§1. Основные понятия теории вероятности.

Теория вероятности изучает события (явления), которые могут произойти или не произойти в результате некоторого испытания (случайные события). Эти события обозначаются $A, B, C, \dots$.

Пример 1. Стрелок стреляет в мишень. Выстрел – это испытание. Попадание в десятку – это событие A.

Различаем следующие виды событий:

Определение 1. **Достоверным называется событие, которое обязательно произойдет.**

Пример 2. A – восход солнца. Это событие достоверно.

Определение 2. **Невозможным называется событие, которое заведомо не произойдет.**

Пример 3. Брошена монета. Невозможно, что монета станет на ребро.

Определение 3. **Случайным называется событие, которое может произойти, а может и не произойти.**

Определение 4. **События называются несовместными, если появление одного исключает появление второго.**

Пример 4. Брошена монета. A – появление «герба». B – появление «решка». Эти события несовместны.

Определение 5. **Несколько событий образуют полную группу, если в результате испытания одно из них обязательно произойдет $A_1, A_2, \dots, A_n$.**

Пример 5. Брошена игральная кость. A – появление 2 или 3. B – появление 1. C – появление 4, 5 или 6. Эти события образуют полную группу.

Определение 4. **События называются несовместными, если появление одного исключает появление второго.**

Пример 6. Брошена игральная кость. A – появление 2 или 3. B – появление 1. C – появление 4, 5 или 6. Эти события равновозможны в силу симметрии кости.

§2. Классическое определение вероятности.

Пример 1. В урне 6 шаров: 2 красных, 3 синих, 1 белый. A – извлечение цветного шара.

Определение 1. **Каждое из возможных результатов испытания называется элементарными событиями.**

В примере 1 есть 6 элементарных событий.

Определение 2. **Те элементарные события, в которых событие A наступает, называются благоприятствующими событию A.**

В примере 1 событию A благоприятствуют 5 элементарных событий.

Определение 3. **Вероятностью события A называется отношение числа благоприятствующих событию A элементарных исходов к общему числу элементарных исходов:** $P(A) = \frac{m}{n}$,

где m – число благоприятствующих событию A исходов;

n – общее число исходов.

В примере 1 вероятность извлечения цветного шара $P(A) = \frac{5}{6}$.

Из определения вероятности следуют следующие свойства.

Свойство 1. **Вероятность достоверного события A равна единице: $P(A) = 1$**

Свойство 2. **Вероятность невозможного события A равна нулю: $P(A) = 0$**

Свойство 3. **Вероятность случайного события A меньше единицы и больше нуля: $0 < P(A) < 1$**

Пример 2. Монета бросается два раза. Найти вероятность того, что оба раза появится «герб».

Решение. A – оба раза выпадает «герб».

Число элементарных исходов $n = 4$.

Число благоприятствующих событий $m = 1$.

Вероятность события A:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{4}.$$

§3. Основные формулы комбинаторики.

I. Перестановки

Пример 1. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3?

Решение.

Составим возможные варианты: $123, 132, 213, 231, 312, 321$.

На первое место в трехзначном числе можно поставить три из имеющихся цифр, на второе – две, на третье – одну. Т.о. искомое количество трехзначных чисел

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6.$$

Следовательно, количество комбинаций, состоящих из одних и тех же n различных элементов и отличающихся только порядком их расположения, определяется по формуле:

$$P(n) = n!$$

II. Размещения – комбинации, составленные из n элементов по m элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком.

Пример 2. Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3?

Решение.

Составим возможные варианты: $12, 13, 21, 23, 31, 32$.

На первое место в двузначном числе можно поставить три из имеющихся цифр, на второе – две. Т.о. искомое количество двузначных чисел

$$3 \cdot 2 = 6.$$

Следовательно, число всех возможных размещений определяется по формуле:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\dots(n-(m-1)) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

III. Сочетания – комбинации, составленные из n по m элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом.

Пример 3. Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, которые отличались друг от друга хотя бы одной цифрой?

Решение.

Составим возможные варианты: $12, 13, 23$.

Т.о. искомое количество двузначных чисел равно 3.

Следовательно, число всех возможных сочетаний определяется по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!\,m!}$$

Количество размещений, перестановок и сочетаний связаны равенством:

$$A_n^m = C_n^m P(m)$$

§4. Геометрическая вероятность.

Геометрическая вероятность преодолевает недостаток классического определения вероятности, состоящий в том, что оно неприменимо к испытаниям с бесконечным числом исходов.

Пример 1. На отрезок длины $L = 10$ см наудачу поставлена точка. Найти вероятность того, что точка попадет в левую половину отрезка, длиной l.

Решение.

Введем обозначение:

А – точка поставлена в левую половину отрезка.

Очевидно, что вероятность данного события равна:

$$P(A) = 0{,}5$$

В данном случае, число возможных вариантов исхода n бесконечно, следовательно, и число исходов m, благоприятствующих событию A, также бесконечно.

Таким образом, вероятность попадания точки на отрезок длиной l, лежащий на отрезке длиной L, определяется по формуле:

$$P(A) = \frac{l}{L}$$

Аналогично можно определить геометрическую вероятность для площадей

$$P(A) = \frac{s}{S}$$

и объемов

$$P(A) = \frac{v}{V}$$

Пример 2. Точка ставится в круг радиуса 10 см. Найти вероятность того, что точка, поставленная в круг случайно, попадет в кольцо толщиной 5 см.

Решение.

Введем обозначение:

А – точка попадет в круг.

Площадь круга:

$$S = \pi R^2$$

Площадь кольца, равная разности между площадью большого круга и малого круга:

$$s = \pi R^2 - \pi r^2 = 10^2\pi - 5^2\pi = 100\pi - 25\pi = 75\pi$$

Искомая вероятность:

$$P(A) = \frac{s}{S} = \frac{75\pi}{100\pi} = \frac{3}{4}$$

§5. Относительная частота. Устойчивость относительной частоты.

Определение 1. **Относительной частотой события A называется отношение числа испытаний m, в которых событие A наступает, к общему числу испытаний n:**

$$W(A) = \frac{m}{n}$$

Пример 1. Монета бросается 10000 раз, из которых 5003 раза выпал «герб». Найти относительную частоту данного события.

Решение.

Введем обозначение:

A – при бросании монеты выпадает «герб».

Относительная частота выпадения герба при 10000 бросаниях монеты равна:

$$W(A) = \frac{5003}{10000} \approx 0{,}5003$$

Длительные наблюдения показали, что если в одинаковых условиях производят опыты, в каждом из которых число испытаний достаточно велико, то относительная частота обнаруживает свойство устойчивости, состоящее в том, что относительная частота меняется мало и колеблется возле некоторого постоянного числа.

Сопоставляя определения вероятности и относительной частоты, заключаем: относительная частота находится в ходе эксперимента, а вероятность – лишь теоретически. С увеличением числа испытаний относительная частота приближается к расчетной вероятности.

§6. Теорема сложения вероятностей несовместных событий.

Определение 1. **Суммой двух событий $A+B$ называется событие, состоящее из появления события A, или B, или обоих этих событий.**

Определение 2. **Два события называются несовместными, если они не имеют общих элементарных исходов.**

Пример 1. Брошена игральная кость.
Введем обозначения:
A – выпадает 2 или 3 очка;
B – выпадает 3 или 4 очка;
C – выпадает 1 или 5 очков.
Таким образом, события A и B совместны, а события A и C, B и C попарно несовместны.

Теорема 1. Вероятность появления одного из двух несовместных событий A и B равна сумме вероятностей этих событий:

$$\boldsymbol{P(A+B)=P(A)+P(B)}$$

Доказательство.
Пусть даны два несовместных события и .
Введем обозначения:
n – общее число возможных элементарных исходов испытания;
m_1 – число элементарных исходов, благоприятствующих событию A;
m_2 – число элементарных исходов, благоприятствующих событию B.
Число элементарных исходов, благоприятствующих наступлению либо события A, либо события B, равно m_1+m_2. Следовательно,

$$P(A+B)=\frac{m_1+m_2}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}$$

Приняв во внимание, что $\frac{m_1}{n}=P(A)$ и $\frac{m_2}{n}=P(B)$, окончательно получим

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Что и требовалось доказать.

Пример 2. В урне 30 шаров: 10 красных, 5 синих и 15 белых. Найти вероятность появления цветного шара.
Решение.
Появление цветного шара означает появление либо красного, либо синего шара.
Введем обозначения:
A – появление красного шара. Вероятность этого события $P(A)=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$.
B – появление синего шара. Вероятность этого события $P(B)=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$.
$A+B$ – появление цветного шара.
События A и B несовместны, поэтому теорема сложения для них применима.
Вероятность появления цветного шара:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

Следствие 1. Вероятность появления одного из трех несовместных событий A, B и C равна сумме вероятностей этих событий:

$$\boldsymbol{P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)}$$

§7. Полная группа событий.

Определение 1. **События $A_1, A_2, \dots, A_n$ образуют полную группу, если они попарно несовместны и при испытании одно из них обязательно произойдет.**

Теорема 1. Сумма вероятностей событий $A_1, A_2, \dots, A_n$, образующих полную группу, равна единице:

$$\boldsymbol{P(A_1)+P(A_2)+\dots+P(A_n)=1}$$

Доказательство.
По условию теоремы, события $A_1, A_2, \dots, A_n$ образуют полную группу, т.е. одно из них обязательно произойдет

$$P(A_1+A_2+\dots+A_n)=1$$

и они попарно несовместны, то для них справедлива теорема о сумме вероятностей несовместных событий:

$$P(A_1+A_2+\dots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\dots+P(A_n)$$

Таким образом, получим:

$$P(A_1)+P(A_2)+\dots+P(A_n)=1$$

Что и требовалось доказать.

Пример 1. Институт получает письма только из трех городов A, B и C. Вероятность того, что письмо пришло из города A, равна 0,7, из города B – 0,2. Найти вероятность того, что письмо придет из города C.
Решение.
Введем обозначения:
A – письмо получено из города A. Вероятность этого события $P(A)=0{,}7$.
B – письмо получено из города B. Вероятность этого события $P(B)=0{,}2$.
C – письмо получено из города C.
События A, B и C образуют полную группу и попарно несовместны, то

$$P(A)+P(B)+P(C)=1$$

откуда

$$P(C)=1-P(A)-P(B)=1-0{,}7-0{,}2=0{,}1.$$

§8. Противоположные события.

Определение 1. **Два события A и $\overline{A}$, образующие полную группу, называются противоположными.**

Теорема 1. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$\boldsymbol{P(A)+P(\overline{A})=1}$$

Доказательство.
Противоположные события A и $\overline{A}$ образуют полную группу, а сумма вероятностей событий, образующих полную группу, равна единице:

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

Что и требовалось доказать.

Пример 1. Вероятность того, что день будет дождливым равна 0,7. Найти вероятность, что день будет ясным.
Решение.
Введем обозначения:
A – день будет дождливый. Вероятность этого события $P(A)=0{,}7$.
$\overline{A}$ – день будет ясный.
Вероятность этого события равна:

$$P(\overline{A})=1-P(A)=1-0{,}7=0{,}3.$$

§9. Произведение событий.

Определение 1. **Произведением двух событий A и B называется событие AB, состоящее в совместном появлении этих события.**

Определение 2. **Два события называются несовместными, если они не имеют общих элементарных исходов.**

Пример 1. Если A – исправная ручка, B – синяя ручка, то AB – исправная синяя ручка.
Пример 2. Если A – появление герба при первом бросании монеты, B – появление герба при втором бросании, то AB – появление герба и при первом, и при втором бросании монеты.

§10. Условная и безусловная вероятность.

Пример 1. В урне 3 белых и 3 черных шара Из урны дважды вынимают по одному шару, не возвращая их обратно. Найти вероятность того, что во второй раз будет извлечен черный шар.
Решение.
Введем обозначения:
A – в первый раз извлечен белый шар.
$\overline{A}$ – в первый раз извлечен черный шар.
B – во второй раз извлечен черный шар.
Вероятность извлечения из урны черного шара при условии, что в первый раз был извлечен белый:

$$P_A(B)=\frac{3}{5},$$

при условии, что в первый раз был извлечен черный:

$$P_{\overline{A}}(B)=\frac{2}{5}.$$

Определение 1. **Условной вероятностью $P_A(B)$ называется вероятность события B при условии, что событие A наступило.**

Теорема 1. Вероятность совместного появления двух событий A и B равна произведению вероятности события A на вероятность события B при условии, что событие A наступило:

$$\boldsymbol{P(AB)=P(A)\cdot P_A(B)}$$

и наоборот

$$\boldsymbol{P(AB)=P(B)\cdot P_B(A)}$$

В примере 1 вероятность извлечения в первый раз белого шара, а во второй – черного, равна $P(AB)=P(A)\cdot P_A(B)=\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$.

Пример 2. У сборщика имеется 3 конусных и 7 эллиптических валиков. Сборщик взял один валик, затем второй. Найти вероятность того, что первый взятый валик оказался конусным, а второй – эллиптическим.
Решение.
Введем обозначения:
A – первый взятый валик оказался конусным. Вероятность этого события $P(A)=\frac{3}{10}$.
B – второй взятый валик оказался эллиптическим. Вероятность этого события при условии, что первый валик – конусный $P_A(B)=\frac{7}{9}$.
AB – первый валик конусный. а второй эллиптический.
Вероятность этого события:

$$P(AB)=P(A)\cdot P_A(B)=\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9}=\frac{7}{30}.$$

§11. Независимые события.

Определение 1. **События и называются независимыми, если появление события не влияет на вероятность появления события :**

$$P_A(B) = P(B)$$

Для независимых событий теорема умножения примет вид:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

т.е. вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

Пример 1. Вероятность поражения цели первым орудием равна 0,7, а вторым – 0,8. Найти вероятность совместного поражения цели двумя орудиями.

Решение.

Введем обозначения:

A – поражение цели первым орудием. Вероятность этого события $P(A) = 0{,}7$.

B – поражение цели вторым орудием. Вероятность этого события $P(B) = 0{,}8$.

AB – совместное поражение цели двумя орудиями.

События A и B независимые, поэтому, по теореме умножения, искомая вероятность:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}56.$$

Замечание 1. Если события A, B и C независимы, то теорема умножения примет вид:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

Пример 2. Монету бросают 3 раза. Найти вероятность появления «герба» во всех испытаниях.

Решение.

Введем обозначения:

A_1 – появление «герба» при первом бросании. Вероятность этого события $P(A_1) = \frac{1}{2}$.

A_2 – появление «герба» при втором бросании. Вероятность этого события $P(A_2) = \frac{1}{2}$.

A_3 – появление «герба» при третьем бросании. Вероятность этого события $P(A_3) = \frac{1}{2}$.

$A_1A_2A_3$ – появление «герба» во всех испытаниях.

События A_1, A_2 и A_3 независимые, поэтому, по теореме умножения, искомая вероятность:

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

§12. Вероятность появления хотя бы одного события.

Пример 1. Вероятность попадания в цель при стрельбе первым орудием равна 0,8, вторым – 0,7, третьим – 0,9. Найти вероятность хотя бы одного попадания при одном залпе из всех орудий.

Решение.

Введем обозначения:

A_1 – попадание в цель первым орудием. Вероятность этого события $P(A_1) = 0{,}8$. Вероятность противоположного события $P(\overline{A_1}) = 1 - P(A_1) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$.

A_2 – попадание в цель вторым орудием. Вероятность этого события $P(A_2) = 0{,}7$. Вероятность противоположного события $P(\overline{A_2}) = 1 - P(A_2) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$.

A_3 – попадание в цель третьим орудием. Вероятность этого события $P(A_3) = 0{,}9$. Вероятность противоположного события $P(\overline{A_3}) = 1 - P(A_3) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$.

$\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$ – ни одно орудие не попадет в цель.

C – в цель попадет хотя бы одно орудие.

События A_1, A_2 и A_3 независимые, поэтому искомая вероятность:

$$P(C) = 1 - P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) = 1 - 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 1 - 0{,}006 = 0{,}994.$$

Теорема 1. Вероятность появления хотя бы одного из событий $A_1, A_2, \dots, A_n$, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \dots, \overline{A_n}$:

$$\boldsymbol{P(A) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot \ldots \cdot P(\overline{A_n})}$$

Доказательство.

Введем обозначения:

A – появление хотя бы оодного из событий $A_1, A_2, \dots, A_n$.

$\overline{A}$ – ни одно из событий $A_1, A_2, \dots, A_n$ не наступило. Т.е. событие $\overline{A}$ - совместное появление событий $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \dots, \overline{A_n}$.

События A и $\overline{A}$ противоположны, следовательно, сумма их вероятностей равна единице:

$$P(A) + P(\overline{A_1}\,\overline{A_2} \ldots \overline{A_n}) = 1$$

откуда, используя теорему умножения, находим:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A_1}\,\overline{A_2} \ldots \overline{A_n}) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot \ldots \cdot P(\overline{A_n})$$

Что и требовалось доказать.

§13. Теорема сложения вероятностей совместных событий.

Определение 1. **Два события называются совместными, если появление одного из них не исключает появления другого.**

Пример 1. Брошена игральная кость.

Введем обозначения:

A – появление четырех очков;

B – появление четного числа очков.

Таким образом, события A и B совместные.

Теорема 1. Вероятность появления хотя бы одного из двух несовместных событий A и B равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$\boldsymbol{P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)}$$

Доказательство.

Поскольку события A и B, по условию, совместны, со события $A + B$ наступит, если наступит одно из следующих трех несовместных событий: $A\overline{B}$, $\overline{A}B$ или AB. По теореме сложения вероятностей несовместных событий, вероятность события $A + B$ равна:

$$P(A + B) = P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B) + P(AB)$$

Событие A произойдет, если наступит одно из двух несовместных событий: $A\overline{B}$ или AB. По теореме сложения вероятностей несовместных событий имеем:

$$P(A) = P(A\overline{B}) + P(AB)$$

откуда

$$P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB)$$

Аналогично имеем

$$P(B) = P(\overline{A}B) + P(AB)$$

откуда.

$$P(\overline{A}B) = P(B) - P(AB)$$

Подставив полученные выражение в формулу вероятности события $A + B$, получим:

$$P(A + B) = P(A) - P(AB) + P(B) - P(AB) + P(AB) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Что и требовалось доказать.

Пример 2. Две зенитки стреляют по самолету. Вероятность попадания первой зенитки равна 0,7, а второй – 0,8. Найти вероятность того, что самолет будет сбит, т.е. вероятность хотя бы одного попадания.

Решение.

Введем обозначения:

A – самолет собьет первая зенитка. Вероятность этого события $P(A) = 0{,}7$.

B – самолет собьет вторая зенитка. Вероятность этого события $P(B) = 0{,}8$.

$A + B$ – самолет будет сбит.

События A и B независимы и несовместны, поэтому искомая вероятность равна:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) = 0{,}7 + 0{,}8 - 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}94.$$

§14. Формула полной вероятности.

Теорема 1. Вероятность события A, которое наступает лишь при условии появление одного из несовместных событий $B_1, B_2, \dots, B_n$, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события A:

$$\boldsymbol{P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \cdots + P(B_n)P_{B_n}(A)}$$

где $B_1, B_2, \dots, B_n$ – гипотезы.

Доказательство.

По условию, событие A наступает при условии появления одного из событий $B_1, B_2, \dots, B_n$:

$$A = B_1A + B_2A + \cdots + B_nA$$

Т.е. появление события A означает осуществление одного из попарно несовместных событий $B_1A, B_2A, \dots, B_nA$.

Используя для вычисления вероятности события A теорему сложения, получим:

$$P(A) = P(B_1A + B_2A + \cdots + B_nA) = P(B_1A) + P(B_2A) + \cdots + P(B_nA)$$

По теореме умножения вероятностей зависимых событий, получим формулу полной вероятности:

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \cdots + P(B_n)P_{B_n}(A)$$

Что и требовалось доказать.

Пример 1. Имеется два набора деталей. Вероятность того, что деталь, извлеченная из первого набора, стандартно, равна 0,7, из второго – 0,8. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь (из наудачу взятого набора) – стандартная.

Решение.

Введем обозначения:

B_1 – деталь извлекли из первого набора. Вероятность этого события $P(B_1) = 0{,}5$.

B_2 – деталь извлекли из второго набора. Вероятность этого события $P(B_2) = 0{,}5$.

A – извлеченная деталь стандартна. Вероятность этого события, при условии, что деталь извлекли из первого набора, равна $P_{B_1}(A) = 0{,}7$. Вероятность этого события, при условии, что деталь извлекли из второго набора, равна $P_{B_2}(A) = 0{,}8$.

Искомая вероятность того, что извлеченная наудачу деталь – стандартная, по формуле полной вероятности равна:

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) = 0{,}5 \cdot 0{,}7 + 0{,}5 \cdot 0{,}8 = 0{,}75.$$

§15. Вероятности гипотез. Формула Бейеса.

Пусть событие A наступает при появлении одного из несовместных событий $B_1, B_2, \dots, B_n$, образующих полную группу и называемых гипотезами. Вероятность появления события A по формуле полной вероятности равна:

$$P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(B_j)P_{B_j}(A)$$

Пусть произведено испытание, в результате которого событие A наступило. Определим, как изменились (в связи с тем, что событие A уже наступило) вероятности гипотез. Т.е. найдем условные вероятности $P_A(B_i)$.

Воспользуемся теоремой умножения:

$$P(AB_i) = P(B_i)P_{B_i}(A)$$

или

$$P(AB_i) = P(A)P_A(B_i)$$

Приравнивая правые части, получим:

$$P(B_i)P_{B_i}(A) = P(A)P_A(B_i)$$

откуда

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{P(A)}$$

Подставляя выражение вероятности появления события A, получим **формулу Бейеса:**

$$\boldsymbol{P_A(B_i) = \frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j)P_{B_j}(A)}}$$

Пример 1. Деталь попадают для проверки их на годность к одному из двух контролеров. Вероятность того, что деталь попадает к первому контролеру, равна 0,6, а ко второму – 0,4. Вероятность того, деталь будет признана годной первый контролером, равна 0,94, а вторым – 0,98. При проверке деталь была признана годной. Найти вероятность того, что эту деталь проверил первый контролер.

Решение.

Введем обозначения:

B_1 – деталь проверил первый контролер. Вероятность этого события $P(B_1) = 0{,}6$.

B_2 – деталь проверил второй контролер. Вероятность этого события $P(B_2) = 0{,}4$.

A – деталь признана годной. Вероятность этого события, при условии, что деталь проверил первый контролер, равна $P_{B_1}(A) = 0{,}94$. Вероятность этого события, при условии, что деталь проверил второй контролер, равна $P_{B_2}(A) = 0{,}98$.

Искомая вероятность:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A)} = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}94}{0{,}6 \cdot 0{,}94 + 0{,}4 \cdot 0{,}98} = 0{,}59.$$

§16. Формула Бернулли.

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A одна и та же и равна p. Следовательно, вероятность непоявления события A в каждом испытании также постоянна и равна $q = 1 - p$.

Поставим перед собой задачу вычислить вероятность того, что при n испытаниях событие A появится ровно k раз и, следовательно, не появится $n - k$ раз. Искомую вероятность обозначим $P_n(k)$.

Упростим задачу, вычислив $P_4(3)$. Если событие A появится три раза в четырех испытаниях, то возможны следующие варианты: $AAA\overline{A}$, $AA\overline{A}A$, $A\overline{A}AA$, $\overline{A}AAA$. Вероятность каждого из этих сложных событий равна p^3q.

Таким образом, в общем случае вероятность одно сложного события, состоящего в том, что в n испытаниях событие A наступит k раз и не наступит $n - k$ раз, по теореме умножения вероятностей независимых событий равна p^kq^{n-k}. Таких сложный событий может быть столько, сколько можно составить сочетаний из n элементов по k элементов, т.е. C_n^k.

Поскольку же вероятности всех этих сложных событий одинаковы, то искомая вероятность (появления k раз события A в n испытаниях) равна вероятности одного сложного события, умноженной на их число:

$$\boldsymbol{P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}}$$

Полученную формулу называют **формулой Бернулли**.

Пример 1. Игральную кость бросают 4 раза. Найти вероятность того, что шесть очков выпадет ровно 3 раза.

Решение.

Введем обозначения:

A – появление шести очком в одном испытании. Вероятность этого события равна $p = \frac{1}{6}$. Вероятность противоположного события равна $q = 1 - p = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

Искомая вероятность:

$$P_4(3) = C_4^3p^3q^{4-3} = \frac{4!}{(4-3)!\,3!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{324}$$

§17. Локальная теорема Лапласа.

Пусть производится n испытаний. Согласно формуле Бернулли, вероятность того, что событие A появится k раз, равна:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

где p – вероятность появления события A в одном испытании,
q – вероятность непоявления события A в одном испытании.
Однако при больших n, а именно при $n > 50$, пользоваться формулой Бернулли трудно, так как необходимо вычислять большие факториалы.
Формула Лапласа позволяет вычислять искомую вероятность $P_n(k)$ при больших значениях n и k:

$$\boldsymbol{P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)}$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ – протабулированная функция,

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$$

Пример 1. Найти вероятность того, что событие наступит 80 раз в 400 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,2.
Решение.
По условию, $n = 400$, $k = 80$, $p = 0{,}2$, $q = 1 - p = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$.
Для вычисления вероятности появления события A воспользуемся формулой Лапласа:

$$P_{400}(80) = \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}}\varphi(x) = \frac{\varphi(x)}{8}$$

Вычислим определяемое данными задачи значение x:

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{80 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = 0.$$

Вычислим значение функции $\varphi(x)$ при $x = 0$:

$$\varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0{,}3989.$$

Искомая вероятность:

$$P_{400}(80) = \frac{0{,}3989}{8} = 0{,}04986.$$

§18. Интегральная теорема Лапласа.

Теорема 1. Если вероятность p есть вероятность наступления события A в каждом испытании, то вероятность того, что событие A появится в n испытаниях от k_1 до k_2 раз, приближенно равна определенному интегралу:

$$\boldsymbol{P_n(k_1, k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}}dx}$$

где, $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$

Функция $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ протабулирована и называется функцией Лапласа.

Пример 1. Вероятность того, что деталь не прошла проверку ОТК, равна 0,2. Найти вероятность того, что среди 400 случайно отобранных деталей окажется непроверенными от 70 до 100 деталей.
Решение.
По условию, $n = 400$, $k_1 = 70$, $k_2 = 100$, $p = 0{,}2$, $q = 1 - p = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$.
Для вычисления вероятности появления события воспользуемся интегральной теоремой Лапласа:

$$P_{400}(70{,}100) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$$

Вычислим верхний и нижний пределы интегрирования:

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = -1{,}25$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = 2{,}5$$

Искомая вероятность:

$$P_{400}(70{,}100) \approx \Phi(2{,}5) - \Phi(-1{,}25) = \Phi(2{,}5) + \Phi(1{,}25) = 0{,}4998 + 0{,}3944 = 0{,}8942$$

§19. Вероятность отклонения относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях.

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A одна и та же и равна p, где $0 < p < 1$. Найдем вероятность того, что отклонение относительной частоты $\frac{m}{n}$ от постоянной вероятности p по абсолютной величине не превышает заданного числа $\varepsilon > 0$:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right)$$

Для этого рассмотрим событие $\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon$:

$$-\varepsilon \le \frac{m}{n} - p \le \varepsilon$$

или

$$-\varepsilon \le \frac{m - pn}{n} \le \varepsilon$$

Умножая эти неравенства на положительный множитель $\sqrt{\frac{n}{pq}}$, получим неравенства, равносильные исходному:

$$-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} \le \frac{m - pn}{n}\sqrt{\frac{n}{pq}} \le \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$$

$$-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} \le \frac{m - pn}{\sqrt{npq}} \le \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$$

Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа, приняв $x_1 = -\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$ и $x_2 = \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}}^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) - \Phi\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

$$= \Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) + \Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

Окончательно получили:

$$\boldsymbol{P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)}$$

§20. Случайные величины. Дискретные и непрерывные случайные величины.

Определение 1. **Случайной называют величину, которая в результате испытаний принимает числовые значения.**

Обозначаются случайные величины: X, Y, Z.

Пример 1. Брошена игральная кость. Случайная величина X – число очков на выпавшей грани. Случайная величина X может принимать следующие значения: 1,2,3,4,5,6, т.е.

X	1	2	3	4	5	6

Определение 2. **Случайная величина называется дискретной, если она принимает отдельные, изолированные значения.**

Пример 2. Число родившихся мальчиков среди 10 новорожденных есть дискретная случайная величина X, которая может принимать следующие значения: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10, т.е.

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Определение 3. **Случайная величина называется непрерывной, если она может принимать все числовые значения из некоторого промежутка.**

Пример 3. Иголка ставится на линейку длиной 30 см. Расстояние от начала линейки до иголки есть непрерывная случайная величина X.

§21. Закон распределения вероятности дискретной случайной величины.

Определение 1. **Законом распределения дискретной случайной величины называется соответствие между возможными числовыми значениями случайной величины и их вероятностями.**

Задается таблично:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

События $X = x_1$, $X = x_2$, …, $X = x_n$ образуют полную группу, следовательно, сумма вероятностей этих событий, т.е. сумма вероятностей второй строки таблицы, равна единице:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

Пример 1. В денежной лотерее выпущено 100 билетов. Разыгрывается один билет с выигрышем в 50000 руб. и десять билетов с выигрышем по 1000 руб. Найти закон распределения дискретной случайной величины X – стоимости выигрыша в лотерею.

Решение.

Напишем возможные значения X: $x_1 = 50000$, $x_2 = 1000$, $x_3 = 0$. Вероятности этих возможных значений таковы: $p_1 = \frac{1}{100}$, $p_2 = \frac{10}{100}$, $p_3 = 1 - (p_1 + p_2) = 1 - \left(\frac{1}{100} + \frac{10}{100}\right) = \frac{89}{100}$

X	50000	1000	0
P	$\frac{1}{100}$	$\frac{10}{100}$	$\frac{89}{100}$

§22. Биноминальное распределение.

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна p, следовательно, вероятность непоявления $q = 1 - p$.

Составим закон распределения случайной величины X – числа появлений события A в n независимых испытаниях.

Вероятность того, что из n независимых испытаний событие A появится k раз, по формуле Бернулли равна

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

Получаем **биноминальный закон распределения**:

X	0	1	2	…	k	…	$n-1$	n
P	$P_n(0)$	$P_n(1)$	$P_n(2)$	…	$P_n(k)$	…	$P_n(n-1)$	$P_n(n)$

Пример 1. Монета брошена 3 раза. Написать биноминальный закон распределения случайной величины X – числа выпадений «герба».

Решение.

Вероятность появления «герба» при одном бросании равна $p = \frac{1}{2}$, следовательно, вероятность непоявления «герба» - $q = 1 - p = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

При трех бросаниях монеты «герб» может появиться либо 3 раза, либо 2 раза, либо 1 раз, либо совсем не появиться.

Вероятности этих возможных значений находим по формуле Бернулли:

$$P_3(0) = C_3^0 p^0 q^{3-0} = \frac{3!}{(3-0)!\,0!} \cdot \frac{1}{2^0} \cdot \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2^3}$$
$$P_3(1) = C_3^1 p^1 q^{3-1} = \frac{3!}{(3-1)!\,1!} \cdot \frac{1}{2^1} \cdot \frac{1}{2^2} = \frac{3}{2^3}$$
$$P_3(2) = C_3^2 p^2 q^{3-2} = \frac{3!}{(3-2)!\,2!} \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{2^1} = \frac{3}{2^3}$$
$$P_3(3) = C_3^3 p^3 q^{3-3} = \frac{3!}{(3-3)!\,3!} \cdot \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{2^0} = \frac{1}{2^3}$$

Искомый закон распределения:

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

§23. Распределение Пуассона.

Пусть производится большое число n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A очень мала и равна p.

В этом случае формула Бернулли неудобна для вычисления из-за больших n, а локальная теорема Лапласа неудобна из-за малых p.

Поэтому Пуассон предложил вычислять вероятность того, что при очень большом числе испытаний n, в каждом из которых вероятность события очень мала и равна p, событие наступит ровно k раз при условии, что $np = \lambda$, где $\lambda = const$.

Распределение такой случайной величины называется распределением Пуассона.

Воспользуемся формулой Бернулли для вычисления искомой вероятности:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} p^k (1-p)^{n-k}$$

Так как $np = \lambda$, то $p = \frac{\lambda}{n}$. Следовательно,

$$P_n(k) = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1))}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$$

Приняв во внимание, что число испытаний n имеет очень большое значение, устремим n к бесконечности, отыскав предел:

$$P_n(k) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\lambda^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}\right) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-k}$$

Получаем **распределение Пуассона**:

$$\boldsymbol{P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}}$$

Пример 1. Завод отправил на базу 5000 телевизоров. Вероятность того, что в пути телевизор повредиться, равна 0,0002. Найти вероятность того, что на базу прибудут 3 поврежденных телевизора.

Решение.

По условию, $n = 500$, $k = 3$, $p = 0{,}0002$.

Так как количество телевизоров n велико, а вероятность их повреждения в пути p мала, то применима формула распределения Пуассона:

$$P_{5000}(3) = \frac{\lambda^3}{3!}e^{-\lambda} = \frac{(np)^3}{3!}e^{-np} = \frac{(5000\cdot 0{,}0002)^3}{3!}e^{-5000\cdot 0{,}0002} = \frac{1}{6e} \approx 0{,}06$$

§24. Математическое ожидание дискретной случайной величины.

Определение 1. **Математическим ожиданием дискретной случайной величины X называется сумма произведений значений случайной величины X на их вероятности:**

$$\boldsymbol{M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n}$$

Пример 1. Найти математическое ожидание числа очков, которые могут выпасть при бросании игральной кости.

Решение.

Обозначим число очков, которое может выпасть на игральной кости, через X. Возможные значения этой величины равны 1,2,3,4,5,6, причем вероятность P каждого из этих значений равна $\frac{1}{6}$.

Таким образом, получаем следующий закон распределения числа очков, которые могут выпасть при бросании игральной кости:

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Искомое математическое ожидание:

$$M(X) = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 5\cdot\frac{1}{6} + 6\cdot\frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3{,}5.$$

Математическое ожидание приблизительно равно среднему арифметическому наблюдаемых значений, так как с увеличением числа испытаний среднее арифметическое приближается к математическому ожиданию.

§25. Свойства математического ожидания.

Свойство 1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной:

$$M(C) = C$$

Доказательство.

Запишем закон распределения постоянной случайной величины

X	C	C	$\dots$	C
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Согласно определению математического ожидания,

$$M(X) = Cp_1 + Cp_2 + \dots + Cp_n = C(p_1 + p_2 + \dots + p_n) = C$$

Так как события $X = C$ образуют полную группу, то сумма вероятностей этих событий, т.е. сумма вероятностей второй строки таблицы, равна единице:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

Следовательно, искомое математическое ожидание равно:

$$M(X) = C$$

Что и требовалось доказать.

Определение 1. **Произведение случайной величины X, имеющей закон распределения**

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

на постоянную величину C, называется случайной величиной XC, имеющей закон распределения

X	x_1C	x_2C	$\dots$	x_nC
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Свойство 2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$M(XC) = CM(X)$$

Доказательство.

По условию, случайная величина X задана законом распределения

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Согласно определению 1 случайная величина XC имеет закон распределения

X	x_1C	x_2C	$\dots$	x_nC
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Согласно определению математического ожидания:

$$M(XC) = Cx_1p_1 + Cx_2p_2 + \dots + Cx_np_n = C(x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n) = CM(X)$$

Что и требовалось доказать.

Определение 2. **Две случайные величины X и Y называются независимыми, если закон распределения одной из них не зависит от закона распределения другой.**

Определение 3. **Произведением независимых случайных величин X и Y называется случайная величина XY, возможные значения которой равны произведению каждого возможного значения случайной величины X на каждое возможное значение случайной величины Y. Вероятности возможных значений случайной величины XY равны произведению вероятностей возможных значений сомножителей.**

Пример 1. Пусть даны две случайные величины X и Y, заданные законами распределения:

X	x_1	x_2
P	p_1	p_2

Y	y_1	y_2
P	q_1	q_2

Тогда закон распределения случайной величины XY будет иметь вид:

XY	x_1y_1	x_1y_2	x_2y_1	x_2y_2
P	p_1q_1	p_1q_2	p_2q_1	p_2q_2

Свойство 3. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин X и Y равно произведению их математических ожиданий:

$$M(XY) = M(X)M(Y)$$

Доказательство.

Пусть случайные величины X и Y заданы следующими законами распределения:

X	x_1	x_2
P	p_1	p_2

Y	y_1	y_2
P	q_1	q_2

Тогда закон распределения случайной величины XY будет иметь вид:

XY	x_1y_1	x_1y_2	x_2y_1	x_2y_2
P	p_1q_1	p_1q_2	p_2q_1	p_2q_2

Используя определение математического ожидания, получим:

$$M(XY) = x_1y_1 \cdot p_1q_1 + x_1y_2 \cdot p_1q_2 + x_2y_1 \cdot p_2q_1 + x_2y_2 \cdot p_2q_2 = x_1p_1(y_1q_1 + y_2q_2) + x_2p_2(y_1q_1 + y_2q_2)$$
$$= (x_1p_1 + x_2p_2)(y_1q_1 + y_2q_2) = M(X)M(Y)$$

Что и требовалось доказать.

Следствие 1. Математическое ожидание произведения нескольких взаимно независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

$$M(XYZ) = M(X)M(Y)M(Z)$$

Пример 2. Две независимые случайные величины X и Y имеют следующие законы распределения:

X	5	2	4
P	0,6	0,1	0,3

Y	7	9
P	0,8	0,2

Найти математическое ожидание случайной величины XY.

Решение.

Найдем математические ожидания каждой из данных величин:

$$M(X) = 5 \cdot 0{,}6 + 2 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}3 = 4{,}4$$
$$M(Y) = 7 \cdot 0{,}8 + 9 \cdot 0{,}2 = 7{,}4$$

Находим математическое ожидание случайной величины XY:

$$M(XY) = M(X)M(Y) = 4{,}4 \cdot 7{,}4 = 32{,}56.$$

Определение 4. **Суммой двух случайных величин X и Y называется случайная величина $X + Y$, возможные значения которой равны сумме каждого возможного значения случайной величины X с каждым возможным значением случайной величины Y, а вероятности возможных значений величины $X + Y$ равны произведению вероятностей слагаемых.**

Пример 3. Пусть даны две случайные величины X и Y, заданные законами распределения:

X	x_1	x_2
P	p_1	p_2

Y	y_1	y_2
P	q_1	q_2

Тогда закон распределения случайной величины $X + Y$ будет иметь вид:

$X+Y$	x_1+y_1	x_1+y_2	x_2+y_1	x_2+y_2
P	p_1q_1	p_1q_2	p_2q_1	p_2q_2

Замечание 1. Если, например, $x_1 + y_5 = x_3 + y_7$, то $p_1q_5 = p_3q_7$.

Свойство 4. Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых:

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y)$$

Доказательство.

Пусть случайные величины X и Y заданы следующими законами распределения:

X	x_1	x_2
P	p_1	p_2

Y	y_1	y_2
P	q_1	q_2

Тогда закон распределения случайной величины $X + Y$ будет иметь вид:

$X+Y$	x_1+y_1	x_1+y_2	x_2+y_1	x_2+y_2
P	p_1q_1	p_1q_2	p_2q_1	p_2q_2

Используя определение математического ожидания, получим:

$$M(XY) = (x_1 + y_1)p_1q_1 + (x_1 + y_2)p_1q_2 + (x_2 + y_1)p_2q_1 + (x_2+y_2)p_2q_2 = x_1p_1q_1 + y_1p_1q_1 + x_1p_1q_2 + y_2p_1q_2 + x_2p_2q_1 + y_1p_2q_1 + x_2p_2q_2 + y_2p_2q_2 = x_1p_1(q_1 + q_2) + x_2p_2(q_1 + q_2) + y_1q_1(p_1 + p_2) + y_2q_2(p_1 + p_2)$$

События $X = x_1$, $X = x_2$ образуют полную группу, следовательно, сумма вероятностей этих событий равна единице:

$$p_1 + p_2 = 1$$

Аналогично, события $Y = y_1$, $Y = y_2$ образуют полную группу, следовательно, сумма вероятностей этих событий равна единице:

$$q_1 + q_2 = 1$$

Следовательно, искомое математическое ожидание равно:

$$M(XY) = (x_1p_1 + x_2p_2) + (y_1p_1 + y_2p_2) = M(X) + M(Y)$$

Что и требовалось доказать.

Следствие 2. Математическое ожидание суммы нескольких случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых:

$$M(X + Y + Z) = M(X) + M(Y) + M(Z)$$

Пример 1. Проводится 3 выстрела с вероятностями попадания в цель, равными 0,4; 0,3; 0,6. Найти математическое ожидание общего числа попаданий.

Решение.

Введем обозначения:

X_1 – попадание в цель при первом выстреле.
X_2 – попадание в цель при втором выстреле.
X_3 – попадание в цель при третьем выстреле.
Y – общее число попаданий.

Случайные величины X_1, X_2 и X_3 могут принимать только два значения: 1 (попадание) и 0 (промах).

Запишем законы распределения для этих случайных величин:

X_1	0	1
P	0,6	0,4

X_2	0	1
P	0,7	0,3

X_3	0	1
P	0,4	0,6

Найдем математические ожидания каждой из данных величин:

$$M(X_1) = 0 \cdot 0{,}6 + 1 \cdot 0{,}4 = 0{,}4$$
$$M(X_2) = 0 \cdot 0{,}7 + 1 \cdot 0{,}3 = 0{,}3$$
$$M(X_3) = 0 \cdot 0{,}4 + 1 \cdot 0{,}6 = 0{,}6$$

Искомое математическое ожидание находим по свойству о математическом ожидании суммы:

$$M(Y) = M(X_1) + M(X_2) + M(X_3) = 0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}6 = 1{,}3.$$

§26. Математическое ожидание числа появлений события в независимых испытаниях.

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A постоянна и равна p.

Теорема 1. Математическое ожидание $M(X)$ числа появлений события A в n независимых испытаниях равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в каждом испытании:

$$M(X) = np$$

Доказательство.

По условию теоремы, случайная величина X – число появления события A в n независимых испытаниях. Общее число X появления события A в этих испытаниях складывается из чисел X_i появлений события в отдельных i–х испытаниях, т.е.

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

По третьему свойству математического ожидания имеем:

$$M(X) = M(X_1) + M(X_2) + \cdots + M(X_n)$$

Случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_n$ могут принимать только два значения: 1 (событие A наступило) с вероятностью p и 0 (событие A не наступило) с вероятностью $q = 1 - p$.

Используя определение математического ожидания, получим:

$$M(X_1) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p$$
$$M(X_2) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$M(X_n) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p$$

Следовательно, искомое математическое ожидание равно:

$$M(X) = \underbrace{p + p + \cdots + p}_{n} = np$$

Что и требовалось доказать.

Пример 1. Вероятность попадания в цель при стрельбе из орудия равна . Найти математическое ожидание общего числа попаданий, если будет произведено 10 выстрелов.

Решение.

По условию, X - число попаданий в цель при 10 выстрелах, $n = 10$, $p = 0{,}6$.

Искомое математическое ожидание

$$M(X) = np = 10 \cdot 0{,}6 = 6$$

§27. Отклонение случайной величины от ее математического ожидания.

Математическое ожидание – это характеристика, которая определяется законом распределения.

Например, для игральной кости математическое ожидание равно 3,5. Если же на гранях игральной кости написать цифры 2, 3, 4, 5, 6, 7, то математическое ожидание для нее измениться и составит 4,5.

Для того, чтобы иметь такую характеристику, которая бы не зависела бы от того, какие цифры написаны на гранях, вводят случайную величину $\boldsymbol{X - M(X)}$, называемую **отклонением** случайной величины X от ее математического ожидания.

Теорема 1. Математическое ожидание отклонения случайной величины X от ее математического ожидания равно нулю:

$$M\big(X - M(X)\big) = 0$$

Доказательство.

Пользуясь свойствами математического ожидания и приняв во внимание, что $M(X)$ – постоянная величина, имеем:

$$M\big(X - M(X)\big) = M(X) - M\big(M(X)\big) = M(X) - M(X) = 0$$

Что и требовалось доказать.

Пример 1. Задан закон распределения дискретной случайной величины X:

X	1	2
P	0,2	0,8

Найти математическое ожидание отклонения случайно величины X от ее математического ожидания.

Решение.

Найдем математические ожидания случайной величины X:

$$M(X) = 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}8 = 1{,}8$$

Найдем возможные значения отклонения, для чего из возможных значений X вычтем математическое ожидание $M(X)$:

$$x_1 - M(X) = 1 - 1{,}8 = -0{,}8$$
$$x_2 - M(X) = 2 - 1{,}8 = 0{,}2$$

Напишем закон распределения отклонения:

$X - M(X)$	$-0{,}8$	0,2
P	0,2	0,8

Находим математическое ожидание отклонения случайной величины X от ее математического ожидания:

$$M\big(X - M(X)\big) = -0{,}8 \cdot 0{,}2 + 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0.$$

§28. Дисперсия дискретной случайной величины.

Определение 1. **Дисперсией дискретной случайной величины X называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины X от ее математического ожидания:**

$$D(X) = M\left[\left(X - M(X)\right)^2\right]$$

Дисперсия характеризует разброс случайной величины от некоторого среднего значения.

Пример 1. Найти дисперсию случайной величины X, заданной следующим законом распределения:

X	1	2	5
P	0,3	0,5	0,2

Решение.

Найдем математическое ожидание:

$$M(X) = 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}5 + 5 \cdot 0{,}2 = 2{,}3$$

Найдем возможные значения отклонения, для чего из возможных значений X вычтем математическое ожидание $M(X)$:

$$x_1 - M(X) = 1 - 2{,}3 = -1{,}3$$
$$x_2 - M(X) = 2 - 2{,}3 = -0{,}3$$
$$x_3 - M(X) = 5 - 2{,}3 = 2{,}7$$

Напишем законы распределения отклонения и квадрата отклонения случайной величины X от ее математического ожидания:

$X - M(X)$	$-1{,}3$	$-0{,}3$	$2{,}7$
P	0,3	0,5	0,2

$\left(X - M(X)\right)^2$	1,69	0,09	7,29
P	0,3	0,5	0,2

Используя определение дисперсии, находим:

$$D(X) = M\left[\left(X - M(X)\right)^2\right] = 1{,}69 \cdot 0{,}3 + 0{,}09 \cdot 0{,}5 + 7{,}29 \cdot 0{,}2 = 0{,}507 + 0{,}045 + 1{,}458 = 2{,}01.$$

Теорема 1. Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины $\boldsymbol{X}$ и квадратом ее математического ожидания:

$$D(X) = M(X^2) - \left(M(X)\right)^2$$

Доказательство.

Приняв во внимание то, что математическое ожидание $M(X)$ есть постоянная величина, и пользуясь свойствами математического ожидания, упростим формулу, выражающую определение дисперсии:

$$D(X) = M\left[\left(X - M(X)\right)^2\right] = M\left(X^2 - 2XM(X) + \left(M(X)\right)^2\right) = M(X^2) - M\left(2XM(X)\right) + M\left(M(X)\right)^2 = M(X^2) - 2M(X)M(X) + \left(M(X)\right)^2 = M(X^2) - 2\left(M(X)\right)^2 + \left(M(X)\right)^2 = M(X^2) - \left(M(X)\right)^2$$

Что и требовалось доказать.

По условию примера 1 найдем дисперсию, используя только что доказанную теорему:

X	1	2	5
P	0,3	0,5	0,2

X^2	1	4	25
P	0,3	0,5	0,2

Найдем математическое ожидание случайной величины X:

$$M(X) = 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}5 + 5 \cdot 0{,}2 = 2{,}3$$

Найдем математическое ожидание случайной величины X^2:

$$M(X^2) = 1 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}5 + 25 \cdot 0{,}2 = 7{,}3$$

Искомая дисперсия:

$$D(X) = M(X^2) - \left(M(X)\right)^2 = 7{,}3 - (2{,}3)^2 = 2{,}01.$$

§29. Свойства дисперсии.

Свойство 1. Дисперсия постоянной величины C равна нулю:

$$D(C) = 0$$

Доказательство.

По определению дисперсии,

$$D(C) = M\left[\left(C - M(C)\right)^2\right]$$

Так как математическое ожидание постоянной равно самой постоянной, то получаем:

$$D(C) = M(C - C)^2 = M(0) = 0$$

Что и требовалось доказать.

Свойство 2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возведя его в квадрат:

$$D(XC) = C^2 D(X)$$

Доказательство.

Используя определение дисперсии и свойства математического ожидания, находим:

$$D(CX) = M\left[\left(CX - M(CX)\right)^2\right] = M\left[\left(CX - CM(X)\right)^2\right] = M\left[C^2\left(CX - CM(X)\right)^2\right] = M(C^2)M\left[\left(CX - CM(X)\right)^2\right] = C^2 D(X)$$

Что и требовалось доказать.

Свойство 3. Дисперсия суммы двух случайных величин X и Y равна сумме дисперсий этих случайных величин:

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y)$$

Доказательство.

Используя теорему о вычислении дисперсии и свойства математического ожидания, имеем:

$$D(X + Y) = M\left((X + Y)^2\right) - \left(M(X + Y)\right)^2 = M(X^2 + 2XY + Y^2) - \left(M(X) + M(Y)\right)^2 = M(X^2) + M(2XY) + M(Y^2) - \left[(M(X))^2 + 2M(X)M(Y) + (M(Y))^2\right] = M(X^2) + 2M(X)M(Y) + M(Y^2) - (M(X))^2 - 2M(X)M(Y) - (M(Y))^2 = \left[M(X^2) - (M(X))^2\right] + \left[M(Y^2) - (M(Y))^2\right] = D(X) + D(Y)$$

Что и требовалось доказать.

Следствие 1. Дисперсия суммы нескольких взаимно независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин:

$$D(X + Y + Z) = D(X) + D(Y) + D(Z)$$

Следствие 2. Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий:

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y)$$

Доказательство.

Используя свойства дисперсии, имеем:

$$D(X - Y) = D\left(X + (-Y)\right) = D(X) - D(-Y) = D(X) + (-1)^2 D(Y) = D(X) + D(Y).$$

Что и требовалось доказать.

Следствие 3. Дисперсия суммы постоянной величины и случайной равна дисперсии случайной величины:

$$M(C + X) = D(X)$$

§30. Дисперсия числа появлений события в независимых испытаниях.

Теорема 1. Дисперсия числа появлений события $\boldsymbol{A}$ в $\boldsymbol{n}$ независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события $\boldsymbol{A}$ постоянна и равна $\boldsymbol{p}$, определяется как произведение числа испытаний на вероятности появления и непоявления события в одном испытании:

$$D(X) = npq$$

Доказательство.

Введем обозначения:

X – число появлений события A в n независимых испытаниях.

X_1 – число появлений события A в первом испытании.

X_2 – число появлений события A во втором испытании.

… …

X_n – число появлений события A в -м испытании.

Общее число X появления события A в этих испытаниях складывается из чисел X_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ появлений события в отдельных i–х испытаниях, т.е.

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

Случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_n$ могут принимать только два значения: 1 (событие A наступило) с вероятностью p и 0 (событие A не наступило) с вероятностью $q = 1 - p$.

Запишем закон распределения для случайных величин X_i:

X_i	0	1
P	$1 - p$	p

Вычислим дисперсию каждой случайной величины X_i:

$$D(X_i) = M(X_i^2) - \left(M(X_i)\right)^2 = \left(0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p\right) - \left(0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p\right)^2 = p - p^2 = p(1 - p) = pq$$

Используя свойства дисперсии, находим:

$$D(X) = D(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \dots + D(X_n) = \underbrace{pq + pq + \dots + pq}_{n} = npq$$

Что и требовалось доказать.

Пример 1. Производиться 10 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна 0,6. Найти дисперсию случайной величины X – числа появлений события A в этих испытаниях

Решение.

По условию, $n = 10$, $p = 0{,}6$, $q = 1 - p = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$.

Искомая дисперсия:

$$D(X) = npq = 10 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 2{,}4.$$

§31. Среднее квадратическое отклонение.

Определение 1. **Средним квадратическим отклонением случайной величины X называется квадратный корень из дисперсии:**

$$\boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{D(X)}}$$

Замечание 1. Дисперсия имеет размерность, равную квадрату случайной величины X, а среднее квадратическое отклонение по размерности совпадает со случайной величиной.

Пример 1. Случайная величина X задана законом распределения

X	2	3	10
P	0,1	0,4	0,5

Найти среднее квадратическое отклонение.

Решение.

Найдем математическое ожидание случайной величины X:

$$M(X) = 2\cdot 0{,}1 + 3\cdot 0{,}4 + 10\cdot 0{,}5 = 0{,}2 + 1{,}2 + 5 = 6{,}4$$

Запишем закон распределения случайной величины X^2

X^2	4	9	100
P	0,1	0,4	0,5

и найдем ее математическое ожидание:

$$M(X^2) = 4\cdot 0{,}1 + 9\cdot 0{,}4 + 100\cdot 0{,}5 = 0{,}4 + 3{,}6 + 50 = 54.$$

Найдем дисперсию:

$$D(X) = M(X^2) - \big(M(X)\big)^2 = 54 - (6{,}4)^2 = 54 - 40{,}96 = 13{,}04$$

Искомое среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{13{,}04} = 3{,}6.$$

Теорема 1. Среднее квадратическое отклонение суммы конечного числа взаимно независимых случайных величин равно квадратному корню из суммы квадратов средних квадратических отклонений этих величин:

$$\sigma(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \sqrt{\sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + \cdots + \sigma^2(X_n)}$$

Доказательство.

Обозначим через X сумму n взаимно независимых случайных величин:

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

Тогда среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(X) = \sigma(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$$

Воспользуемся определением среднего квадратического отклонения:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)}$$

Используя свойства дисперсии, имеем:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X_1) + D(X_2) + \cdots + D(X_n)}$$

Так как $\sigma(X_i) = \sqrt{D(X_i)}$, то $D(X_i) = \sigma^2(X_i)$.

Окончательно получаем:

$$\sigma(X) = \sqrt{\sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + \cdots + \sigma^2(X_n)}$$

Что и требовалось доказать.

§32. Одинаково распределенные взаимно независимые случайные величины.

Рассмотрим n взаимно независимых случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$, имеющих одинаковый закон распределения, а, следовательно, и одинаковые числовые характеристики (математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение).

Поставим перед собой задачу найти числовые характеристики среднего арифметического этих случайных величин:

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

Теорема 1. Математическое ожидание среднего арифметического одинаково распределенных случайных величин равно математическому ожиданию $\boldsymbol{a}$ каждой случайной величины:

$$\boldsymbol{M(\overline{X}) = a}$$

Доказательство.

По условию теоремы, математическое ожидание каждой случайной величины X_i будет равно $M(X_i) = a$, где $i = 1,2,\dots,n$.

Вычислим математическое ожидание среднего арифметического, пользуясь свойствами математического ожидания:

$$M(\overline{X}) = M\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}M(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \frac{1}{n}\big(M(X_1) + M(X_2) + \cdots + M(X_n)\big) = \frac{1}{n}\Big(\underbrace{a + a + \cdots + a}_{n}\Big) = \frac{1}{n}\cdot a\cdot n = a$$

Что и требовалось доказать.

Теорема 2. Дисперсия среднего арифметического n одинаково распределенных взаимно независимых случайных величин в n раз меньше дисперсии D каждой из величин:

$$D(\overline{X}) = \frac{D(X_i)}{n}$$

Доказательство.

По условию теоремы, дисперсия каждой случайной величины X_i будет равна $D(X_i) = D$, где $i = 1,2,\dots,n$.

Вычислим дисперсию среднего арифметического, пользуясь свойствами дисперсии:

$$D(\overline{X}) = D\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}D(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \frac{1}{n^2}\big(D(X_1) + D(X_2) + \cdots + D(X_n)\big) = \frac{1}{n^2}\Big(\underbrace{D + D + \cdots + D}_{n}\Big) = \frac{1}{n^2}\cdot D\cdot n = \frac{D}{n}$$

Что и требовалось доказать.

Замечание 1. С увеличением n дисперсия среднего арифметического уменьшается.

Теорема 3. Среднее квадратическое отклонение среднего арифметического n одинаково распределенных взаимно независимых случайных величин в $\sqrt{n}$ раз меньше среднего квадратического отклонения σ каждой из величин:

$$\sigma(\overline{X}) = \frac{\sigma(X_i)}{\sqrt{n}}$$

Доказательство.

По условию теоремы, среднее квадратическое отклонение каждой случайной величины X_i будет равно $\sigma(X_i) = \sqrt{D(X_i)} = \sigma$, где $i = 1,2,\dots,n$.

Используя определение среднего квадратического отклонения и только что доказанную теорему, вычислим среднее квадратическое отклонение среднего арифметического:

$$\sigma(\overline{X}) = \sqrt{D(\overline{X})} = \sqrt{\frac{D(X_i)}{n}} = \frac{\sqrt{D(X_i)}}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Что и требовалось доказать.

Замечание 2. С увеличением n среднее квадратическое отклонение среднего арифметического уменьшается на $\sqrt{n}$.

§33. Начальные и центральные моменты.

Определение 1. **Начальным моментом порядка k случайной величины X называется математическое ожидание случайной величины X^k:**

$$\boldsymbol{\nu_k = M(X^k)}$$

В частности,

$$\boldsymbol{\nu_1 = M(X)}$$
$$\boldsymbol{\nu_2 = M(X^2)}$$

Определение 2. **Центральным моментом порядка k случайной величины X называется математическое ожидание случайной величины $\big(X - M(X)\big)^k$:**

$$\boldsymbol{\mu_k = M\Big[\big(X - M(X)\big)^k\Big]}$$

В частности,

$$\boldsymbol{\mu_1 = M[X - M(X)] = M(X) - M(X) = \nu_1 - \nu_1 = 0}$$
$$\boldsymbol{\mu_2 = M\Big[\big(X - M(X)\big)^2\Big] = M(X^2) - \big(M(X)\big)^2 = \nu_2 - \nu_1^2}$$
$$\boldsymbol{\mu_3 = M\Big[\big(X - M(X)\big)^3\Big] = \nu_3 - 3\nu_2\nu_1 + 2\nu_1^3}$$

§34. Неравенство Чебышева.

Вероятность того, что отклонение случайной величины X от ее математического ожидания по абсолютной величине меньше положительного числа ε, не меньше, чем $1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$:

$$P(|X-M(X)|<\varepsilon)\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

Доказательство.

Так как события, состоящие в осуществлении неравенств $|X-M(X)|<\varepsilon$ и $|X-M(X)|\geq\varepsilon$, противоположны, то сумма их вероятностей равна единице, т.е.

$$P(|X-M(X)|<\varepsilon)+P(|X-M(X)|\geq\varepsilon)=1$$

Выразим отсюда интересующую нас вероятность:

$$P(|X-M(X)|<\varepsilon)=1-P(|X-M(X)|\geq\varepsilon)$$

Таким образом, задача сводится к вычислению вероятности $P(|X-M(X)|\geq\varepsilon)$. Для этого найдем дисперсию случайной величины X:

$$D(X)=M\left[\left(X-M(X)\right)^2\right]=p_1\left(x_1-M(X)\right)^2+p_2\left(x_2-M(X)\right)^2+\cdots+p_n\left(x_n-M(X)\right)^2$$

Все слагаемые этой суммы неотрицательны, следовательно, сумма положительна.

Отбросим те слагаемые, у которых $|x_i-M(X)|<\varepsilon$ (для оставшихся слагаемых $|x_j-M(X)|\geq\varepsilon$), вследствие чего сумма может только уменьшиться:

$$D(X)\geq p_1^*\left(x_1^*-M(X)\right)^2+p_2^*\left(x_2^*-M(X)\right)^2+\cdots+p_k^*\left(x_k^*-M(X)\right)^2$$

Заметим, что обе части неравенства $|x_j-M(X)|\geq\varepsilon$ положительны, поэтому, возведя их в квадрат, получим равносильное неравенство $|x_j-M(X)|^2\geq\varepsilon^2$. Воспользуемся этим замечанием и, заменяя в оставшейся сумме каждый из множителей $|x_j-M(X)|^2$ число ε^2 (при этом неравенство может лишь усилиться), получим:

$$D(X)\geq p_1^*\varepsilon^2+p_2^*\varepsilon^2+\cdots+p_k^*\varepsilon^2=\varepsilon^2(p_1^*+p_2^*+\cdots+p_k^*)$$

Учитывая, что сумма вероятностей $p_1^*+p_2^*+\cdots+p_k^*$ есть вероятность того, что $|X-M(X)|\geq\varepsilon$, то

$$D(X)\geq\varepsilon^2P(|X-M(X)|\geq\varepsilon)$$

$$P(|X-M(X)|\geq\varepsilon)\leq\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

Подставляя полученное неравенство в выражение $P(|X-M(X)|<\varepsilon)=1-P(|X-M(X)|\geq\varepsilon)$, окончательно получим:

$$P(|X-M(X)|<\varepsilon)\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

Что и требовалось доказать.

§35. Теорема Чебышева.

Теорема 1. Если $X_1,X_2,\ldots,X_n$ – попарно независимые случайные величины, причем дисперсии из равномерно ограничены, т.е. $D(X_i)\leq C$, то, каково бы ни было число $\varepsilon>0$, вероятность неравенства

$$\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}-\frac{M(X_1)+M(X_2)+\cdots+M(X_n)}{n}\right|<\varepsilon$$

будет сколь угодно близка к единице, если число случайных величин достаточно велико:

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}-\frac{M(X_1)+M(X_2)+\cdots+M(X_n)}{n}\right|<\varepsilon\right)=1$$

Доказательство.

Введем в рассмотрение новую случайную величину $\overline{X}=\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$ – среднее арифметическое случайных величин.

Пользуясь свойствами математического ожидания, находим математическое ожидание случайной величины $\overline{X}$:

$$M(\overline{X})=\frac{M(X_1)+M(X_2)+\cdots+M(X_n)}{n}$$

Применяя к случайной величине $\overline{X}$ неравенство Чебышева и используя свойства дисперсии, имеем:

$$P\left(|\overline{X}-M(\overline{X})|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{D\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\right)}{\varepsilon^2}=1-\frac{D(X_1+X_2+\cdots+X_n)}{n^2\varepsilon^2}$$
$$=1-\frac{D(X_1)+D(X_2)+\cdots+D(X_n)}{n^2\varepsilon^2}$$

По условию дисперсии всех случайных величин ограничены постоянным числом C, т.е. $D(X_i)\leq C$, поэтому $\left(D(X_1)+D(X_2)+\cdots+D(X_n)\right)/n^2=\left(\underbrace{C+C+\cdots+C}_{n}\right)/n^2=nC/n^2=C/n$

Таким образом, получаем:

$$P\left(|\overline{X}-M(\overline{X})|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{C}{n\varepsilon^2}$$

Если n достаточно велико, то вероятность события $|\overline{X}-M(\overline{X})|<\varepsilon$ стремиться к единице, т.е. событие становится достоверным. Окончательно, получаем:

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}-\frac{M(X_1)+M(X_2)+\cdots+M(X_n)}{n}\right|<\varepsilon\right)=1$$

Что и требовалось доказать.

Замечание 1. Если случайные величины имеют одинаковое распределение, то математическое ожидание от всех этих величин будет одно и то же, равное $\boldsymbol{M(X_i)}=\boldsymbol{a}$. В этом случае теорема Чебышева примет вид:

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}-a\right|<\varepsilon\right)=1$$

Среднее арифметическое при достаточно больших $\boldsymbol{n}$ утрачивает случайных характер. Этот факт является основой статистики.

§36. Теорема Бернулли.

Теорема 1. Если в каждом из n независимых испытаний вероятность появления события A равна p, то как угодно близка к единице вероятность того, что отклонение относительной частоты от вероятности p по абсолютной величине будет сколь угодно малым, если число испытаний достаточно велико:

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1$$

Доказательство.

Введем обозначения:

X_1 – число появлений события A в первом испытании.

X_2 – число появлений события A во втором испытании.

………………………………………………………………

X_n – число появлений события A в -м испытании.

Случайные величины $X_1,X_2,\ldots,X_n$ могут принимать только два значения: 1 (событие A наступило) с вероятностью p и 0 (событие A не наступило) с вероятностью $q=1-p$.

Запишем закон распределения для случайных величин X_i:

X_i	0	1
P	$1-p$	p

Будем считать, что случайные величины попарно независимы и дисперсии их ограничены в каждом испытании. Следовательно, к ним применима теорема Чебышева (частный случай):

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}-a\right|<\varepsilon\right)=1$$

Найдем математическое ожидание каждой случайной величины X_i:

$$M(X_i)=0\cdot(1-p)+1\cdot p=p$$

Тогда теорема Чебышева примет вид:

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1$$

Так как сумма $X_1+X_2+\cdots+X_n$ есть число m появлений события A в n испытаниях, то окончательно получим:

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1$$

Что и требовалось доказать.

Замечание 1. Из теоремы Бернулли не следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{m}{n}=p$$

§37. Определение функции распределения непрерывной случайной величины.

Определение 1. **Интегральной функцией распределения непрерывной случайной величины называется функция $F(x)$, определяющая вероятность того, что непрерывная случайная величина X в результате испытания примет значение, меньшее x:**

$$F(x) = P(X < x)$$

Пример 1. Точка ставится на отрезок длиной от 0 до 10. Построить функцию распределения графически.
Решение.

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0 \\ \frac{x}{10} \text{ при } 0 < x \le 10 \\ 1 \text{ при } x > 10 \end{cases}$$

§38. Свойства интегральной функции распределения.

Свойство 1. Значения интегральной функции распределения непрерывной случайной величины X лежат в пределах от нуля до единицы:

$$F(x) \in [0,1]$$

Доказательство.
Свойство вытекает из определения функции распределения как вероятности: вероятность всегда есть неотрицательное число, не превышающее единицы. Следовательно,

$$F(x) = P(X < x) \in [0,1]$$

Что и требовалось доказать.

Свойство 2. Интегральная функция распределения $F(x)$ – неубывающая функция:

$$F(x_2) \ge F(x_1), \text{ если } x_2 > x_1.$$

Доказательство.
По условию, $x_2 > x_1$. Рассмотрим выражение $F(x_2) - F(x_1)$.
Согласно определению интегральной функции распределения:

$$F(x_2) - F(x_1) = P(X < x_2) - P(X < x_1)$$

Событие $X < x_2$ можно подразделить на 2 несовместные события:

$$F(x_2) - F(x_1) = P(X < x_1) + P(x_1 < X < x_2) - P(X < x_1) = P(x_1 < X < x_2)$$

Так как вероятность есть всегда неотрицательное число, т.е. $P(x_1 < X < x_2) \ge 0$, то

$$F(x_2) - F(x_1) \ge 0$$

или

$$F(x_2) \ge F(x_1)$$

Что и требовалось доказать.

Следствие 1. Вероятность того, что случайная величина приме значение, заключенное в интервале $(x_1; x_2)$ равна приращению функций распределения на этом интервале:

$$F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 < X < x_2)$$

Пример 1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le -1 \\ \frac{x}{4} + \frac{1}{4} \text{ при} -1 < x \le 3 \\ 1 \text{ при } x > 3 \end{cases}$$

Найти вероятность того, что случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $(0,2)$.
Решение.
На основании следствия из свойства 2, имеем:

$$P(0 < X < 2) = F(2) - F(0) = \left(\frac{2}{4} + \frac{1}{4}\right) - \left(0 + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

Следствие 2. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определенное значение, равна нулю.
Доказательство.
Вероятность того, что непрерывная случайная величина X попадает в отрезок Δx, равна:

$$P(x < X < x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x)$$

Устремим Δx к нулю, используя свойства пределов:

$$\lim_{\Delta x \to 0} P(x < X < x + \Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \big(F(x + \Delta x) - F(x)\big) = \lim_{\Delta x \to 0} F(x + \Delta x) - \lim_{\Delta x \to 0} F(x) = F(x) - F(x) = 0$$

Что и требовалось доказать.

Свойство 3. Если возможные значения непрерывной случайной величины X принадлежат интервалу (a, b), то

$$F(x) = 0 \text{ при } x \le a$$

и

$$F(x) = 1 \text{ при } x > b$$

Доказательство.
По определению интегральной функции распределения $F(x) = P(X < x)$
Если $x_1 \le a$, то событие $X < x_1$ невозможно (так как значений, меньших x_1, величина X по условию не принимает) и, следовательно, вероятность его равна нулю.
Если $x_2 > b$, то вероятность того, что случайная величина X примет значение, большее b, равна нулю. Таким образом, событие $X < x_2$ достоверно (так как все возможные значения X меньше x_2) и, следовательно, вероятность его равна единице.
Что и требовалось доказать.

Следствие 1. Если возможные значения непрерывной случайной величины расположены на всех оси x, то справедливы следующие предельные соотношения:

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$$

и

$$\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$$

Пример 2. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	1	4	8
P	0,3	0,1	0,6

Найти функцию распределения дискретной случайной величины X и построить ее график.
Решение.
Согласно свойству 3, если $x \le 1$, то $F(x) = 0$.
Если $1 < x \le 4$, то $F(x) = 0{,}3$. Действительно, X может принять значение 1 с вероятностью 0,3.
Если $4 < x \le 8$, то $F(x) = 0{,}4$. Действительно, если x_1 удовлетворяет неравенству $4 < x_1 \le 8$, $F(x_1)$ равно вероятности события $X < x_1$, которое может быть осуществлено, когда X принимает значение 1 (вероятность этого события равна 0,3) или значение 4 (вероятность этого события равна 0,1). Поскольку эти два события несовместны, то по теореме сложения вероятность события $X < x_1$ равна сумме вероятностей $0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}4$.
Если $x > 8$, то $F(x) = 1$. Действительно, событие $X \le 8$ достоверно, следовательно, его вероятность равна единице.
Таким образом, функции распределения примет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 1 \\ 0{,}3 \text{ при } 1 < x \le 4 \\ 0{,}4 \text{ при } 4 < x \le 8 \\ 1 \text{ при } x > 8 \end{cases}$$

§39. Определение функции плотности распределения вероятностей непрерывной случайной величины (дифференциальная функция распределения).

Определение 1. **Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины X (дифференциальная функция распределения) называется функция $f(x)$, равная первой производной от интегральной функции распределения $F(x)$:**

$$f(x) = F'(x)$$

Теорема 1. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (a, b), равна определенному интегралу от плотности распределения, взятому в пределах от a до b:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

Доказательство.
С одной стороны, воспользуемся соотношением $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$.
С другой стороны, рассмотрим интеграл $\int_a^b f(x)dx$. Используя определение плотности распределения, данный интеграл перепишем в виде:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b F'(x)dx$$

Поднесем $F'(x)$ под знак дифференциала и воспользуемся свойствами интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b d(F(x)) = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

Так как правые части рассмотренных выражений равны, то окончательно получаем:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

Что и требовалось доказать.

Пример 1. Задана плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0 \\ 2x \text{ при } 0 < x \le 1 \\ 0 \text{ при } x > 1 \end{cases}$$

Найти вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Решение.
Искомая вероятность:

$$P\left(\frac{1}{2} < X < 1\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} 2xdx = x^2|_{\frac{1}{2}}^{1} = 1 - \frac{1}{2^2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Замечание 1. Зная плотность распределения $f(x)$ можно найти функцию распределения $F(x)$ через интеграл с верхним переменным пределом:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Пример 2. Найти функцию распределения $F(x)$ по функции плотности распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 1 \\ 1 \text{ при } 1 < x \le 2 \\ 0 \text{ при } x > 2 \end{cases}$$

Решение.
Воспользуемся формулой:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Если $x \le 1$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dx = 0.$$

Если $1 < x \le 2$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{1} 0dx + \int_{1}^{x} 1dx = x|_1^x = x - 1.$$

Если $x > 2$,то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{1} 0dx + \int_{1}^{2} 1dx + \int_{2}^{x} 0dx = x|_1^2 = 1.$$

Таким образом, искомая вероятность:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 1 \\ x - 1 \text{ при } 1 < x \le 2 \\ 1 \text{ при } x > 2 \end{cases}$$

§40. Свойства плотности распределения.

Свойство 1. Плотность распределения $f(x)$ – неотрицательная функция:

$$f(x) \ge 0$$

Доказательство.
По определению плотности

$$f(x) = F'(x)$$

С другой стороны,

$$F'(x) = \operatorname{tg} \alpha$$

где α – угол наклона касательной к графику функции распределения.
Так как $F(x)$ есть неубывающая функция, то

$$\operatorname{tg} \alpha \ge 0$$

Следовательно,

$$f(x) \ge 0$$

Что и требовалось доказать.

Свойство 2. Несобственный интеграл от плотности распределения $f(x)$ в пределах от $-\infty$ до ∞ равен единице:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Доказательство.
Согласно теореме 1 §39, выполняется

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

Следовательно, для интервала $(-\infty, \infty)$ данное соотношение также выполняется, т.е.

$$P(-\infty < X < \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

Событие, состоящее в том, что случайная величина примет значение, принадлежащее интервалу $(-\infty, \infty)$, достоверно, следовательно его вероятность равна единице, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = P(a < X < b) = 1$$

Что и требовалось доказать.

Замечание 1. Если все возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу (a, b), то

$$\int_a^b f(x)dx = 1$$

Доказательство.
Используя свойство плотности распределения, имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_a^b f(x)dx + \int_b^{\infty} f(x)dx = 1$$

Так как $x \in (a, b)$, то $\int_a^b f(x)dx = 1$.
Что и требовалось доказать.

Пример 1. Плотность распределения случайной величины X задана

$$f(x) = \frac{a}{e^{-x} + e^x}$$

Определить постоянный параметр a.

Решение.
Плотность распределения должна удовлетворять условию $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, поэтому необходимо, чтобы выполнялось равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{e^{-x} + e^x} dx = 1$$

или

$$a \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\frac{1}{e^x} + e^x} = 1$$

Внесем e^x под знак дифференциала:

$$a \int_{-\infty}^{\infty} \frac{de^x}{1 + (e^x)^2} = 1$$

или

$$a = \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{de^x}{1 + (e^x)^2}}$$

Вычислим несобственный интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{de^x}{1 + (e^x)^2} = \lim_{b \to -\infty} \int_b^0 \frac{de^x}{1 + (e^x)^2} + \lim_{c \to \infty} \int_0^c \frac{de^x}{1 + (e^x)^2} = \lim_{b \to -\infty} (-\operatorname{arctg} e^b) + \lim_{c \to \infty} (\operatorname{arctg} e^c) = \frac{\pi}{2}$$

Таким образом, искомый параметр a:

$$a = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

Следовательно, плотность распределения примет вид:

$$f(x) = \frac{2}{\pi(e^{-x} + e^x)}$$

Свойство 3. Дифференциальная функция распределения $f(x)$ – плотность вероятности того, что непрерывная случайная величина X принадлежат отрезку Δx при $\Delta x \to 0$.

Доказательство.
По определению плотности распределения, $f(x) = F'(x)$, или в иной форме

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

Разность $F(x + \Delta x) - F(x)$ определяет вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $(x, x + \Delta x)$, т.е.

$$F(x + \Delta x) - F(x) = P(x < X < x + \Delta x)$$

Таким образом, непрерывная случайная величина X лежит в отрезке Δx.
Что и требовалось доказать.

§41. Числовые характеристики непрерывных случайных величин.

Пусть непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)$.

Для определенности будем считать, что непрерывная случайная величина X принимает значения только из отрезка $[a, b]$.

Разобьем этот отрезок на n частей, учитывая, что $a = x_0$, $b = x_n$.

Внутри каждого интервала, равного $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ выбираем точку x_i.

Вероятность того, что случайная величина X попадает в интервал Δx_1, равна $f(x_1)\Delta x_1$, где x_1 – точка внутри интервала Δx_1. Аналогично вводим вероятности того, что случайная величина X попадает в интервал Δx_i, равные $f(x_i)\Delta x_i$.

В этом случае, математическое ожидание непрерывной случайной величины X приблизительно равно:

$$M(X) = x_1 f(x_1)\Delta x_1 + x_2 f(x_2)\Delta x_2 + \cdots + x_n f(x_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)\Delta x_i$$

Устремим число разбиений n к бесконечности таким образом, чтобы максимальных интервал Δx_i стремился к нулю. Тогда окончательно получим:

$$M(X) = \int_a^b x f(x)dx$$

Определение 1. **Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат отрезку $[a, b]$, называется определенный интеграл:**

$$\boldsymbol{M(X) = \int_a^b x f(x)dx}$$

Следствие 1. Если непрерывная случайная величина X принимает значения из интервала $(-\infty, \infty)$, то

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$$

Определение 2. **Дисперсией непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат отрезку $[a, b]$, называется определенный интеграл:**

$$\boldsymbol{D(X) = \int_a^b \left(x - M(X)\right)^2 f(x)dx}$$

или

$$\boldsymbol{D(X) = \int_a^b x^2 f(x)dx - \left(M(X)\right)^2}$$

Определение 3. **Средним квадратическим отклонением непрерывной случайной величины X называется выражение:**

$$\boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{D(X)}}$$

Пример 1. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины X, заданной функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0 \\ x \text{ при } 0 < x \le 1 \\ 1 \text{ при } x > 1 \end{cases}$$

Решение.

Найдем плотность распределения как первую производную от функции распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0 \\ 1 \text{ при } 0 < x \le 1 \\ 0 \text{ при } x > 1 \end{cases}$$

Найдем математическое ожидание:

$$M(X) = \int_0^1 x \cdot 1 \cdot dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

Найдем дисперсию:

$$D(X) = \int_0^1 x^2 \cdot 1 \cdot dx - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} - 0 - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

Найдем среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

§42. Функция равномерного распределения вероятностей.

Определение 1. **Функция распределения вероятностей $F(X)$ называется равномерно распределенной на интервале (a, b), если плотность распределения $f(x) = F'(x)$ имеет постоянное значение C на интервале (a, b).**

Так как выполняется $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, то данное соотношение будет выполняться и на интервале (a, b):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_a^b C dx = C\int_a^b dx = Cx|_a^b = C(b-a) = 1$$

Откуда находим

$$C = \frac{1}{b-a}$$

Функция плотности равномерного распределения на интервале (a, b) будет равна:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le a \\ \dfrac{1}{b-a} \text{ при } a < x \le b \\ 0 \text{ при } x > b \end{cases}$$

Найдем числовые характеристики равномерно распределенной случайной величины X:

1. Математическое ожидание

$$M(X) = \int_a^b x f(x)dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{b-a}\Big|_a^b = \frac{1}{2}\cdot\frac{b^2-a^2}{b-a} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(b-a)(b+a)}{b-a} = \frac{b+a}{2}$$

2. Дисперсия

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x)dx - \left(M(X)\right)^2 = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2 dx - \frac{(b+a)^2}{4} = \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{b-a}\Big|_a^b - \frac{(b+a)^2}{4} = \frac{1}{3}\cdot\frac{b^3-a^3}{b-a} - \frac{(b+a)^2}{4} = \frac{1}{3}\cdot\frac{(b-a)\left(b^2+ab+a^2\right)}{b-a} - \frac{b^2-2ab+a^2}{4} = \frac{b^2-2ab+a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

3. Среднее квадратическое отклонение

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

§43. Нормальное распределение.

Определение 1. **Функция распределения $F(X)$ называется нормальным распределением, если плотность распределения $f(x)$ имеет вид:**

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

где a и σ – некоторые параметры.

Найдем числовые характеристики нормально распределенной непрерывной случайной величины X:

1. Математическое ожидание.

   По определению математического ожидания непрерывной случайной величины,

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}x\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_a^b xe^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx$$

   Введем замену переменных: $z=\frac{x-a}{\sigma}$, откуда $x=\sigma z+a$ и $dx=\sigma dz$. Приняв во внимание, что новые пределы интегрирования равны старым, получим:

$$M(X)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma z+a)e^{-\frac{z^2}{2}}\sigma dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma ze^{-\frac{z^2}{2}}dz+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}ae^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

$$=-\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}d\left(-\frac{z^2}{2}\right)+\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

   Первое из слагаемых равно нулю (под знаком интегрирования нечетная функция; пределы интегрирования симметричны относительно начала координат). Второе из слагаемых равно a (так как $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\sqrt{2\pi}$ – интеграл Пуассона).

   Таким образом, математическое ожидание равно

$$M(X)=a$$

2. Дисперсия

   По определению дисперсии непрерывной случайной величины, учитывая, что $M(X)=a$, имеем

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-a)^2\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}f(x)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(x-a)^2e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}f(x)dx$$

   Введем замену переменных: $z=\frac{x-a}{\sigma}$, откуда $x=\sigma z+a$ и $dx=\sigma dz$. Приняв во внимание, что новые пределы интегрирования равны старым, получим:

$$D(X)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma z+a-a)^2e^{-\frac{z^2}{2}}\sigma dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma^2z^2e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

$$=-\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}ze^{-\frac{z^2}{2}}d\left(-\frac{z^2}{2}\right)=-\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}ze^{-\frac{z^2}{2}}d\left(-\frac{z^2}{2}\right)$$

   Интегрируя по частям, положив $u=z$ и $dv=e^{-\frac{z^2}{2}}d\left(-\frac{z^2}{2}\right)$, найдем

$$D(X)=-\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}z\,e^{-\frac{z^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{\infty}+\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=0+\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{2\pi}=\sigma^2$$

3. Среднее квадратическое отклонение

   $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\sigma^2}=\sigma$

Определение 2. **Нормальное распределение называется нормированным, если $a=0,\sigma=1$, т.е. плотность распределения будет иметь вид:**

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Функция $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ протабулирована.

Замечание 1. Функция распределения $F(x)$ нормального распределения находиться как:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt$$

а для нормированного нормального распределения эта формула принимает вид:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

Замечание 2. Вероятность попадания нормированной непрерывной случайной величины X в интервал $(0,x)$ определяется по формуле:

$$P(0<X<x)=\int_0^x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

Функция $\Phi(x)=\int_0^x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ протабулирована.

Замечание 3. Учитывая, что $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=1$, то также должно выполняться

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=1,$$

где подынтегральная функция является честно, следовательно, разбив полученный интеграл на два интеграла, имеем

$$2\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=1$$

откуда находим:

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{1}{2}\text{ и }\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{1}{2}$$

Следовательно, функция нормированного распределения определяется как:

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}e^{-\frac{t^2}{2}}dt+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

Вычислив интегралы, окончательно получаем:

$$F(x)=0{,}5+\Phi(x)$$

Замечание 4. Вероятность попадания нормальной непрерывной случайной величины X в интервал (α,β) определяется по формуле:

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$$

Функция $\Phi(x)=\int_0^x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ протабулирована.

Доказательство.

Если случайная величина X задана плотность распределения $f(x)$, то вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (α,b), такова:

$$P(\alpha<X<\beta)=\int_\alpha^\beta f(x)dx$$

Если случайная величина X распределена по нормальному закону, то эта формула примет вид:

$$P(\alpha<X<\beta)=\int_\alpha^\beta\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx$$

Введем замену переменных: $z=\frac{x-a}{\sigma}$, откуда $x=\sigma z+a$ и $dx=\sigma dz$. Найдем новые пределы интегрирования. Если $x=\alpha$, то $z=\frac{\alpha-a}{\sigma}$; если $x=\beta$, то $z=\frac{\beta-a}{\sigma}$.

Таким образом, имеем:

$$P(\alpha<X<\beta)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}}e^{-\frac{z^2}{2}}\sigma dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\frac{\beta-a}{\sigma}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{0}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\frac{\beta-a}{\sigma}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\frac{\alpha-a}{\sigma}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$$

Что и требовалось доказать.

Замечание 5. Вероятность отклонения нормально распределенной случайной величины X от ее математического ожидания по абсолютной величине на число δ равна:

$$P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

Доказательство.

Заменим данное неравенство равносильным ему двойным неравенством и вычислим его вероятность:

$$P(|X-a|<\delta)=P(a-\delta<X<a+\delta)=\Phi\left(\frac{(a+\delta)-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{(a-\delta)-a}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{-\delta}{\sigma}\right)$$

$$=\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)+\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

Что и требовалось доказать.

Замечание 6. График нормального распределения будет выглядеть следующим образом:

Очевидно, что с увеличением σ высота графика будет падать.

Если от точки a взять отрезок $3\sigma=\delta$, то вероятность

$$P(|X-a|<3\sigma)=2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right)=2\Phi(3)=2\cdot 0{,}49865=0{,}9973,$$

т.е. вероятность того, что отклонение по абсолютной величине будет меньше утроенного среднего квадратического отклонения, равна 0,9773 (практически достоверное событие).

Правило трех сигм: если некоторые события выходят за интервал 3σ, то это говорит о том, что случайная величина распределена не нормально.

§44. Понятие о теореме Ляпунова (центральная предельная теорема). Асимметрия. Эксцесс.

Теорема 1. Если случайная величина X представляет собой сумму очень большого числа взаимно независимых случайных величин, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, то случайная величина X имеет распределение, близкое к нормальному.

Математически теорему Ляпунова можно сформулировать следующим образом.

Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ – последовательность независимых случайных величин, каждая из которых имеет конечные математическое ожидание и дисперсию:

$$M(X_k) = a_k, \qquad D(X_k) = b_k^2.$$

Введем обозначения:

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$B_n^2 = \sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

Введем функцию распределения нормированной суммы:

$$F_n(x) = P\left(\frac{S_n - A_n}{\sqrt{B_n^2}} < x\right)$$

Тогда теорема Ляпунова математически запишется в виде:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - A_n}{\sqrt{B_n^2}} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

При изучении неизвестных распределений возникает необходимость количественно оценить отличие изучаемых распределений от нормального распределения. Для этого вводят специальные характеристики: асимметрию и эксцесс.

Определение 1. **Асимметрией распределения называется отношение центрального момента третьего порядка к кубу среднего квадратического отклонения:**

$$A_s = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

Асимметрия положительна, если «длинная часть» кривой распределения расположена справа от математического ожидания; асимметрия отрицательна, если «длинная часть» кривой распределения расположена слева от математического ожидания. У нормального распределения асимметрия равна нулю, так как центральные моменты нечетного порядка равны нулю.

Определение 2. **Эксцессом распределения называется величина, равная:**

$$E_k = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$$

Для нормального распределения $\frac{\mu_4}{\sigma^4} = 3$, следовательно, эксцесс для него равен нулю. Если эксцесс положительный, то кривая имеет более высокую и «острую» вершину, чем нормальная кривая; если эксцесс отрицательный, то кривая имеет более низкую и «плоскую» вершину, чем нормальная кривая.

§45. Функция одного случайного аргумента, ее распределение и числовые характеристики.

Определение 1. **Если каждому возможному значению случайной величины X соответствует одно возможное значение случайной величины Y, то Y называют функцией случайного аргумента X.**

Пример 1. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	2	3
P	0,6	0,4

Найти распределение функции одного случайного аргумента $Y = X^2$.

Решение.

Возможные значения случайной величины X: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

Найдем возможные значения случайной величины Y: $y_1 = 2^2 = 4$, $y_2 = 3^2 = 9$.

Тогда искомый закон распределения примет вид:

Y	4	9
P	0,6	0,4

Найдем плотность распределения $g(y)$ случайной величины $Y = \varphi(X)$, зная плотность распределения $f(x)$ непрерывной случайной величины X.

Чтобы найти связь между функциями $g(y)$, $f(x)$ и $Y = \varphi(X)$, воспользуемся следующими соотношениями:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(y)dy = 1 \text{ и } \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Перейдем к переменной y во втором интеграле. Для функции $y = \varphi(x)$ обратной является функция $x = \varphi^{-1}(y)$, откуда $dx = [\varphi^{-1}(y)]'dy$.

Следовательно, второй интеграл перепишется в виде:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\varphi^{-1}(y)\right)[\varphi^{-1}(y)]'dy = 1$$

Так как правые части первого и второго интеграла равны и пределы интегрирования одинаковы, то, приравняв подынтегральные функции, получим:

$$\boldsymbol{g(y) = f\left(\varphi^{-1}(y)\right)[\varphi^{-1}(y)]'}$$

Замечание 1. Полученная формула справедлива, если $Y = \varphi(X)$ строго возрастающая или строго убывающая функция

Пример 2. Непрерывная случайная величина X распределена нормировано:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Найти плотность распределения функции $Y = X^3$.

Решение.

Так как функция $y = x^3$ дифференцируема и строго возрастает, то можно применить формулу:

$$g(y) = f\left(\varphi^{-1}(y)\right)[\varphi^{-1}(y)]'$$

Найдем функцию, обратную функции $y = x^3$:

$$x = \varphi^{-1}(y) = y^{\frac{1}{3}}$$

откуда

$$dx = [\varphi^{-1}(y)]' = \left(y^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3y^{\frac{2}{3}}}$$

Найдем функцию $f\left(\varphi^{-1}(y)\right)$. По условию

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

поэтому

$$f\left(\varphi^{-1}(y)\right) = f\left(y^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(y^{\frac{1}{3}}\right)^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^{\frac{2}{3}}}{2}}$$

Таким образом, искомая плотность распределения:

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^{\frac{2}{3}}}{2}}\frac{1}{3y^{\frac{2}{3}}} = \frac{e^{-\frac{y^{\frac{2}{3}}}{2}}}{3\sqrt{2\pi}y^{\frac{2}{3}}}$$

Найдем математическое ожидание непрерывной случайной величины Y, связанной с непрерывной случайной величиной X законом $Y = \varphi(X)$:

$$M(Y) = M\left(\varphi(X)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot g(y) \cdot dy = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f\left(\varphi^{-1}(y)\right) \cdot [\varphi^{-1}(y)]' \cdot dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f\left(\varphi^{-1}(y)\right) \cdot d\left(\varphi^{-1}(y)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \cdot f(x) \cdot dx$$

Таким образом, получили:

$$\boldsymbol{M\left(\varphi(X)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \cdot f(x) \cdot dx}$$

Замечание 2. Если непрерывная случайная величина Y задана линейной функцией, тогда ее математическое ожидание

$$M(Y) = M(AX + B) = \int_{-\infty}^{\infty} (AX + B) \cdot f(x) \cdot dx = A\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) \cdot dx + B\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot dx$$
$$= A \cdot M(X) + B$$

дисперсия

$$D(X) = D(AX + B) = A^2D(X) + D(B) = A^2D(X)$$

и среднее квадратическое отклонение

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{D(AX + B)} = |A|\sigma(X)$$

Пример 3. Найти плотность распределения случайной величины Y, заданной линейной функцией

$$Y = 3X + 1,$$

если случайная величина X распределена нормально, ее математическое ожидание $a = 2$, а среднее квадратическое отклонение $\sigma = \frac{1}{2}$.

Решение.

Плотность распределения случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-2(x-2)^2}$$

Тогда для случайной величины Y математическое ожидание $a_y = 3 \cdot 2 + 1 = 7$, а среднее квадратическое отклонение $\sigma = |3| \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

Тогда плотность распределения случайной величина Y:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} = \frac{2}{3\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{2(x-7)^2}{9}}$$

§46. Функция двух случайных аргументов. Распределение суммы независимых слагаемых.

Определение 1. **Если каждой паре возможных значений случайных величин X и Y соответствует одно возможное значение случайной величины Z, то Z называется функцией двух случайных аргументов X и Y:**

$$\boldsymbol{Z = \varphi(X, Y)}$$

Найдем распределение функции $Z = X + Y$ по известным распределениям слагаемых. Для этого рассмотрим дискретные случайные величины X и Y.

Пример 1. Дискретные случайные величины X и Y заданы законами распределения:

X	1	2
P	0,4	0,6

Y	3	4
P	0,2	0,8

Найти закон распределения дискретной случайной величины $Z = X + Y$.

Решение.

Возможные значения случайной величины Z есть суммы каждого возможного значения X со всеми возможными значениями Y:

$z_1 = 1 + 3 = 4$. Вероятность этого значения равна $P(Z = 1 + 3 = 4) = 0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}08$.

$z_2 = 1 + 4 = 5$. Вероятность этого значения равна $P(Z = 1 + 4 = 5) = 0{,}4 \cdot 0{,}8 = 0{,}32$.

$z_3 = 2 + 3 = 5$. Вероятность этого значения равна $P(Z = 2 + 3 = 5) = 0{,}6 \cdot 0{,}2 = 0{,}12$.

$z_4 = 2 + 4 = 6$. Вероятность этого значения равна $P(Z = 2 + 4 = 6) = 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}48$.

Напишем искомый закон распределения, сложив предварительно вероятности несовместных событий $Z = z_2$, $Z = z_3$ $(0{,}32 + 0{,}12 = 0{,}44)$:

Z	4	5	6
P	0,08	0,44	0,48

Если известна плотность распределения $f_1(x)$ непрерывной случайной величины X и плотность распределения $f_2(y)$ непрерывной случайной величины Y, то плотность распределения $g(z)$ непрерывной случайной величины $Z = X + Y$:

$$\boldsymbol{g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(z - x)f_1(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(z - y)f_2(y)dy}$$

Замечание 1. Если возможные значения аргументов X, Y и Z неотрицательны, то

$$g(z) = \int_0^z f_2(z - x)f_1(x)dx = \int_0^z f_1(z - y)f_2(y)dy$$

Пример 2. Независимые непрерывные случайные величины X $(0 \le x < \infty)$ и Y $(0 \le y < \infty)$ заданы плотностями распределений:

$$f_1(x) = \frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}} \text{ и } f_2(y) = \frac{1}{4}e^{-\frac{y}{4}}$$

Найти плотность распределения случайной величины $Z = X + Y$.

Решение.

Возможные значения аргументов неотрицательны, поэтому воспользуемся формулой:

$$g(z) = \int_0^z f_2(z - x)f_1(x)dx = \int_0^z \left(\frac{1}{4}e^{-\frac{z-x}{4}}\right)\left(\frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}}\right)dx = \frac{1}{12}\int_0^z e^{-\frac{z}{4}}e^{\frac{x}{4}}e^{-\frac{x}{3}}dx = \frac{1}{12}e^{-\frac{z}{4}}\int_0^z e^{-\frac{x}{12}}dx$$

$$= -e^{-\frac{z}{4}}\int_0^z e^{-\frac{x}{12}}d\left(-\frac{x}{12}\right) = -e^{-\frac{z}{4}}e^{-\frac{x}{12}}\Big|_0^z = -e^{-\frac{z}{4}}\left(e^{-\frac{z}{12}} - e^0\right) = e^{-\frac{z}{4}} - e^{-\frac{z}{3}}$$

§47. Распределение случайной величины $X_n = \chi^2$, Стьюдента $S_n(x)$, Фишера-Снедекора $F_{m,n}(x)$. Показательное распределение. Функция надежности.

1. Пусть непрерывные случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_n$ имеют нормированное нормальное распределение. Тогда случайная величина $X = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$ распределена по закону χ^2 («хи квадрат») с n степенями свободы, т.е. χ_n^2, и имеет плотность распределения
$$f_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0 \\ \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n}{2}-1} \text{ при } x > 0 \end{cases}$$
где $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ – гамма-функция; в частности,
$$\Gamma(n+1) = n!$$
Замечание 1. Если случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_n$ связаны одним линейным соотношением, например
$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$
то число степеней свободы становиться на 1 меньше, т.е. число степеней свободы равно $n-1$.
Замечание 2. С возрастанием числа степеней свободы, т.е. $n \to \infty$, распределение «хи квадрат» медленно приближается к нормальному.
2. Пусть независимые случайные величины $X, X_1, X_2, \dots, X_n$ имеют нормированное нормальное распределение, а также математическое ожидание, равное $M(X) = M(X_i) = 0$, и среднее квадратическое отклонение, равное $\sigma(X) = \sigma(X_i) = 1$, где $i = 1,2,\dots,n$
Тогда непрерывная случайная величина t_n, равная
$$t_n = \frac{X}{\sqrt{\dfrac{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2}{n}}},$$
распределена по закону Стьюдента с n степенями свободы.
Плотность распределения случайной величины t_n
$$f_n(x) = S(x,n) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$
математическое ожидание
$$M(t_n) = 0$$
и дисперсия
$$D(t_n) = \frac{n}{n-2}$$
Замечание 3. С возрастанием числа степеней свободы, т.е. $n \to \infty$, распределение Стьюдента быстро стремиться к нормальному.
3. Пусть $X_1, X_2, \dots, X_m$ и $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ – взаимно независимые случайные величин, имеющие нормированное нормальное распределение.
Тогда непрерывная случайная величина F, равная
$$F_{m,n} = \frac{\dfrac{X_1 + X_2 + \dots + X_m}{m}}{\dfrac{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n}{n}},$$
имеет распределение Фишера-Снедекора с m степенями свободы числителя и с n степенями свободы знаменателя.
Плотность распределения случайной величины $F_{m,n}$:
$$f(x) = f_{m,n}(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\dfrac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} \dfrac{F^{\frac{m}{2}-1}}{\left(1 + \frac{m}{n}F\right)^{\frac{m+n}{2}}} \text{ при } F > 0 \\ 0 \text{ при } F \le 0 \end{cases}$$
4. Непрерывная случайная величина X имеет показательное распределение, если функция плотности распределения имеет вид:
$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} \text{ при } x \ge 0 \end{cases}$$
где $\lambda > 0$.
Математическое ожидание показательного распределения равно
$$M(X) = \frac{1}{\lambda}$$
дисперсия
$$D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$
среднее квадратическое отклонение
$$\sigma(X) = \frac{1}{\lambda}$$
Найдем интегральную функцию распределения:
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 1 - \lambda e^{-\lambda t}$$
Таким образом, интегральная функция распределения принимает вид:
$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0 \\ 1 - \lambda e^{-\lambda x} \text{ при } x \ge 0 \end{cases}$$
Вероятность попадания случайной величины X в интервал (α, β) :
$$P(\alpha < X < \beta) = 1 - e^{-\lambda\beta} - \left(1 - e^{-\lambda\alpha}\right) = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}$$
5. С показательным распределением тесно связана функция надежности $R(t)$.
Если T – время безотказной работы некоторого устройства, а функция $F(t)$ равна вероятности того, что данное устройство выйдет из строя за время T,
$$F(t) = P(T < t),$$
то вероятность безотказной работы за время длительностью t равна:
$$R(t) = 1 - F(t) = P(T > t)$$
Так как принято считать, что функция $F(t)$ имеет показательное распределение, т.е
$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t},$$
где λ – интенсивность отказов устройства в единицу времени,
то функция надежности будет определена следующим образом:
$$R(t) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right) = e^{-\lambda t}$$

§48. Дополнительные числовые характеристики случайной величины X, заданной плотностью распределения $f(x)$.

Определение 1. **Модой дискретной случайной величины называется наиболее вероятное значение случайной величины X.**
Например, для дискретной случайной величины X, заданной законом распределения

X	1	2	3
P	0,3	0,4	0,3

мода $M_o = 2$.
Определение 2. **Модой непрерывной случайной величины называется такое значение случайной величины $X = M_o$, для которой выполняется:**
$$f(M_o) = \max f(x)$$
Определение 3. **Медианой случайной величины X называется такое значение случайной величины $X = M_e$, для которого выполняется:**
$$P(X < M_e) = P(X > M_e) = \frac{1}{2}$$
Определение 4. **Квантилю порядка p случайной величины X называется такое значение случайной величины $X = x_p$, для которого выполняется:**
$$P(X < x_p) = p$$
Разные распределения будут иметь разные квантили, которые, как правило, протабулированы.
Квантиль $x_{\frac{1}{4}}, x_{\frac{2}{4}}, x_{\frac{3}{4}}$ называются квартилю.
Квантиль $x_{0,1}, x_{0,2}, \dots, x_{0,9}$ называется децитилю.
Квантиль $x_{0,01}, x_{0,02}, \dots, x_{0,99}$ называется процентилю.
Порядок квантили p связан с уровнем значимости α следующим образом:
$$p = 1 - \alpha$$
Замечание 1. В разных учебниках таблицы квантили организованы по разному.

§49. Система случайных величин.

Совместное рассмотрение нескольких случайных величин $X, Y, \dots, W$ называется системой случайных величин $(X, Y, \dots, W)$.
Если имеется n случайных величин, то система является n-мерной. В дальнейшем будем рассматривать систему двух случайных величин.
Геометрически двумерную случайную величину удобно изображать в виде декартовой системы координат. В этом случае возможные значения двумерной случайной величины будут изображаться точкой на плоскости.
Определение 1. **Законом распределения системы двух дискретных случайных величин (X, Y) называется таблица вида:**

$y \backslash x$	x_1	x_2	…	x_n
y_1	$p(x_1, y_1)$	$p(x_2, y_1)$	…	$p(x_n, y_1)$
y_2	$p(x_1, y_2)$	$p(x_2, y_2)$	…	$p(x_n, y_2)$
…	…	…	…	…
y_m	$p(x_1, y_m)$	$p(x_2, y_m)$	…	$p(x_n, y_m)$

Очевидно, что

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j) = 1$$

Можно найти законы распределения составляющих X и Y.

Пример 1. Найти законы распределения составляющих X и Y двумерной случайной величины (X, Y), заданной законом распределения

$y \backslash x$	x_1	x_2	x_3
y_1	0,1	0,3	0,2
y_2	0,06	0,18	0,16

Решение.
Сложив вероятности по столбцам, получим вероятности возможных значений составляющей X:

$$P(x_1) = 0{,}1 + 0{,}06 = 0{,}16$$
$$P(x_2) = 0{,}3 + 0{,}18 = 0{,}48$$
$$P(x_3) = 0{,}2 + 0{,}16 = 0{,}36$$

Напишем закон распределения составляющей X:

X	x_1	x_2	x_3
P	0,16	0,48	0,36

Сложив вероятности по строкам, получим вероятности возможных значений составляющей Y:

$$P(y_1) = 0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}2 = 0{,}6$$
$$P(y_2) = 0{,}06 + 0{,}18 + 0{,}16 = 0{,}4$$

Напишем закон распределения составляющей Y:

Y	y_1	y_2
P	0,6	0,4

Определение 2. **Функцией распределения системы двух случайных величин (X, Y) называется функция**

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y)$$

Для функции распределения двумерной случайной величины (X, Y) справедливы следующие свойства.
Свойство 1. Значение функции распределения удовлетворяют двойному неравенству

$$0 \le F(x, y) \le 1$$

Свойство 2. $F(x, y)$ – неубывающая функция по каждому аргументу, т.е.

$$F(x_2, y_1) \ge F(x_1, y_1), \text{ если } x_2 \ge x_1$$
$$F(x_1, y_2) \ge F(x_1, y_1), \text{ если } y_2 \ge y_1$$

Свойство 3.

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} F(x, y) = 1$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi(e^{-x} + e^{x})}$$

Свойство 4. При $y = \infty$ функция распределения системы становится функцией распределения составляющей X:

$$F(x, \infty) = F_1(x).$$

При $x = \infty$ функция распределения системы становится функцией распределения составляющей Y:

$$F(\infty, y) = F_2(y)$$

Эти функции также называют маргинальными функциями распределения двумерной случайной величины (X, Y). Имеют место также предельные отношения:

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to-\infty}} F(x, y) = 0$$
$$\lim_{x\to\infty} F(x, y) = 0$$
$$\lim_{y\to-\infty} F(x, y) = 0$$

Свойство 5. Вероятность попадания случайной точки (X, Y) в некоторый прямоугольник равна:

$$P(a < x < b, c < y < d) = [F(b, d) - F(a, d)] - [F(b, c) - F(a, c)]$$

§50. Плотность распределения вероятностей системы случайных величин (X,Y).

Определение 1. **Плотностью распределения вероятностей двумерной случайной величины (X,Y) называется вторая смешанная частная производная от функции распределения:**

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{P(x<X<x+\Delta x,\ y<Y<y+\Delta y)}{\Delta x\Delta y}$$

или

$$f(x,y)=F''_{xy}$$

По аналогии с одномерной случайной величиной для плотности вероятностей двумерной случайной величины справедливы следующие свойства.

Свойство 1. Двумерная плотность распределения вероятностей неотрицательна

$$f(x,y)\ge 0$$

Свойство 2. Вероятность попаданий двумерной случайной величины (X,Y) в некоторую область D равна двойному интегралу:

$$P\big((X,Y)\in D\big)=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

Свойство 3. Интегральная функция распределения связана с плотностью распределения следующим образом:

$$F(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y}f(x,y)dxdy$$

Свойство 4. Двойной несобственный интеграл с бесконечными пределами от плотности распределения двумерной случайной величины равен единице:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=1$$

Свойство 5. Маргинальные функции распределения составляющих X и Y соответственно равны

$$F_X(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy$$

$$F_Y(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{y}f(x,y)dxdy$$

Свойство 6. Маргинальные функции плотности распределения составляющих X и Y соответственно равны

$$f_X(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\frac{dF_X(x)}{dx}$$

$$f_Y(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\frac{dF_Y(y)}{dy}$$

Пример 1. Двумерная случайная величина (X,Y) задана плотностью распределения

$$f(x,y)=\frac{a}{(1+x^2)(1+y^2)}$$

Найти:
1. коэффициент a
2. функцию распределения $F(x,y)$
3. вероятность попадания в область $\{|x|<1,\ \ |y|<1\}$
4. маргинальные функции распределения $F_X(x)$ и $F_Y(y)$
5. маргинальные функции плотности распределения $f_X(x)$ и $f_Y(y)$

Решение.

1. Найдем коэффициент a. Для этого воспользуемся свойством 4:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=1$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{a}{(1+x^2)(1+y^2)}dxdy=1$$

Преобразуем левую часть выражения:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{a}{(1+x^2)(1+y^2)}dxdy=a\int\limits_{-\infty}^{\infty}dx\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{(1+x^2)(1+y^2)}=a\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{1+y^2}$$

$$=a\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\operatorname{arctg}y|_{-\infty}^{\infty}dx=a\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)dx=a\pi\operatorname{arctg}x|_{-\infty}^{\infty}$$

$$=a\pi\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=a\pi^2$$

Таким образом, получили:

$$a\pi^2=1$$

откуда

$$a=\frac{1}{\pi^2}$$

Следовательно, функция плотности распределения примет вид:

$$f(x,y)=\frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}$$

2. Найдем функцию распределения $F(x,y)$. Для этого воспользуемся свойством 3:

$$F(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y}f(x,y)dxdy$$

$$F(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y}\frac{dxdy}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{dx}{1+x^2}\int\limits_{-\infty}^{y}\frac{dy}{1+y^2}=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{1}{1+x^2}\operatorname{arctg}y|_{-\infty}^{y}dx$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{1}{1+x^2}\left(\operatorname{arctg}y-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)dx=\frac{1}{\pi^2}\left(\operatorname{arctg}y+\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{arctg}x|_{-\infty}^{x}$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\left(\operatorname{arctg}x+\frac{\pi}{2}\right)\left(\operatorname{arctg}y+\frac{\pi}{2}\right)$$

3. Найдем вероятность попадания в область $\{|x|<1,\ \ |y|<1\}$. Для этого воспользуемся свойством 2:

$$P\big((X,Y)\in D\big)=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

$$P\big((X,Y)\in\{|x|<1,\ \ |y|<1\}\big)=\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\frac{dxdy}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2}\int\limits_{-1}^{1}\frac{dy}{1+y^2}$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}\operatorname{arctg}y|_{-1}^{1}dx=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}(\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}(-1))dx$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\operatorname{arctg}x|_{-1}^{1}=\frac{1}{\pi^2}\frac{\pi}{2}(\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}(-1))=\frac{1}{2\pi}\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{1}{4}$$

4. Найдем маргинальные функции распределения $F_X(x)$ и $F_Y(y)$. Для этого воспользуемся свойством 5:

$$F_X(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy$$

$$F_X(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dxdy}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{dx}{1+x^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{1+y^2}=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{1}{1+x^2}\operatorname{arctg}y|_{-\infty}^{\infty}dx$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{1}{1+x^2}\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)dx=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\operatorname{arctg}x|_{-\infty}^{x}$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\pi\left(\operatorname{arctg}x-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}x+\frac{\pi}{2}\right)$$

Аналогично находим

$$F_Y(y)=\frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}y+\frac{\pi}{2}\right)$$

5. Найдем маргинальные функции плотности распределения $f_X(x)$ и $f_Y(y)$. Для этого воспользуемся свойством 6:

$$f_X(x)=\frac{dF_X(x)}{dx}$$

$$f_X(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}x+\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

Аналогично находим

$$f_Y(y)=\frac{1}{\pi(1+y^2)}$$

§51. Условные законы распределения системы случайных величин (X,Y).

Известно, что если события A и B независимы, то условная вероятность события B отличается от его безусловной вероятности. В этом случае

$$P(AB) = P(A)P_A(B)$$

откуда

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

Для простоты рассмотрим дискретную систему случайных величин (X,Y), заданную законом распределения:

$y \backslash x$	x_1	x_2	x_3
y_1	0,1	0,3	0,2
y_2	0,06	0,18	0,16

Сложив вероятности по столбцам, получим вероятности возможных значений составляющей X:

$$p(x_1) = 0{,}1 + 0{,}06 = 0{,}16$$
$$p(x_2) = 0{,}3 + 0{,}18 = 0{,}48$$
$$p(x_3) = 0{,}2 + 0{,}16 = 0{,}36$$

Сложив вероятности по строкам, получим вероятности возможных значений составляющей Y:

$$p(y_1) = 0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}2 = 0{,}6$$
$$p(y_2) = 0{,}06 + 0{,}18 + 0{,}16 = 0{,}4$$

Допустим, что в результате испытания случайная величина Y приняла значение y_1. Тогда условная вероятность составляющей X при $Y = y_1$ находится как:

$$p(x_1|y_1) = \frac{p(x_1,y_1)}{p(y_1)}$$

В общем случае,

$$p(x_i|y_j) = \frac{p(x_i,y_j)}{p(y_j)}$$

где $p(y_j) = \sum_{k=1}^{n} p(y_j,x_k)$.

Таким образом, можем записать условный закон распределения составляющей X:

X	x_1	x_2	x_3
$p(x_i\|y_1)$	$\frac{0,1}{0,6}$	$\frac{0,3}{0,6}$	$\frac{0,2}{0,6}$

X	x_1	x_2	x_3
$p(x_i\|y_2)$	$\frac{0,061}{0,4}$	$\frac{0,18}{0,4}$	$\frac{0,16}{0,4}$

Аналогично записывается и условный закон распределения составляющей Y:

Y	y_1	y_2
$p(y_i\|x_1)$	$\frac{0,1}{0,16}$	$\frac{0,06}{0,16}$

Y	y_1	y_2
$p(y_i\|x_2)$	$\frac{0,3}{0,48}$	$\frac{0,18}{0,48}$

Y	y_1	y_2
$p(y_i\|x_3)$	$\frac{0,2}{0,38}$	$\frac{0,16}{0,38}$

По аналоги можно найти условные законы распределения составляющих системы непрерывных случайных величин.

Условная плотность $\varphi(x|y)$ распределения составляющей Y равна:

$$\varphi(x|y) = \frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy}$$

Условная плотность $\psi(y|x)$ распределения составляющей X равна:

$$\psi(y|x) = \frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx}$$

Как и любая плотность распределения, условные плотности обладают следующими свойствами:

$$\varphi(x|y) \geq 0, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x|y)dx = 1$$

$$\psi(y|x) \geq 0, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \psi(y|x)dy = 1$$

Пример 1. Двумерная случайная величина (X,Y) задана плотностью распределения

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi r^2} \text{ при } x^2+y^2 \leq r^2 \\ 0 \text{ при } x^2+y^2 > r^2 \end{cases}$$

Найти условные законы распределения вероятностей составляющих X и Y.

Решение.

Найдем условную плотность распределения составляющей X при $|x| < \sqrt{r^2-y^2}$ по формуле:

$$\varphi(x|y) = \frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx} = \frac{\frac{1}{\pi r^2}}{\int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} \frac{1}{\pi r^2}dx} = \frac{\pi r^2}{\pi r^2 \int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} dx} = \frac{1}{x\Big|_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}}} = \frac{1}{2\sqrt{r^2-y^2}}$$

Аналогично найдем условную плотность составляющей Y:

$$\psi(y|x) = \frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy} = \frac{\frac{1}{\pi r^2}}{\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \frac{1}{\pi r^2}dy} = \frac{\pi r^2}{\pi r^2 \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} dy} = \frac{1}{y\Big|_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}}} = \frac{1}{2\sqrt{r^2-x^2}}$$

Таким образом, получили следующие законы распределения вероятностей составляющих:

$$\varphi(x|y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{r^2-y^2}} \text{ при } x^2+y^2 \leq r^2 \\ 0 \text{ при } x^2+y^2 > r^2 \end{cases}$$

$$\psi(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{r^2-x^2}} \text{ при } x^2+y^2 \leq r^2 \\ 0 \text{ при } x^2+y^2 > r^2 \end{cases}$$

§52. Зависимость и независимость системы случайных величин.

Определение 1. **Две случайные величины называются независимыми, если закон распределения одной из них не зависит от того, какие значения принимает другая случайная величина.**

Теорема 1. Для того чтобы случайные величины X и Y были независимы, необходимо и достаточно, чтобы интегральная функция распределения системы (X,Y) была равна произведению интегральных функций распределения составляющих:

$$F(x,y) = F_1(x)F_2(y)$$

Доказательство.

а) Необходимость.

Пусть случайные величины X и Y независимы, тогда события $X < x$ и $Y < y$ также независимы, следовательно, вероятность совместного появления этих событий равна произведению их вероятностей:

$$P(X < x, Y < y) = P(X < x)P(Y < y)$$

По определению функции распределения

$$P(X < x, Y < y) = F(x,y)$$

а также

$$P(X < x) = F_1(x)$$
$$P(Y < y) = F_2(y)$$

то

$$F(x,y) = F_1(x)F_2(y)$$

Что и требовалось доказать.

а) Необходимость.

По условию теоремы,

$$F(x,y) = F_1(x)F_2(y)$$

Согласно определению интегральной функции распределения, данное выражение перепишем в виде

$$P(X < x, Y < y) = P(X < x)P(Y < y)$$

т.е. вероятность совместного появления событий $X < x$ и $Y < y$ равна произведению вероятностей этих событий. Следовательно, случайные величины X и Y независимы.

Что и требовалось доказать.

Следствие 1. Для системы двух независимых случайных величин (X,Y) справедливо:

$$f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$$

Доказательство.

Согласно определению плотности распределения

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\big(F(x,y)\big)\right)$$

Учитывая, что $F(x,y) = F_1(x)F_2(y)$, получим:

$$f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\big(F_1(x)F_2(y)\big)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(F_2(y)\frac{\partial F_1(x)}{dx}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\big(F_2(y)f_1(x)\big) = f_1(x)\frac{\partial}{\partial y}\big(F_2(y)\big)$$
$$= f_1(x)f_2(y)$$

Что и требовалось доказать.

§53. Числовые характеристики системы двух случайных величин (X,Y). Корреляционный момент μ_{xy}. Коэффициент корреляции.

Определение 1. **Математическим ожиданием системы двух случайных величин (X,Y) называется точка с координатами $(M(X),M(Y))=(m_x,m_y)$, где $m_x=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,y)dxdy$, $m_y=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}yf(x,y)dxdy$.**

Геометрический смысл математического ожидания системы двух случайных величин - центр тяжести плоской области D.

Если двумерная случайная величина (X,Y) является дискретной, то

$$m_x=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i p(x_i,y_j)$$

$$m_y=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}y_j p(x_i,y_j)$$

Дисперсия системы двух случайных величин (X,Y) по составляющей X:

$$D(X)=M((X-m_x)^2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)^2 f(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x,y)dxdy-m_x^2$$

Дисперсия системы двух случайных величин (X,Y) по составляющей Y:

$$D(Y)=M\left(\left(Y-m_y\right)^2\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(y-m_y\right)^2 f(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}y^2 f(x,y)dxdy-m_y^2$$

Среднее квадратическое отклонение соответственно

$$\sigma_x=\sqrt{D(X)}$$

$$\sigma_y=\sqrt{D(Y)}$$

Определение 2. **Условным математическим ожиданием системы двух случайных величин (X,Y) называется функция**

$$m_x(y)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,y)dx$$

или

$$m_y(x)=\int_{-\infty}^{\infty}yf(x,y)dy$$

Эти функции называются также регрессией составляющей X от Y или Y от X соответственно.

Если двумерная случайная величина (X,Y) является дискретной, то

$$m_x(y)=\sum_{j=1}^{k}x_j p(x_j|y_i)$$

$$m_y(x)=\sum_{j=1}^{k}y_j p(x_i|y_j)$$

Определение 3. **Корреляционным моментом (ковариацией) системы двух случайных величин (X,Y) называется математическое ожидание произведения отклонений этих величин:**

$$\mu_{xy}=M\left((X-m_x)(Y-m_y)\right)$$

Если двумерная случайная величина (X,Y) является дискретной, то ковариация равна

$$\mu_{xy}=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(x_i-m_x)(y_j-m_y)p(x_i,y_j)$$

Если двумерная случайная величина (X,Y) является дискретной, то ковариация равна

$$\mu_{xy}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)(y-m_y)f(x,y)dxdy$$

Корреляционный момент служит характеристикой зависимости между случайными величинами X и Y.

Замечание 1. Корреляционный момент можно записать в виде:

$$\mu_{xy}=M\left((X-m_x)(Y-m_y)\right)=M(XY-m_xY-m_yX+m_xm_y)$$
$$=M(XY)-m_xm_y-m_ym_x+m_xm_y=M(XY)-m_xm_y$$

Если двумерная случайная величина (X,Y) является дискретной, то формула примет вид

$$\mu_{xy}=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}x_iy_jp(x_i,y_j)-m_xm_y$$

Если двумерная случайная величина (X,Y) является дискретной, то формула примет вид

$$\mu_{xy}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)dxdy$$

Из определения ковариации вытекают следующие свойства

Свойство 1. $\mu_{xy}=\mu_{yx}$

Свойство 2. $\mu_{xx}=D(X)=\sigma_x^2$, $\quad\mu_{yy}=D(Y)=\sigma_y^2$

Свойство 3. Если случайные величины X и Y независимы, то корреляционный момент равен нулю:

$$\mu_{xy}=0$$

Доказательство.

По условию теоремы, X и Y - независимые случайные величины, следовательно их отклонения $X-m_x$ и $Y-m_y$ также независимы.

Исходя из определения корреляционного момента и свойств математического ожидания, получим:

$$\mu_{xy}=M\left((X-m_x)(Y-m_y)\right)=M(X-m_x)M(Y-m_y)=0$$

Что и требовалось доказать.

Теорема 1. Абсолютная величина корреляционного момента системы двух случайных величин X и Y не превышает среднего геометрического их дисперсий:

$$|\mu_{xy}|\le\sqrt{D(X)D(Y)}$$

Определение 4. **Коэффициентом корреляции системы двух случайных величин (X,Y) называется отношение корреляционного момента к произведению средних квадратических отклонений этих величин**

$$r_{xy}=\frac{\mu_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}$$

Из свойств корреляционного момента следуют свойства коэффициента корреляции.

1. $r_{xx}=1,\ r_{yy}=1$
2. Абсолютная величина коэффициента корреляции не превышает единицы:
$$|r_{xy}|\le 1$$
3. Если случайные величины X и Y независимы, то коэффициент корреляции равен нулю:
$$r_{xy}=0$$
4. Если абсолютная величина коэффициента корреляции равна единице, т.е. $|r_{xy}|=1$, то случайные величины X и Y зависимы и эта зависимость линейна $Y=aX+b$. Справедливо также и обратное свойство.

§54. Нормальный закон распределения системы двух случайных величин.

Определение 1. **Нормальным законом распределения системы двух случайных величин (X,Y) называется выражение вида:**

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r_{xy}^2}}\cdot e^{-\frac{1}{2\sqrt{1-r_{xy}^2}}\left[\frac{(x-a)^2}{\sigma_x^2}+\frac{(y-b)^2}{\sigma_y^2}+2r_{xy}\left(\frac{x-a}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y-b}{\sigma_y}\right)\right]}$$

где $a=M(X)$, $b=M(Y)$.

Если случайные величины X и Y независимы, т.е. $r_{xy}=0$, то нормальный закон распределения двумерной случайной величины (X,Y) примет вид:

$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{\sigma_x^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y}\cdot e^{-\frac{(y-b)^2}{\sigma_y^2}}$$

Если же область D возможных значения случайных величин X и Y определить как

$$D=\{a<x<b, c<y<d\},$$

то будет справедливо выражение

$$P(D)=\frac{1}{4}\left[\left(\Phi\left(\frac{b-m_x}{\sigma_x}\right)-\Phi\left(\frac{a-m_x}{\sigma_x}\right)\right)\left(\Phi\left(\frac{d-m_y}{\sigma_y}\right)-\Phi\left(\frac{c-m_y}{\sigma_y}\right)\right)\right]$$

Основная задача математической статистики – установить закономерности методами теории вероятности:

1. оценка неизвестной функции распределения и ее параметров;
2. планирование эксперимента, обработка экспериментальных данных и выявление новых закономерностей

§55. Основные понятия математической статистики. Эмпирическая функция распределения. Полигон и гистограмма.

Определение 1. **Выборочной совокупностью (выборкой) называется совокупность случайно отобранных объектов.**

Определение 2. **Генеральной совокупностью называется совокупность, из которой производится выборка.**

Определение 3. **Объектом совокупности называется число объектов этой совокупности.**

Пример 1. Если из 1000 деталей отобрано для обследования 100 деталей, то объем генеральной совокупности $N = 1000$, а объем выборки $n = 100$.

Замечание 1. Генеральная совокупность – это конечное число, но если оно велико, то часто допускают, что генеральная совокупность бесконечна, что практически не сказывается на результатах обработки данных.

Различают следующие выборки:

1. повторная – это выборка, при которой отобранный объект возвращается в генеральную совокупность;
2. бесповторная – это выборка, при которой отобранный объект в генеральную совокупность не возвращается;
3. репрезентативная (представительная) – это выборка, которая правильно представляет пропорции генеральной совокупности.

Для того, чтобы выборка была репрезентативной, различают следующие способы отбора:

1. простой случайный бесповторный отбор (лотерея);
2. простой случайный повторный отбор (лотерея с возвращением);
3. типический отбор – отбор, при которой объекты отбираются не из всех генеральной совокупности, а из каждой ее «типической» части;
4. механический отбор – отбор, при котором генеральную совокупность делят на столько групп, сколько объектов должно войти в выборку, а из каждой группы отбирают один объект. Например, необходимо отобрать 20% деталей, изготовленный станком. Берем каждую пятую деталь.
5. серийный отбор – отбор, при котором объекты отбирают из генеральной совокупности не по одному, а «сериями», которые подвергаются сплошному исследованию.

Пример 2. Задано распределение частот выборки объема $n = 20$:

x_i	2	6	10	– вариационный ряд
n_i	3	10	7	– частоты вариант

Найти распределение относительных частот $W_i = \frac{n_i}{n}$.

Решение.

Чтобы сумма частот вариант равнялась единице, разделим каждую из них на объем выборки. Таким образом, получим распределение относительных частот.

x_i	2	6	10
$\frac{n_i}{n}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{10}{20}$	$\frac{7}{20}$

Эмпирическая функция распределения в данном случае будет иметь вид:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 2 \\ \frac{3}{20} \text{ при } 2 < x \le 6 \\ \frac{13}{20} \text{ при } 6 < x \le 10 \\ 1 \text{ при } 10 < x < \infty \end{cases}$$

Выборки можно изображать графически в виде:

1. Полигона частот.
2. Полигона относительных частот.
3. Гистограммы частот.
4. Гистограммы относительных частот.