	40,1	-40,1	-40,1
39,2	-39,2	39,2	-39,2	39,2
-34,56666667	-34,56666667	34,56666667	34,56666667	-34,56666667
39,3	39,3	-39,3	39,3	-39,3
-34,56666667	34,56666667	-34,56666667	-34,56666667	34,56666667
33,2	-33,2	-33,2	-33,2	-33,2
-29,1	-29,1	-29,1	29,1	29,1
67,60807179	0	0	0	0
0	71,42013554	0	0	0
0	0	71,4761953	0	0
-56,34005982	0	0	0	0
0	-53,08859368	0	0	0
0	0	-53,98554986	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
2,206560756	3,055721405	2,979503529	0,175	0,15

Продолжение таблицы расчета коэффициентов регрессии

b23	b0	b11	b22	b33
45,5	36,47149741	0,103957281	0,162882846	0,26305631
40,1				
-39,2				
-34,56666667				
-39,3				
-34,56666667				
33,2				
29,1				
0				
0				
0				
0				
0				
0				
0				
0				
0				
0				
0				
0				
0				
0,033333333				

Приложение Д
Пример практической работы №5

Практическая часть

1. Для оценки значимости коэффициентов регрессии определяем их дисперсии:

- дисперсия воспроизводимости

$$S_y^2 = \sum_{i=1}^{n_0} \frac{Y_{0i} - \overline{Y_0}}{n_0 - 1}$$

- коэффициент регрессии:

$$S_{b0}^2 = \frac{2 \cdot A \cdot l^2 (k-2) \cdot S_y^2}{N} = 0{,}0085018$$

$$S_{bi}^2 = \frac{c \cdot S_y^2}{N} = 0{,}00374252$$

$$S_{bij}^2 = \frac{c^2 \cdot S_y^2}{l \cdot N} = 0{,}0065363$$

$$S_{bii}^2 = \frac{A \cdot ((k+1) \cdot l - (k-1) \cdot C^2 \cdot S_y^2}{N} = 0{,}0035466,$$

S,A,*k*, C, N – см. практическую работу №3.

2. Опредедление доверительных интервалов.

Нахождение доверительных интервалов требуется для оценки значимости коэффициентов регрессии

Определим доверительные интервалы:

$$\Delta b_0 = \pm t \cdot S_{b0}$$

$$\Delta b_i = \pm t \cdot S_{bi}$$

$$\Delta b_{ij} = \pm t \cdot S_{bij}$$

$$\Delta b_{ii} = \pm t \cdot S_{bii}$$

где t – табличное значение критерия Стьюдента при 5% уровне значимости и числе степени f = 5, с которым определялась дисперсия воспроизводимости.

3. Определение значимости коэффициентов регрессии.

Коэффициент регрессии значит, если его абсолютная величина больше доверительного интервала, т. е. $|b| > \Delta b$. Иначе, коэффициент регрессии признается незначимым и в дальнейших расчетах не участвует.

4. Записываем математическую модель, составленную из значимых коэффициентов регрессии в кодированном виде.

5. Проверка адекватности модели по критерию Фишера.

Для проверки адекватности модели рассчитывается значение $\overline{Y_l}$ для всех опытов эксперимента по математической модели и суммы квадратов отклонений Sr и Se:

$$Sr = \sum_{j=1}^{N}(Y_j - \overline{Y_j})^2$$

$$Se = \sum_{i=1}^{n_0}(Y_{0j} - \overline{Y_0})^2$$

Тогда дисперсия адекватности $S_{ад}^2$ определяется по формуле:

$$S_{ад}^2 = \frac{Sr - Se}{f}$$

$$f = N - k - (n-1)$$

Проверка условия адекватности

Если расчетное значение критерия Фишера не превышает табличное при выбранном уровне значимости, то гипотеза об адекватности математической модели принимается.

$$Fp = \frac{S_{ад}^2}{S_{\{y\}}^2}$$

где Fp- расчетное значение критерия Фишера

$S_{ад}^2$ -дисперсия адекватности математической модели

$S_{\{y\}}^2$- дисперсия воспроизводимости эксперимента

$Fp \le F_T$

Таблица 6

Расчет по уравнению регрессии

№	b_0	b_1x_1	b_2x_2	b_3x_3	$b_{12}x_1x_2$	$НЗ$
1.	36,47	2,206	3,056	2,980	0,175	0,15
2.	36,47	-2,206	3,056	2, 980	-0,175	-0,15
3.	36,47	2,206	-3,056	2, 980	-0,175	0,15
4.	36,47	-2,206	-3,056	2, 980	0,175	-0,15
5.	36,47	2,206	3,056	-2, 980	0,175	-0,15
6.	36,47	-2,206	3,056	-2, 980	-0,175	0,15
7.	36,47	2,206	-3,056	-2, 980	-0,175	-0,15
8.	36,47	-2,206	-3,056	-2, 980	0,175	0,15
9.	36,47	3,711	0	0	0	0

10.	36,47	0	5,139	0	0	0
11.	36,47	0	0	5,01	0	0
12.	36,47	-3,711	0	0	0	0

Продолжение таблицы 6

№	b_0	b_1x_1	b_2x_2	b_3x_3	$b_{12}x_1x_2$	$H3$
13.	36,47	0	-5,139	0	0	0
14.	36,47	0	0	-5,01	0	0
15.	36,47	0	0	0	0	0
16.	36,47	0	0	0	0	0
17.	36,47	0	0	0	0	0
18.	36,47	0	0	0	0	0
19.	36,47	0	0	0	0	0
20.	36,47	0	0	0	0	0
№	$b_{13}x_2x_3$	$b_{11}x_1^2$	$b_{22}x_2^2$	$b_{33}x_3^2$	Y_j	$Y_{модель}$
1	0,033	0,104	0,163	0,263	45,5	45,6
2	0,033	0,104	0,163	0,263	40,1	40,5
3	-0,033	0,104	0,163	0,263	39,2	39,1
4	-0,033	0,104	0,163	0,263	34,6	34,7
5	-0,033	0,104	0,163	0,263	39,3	39,2
6	-0,033	0,104	0,163	0,263	34,6	34,8
7	0,033	0,104	0,163	0,263	33,2	32,9
8	0,033	0,104	0,163	0,263	29,1	29,1
9	0	0,294	0	0	40,2	40,5
10	0	0	0,46	0	42,5	42,1
11	0	0	0	0,744	42,5	42,2
12	0	0,294	0	0	33,5	33,1
13	0	0	0,46	0	31,6	31,8
14	0	0	0	0,744	32,1	32,2
15	0	0	0	0	36,3	36,5
16	0	0	0	0	36,8	36,5
17	0	0	0	0	36,6	36,5
18	0	0	0	0	36,3	36,5
19	0	0	0	0	36,2	36,5
20	0	0	0	0	36,6	36,5

6. Записываем математическую модель, переведенную из кодированных значений факторов в натуральные и соответствующую общему виду:

$$Y = b_0 + b_1 \cdot X1 + b_2 \cdot X2 + b_3 \cdot X3 + b_{12} \cdot X1 \cdot X2 + b_{13} \cdot X1 \cdot X3 + b_{23} \cdot X2 \cdot X3 +$$
$$+ b_{11} \cdot X1^2 + b_{22} \cdot X2^2 + b_{33} \cdot X3^2$$

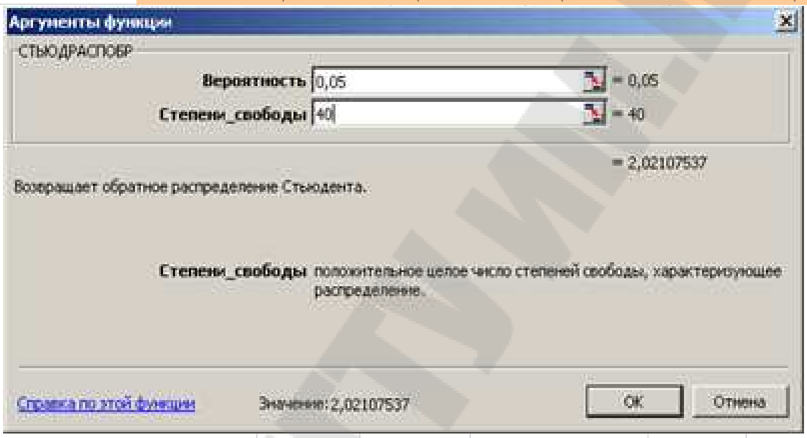
Пример практической работы №5 в MC Excel

Определение дисперсию воспроизводимости и дисперсии коэффициентов регрессии

Дисперсия воспроизводимости S {y}	Дисперсия		Корень из дисперсии	
-0,166666667	$S^2b0=$	0,008501834	Sbo=	0,09220539
0,333333333	S^2bi	0,003742524	Sbi	0,06117618
0,133333333	S^2bij	0,006536306	Sbij	0,08084742
-0,133333333	S^2bii	0,003546602	Sbii	0,05955335
-0,266666667				
0,1				
0,051111111				

Доверительные интервалы

t-распределение Стьюдента для уровня значимости a=0,05 и числа f2=5	2,570581836	Доверительный интервал b0	Доверительный интервал bi	Доверительный интервал bij	Доверительный интервал bii
		0,237021499	0,157258366	0,207824918	0,153086769



Определение значимости коэффициентов регрессии

b0	b1	b2	b3	b12	b13	b23	b11	b22	b33
Значимый	Значимый	Значимый	Значимый	Незначимый	Незначимый	Незначимый	Незначимый	Значимый	Значимый

Решение системы линейных уравнений

N	20	φ	8
W	13,65685425		
τ	24		

Матрица А

20	13,65685425	13,65685425	13,65685425
13,65685425	24	8	8
13,65685425	8	24	8
13,65685425	8	8	24

Вектор В

736,6666667
503,9884124
504,9312215
506,5339968

Обратная матрица

0,166340227	-0,0567921	-0,0567921	-0,056792106
-0,056792106	0,06939004	0,00689004	0,006890038
-0,056792106	0,00689004	0,06939004	0,006890038
-0,056792106	0,00689004	0,00689004	0,069390038

Решение

b0	36,47149741
b11	0,103957281
b22	0,162882846
b33	0,263056307

Математическая модель, составленная из значимых коэффициентов регрессии Y=36,471+2,207*X1+3,056*X2+2,980*X3+0*X1*X2+0*X1*X3+0*X2*X3+0*X1^2+0,163*X2^2+0,263*X3^2

Проверка адекватности по критерию Фишера

k-число значимых факторов	3
N- число опытов	20
f1-число степеней свободы	5
f2-число степеней свободы	5
a- уровень значимости	0,05

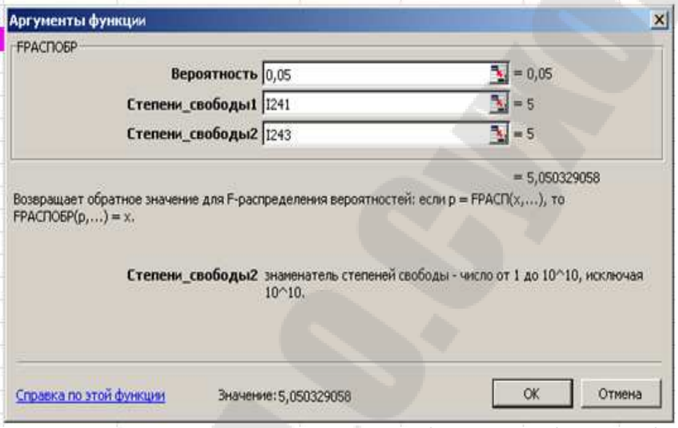
Таблица проверки адекватности по критерию Фишера

N	b0	b1*X1	b2*X2	b3*X3	b12*X1*X2
1	36,47149741	2,206560756	3,055721405	2,979503529	0,175
2	36,47149741	-2,206560756	3,055721405	2,979503529	-0,175
3	36,47149741	2,206560756	-3,0557214	2,979503529	-0,175
4	36,47149741	-2,206560756	-3,0557214	2,979503529	0,175
5	36,47149741	2,206560756	3,055721405	-2,979503529	0,175
6	36,47149741	-2,206560756	3,055721405	-2,979503529	-0,175
7	36,47149741	2,206560756	-3,0557214	-2,979503529	-0,175
8	36,47149741	-2,206560756	-3,0557214	-2,979503529	0,175
9	36,47149741	3,710978059	0	0	0
10	36,47149741	0	5,139090351	0	0
11	36,47149741	0	0	5,010907674	0
12	36,47149741	-3,710978059	0	0	0
13	36,47149741	0	-5,13909035	0	0
14	36,47149741	0	0	-5,010907674	0
15	36,47149741	0	0	0	0
16	36,47149741	0	0	0	0
17	36,47149741	0	0	0	0
18	36,47149741	0	0	0	0
19	36,47149741	0	0	0	0
20	36,47149741	0	0	0	0

продолжение таблицы проверки адекватности по критерию Фишера

H3	H3	b11*X1^2	b22*X2^2	b33*X3^2	Yj	Yмодель
0,15	0,033333333	0,10395728	0,16288285	0,263056307	45,5	45,60151287
-0,15	0,033333333	0,10395728	0,16288285	0,263056307	40,1	40,53839136
0,15	-0,033333333	0,10395728	0,16288285	0,263056307	39,2	39,0734034
-0,15	-0,033333333	0,10395728	0,16288285	0,263056307	34,5666667	34,71028188
-0,15	-0,033333333	0,10395728	0,16288285	0,263056307	39,3	39,27583915
0,15	-0,033333333	0,10395728	0,16288285	0,263056307	34,5666667	34,81271764
-0,15	0,033333333	0,10395728	0,16288285	0,263056307	33,2	32,881063
0,15	0,033333333	0,10395728	0,16288285	0,263056307	29,1	29,11794149
0	0	0,29403559	0	0	40,2	40,47651107
0	0	0	0,46070226	0	42,4666667	42,07129003
0	0	0	0	0,744035594	42,5	42,22644068
0	0	0,29403559	0	0	33,5	33,05455495
0	0	0	0,46070226	0	31,5666667	31,79310932
0	0	0	0	0,744035594	32,1	32,20462533
0	0	0	0	0	36,3	36,47149741
0	0	0	0	0	36,8	36,47149741
0	0	0	0	0	36,6	36,47149741
0	0	0	0	0	36,3333333	36,47149741
0	0	0	0	0	36,2	36,47149741
0	0	0	0	0	36,5666667	36,47149741

	Se	0,255695572		f1	5
	Sr	1,226266772			
Дисперсия адекватности	Sад	0,9705712		fад	5
Расчетное значение критерия Фишера	Fp	3,795807612			
Табличное значение критерия Фишера	Ft	5,050329058			
Сравнение Fp и Ft	М.М. адекватна				



Перевод М.М из кодированных значений факторов в натуральные ,будет иметь вид:

b0	18,44966677	
b1	4,328170688	x1
b2	2,25531727	x2
b3	0,163566471	x3
b12	0	x1x2
b13	0	x1x3
b23	0	x2x3
b11	0	x1^2
b22	0,651531385	x2^2
b33	0,010522252	x3^2

y=18,4496667722066+4,32817068832871x1+2,25531727014889x2+0,163566470957484x3+0x1x2+0x1x3+0x2x3+0x1^2+0,651531384867292x2^2+0,0105222522753968x3^2

Лаевский Дмитрий Викторович
Стасенко Дмитрий Леонидович

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОПНЕВМОСИСТЕМ

**Практикум
по одноименному курсу
для студентов специальности
1-36 01 07 «Гидропневмосистемы мобильных
и технологических машин»
дневной и заочной форм обучения**

Подписано к размещению в электронную библиотеку
ГГТУ им. П. О. Сухого в качестве электронного
учебно-методического документа 22.03.17.
Рег. № 73Е.
http://www.gstu.by