§1. Определение производной. Геометрический смысл производной.

Пусть задана функция $y = f(x)$.
Выберем некоторую точку x_0 и вычислим значение функции в этой точке. Оно будет равно $f(x_0)$.
Предадим аргументу x приращение Δx и вычислим значение функции в точке. Оно будет равно $f(x_0 + \Delta x)$.
Тогда приращение функции $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.
Вычислим предел приращения функции к приращению аргумента:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Если этот предел существует, то он называется производной и обозначается $f'(x_0), \frac{dy}{dx}, f'_x(x_0)$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Пример 1. Найти производную от функции $y = x^2$.
Решение. Воспользуемся определением производной:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Δx – приращение аргумента.
Находим приращение функции:
$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2$,
$\Delta y = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2$,
$\Delta y = 2x\Delta x + \Delta x^2$.
Составляем отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$.
Переходя к пределу, найдем производную от данной функции:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x = 2x$$

Следовательно, производная $y' = (x^2)' = 2x$.

По построению видно, что геометрический смысл производной $f'(x)$ – это тангенс угла наклона, образованного положительным направлением оси Ox и касательной к графику функции $f(x)$ в данной точке:
$y' = f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$.

Определение 1. **Если функция $f(x)$ имеет производную в точке $x = x_0$, то данная функция дифференцируема в точке x_0.**

Определение 1. **Если функция $f(x)$ дифференцируема в каждой точке отрезка $[a, b]$, то данная функция дифференцируема на отрезке $[a, b]$.**

Теорема 1. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то данная функция непрерывна в этой точке.

Доказательство.
По условию теоремы, функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, т.е. имеет производную в этой точке. Следовательно, выполняется:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

или в другой записи

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

По теореме о представлении функции в виде постоянного числа и бесконечно малой, получим:
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(x)$,
где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $\Delta x \to 0$.
Выразим из этого равенства Δy:
$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(x)\Delta x$,
Вычислим предел от Δy:
$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} (f'(x_0)\Delta x + \alpha(x)\Delta x) = 0$.
Следовательно, выполняется определение непрерывности $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, т.е. функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0.

Замечание 1. Обратное заключение неверно, т.е., несмотря на то, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, производной $f'(x)$ в этой точке может и не существовать.

Пример 2.
Решение.

§2. Производная функции $y = x^n$, где n - целые положительные числа.

Воспользуемся определением производной:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Δx – приращение аргумента,

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Для вычисления Δy воспользуемся биномом Ньютона:
$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n = x^n + nx^{n-1}\Delta x + \cdots + \Delta x^n - x^n = nx^{n-1}\Delta x + \cdots + \Delta x^n$.
Найдем предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{nx^{n-1}\Delta x + \cdots + \Delta x^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}\Delta x + \cdots + \Delta x^{n-1} \right) = nx^{n-1}$$

Следовательно, $\boldsymbol{y' = (x^n)' = nx^{n-1}}$.

Пример 1. Вычислить производную функции $y = x^5$.
Решение. $y' = (x^5)' = 5x^{5-1} = 5x^4$.

§3. Производные функций $y = \sin x, y = \cos x$.

Пусть дана функция $f(x) = \sin x$. Воспользуемся определением производной:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin(x)}{\Delta x}$$

Разложим полученное выражение по формуле разности синусов:

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{x+\Delta x - x}{2}\cos\frac{x+\Delta x+x}{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\frac{2x+\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Выражение $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$ представляет собой первый замечательный предел и равно 1. На основании того, что функция $f(x) = \cos x$ непрерывна, получаем:

$$(\sin x)' = 1\cos x = \cos x.$$

Следовательно, $(\sin x)' = \cos x$.

Аналогично, можно получить производную функции $f(x) = \cos x$.

Воспользуемся определением производной:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$(\cos x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos(x)}{\Delta x}$$

Разложим полученное выражение по формуле разности косинусов:

$$(\cos x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2\sin\frac{x+\Delta x - x}{2}\sin\frac{x+\Delta x+x}{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2\sin\frac{\Delta x}{2}\sin\frac{2x+\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \lim_{\Delta x \to 0} \sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Выражение $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$ представляет собой первый замечательный предел и равно 1. На основании того, что функция $f(x) = \sin x$ непрерывна, получаем:

$$(\cos x)' = -1\sin x = -\sin x.$$

Следовательно, $(\cos x)' = -\sin x$.

§4. Производные постоянной, произведения постоянной на функцию, суммы, произведения, частного.

Теорема 1. Производная постоянной равна нулю:

$$(C)' = 0.$$

Доказательство.

$f(x) = C$ есть такая функция от x, значение которой при всех x равны C.

Воспользуемся определением производной:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$C' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C - C}{\Delta x} = 0$$

Что и требовалось доказать.

Теорема 2. Производная произведения постоянной на функцию $f(x)$ равна произведению этой постоянной на производную данной функции:

$(Cf(x))' = Cf'(x)$.

Доказательство.

Воспользуемся определением производной:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$(Cf(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{Cf(x+\Delta x) - Cf(x)}{\Delta x}$$

Т.к. C постоянная, вынесем её за знак предела:

$$(Cf(x))' = C\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = Cf'(x)$$

Что и требовалось доказать.

Теорема 3. Производная суммы двух функций равна сумме производных этих функций:

$\left(f_1(x) + f_2(x)\right)' = f_1'(x) + f_2'(x)$.

Доказательство.

Воспользуемся определением производной:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$(f_1(x) + f_2(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f_1(x+\Delta x) + f_2(x+\Delta x)] - [f_1(x) + f_2(x)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f_1(x+\Delta x) - f_1(x)}{\Delta x} + \frac{f_2(x+\Delta x) - f_2(x)}{\Delta x}\right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_1(x+\Delta x) - f_1(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_2(x+\Delta x) - f_2(x)}{\Delta x} = f_1'(x) + f_2'(x)$$

Что и требовалось доказать.

Теорема 4. Производная от произведения двух функций равна произведению производной первой функции на вторую функцию плюс произведении первой функции на производную от второй функции:

$(uv)' = u'v + uv'$.

Доказательство.

Воспользуемся определением производной:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$(uv)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u+\Delta u)(v+\Delta v) - uv}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{uv + u\Delta v + \Delta u v + \Delta u\Delta v - uv}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u\Delta v + \Delta u v + \Delta u\Delta v}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{u\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u v}{\Delta x} + \frac{\Delta u\Delta v}{\Delta x}\right) = u\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + v\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Т.к. $u(x)$ – дифференцируемая функция, то она непрерывна. Следовательно, $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta u = 0$.Кроме того,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v'$$

Таким образом, $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = 0$ и мы окончательно получаем:

$(uv)' = u'v + uv'$.

Что и требовалось доказать.

Теорема 5. Производная от частного от деления двух функций равна дроби, у которой знаменатель есть квадрат знаменателя данной дроби, а числитель есть разность между произведение знаменателя на производную числителя и произведением числителя на производную знаменателя:

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Доказательство.

Воспользуемся определением производной:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{uv + \Delta u v - u\Delta v - uv}{v(v+\Delta v)}}{\Delta x} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta u v}{\Delta x} - \frac{u\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}$$

$$= \frac{\lim_{\Delta x \to 0} v\frac{\Delta u}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{\lim_{\Delta x \to 0} v(v+\Delta v)} = \frac{v\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - u\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v\lim_{\Delta x \to 0} (v+\Delta v)}$$

Т.к. $v(x)$ – дифференцируемая функция, то она непрерывна. Следовательно, получим:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v\lim_{\Delta x \to 0} (v+\Delta v)} = \frac{u'v - uv'}{vv} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Что и требовалось доказать.

Пример 1. Найти производную от функции $y = 2\sin x$.

Решение.

$$y' = 2(\sin x)' = 2\cos x$$

Пример 2. Найти производную от функции $y = x^2 + \sin x$.

Решение.

$$y' = (x^2)' + (\sin x)' = 2x + \cos x$$

Пример 3. Найти производную от функции $y = \frac{\sin x}{x^2}$.

Решение.

$$y' = \left(\frac{\sin x}{x^2}\right)' = \frac{x^2\cos x - 2x\sin x}{x^4} = \frac{x(x\cos x - 2\sin x)}{x^4} = \frac{x\cos x - 2\sin x}{x^3}$$

§5. Производная логарифмической функции.

Теорема 1. Производная от функции $\log_a x$ равна $\frac{1}{x}\log_a e$:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\ln a}.$$

Доказательство.

Воспользуемся определением производной:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$(\log_a x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a(x+\Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{1}{\Delta x}\log_a \frac{x+\Delta x}{x}\right] = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1 + \frac{1}{\frac{x}{\Delta x}}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{x}\lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{x}{\Delta x}\log_a\left(1 + \frac{1}{\frac{x}{\Delta x}}\right)\right] = \frac{1}{x}\lim_{\Delta x \to 0} \log_a\left(1 + \frac{1}{\frac{x}{\Delta x}}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

$$= \frac{1}{x}\log_a \lim_{\Delta x \to 0} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{\Delta x}}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\ln e}$$

Что и требовалось доказать.

§6. Производная сложной функции.

Пусть дана сложная функция $y = f(x)$, т.е. $y = F(u)$, где $u = \varphi(x)$. Следовательно, функция примет вид $y = F(\varphi(x))$.

Пример 1. Найти производную от сложной функции $y = \sin x^2$.

Решение.

$y = \sin u$, а $u = x^2$. Тогда производная:

$$y' = (\sin x^2)' = 2x\cos x^2$$

Теорема 1. Производная сложной функции $y = F(\varphi(x))$равна:

$$y' = [F(\varphi(x))]' = F'(\varphi(x))\varphi'(x).$$

Доказательство.

По условию теоремы считаем, что функция $F(u)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы.

$$F'(u) = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta u}$$

$$u' = \varphi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta F}{\Delta u} = F'(u) + \alpha(u)$$

$$\Delta F = \Delta u F'(u) + \Delta u\alpha(u)$$

где $\alpha(u)$ – бесконечно малая.

Разделим обе части последнего равенства на Δx:

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = F'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha(u)\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = F'(u)\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha(u)\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = F'(u)u'(x)$$

Что и требовалось доказать.

Пример 2. Найти производную от сложной функции $y = \ln\sin x$.

Решение.

$$y' = (\ln\sin x)' = \frac{1}{\sin x}\cos x = \operatorname{ctg} x$$

Пример 3. Найти производную от сложной функции $y = \ln\sin x^2$.

Решение.

$$y' = (\ln\sin x^2)' = \frac{1}{\sin x}2x\cos x^2 = 2x\operatorname{ctg} x^2$$

§7. Производная функции $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\ln|x|$.

Теорема 1. Производная функции $\operatorname{tg} x$ равна $\frac{1}{\cos^2 x}$:

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Доказательство.
Воспользуемся формулой $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ и правилами дифференцирования дроби и получим:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cos x - \sin x\,(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Что и требовалось доказать.

Аналогично находится производная функции $\operatorname{ctg} x$.

Теорема 2. Производная функции $\operatorname{ctg} x$ равна $\frac{1}{\sin^2 x}$:

$$(\operatorname{ctg} x)' = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Доказательство.
Воспользуемся формулой $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ и правилами дифференцирования дроби и получим:

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}$$

Что и требовалось доказать.

Теорема 3. Производная функции $\ln|x|$ равна $\frac{1}{x}$:

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}.$$

Доказательство.
Если $x > 0$, то $|x| = x$ и $\ln|x| = \ln x$, тогда производная $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.
Если $x < 0$, то $|x| = -x$ и $\ln|x| = \ln(-x)$, тогда производная $(\ln(-x))' = \frac{1}{x}$
Следовательно, во всех случаях $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$.
Что и требовалось доказать.

§8. Неявная функция и ее дифференциал.

Определение 1. **Функция вида $F(x,y)$ называется неявной.**
Пример 1. $y = x^2$ - явная функция, $y - x^2 = 0$ - неявная функция.
При дифференцировании неявной функции дифференцируем обе части уравнения, считая y сложной функцией.
Пример 2. Найти производную от неявной функции $y - x^2 = 0$.
Решение. $(y - x^2)' = (0)'$

$$1y' - 2x = 0$$
$$y' = 2x$$

Пример 3. Найти производную от неявной функции $y^2 - \operatorname{tg}(xy) + xy = 0$
Решение. $(y^2 - \operatorname{tg}(xy) + xy)' = (0)'$

$$2yy' - \frac{1}{\cos^2(xy)}(1y + xy') + (y + xy') = 0$$

§9. Производная степенной функции x^α, показательной функции α^x и сложнопоказательной функции $(U(x))^{(x)}$.

Теорема 1. Производная функции x^α равна произведению:

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1},$$

где α – любое число.
Доказательство.
По условию теоремы, дана функция $y = x^\alpha$. Логарифмируя данную функцию, будем иметь:

$$\ln y = \ln x^\alpha$$

Воспользуемся свойствами логарифмов:

$$\ln y = \alpha \ln x$$

Возьмем производную от обеих частей уравнения, считая y функцией, зависящей от x:

$$\frac{1}{y}y' = \alpha\frac{1}{x}$$
$$y' = \alpha y \frac{1}{x}$$

Подставляя сюда значение $y = x^\alpha$, окончательно получаем:
$y' = \alpha x^\alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$
Что и требовалось доказать.

Теорема 2. Производная функции α^x равна произведению данной функции на логарифм ее основанния:

$$(\alpha^x)' = \alpha^x \ln\alpha.$$

Доказательство.
По условию теоремы, дана функция $y = \alpha^x$. Логарифмируя данную функцию, будем иметь:

$$\ln y = \ln \alpha^x$$

Воспользуемся свойствами логарифмов:

$$\ln y = x \ln \alpha$$

Возьмем производную от обеих частей уравнения, считая y функцией, зависящей от x:

$$\frac{1}{y}y' = 1\ln\alpha$$
$$y' = y\ln\alpha$$

Подставляя сюда значение $y = \alpha^x$, окончательно получаем:
$y' = \alpha^x \ln\alpha$
Что и требовалось доказать.

Теорема 3. При вычислении производной сложнопоказательной функции предварительно прологарифмируем.
Пример 1. Найти производную от неявной функции $y = x^x$
Решение.
По условию, дана функция $y = x^x$. Логарифмируя данную функцию, будем иметь:

$$\ln y = \ln x^x$$

Воспользуемся свойствами логарифмов:

$$\ln y = x\ln x$$

Возьмем производную от обеих частей уравнения, считая y функцией, зависящей от x:

$$\frac{1}{y}y' = 1\ln x + x\frac{1}{x}$$
$$\frac{1}{y}y' = \ln x + 1$$
$$y' = y\ln x + 1$$

Подставляя сюда значение $y = x^x$, окончательно получаем:
$y' = x^x \ln x + 1.$

§10. Обратная функция и ее дифференциал.

Определение 1. **Функция $y = f(x)$ (монотонная, возрастающая или убывающая) называется обратной к функции $x = \varphi(y)$, если выполняется**
$f(\varphi(y)) = y.$
Пример 1. $y = \arcsin y$ -обратная функция к функции $y = \sin x$.
Пример 2. $x = \sqrt{y}$ -обратная функция к функции $y = x^2$, т.к. $(\sqrt{y})^2 = y$
Теорема 1. Если для монотонной функции $y = f(x)$ существует обратная функция $x = \varphi(y)$, то производные связаны следующим образом:

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$

Доказательство.
По условию теоремы, функции $f(x)$ и $\varphi(y)$ – взаимно обратные, т.е.
$f(\varphi(y)) = y$.
Возьмем производную от переменной x:

$$f'(\varphi(y))\varphi'(y)y' = y'$$
$$f'(\varphi(y))\varphi'(y) = 1$$
$$f'(\varphi(y)) = \frac{1}{\varphi'(y)}$$

Т.к. $x = \varphi(y)$, тогда получим:

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$

Что и требовалось доказать.

§11. Производная функций $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$.

Теорема 1. Производная функции $\arcsin x$ равна:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Доказательство.
По условию теоремы, дана функция $y = \arcsin x$.
Возьмем синус от обеих частей:

$$\sin y = \sin(\arcsin x)$$
$$\sin y = x$$

Найдем производную функции x по переменной x:

$$x'(y) = (\sin y)' = \cos y$$

Воспользуемся теоремой о производной обратной функции:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Что и требовалось доказать.

Теорема 2. Производная функции $\arccos x$ равна:

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Доказательство.
По условию теоремы, дана функция $y = \arccos x$.
Возьмем косинус от обеих частей:

$$\cos y = \cos(\arccos x)$$
$$\cos y = x$$

Найдем производную функции x по переменной x:

$$x'(y) = (\cos y)' = -\sin y$$

Воспользуемся теоремой о производной обратной функции:

$$(\arccos x)' = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Что и требовалось доказать.

Теорема 1. Производная функции $\operatorname{arctg} x$ равна:

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Доказательство.
По условию теоремы, дана функция $y = \operatorname{arctg} x$.
Возьмем тангенс от обеих частей:

$$\operatorname{tg} y = \operatorname{tg}(\operatorname{arctgs} x)$$
$$\operatorname{tg} y = x$$

Найдем производную функции x по переменной x:

$$x'(y) = (\operatorname{tg} y)' = \frac{1}{\cos^2 y}$$

Воспользуемся теоремой о производной обратной функции:

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{\cos^2 y}{1} = \frac{\cos^2 y}{\cos^2 y + \sin^2 y} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

Что и требовалось доказать

Теорема 2. Производная функции $\operatorname{arcctg} x$ равна:

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Доказательство.
По условию теоремы, дана функция $y = \operatorname{arcctg} x$.
Возьмем котангенс от обеих частей:

$$\operatorname{ctg} y = \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctgs} x)$$
$$\operatorname{ctg} y = x$$

Найдем производную функции x по переменной x:

$$x'(y) = (\operatorname{ctg} y)' = -\frac{1}{\sin^2 y}$$

Воспользуемся теоремой о производной обратной функции:

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 y}} = -\frac{\sin^2 y}{1} = -\frac{\sin^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y} = -\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}$$

Что и требовалось доказать.

§12. Параметрическое задание функции и производная функции, заданной параметрически.

Любую функцию $y = f(x)$ можно задать в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases}$$

где t – параметр.

Пример 1. $\begin{cases} x = t, \\ y = t^2 \end{cases}$ - параметрическое задание функции $y = x^2$.

Пример 2. $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t \end{cases}$ – параметрическое задание функции $x^2 + y^2 = 1$

Теорема 1. Производная параметрической функции $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases}$ равна:

$$\boldsymbol{y'(t) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}},$$

при этом $\varphi'(t) \neq 0$ и функции $\psi(t)$ и $\varphi(t)$ дифференцируемы.

Доказательство.
Выразим из первого уравнения параметрической функции t и подставим во второе:

$$t = \varphi^{-1}(x)$$
$$y = \psi(t) = \psi(\varphi^{-1}(x))$$

Найдем производную по переменной x:

$$y' = \psi'(\varphi^{-1}(x))(\varphi^{-1}(x))'x'$$

Воспользуемся теоремой о производной обратной функции:

$$[\varphi'(x)]' = \frac{1}{\varphi'(t)}$$

Подставим полученное значение в y':

$$y' = 1\psi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

Что и требовалось доказать.

Пример 3. Найти производную функции . $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t \end{cases}$

Решение.

$$y'(t) = \frac{(\sin t)'}{(\cos t)'} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\operatorname{ctg} t$$

§13. Гиперболические функции.

Гиперболический синус: $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

Гиперболический косинус: $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

Для этих функций с точностью до знака справедливы все тригонометрические сооотношения для $\sin x$ и $\cos x$.

Гиперболический тангенс: $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Гиперболический катангенс: $\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

Производные гиперболических функций:

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$$
$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$$
$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$
$$(\operatorname{cth} x)' = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$$

Аналогично вычисляются и обратные функции.

§14. Дифференциал.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a,b]$, т.е. производная этой функции в некоторой точке x отрезка $[a,b]$ определяется равенством

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

На основании теоремы 1 §50, получаем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(x)$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая.

Умножая все члены последнего равенства на Δx, получим:

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(x)\Delta x$$

Определение 1. **Главная линейная часть приращения функции называется дифференциалом и обозначается d:**

$$\boldsymbol{dy = f'(x)\Delta x = f'(x)dx}$$

Рассмотрим функцию $y = x$, найдем ее дифференциал:

$$dy = 1\Delta x$$

Когда $y = x$, дифференциал совпадает с приращением.

Следовательно, дифференциал часто записывают как

$$dy = f'(x)dx$$

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = f'(x)}$$

Пример 1. Найти дифференциал функции $y = x^x$

Решение.

$$dy = 2xdx$$

$$d(x^2) = 2xdx$$

Т.к. дифференциал сводится к нахождению производной, то справедливы следующие свойства:

$$d(u+v) = du + dv$$

$$d(uv) = vdu + udv$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

Замечание 1. С помощью дифференциалов легко записываются теоремы предыдущих параграфов.

Производная обратной функции:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

Производная параметрической функции:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Производная сложной функции:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

§15. Производные высших порядков и дифференциалы высших порядков.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a,b]$.

Найдем её первую производную:

$$y' = f'(x)$$

Тогда вторая производная вычисляется как

$$y'' = (y')' = \left(f'(x)\right)' = \left(\frac{dy}{dx}\right)' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Так же вычисляется и третья производная :

$$y''' = (y'')' = \left(f''(x)\right)' = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^3y}{dx^3}$$

Аналогично обобщается и понятие дифференциала:

$$d(dy) = d^2y = f''(y)(dx^2)$$

§16. Теорема о корнях производной (теорема Ролля).

Теорема 1. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема во всех внутренних точках этого отрезка и на концах его обращается в нуль, то существует по крайней мере одна точка $x = C$, где $\boldsymbol{f'(C) = 0}$**.**

Доказательство.

Т.к. функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она имеет на этом отрезке наибольшее значение M и наименьшее значение m.

Возможны два случая:

1) Максимальное и минимальное значения совпадают, т.е. $M = m$. В этом случае функция $f(x)$ является примой, т.е. $f(x) = const$ и $f'(x) = 0$. Следовательно теорема доказана.
2) Максимальное и минимальное значения не совпадают, т.е. $M \neq m$.

В этом случае обозначим за C точку, в которой функция принимает максимальное значение, т.е. $f(C) = M$.

Рассмотрим определение производной:

$$f'(C) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(C + \Delta x) - f(C)}{\Delta x}$$

По условию теоремы, производная в точке C существует.

Устремимся к точке C справа, тогда $\Delta x > 0$, следовательно $f'(C) \leq 0$.

Устремимся к точке C слева, тогда $\Delta x < 0$, следовательно $f'(C) \geq 0$.

Соотношения $f'(C) \leq 0$ и $f'(C) \geq 0$ совместимы лишь в том случае, если $f'(C) = 0$.

Что и требовалось доказать

Замечание 1. Теорема справедлива, если $f(c) = f(b) = const$.

Замечание 2. Условие дифференцируемости на отрезке $[a,b]$ обязательно.

§17. Теорема о конечных приращениях (Лагранжа)

Теорема 1. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема во всех внутренних точках этого отрезка, то внутри отрезка $[a,b]$ найдется по крайней мере одна точка C $(a < C < b)$, что будет выполняться

$$\boldsymbol{f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)}$$

Доказательство.

Обозначим буквой Q число $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, т.е. положим

$$Q = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

и рассмотрим функцию $F(x) = f(x) - f(a) - Q(x - a)$

Функция $F(x)$ – непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема внутри этого отрезка , т.к. $f(x), f(a)$ – непрерывны и дифференцируемы.

$$F(b) = f(b) - f(a) - \frac{\left(f(b) - f(a)\right)(b-a)}{b-a} = f(b) - f(a) - f(b) + f(a) = 0$$

$$F(a) = f(a) - f(a) - \frac{\left(f(b) - f(a)\right)(a-a)}{b-a} = 0$$

Следовательно, функция $F(x)$ удовлетворяет условию теоремы Ролля, т.е. существует такая точка C, что будет выполняться

$$f'(C) = 0$$

Но

$$F'(x) = f'(x) - Q$$

Значит,

$$F'(C) = f'(C) - Q = 0$$

откуда

$$f'(C) = Q$$

Подставив значение Q, получим

$$f'(C) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

где точка C удовлетворяет условию $a < C < b$, т.е. точка C является внутренней точкой отрезка $[a,b]$.

Что и требовалось доказать.

§18. Теорема о приращениях двух функций (Коши).

Теорема 1. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$ и дифференцируемы внутри него, причем $\varphi'(x)$ нигде внутри отрезка $[a,b]$ не обращается в нуль, то внутри отрезка найдется хотя бы одна точка $x = C$ $(a < C < b)$, что будет выполняться

$$\boldsymbol{\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(C)}{\varphi'(C)}}$$

Доказательство

Заметим, что знаменатель левой части никогда не обращается в нуль, т.к. по условию теоремы $\varphi'(C) \neq 0$, потому что, если бы

$$\varphi(b) - \varphi(a) = 0$$

$$\varphi(b) = \varphi(a)$$

тогда бы φ удовлетворяла теореме Ролля, т.е. существовала бы точка на отрезке , где производная функции в этой точке равнялась бы нулю, что не удовлетворяет условию теоремы Коши.

Определим число Q равенством

$$Q = \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}$$

Рассмотрим функцию $F(x) = f(x) - f(a) - Q(\varphi(b) - \varphi(a))$

Функция $F(x)$ непрерывна и дифференцируема на отрезке $[a,b]$.

$$F(b) = f(b) - f(a) - \frac{\left(f(b) - f(a)\right)(\varphi(b) - \varphi(a))}{\varphi(b) - \varphi(a)} = 0$$

$$F(a) = f(a) - f(a) - \frac{\left(f(b) - f(a)\right)(\varphi(a) - \varphi(a))}{\varphi(b) - \varphi(a)} = 0$$

Очевидно, что функция $F(x)$ удовлетворяет условию теоремы Ролля.

Следовательно, существует такая точка C, что

$$f'(C) = 0$$

Но

$$F'(x) = f'(x) - Q\varphi'(x)$$

Значит,

$$F'(C) = f'(C) - Q\varphi'(C) = 0$$

откуда

$$\frac{f'(C)}{\varphi'(C)} = Q$$

Подставив значение Q, получим

$$\frac{f'(C)}{\varphi'(C)} = \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}$$

Что и требовалось доказать.

§19. Предел отношения двух бесконечно малых величин (неопределенность $\frac{0}{0}$).

Теорема 1. (Правило Лопиталя). Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ на отрезке $[a,b]$ удовлетворяют условиям теоремы Коши, при этом в точке $x = a$ функция $f(a) = \varphi(a) = 0$, тогда, если существует предел $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, то существует и предел $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ и они равны

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

Доказательство.
Функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют условию теоремы Коши, т.е. она выполняется на отрезке $[a,b]$.

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{f'(C)}{\varphi'(C)}$$

где c – внутренняя точка, причем $a < c < b$.
Выберем внутри отрезка $[a,b]$ некоторую точку x, причем $a < c < x$, и перепишем для нее теорему Коши:

$$\frac{f(x)-f(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)} = \frac{f'(C)}{\varphi'(C)}$$

По условию теоремы $f(a) = \varphi(a) = 0$, значит

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(C)}{\varphi'(C)}$$

Вычислим предел от левой части при :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$$

Если $x \to a$, то и $\to a$, т.к. точка c заключена между x и a. Следовательно, выполняется

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

Что и требовалось доказать.

Пример 1. Вычислить предел функции $y = \frac{\sin x}{x}$

Решение.
Воспользуемся правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1$$

Пример 2. Вычислить предел функции $y = \frac{\ln(1+x)}{x}$

Решение.
Воспользуемся правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)' = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1$$

Замечание 1. Правило Лопиталя справедливо и для $x \to \infty$. Для доказательства этого факта необходимо сделать замену $z = \frac{1}{x}$.

Замечание 2. Правило Лопиталя позволяет раскрывать и неопределенности типа $\frac{\infty}{\infty}$.

Пример 3. Вычислить предел функции $y = \frac{2x^2+1}{3x^2-x-1}$

Решение.
Дважды воспользуемся правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{3x^2-x-1} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+1}{3x^2-x-1}\right)' = \lim_{x\to\infty}\frac{4x}{6x-1} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x}{6x-1}\right)' = \lim_{x\to\infty}\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Пример 4. Вычислить предел функции $y = \frac{e^x}{x}$

Решение.
Воспользуемся правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^x}{x}\right)' = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{1} = \infty$$

Замечание 3. Неопределенности типа $0\cdot\infty, 0^0, \infty^0, \infty\cdot\infty, 1^\infty$ можно свести к неопределенностям типа $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$

Пример 5. Вычислить предел функции $y = x^x$

Решение.

$$\lim_{x\to 0}x^x = A$$

Прологарифмируем полученное выражение:

$$\ln\lim_{x\to 0}x^x = \ln A$$

Вычислим левую часть выражения:

$$\ln\lim_{x\to 0}x^x = \lim_{x\to 0}\ln x^x = \lim_{x\to 0}(x\cdot\ln x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\right)' = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}x = 0$$

Тогда и $\ln A = 0$, отсюда $A = 1$
Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}x^x = A = 1$$

§20. Формула Тейлора.

Пусть функция $f(x)$ имеет $(n+1)$ производную в некоторой точке $x = a$, т.е. существуют $f(a), f'(a), f''(a), \dots, f^{(n+1)}(a)$.
Представим функцию $f(x)$ в виде

$$f(x) = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + C_3(x-a)^3 + \dots + C_n(x-a)^n + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot Q(x)$$

где $C_0,\ C_1,\dots,C_n$ – некоторые коэффициенты, зависящие от $f(x)$, связанные с видом функции $f(x)$;
a – точка разложения.
Найдем связь коэффициентов $C_0,\ C_1,\dots,C_n$ с видом функции $f(x)$.
Положим $x = a$, тогда $f(a) = C_0$
Найдем производную от обеих частей:
$f'(x) = C_1 + 2C_2(x-a) + 3C_3(x-a)^2 + \dots + nC_n(x-a)^{n-1} + ?\,(x-a)^n$
Положим $x = a$, тогда $f'(a) = C_1$
Таким образом можно получить

$C_2 = \frac{f''(a)}{2}$

$C_3 = \frac{f''''(a)}{1\cdot2\cdot3}$

…………….

$C_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$

Следовательно, функцию $f(x)$ можно переписать в виде:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot Q(x)$$

Оценим функцию $Q(x)$. Для этого введем вспомогательную функцию:

$$F(t) = f(x) - f(t) - \frac{f'(t)}{1!}(x-t) - \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 - \frac{f'''(t)}{3!}(x-t)^3 - \dots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n - \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot Q(x)$$

Покажем, что функция $F(t)$ удовлетворяет условию теоремы Ролля на отрезке от a до x.
Для этого вычислим значение $F(x)$:
$F(x) = f(x) - f(x) = 0$
$F(a) = f(x) - \Big[f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 +$
…+f(n)an!(x−a)n+(x−a)n+1(n+1)!·Q(x)=fx−fx=0

$F(x) = F(a) = 0$
Функция $F(t)$ непрерывна и дифференцируема на отрезке $[a,x]$, следовательно, она удовлетворяет условию теоремы Ролля, т.е. на этом отрезке найдется такая точка c, что $F'(c) = 0$.
Найдем производную $F'(t)$:
$F'(t) = -f'(t) - \frac{f''(t)}{1!}(x-t) + \frac{f'(t)}{1!} - \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 + \frac{2f''(t)}{2!}(x-t) - \dots - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{nf^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^{n-1} + \frac{(n+1)(x-t)^n}{(n+1)!}\cdot Q(x) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-$
tn+(n+1)(x−t)n(n+1)!·Q(x)=−fn+1tn!x−tn+(x−t)nn!·Q(x)

$$F'(c) = -\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n + \frac{(x-c)^n}{n!}\cdot Q(x)$$

$$\frac{(x-c)^n}{n!}\cdot Q(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

$$Q(x) = f^{(n+1)}(c)$$

где $a < c < x$.
Следовательно, перепишем выражение функции $f(x)$, подставив $Q(x) = f^{(n+1)}(c)$. Получим **формулу Тейлора**:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot f^{(n+1)}(c)$$

где $a < c < x$.
Если a положить равным нулю, то получится **формула Маклорена**:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)\cdot x}{1!} + \frac{f''(0)\cdot x^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(0)\cdot x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot f^{(n+1)}(c)$$

где $0 < c < x$.

§21. Разложение функций e^x, $\sin x$, $\cos x$ по формуле Макларена.

Рассмотрим функцию $f(x) = e^x$.
Разложим ее по формуле Маклорена.
Для этого найдем последовательные производные от $f(x) = e^x$:
$f(x) = e^x,\ f(0) = e^0 = 1$
$f'(x) = e^x,\ f'(0) = e^0 = 1$
$f''(x) = e^x,\ f''(0) = e^0 = 1$ и т.д.
Подставляя полученные значения, получим

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c\cdot x^{n+1}}{(n+1)!},$$

где $0 < c < x$.
Вычислим число e. Для этого положим $x = 1$:

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} + \dots + \frac{1^n}{n!} + \frac{e^c\cdot 1^{n+1}}{(n+1)!},$$

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}$$

Рассмотрим функцию $f(x) = \sin x$.
Разложим ее по формуле Маклорена:
Для этого найдем последовательные производные от $f(x) = \sin x$:
$f(x) = \sin x,\ f(0) = \sin 0 = 0$
$f'(x) = \cos x,\ f'(0) = \cos 0 = 1$
$f''(x) = -\sin x,\ f''(0) = -\sin 0 = 0$
$f'''(x) = -\cos x,\ f'''(0) = -\cos 0 = -1$
$f''''(x) = \sin x,\ f''''(0) = \sin 0 = 0$ и т.д.
Подставляя полученные значения, получим

$$\sin x = 0 + \frac{x}{1!} + \frac{0x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{0x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}\dots + \frac{f^n(0)\cdot x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot f^{n+1}(c)$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}\dots + \frac{(-1)^{n+1}\cdot x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot \sin x\ (\text{или } \cos x)$$

Пример 1. Вычислить значение функции $f(x) = \sin\frac{1}{2}$ с точностью до двух знаков после запятой.

Решение.

$$\sin\frac{1}{2} = \frac{1}{2\cdot 1!} - \frac{1}{2^3\cdot 3!} + \frac{1}{2^5\cdot 5!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^4\cdot 3} = \frac{2^3\cdot 3 - 1}{2^4\cdot 3} = \frac{23}{48} = 0.479 \approx 0.48$$

Аналогично выводится разложение функции $f(x) = \cos x$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}\dots + \frac{(-1)^{n+1}\cdot x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \frac{x^{2n}}{(2n)!}\cdot \sin x\ (\text{или } \cos x)$$

§22. Общая схема исследования функции $y = f(x)$.

Общая схема исследования функции состоит из шести необязательных пунктов:

1. Область определения и область изменения функции (если возможно), четность, периодичность функции.
2. Точки разрыва.
3. Интервалы возрастания и убывания функции.
4. Точки максимума и минимума функции.
5. Интервалы выпуклости и вогнутости функции, точки перегиба.
6. Асимптоты.

1) Область определения: определяем все значения переменной x.
Область изменения: определяем все значения переменной y.

Пример 1. Указать область определения и область изменения функции $y = \sqrt{1-x}$.
Решение.
Область определения: $1 - x \geq 0$, отсюда $x \leq 1$.
Область изменения: $[0, \infty)$

Область изменения функции – множество значений переменной y, которые она может принимать.

Функция **четная**, когда выполняется $f(x) = f(-x)$. Если функция четная, то она симметрична относительно оси Oy.

Функция **нечетная**, когда выполняется $f(x) = -f(x)$. Если функция нечетная, то она симметрична относительно начала координат (биссектрис первого и третьего координатных углов).

Функция **периодична** с периодом T, когда выполняется $f(x+T) = f(x)$.

Пример 2. Функция $y = \sin(x + 2\pi) = \sin x$ периодична.

2) Различают разрывы первого и второго рода.
Точка $x = a$ имеет разрыв первого рода, если выполняется
$$\lim_{x\to a+0} f(x) = b_1$$
$$\lim_{x\to a-0} f(x) = b_2$$
где $b_1 \neq b_2$.
Точка $x = a$ имеет разрыв второго рода, если выполняется
$$\lim_{x\to a} f(x) = \mp\infty$$

Пример 3. Функция $y = \frac{1}{(x-2)^2}$ имеет точку разрыва второго рода $x = 2$.

3) Обратимся к геометрической интерпретации производной, т.е. $f'(x) = tg\,\alpha$, где $tg\,\alpha$ – угол наклона касательной к оси Ox.
Функция **возрастает**, когда $f'(x) > 0$ $(tg\,\alpha > 0)$.
Функция **убывает**, когда $f'(x) < 0$ $(tg\,\alpha < 0)$.

4) Необходимым условием экстремумов (максимума и минимума) является $f'(x) = 0$.
Критерий минимума: производная функции при переходе через критическую точку меняет знак с минуса на плюс.
Критерий максимума: производная функции при переходе через критическую точку меняет знак с плюса на минус.

5)
Определение 1. **Функция $f(x)$ выпукла на интервале (a, b), если все точки кривой $f(x)$ лежат ниже любой ее касательной в этой точке.**
Определение 2. **Функция $f(x)$ вогнута на интервале (a, b), если все точки кривой $f(x)$ лежат выше любой ее касательной в этой точке.**
Функция выпукла на интервале (a, b), если вторая производная на этом интервале меньше нуля: $f''(x) < 0$.
Функция вогнута на интервале (a, b), если вторая производная на этом интервале больше нуля: $f''(x) > 0$.
Определение 3. **Точка $x = a$ называется точкой перегиба, если она отделяет выпуклую часть от вогнутой.**
Необходимое условие для существования точки перегиба $f''(x) = 0$.

6)
Определение 4. Прямая $y = kx + b$ называется асимптотой функции $y = f(x)$, если расстояние δ от переменной точки $M(x, y)$ данной функции до прямой при удалении точки M в бесконечность стремиться к нулю.
Коэффициенты наклонной асимптоты:
$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$$
$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx)$$
Когда $k = 0$, то асимптота горизонтальная.
Когда $k = \infty$, то асимптота вертикальная.

Пример 4. Построить график функции $y = \frac{x^2+2x+1}{x}$.
Решение.

1) Область определения: $x \neq 0$ или $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.
Область изменения: $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$.
Найдем точки пересечения с осями координат:
если $x = 0$, то:
$$y = 1$$
если $y = 0$, то:
$x^2 + 2x + 1 = 0, (x+1)^2 = 0$, отсюда $x = -1$
Т.о., получили точки $(0,1)$ и $(-1,0)$.
$$\frac{(-x)^2 + 2(-x) + 1}{-x} = -\frac{x^2 - 2x + 1}{x}$$
т.е. функция ни четная, ни нечетная.
Функция не периодична.

2)
$$\lim_{x\to a+0} \frac{x^2+2x+1}{x} = \infty$$
$$\lim_{x\to a-0} \frac{x^2+2x+1}{x} = -\infty$$
Следовательно, функция всюду непрерывна

3) Найдем интервалы возрастания и убывания
$$y' = \frac{(2x+2)\cdot x - (x^2+2x+1)}{x^2} = \frac{2x^2+2x-x^2-2x-1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$$
$$y' = \frac{x^2-1}{x^2} = 0$$
$$x = \mp 1$$
При $\begin{cases} x > 1 \\ x < -1 \end{cases}$ функция возрастает.
При $-1 < x < 1$ функция убывает.

4) Вычислим значение функции в $x = 1$:
$$y(1) = \frac{1^2 + 2\cdot 1 + 1}{1} = 4$$
Вычислим значение функции в $x = -1$:
$$y(1) = \frac{(-1)^2 + 2\cdot(-1) + 1}{-1} = 0$$
Получили $(1,4)$ - точка минимума, $(-1,0)$ - точка максимума

5) Определяем области выпуклости и вогнутости кривой и точки перегиба.
$$y'' = \left(\frac{x^2+2x+1}{x}\right)'' = \left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)' = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)' = 2\frac{1}{x^3}$$
Кривая выпукла, т.е. $y'' < 0$, при $\frac{2}{x^3} < 0, x < 0$.
Кривая вогнута, т.е. $y'' > 0$, при $\frac{2}{x^3} > 0, x > 0$.
Точек перегиба нет.

6) Определяем асимптоты кривой:
$$y = kx + b$$
$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2+2x+1}{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x+1}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 1$$
$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x+1}{x} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(2 + \frac{1}{x}\right) = 2$$
Следовательно, прямая $y = x + 2$

Построим график функции $y = \frac{x^2+2x+1}{x}$:

§23. Определение функции нескольких переменных.

Определение 1. **Если каждой паре (x, y) двух независимых переменных x и y из некоторой области их изменения D в соответствие поставлено определенное значение z, то задана функция двух независимых переменных x и y в области D, которая обозначается $z = f(x, y)$.**

Функцию двух переменных можно задать аналитически или таблично.

Пример 1. $z = \sin(xy)$ – функция двух переменных.

Определение 2. **Совокупность пар (x, y) значений переменный x и y, при которых определяется функция, называется областью определения этой функции.**

Обычно область определения есть часть плоскости, ограниченной некоторой линией, которая называется границей.

Пример 2. Найти область определения функции $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Решение.

$$1 - x^2 - y^2 \geq 0$$
$$x^2 + y^2 \leq 1$$

Если граница входит в область, то область называется закрытой и обозначается $\overline{D}$.

Область может быть ограниченной и безграничной.

Пример 3. Найти область определения функции $z = \ln(x + y)$.

Решение.

$$x + y > 0$$
$$y > -x$$

Граница не входит в область определения.

Геометрически функция $z = f(x, y)$ представляет собой некоторую поверхность в трехмерном пространстве.

Пример 4. Изобразить функцию $z = x^2 + y^2$.

Решение.

Пусть $y = 0$.

Пусть $z = 0$.

Пусть $x = 0$.

Функции двух переменных легко обобщаются на функциях многих переменных $z = f(x, y, t, \ldots, s)$.

§24. Частные и полное приращение функции двух переменных.

Пусть дана функция двух переменных $z = f(x, y)$.

Придадим переменной x приращение Δx. Значение функции z также поменяется:

$$\boldsymbol{\Delta z_x = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}$$

где Δz_x – частное приращение функции по переменной .

Аналогично можно ввести частное приращение функции z по переменной y:

$$\boldsymbol{\Delta z_y = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}$$

Полное приращение функции:

$\boldsymbol{\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)}$ – приращение по переменным x и y.

Пример 1. Найти частные и полное приращение функции $z = xy$.

Решение.

$\Delta z_x = f(x + \Delta x, y) - f(x, y) = (x + \Delta x)y - xy = xy + \Delta xy - xy = \Delta xy$

$\Delta z_y = f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = x(y + \Delta y) - xy = xy + x\Delta y - xy = x\Delta y$

$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = xy + \Delta xy + x\Delta y + \Delta x\Delta y - xy = \Delta xy + x\Delta y + \Delta x\Delta y$

§25. Непрерывность функции двух переменных.

Определение 1. **Окрестностью радиуса ε точки $M_0(x_0, y_0)$ называется совокупность всех точек, удовлетворяющих неравенству**

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \varepsilon$$

Определение 2. **Число A называется пределом функции $z = f(x, y)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех значений x и y, удовлетворяющих неравенству $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta(\varepsilon)$, будет выполнятся $|f(x, y) - A| < \varepsilon$ при $M(x, y) \to M_0(x_0, y_0)$.**

Обозначается:

$$\lim_{M \to M_0} f(x, y) = A$$
$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$$

Определение 3. **Функция $z = f(x, y)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0, y_0)$, если выполняется**

$$\lim_{M \to M_0} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

По аналогии с функцией одной переменной, можно дать эквивалентное определение непрерывности функции:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0$$

Пример 1. Доказать, что функция $z = x^2 + y^2$ непрерывна.

Решение.

Воспользуемся определение непрерывности функции. Составим полное приращение функции:

$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = (x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2 - (x^2 + y^2) = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + y^2 + 2y\Delta y + \Delta y^2 - x^2 - y^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2 + 2y\Delta y + \Delta y^2$

Вычислим предел:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} (2x\Delta x + \Delta x^2 + 2y\Delta y + \Delta y^2) = 0$$

Следовательно, функция $z = x^2 + y^2$ непрерывна.

§26. Частные производные функции двух переменных.

Определение 1. **Частной производной по переменной x от функции двух переменных $z = f(x,y)$ называется предел частного приращения функции по переменной x к приращению аргумента:**

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z_x}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = f'_x(x,y)$$

Обозначается $\frac{\partial z}{\partial x}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

Аналогично выводится понятие частной производной по y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$$

Реально, это означает, что одну переменную считаем постоянной, а по второй берем переменную.

Пример 1. Найти частные производные функции $z = x^2\sin y$.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x\cdot\sin y$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2\cdot\ \cos y$$

Если функция трех переменных $u = f(x,y,z)$, то частных производных будет три:

$$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}.$$

§27. Полное приращение и полный дифференциал функции двух переменных.

Пусть дана функция двух переменных, имеющая непрерывные частные производные.

Выразим полное приращение функции Δz через частные производные $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\Delta z = f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

Прибавим и отнимем одно и тоже выражение в полном приращении

$$\Delta z = f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)+f(x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

Воспользуемся теоремой Лагранжа

$$\Delta z = \frac{\partial f(c,y+\Delta y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,c_1)}{\partial y}\Delta y$$

Т.к. по условию частные производные $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ непрерывны, т.е.

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\partial z(c,y+\Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial z(x,y)}{\partial x}$$

и

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\partial z(x,c_1)}{\partial y} = \frac{\partial z(x,y)}{\partial y}$$

По теореме о сумме бесконечно малой с пределом функции $f(x)$:

$$\Delta z = \left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+\alpha(x)\right]\Delta x + \left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}+\beta(y)\right]\Delta y$$

$\boldsymbol{\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \alpha(x)\Delta x + \beta(y)\Delta y}$ – полное приращение.

Определение 1. **Главная линейная часть полного приращения функции $z = f(x,y)$, т.е. $\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$, называется дифференциалом и обозначается dz.**

Т.к. переменные x и y независимы, т.е.

$x = x,\ dx = 1\cdot\Delta x$

$y = y,\ dy = 1\cdot\Delta y$

То можно переписать дифференциал как

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

Пример 1. Найти полное приращение и полный дифференциал функции $z = xy$ в точке $M(2,3)$, если $\Delta x = 0{,}1, \Delta y = 0{,}2$.

Решение.

Найдем полное приращение:

$$\Delta z = f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$$
$$\Delta z = (x+\Delta x)(y+\Delta y)-xy = xy+\Delta xy+x\Delta y+\Delta x\Delta y-xy = \Delta xy+x\Delta y+\Delta x\Delta y$$
$$\Delta z|_{M(2,3)} = 0{,}1\cdot 3+2\cdot 0{,}2+0{,}1\cdot 0{,}2 = 0{,}3+0{,}4+0{,}02 = 0{,}72$$

Найдем полный дифференциал:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$
$$\frac{dz}{dx} = y$$
$$\frac{dz}{dy} = x$$
$$dz = y\Delta x + x\Delta y$$
$$dz|_{M(2,3)} = 0{,}1\cdot 3+2\cdot 0{,}2 = 0{,}3+0{,}4 = 0{,}7$$

Замечание 1. Используя, что $\Delta z\approx dz$ при малых Δx и Δy, можем производить приблизительные вычисления.

Замечание 2. Если дана функция $u = f(x,y,z)$, то полный дифференциал

$$du = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z$$

§28. Производная сложной функции, полная производная и полный дифференциал сложной функции.

Пусть дана функция двух переменных $z = F(u, v)$, причем u и v зависят в свою очередь от переменных x и y, т.е. $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, тогда

$$z = F(u(x,), v(x, y))$$

Пример 1. Расписать функцию $z = u^3v^3 + 1$ по переменным x и y, причем $u = x^2 + y^2$, $v = e^{x+y} + 1$.

Решение.

Подставим значения u и v в функцию z:

$$z = (x^2 + y^2)^3(e^{x+y} + 1)^3 + 1$$

Пусть дана сложная функция $z = F(u,)$, где $u(x, y)$, $v = (x, y)$. При этом будем считать, что функции F, u и v имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial v}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$.

Найдем $\frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial F}{\partial y}$. Для этого составим полное приращение функции $F(u, v)$.

$$\Delta F = \Delta z = \frac{\partial F}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial F}{\partial v}\Delta v + \alpha(u)\Delta u + \beta(v)\Delta v$$

Поделим обе части равенства на Δx:

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\Delta v}{\Delta x} + \alpha(u)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \beta(v)\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Возьмем предел от обеих частей при $x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{\partial F}{\partial u}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\partial F}{\partial v}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\alpha(u)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\beta(v)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

В силу непрерывности функций u и v, $\alpha(u)$ и $\beta(v)$ стремятся к нулю при $\Delta x \to 0$.

$$\boldsymbol{\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}}$$

Аналогично,

$$\boldsymbol{\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}}$$

Пример 2. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = \ln(u^2 + v)$, где $u = e^{x+y^2}$, $v = x^2 + y$.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2u}{u^2+v}e^{x+y^2} + \frac{1}{e^{x+y^2}}2x = \frac{2ue^{x+y^2} + 2x}{u^2+v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2u}{u^2+v}e^{x+y^2}\cdot 2y + \frac{1}{e^{x+y^2}}\cdot 1 = \frac{4uye^{x+y^2} + 1}{u^2+v}$$

Пример 3. Найти полную производную функции $z = x^2 + \sqrt{y}$, где $y = \sin x$.

Решение.

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 2x\cdot 1 + \frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot\cos x = 2x + \frac{\cos x}{2\sqrt{y}}$$

Аналогично можно найти полный дифференциал от функции двух переменных $z = f(u, v)$, где $u = (x, y)$, $v(x, y)$.

$$dz = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

Подставим в первое выражение dz:

$$dz = \left(\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy = \frac{\partial F}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right) + \frac{\partial F}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx +\right.$$

∂v∂ydy=∂F∂udu+∂F∂vdv

Пример 4. Найти полный дифференциал функции $z = u^2v^3$, где $u = x^2\sin y$, $v = x^3e^y$.

Решение.

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv = 2uv^3du + 3u^2v^2dv$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 2x\sin y\,dx + x^2\cos y\,dy$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy = 3x^2e^ydx + x^2e^ydy$$

Подставив значения du, dv, u и v в dz, получим дифференциал функции z, зависящей от x и y.

§29. Производная от функции, заданной неявно.

Пусть дана функция $y = f(x)$ неявная $F(x, y) = 0$.

Найдем производную от функции F, заданной неявно:

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F}{\partial x}$$

тогда

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}}$$

Пример 1. Найти производную от неявной функции $y - x^2 = 0$.

Решение.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{-2x}{1} = 2x$$

Аналогично можно взять производные от неявной функции двух переменных.

Дана функция $z = f(x, y)$

$z - f(x, y) = 0$ - неявная для z

$F(x, y, z) = 0$ - неявное задание функции двух переменных.

Частные производные:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dy} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dy} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Тогда:

$$\boldsymbol{\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}}$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}}$$

Пример 2. Найти производные неявной функции $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$.

Решение.

$$F(x, y, z(x, y)) = 0$$

$$F(x, y, z(x, y)) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$$

Отсюда

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{2x}{2z} = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{2y}{2z} = -\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

§30. Частные производные высших порядков.

Пусть задана функция $z = f(x,y)$. Можно найти две частных производных $\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}$ и $\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}$, которые также в свою очередь зависят от двух переменных. Следовательно, можно найти производные более высших порядков:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ – смешанная производная.

Пример 1. Найти производные второго порядка функции $z = x^2y + y^3$.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(2xy) = 2y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 3y^2, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + 3y^2) = 6y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2xy) = 2x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 3y^2) = 2x$$

Теорема 1. Если функция двух переменных $z = f(x,y)$ и ее частные производные $z'_x, z'_x, z''_{xy}, z''_{yx}$ определены и непрерывны в некоторой точке M, то выполняется $\boldsymbol{f''_{xy} = f''_{yx}}$.

Замечание 1. Аналогичная теорема и для бесконечного числа переменных:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y\,\partial z\,\partial x} = \frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z}$$

§31. Максимум и минимум функции двух переменных.

Определение 1. **Функция двух переменных $z = f(x,y)$ имеет в точке $M_0(x_0,y_0)$ максимум, если для любых точек будет выполняться**
$\boldsymbol{f(x,y) < f(x_0,y_0)}$

Аналогично определяется минимум.

Определение 2. **Функция двух переменных $z = f(x,y)$ имеет в точке $M_0(x_0,y_0)$ минимум, если для любых точек будет выполняться**
$\boldsymbol{f(x,y) > f(x_0,y_0)}$

Теорема 1. (Необходимое условие экстремума) Если функция двух переменных $z = f(x,y)$ достигает экстремума при $x = x_0, y = y_0$, то каждая частная производная первого порядка в этой точке равняется нулю:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0} = 0$$

Теорема 2. (Достаточное условие экстремума) Пусть в некоторой области $\overline{D}$, содержащей точку $M_0(x_0,y_0)$, функция двух переменных $z = f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные до третьего порядка включительно. При этом точка M_0 – критическая, т.е. $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0} = 0$, $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0} = 0$, тогда, если в точке выполняется:

1. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} > 0$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} < 0$, то это максимум;
2. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} > 0$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} > 0$, то это минимум;
3. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} < 0$, то нет ни максимума, ни минимума;
4. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 0$, то требуется дополнительное исследование.

Пример 1. Исследовать на экстремум функцию двух переменных $z = (x-1)^2 + 2y^2$.

Решение.

Найдем критические точки:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2(x-1)$$
$$2(x-1) = 0$$
$$2x - 2 = 0$$
$$2x = 2$$
$$x = 1$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4y$$
$$4y = 0$$
$$y = 0$$
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Таким образом, получили критическую точку $M_0(1,0)$.

Находим производные второго порядка в этой критической точке:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 > 0$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 0$$

Т.к.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 2\cdot 4 - 2 > 0$$

то точка $M_0(1,0)$ - точка минимума.

§32. Первообразная и неопределенный интеграл.

По функции $y = f(x)$ можно найти производную. Можно производить и обратные преобразования – находить интеграл.

Определение 1. **Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, если выполняется $F'(x) = f(x)$**

Пример 1. Найти первообразную функции $f(x) = x^2$.

Решение.

$$F(x) = \frac{x^3}{3}$$

или

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + C$$

Добавление любой константы все равно будет первообразной.

Теорема 1. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ являются первообразными одной и той же функции $f(x)$, то разность между ними – постоянное число:

$$F_1(x) - F_2(x) = const$$

Доказательство.

По условию теоремы, $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – первообразные функции $f(x)$, т.е.

$$F_1'(x) = f(x), \qquad F_2'(x) = f(x)$$

Предположим, что их разность есть некоторая функция :

$$F_1(x) - F_2(x) = \varphi(x)$$

Возьмем производные от обеих частей:

$$F_1' - F_2'(x) = \varphi'(x)$$
$$f(x) - f(x) = \varphi'(x)$$
$$0 = \varphi'(x)$$

Следовательно, $\varphi(x) = const$, тогда и

$$F_1(x) - F_2(x) = const$$

Что и требовалось доказать.

Определение 2. **Если $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$, то сумма $F(x) + C$ называется неопределенным интегралом и обозначается**

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Неопределенный интеграл существует не для всякой функции.

Теорема 2. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то для этой функции существует первообразная.

Из определения неопределенного интеграла следуют следующие правила:

1. $(\int f(x)dx)' = f(x)$

   Доказательство.

   $$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = f(x)$$

2. $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$

   Доказательство.

   $$d\left(\int f(x)dx\right) = d(F(x) + C) = f(x)dx$$

3. $\int d(F(x)) = F(x) + C$

   Доказательство.

   $$\int d(F(x)) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C$$

§33. Таблица неопределенных интегралов.

Таблица неопределенных интегралов легко получается из таблицы производных:

1. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, где $n \neq -1$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
3. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
4. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$
5. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
6. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
7. $\int e^x\,dx = e^x + C$
8. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
9. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$
11. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\mp a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \mp a^2}\right| + C$

Пример 1. Вычислить интегралы $\int x^3\,dx$, $\int \frac{dx}{5+x^2}$

Решение.

Используя формулу 1, получим: $\int x^3\,dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = \frac{x^4}{4} + C$

Используя формулу 9, получим: $\int \frac{dx}{5+x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} arctg \frac{x}{\sqrt{5}} + C$

§34. Свойства неопределенного интеграла.

Свойство 1. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы двух функций равен алгебраической сумме их интегралов:

$$\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$$

Доказательство.

Возьмем производную от $\int (f_1(x) + f_2(x))dx$:

$$\left(\int (f_1(x) + f_2(x))dx\right)' = f_1(x) + f_2(x)$$

Возьмем производную от $\int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$:

$$\left(\int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx\right)' = \left(\int f_1(x)dx\right)' + \left(\int f_2(x)dx\right)' = f_1(x) + f_2(x)$$

Т.к. обе производные совпадают, то и интегралы равны, т.е.

$$\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$$

Что и требовалось доказать.

Свойство 2. Постоянную можно выносить за знак интеграла:

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$$

Доказательство.

Возьмем производную от $\int cf(x)dx$:

$$\left(\int cf(x)dx\right)' = cf(x)$$

Возьмем производную от $c\int f(x)dx$:

$$\left(c\int f(x)dx\right)' = c\left(\int f(x)dx\right)' = cf(x)$$

Т.к. обе производные совпадают, то и интегралы равны, т.е.

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$$

Что и требовалось доказать.

При вычислении интегралов полезно использовать следующие правила:

1. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то

   $$\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + C$$

Пример 1. Вычислить интеграл $\int \sin 3x\,dx$.

Решение.

$$\int \sin 3x\,dx = \frac{1}{3}(-\cos 3x) + C = -\frac{\cos 3x}{3} + C$$

2. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то

   $$\int f(x+b)dx = F(x+b) + C$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int \cos(x+2)\,dx$.

Решение.

$$\int \cos(x+2)\,dx = \int \cos(x+2)\,d(x+2) = \sin(x+2) + C$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int 2xdx$.

Решение.

$$\int 2xdx = \int dx^2 = x^2 + C$$

§35. Интегрирование методом замены переменных (подстановка).

Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x)dx$, которого нет в таблице неопределенных интегралов. Часто возможно сделать замену переменных. После чего получится табличное значение.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int \sqrt{\sin x}\cos x\, dx$.

Решение.

Сделаем подстановку $t = \sin x$, тогда $x = \arcsin t$, $dx = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$.

Т.к. $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$, то $\cos x = \sqrt{1-t^2}$.

Заменим переменные, подставив в интеграл:

$$\int \frac{\sqrt{t}\cdot\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int \sqrt{t}dt = \int t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2\sin x\sqrt{\sin x}}{3} + C$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int \frac{xdx}{1+x^2}$.

Решение.

Сделаем подстановку $t = 1 + x^2$, тогда $x^2 = t - 1,\ x = \sqrt{1-t},\ dx = \frac{dt}{2\sqrt{t-1}}$.

Заменим переменные, подставив в интеграл:

$$\int \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{1-t}}{t\cdot\sqrt{1-t}}dt = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C$$

Замена переменной и поднесение под знак дифференциала одинаковые операции. Поднесение под знак дифференциала – это устная замена переменной.

§36. Интегрирование некоторых функций, содержащих квадратный трехчлен.

1. $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$

Для приведения к табличному, выделим полный квадрат в знаменателе подынтегральной функции и приведем интеграл к виду $\int \frac{dt}{t^2 \mp a^2}$.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{2x^2+8x+20}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{2x^2+8x+20} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+4x+10} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+2\cdot 2x+2^2+6} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2+\left(\sqrt{6}\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{6}} + C$$

2. $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$

Для приведения этого интеграла виду интеграла пункта 1, выделим в числителе подынтегральной функции производную знаменателя, т.е. $(2ax+b)$.

Пример 2. Вычислить интеграл $\int \frac{x+3}{x^2-2x-5}dx$.

Решение.

$$\int \frac{x+3}{x^2-2x-5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2\cdot 3}{x^2-2x-5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2+8}{x^2-2x-5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x-5}dx - \frac{1}{2}\int \frac{8}{x^2-2x-5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2-2x-5)}{x^2-2x-5} - 4\int \frac{d(x-1)}{(x-1)^2-\left(\sqrt{6}\right)^2} =$$
$$\frac{1}{2}\ln|x^2-2x-5| - \frac{4}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{x-1-\sqrt{6}}{x-1+\sqrt{6}}\right| + C$$

3. $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

Данный интеграл вычисляется аналогично пунктам 1 и 2: в числителе подынтегральной функции выделяется производная подкоренного выражения $(2ax+b)$, а затем выделяется полный квадрат под знаком корня.

Пример 3. Вычислить интеграл $\int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx$.

Решение.

$$\int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx = \frac{5}{2}\int \frac{2x+\frac{3}{5}\cdot 2}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx = \frac{5}{2}\int \frac{2x+4-4+\frac{6}{5}}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx = \frac{5}{2}\int \frac{2x-4-\frac{14}{5}}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx = \frac{5}{2}\int \frac{2x-4}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx - \frac{5}{2}\int \frac{\frac{14}{5}}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx =$$
$$\frac{5}{2}\int \frac{d(x^2+4x+10)}{\sqrt{x^2+4x+10}} - \frac{14}{5}\cdot\frac{5}{2}\int \frac{d(x+2)}{\sqrt{(x+2)^2+\left(\sqrt{6}\right)^2}} = \frac{5}{2}\frac{\sqrt{x^2+4x+10}}{\frac{1}{2}} - 7\ln\left|x+2+\sqrt{(x+2)^2+\left(\sqrt{6}\right)^2}\right| + C = 5\sqrt{x^2+4x+10} -$$
$$7\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+10}\right| + C$$

§37. Интегрирование по частям.

Пусть даны две дифференцируемые функции $u(x)$ и $v(x)$. Найдем полный дифференциал этих функций:

$$d(uv) = vdu + udv$$

Возьмем интеграл от обеих частей:

$$\int d(uv) = \int vdu + \int udv$$

$$uv = \int vdu + \int udv$$

Отсюда получим **формулу интегрирования по частям:**

$$\boldsymbol{\int udv = uv - \int vdu}$$

Пример 1. Вычислить интеграл $\int \ln x\,dx$.

Решение.

Обозначим $u = \ln x\,,\ dv = dx$, тогда

$$du = \frac{dx}{x},$$

Возьмем интегралы от обеих частей равенства $dv = dx$:

$$\int dv = \int dx,$$

$$v = x + C$$

Т.к. это выражение справедливо для любого C то положим $C = 0$.

Подставив полученные выражения в формулу интегрирования по частям, получим:

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = x\ln x - x + C$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int x\sin x\,dx$.

Решение.

Обозначим $u = x,\ dv = \sin x\,dx$, тогда

$$du = dx,$$

Возьмем интегралы от обеих частей равенства $dv = \sin x\,dx$:

$$\int dv = \int \sin x\,dx,$$

$$v = -\cos x + C$$

Т.к. это выражение справедливо для любого C то положим $C = 0$.

Подставив полученные выражения в формулу интегрирования по частям, получим:

$$\int x\sin x\,dx = -x\cos x - \int -\cos x\,dx = \sin x - x\cos x + C$$

§38. Разложение дроби. Простейшие рациональные дроби и их интегрирование.

Определение 1. **Рациональной дробью называется выражение вида $\boldsymbol{\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}}$ где $\boldsymbol{Q_m(x)}$ и $\boldsymbol{P_n(x)}$ – многочлены.**

Если $m < n$, то дробь правильная.

Всякую неправильную дробь можно представить как сумму многочлена и правильной рациональной дроби.

Пример 1. Представить дробь $\frac{x^4-3}{x^2+2x-1}$ в виде правильной рациональной дроби.

Решение.

Данная дробь неправильная, т.к. $m = 4,\ n = 2$, т.е. $m > n$.

Сведем ее к правильной, разделив числитель на знаменатель/

Следовательно, дробь примет вид.

$$\frac{x^4-3}{x^2+2x-1} = \frac{(x^2+2x-1)(x^2-2x+5)-12x+2}{x^2+2x-1} = x^2-2x+5+\frac{2-12x}{x^2+2x-1}$$

Этот прием называется выделением целой части.

Определение 2. **Правильные рациональные дроби вида**

1. $\boldsymbol{\frac{A}{x-a}}$
2. $\boldsymbol{\frac{A}{(x-a)^k}}$
3. $\boldsymbol{\frac{Ax+B}{x^2+px+q}}$
4. $\boldsymbol{\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}}$

называются простейшими.

Найдем интегралы от каждой из этих дробей:

1) $\int \frac{A}{x-a}dx = A\int\frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C$

2) $\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int\frac{d(x-a)}{(x-a)^k} = A(x-a)^{-k+1}\frac{1}{-k+1} + C = \frac{A}{1-k}(x-a)^{1-k} + C$

3) $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$ – данный интеграл вычисляется аналогично интегралу пункта 2 §36.

4) $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx$ – данный интеграл сводится к третьему типу понижением порядка на единицу с применением интегрирования по частям.

Метод понижения степени вычислим на примере.

Пример 2. Вычислить интеграл $\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}$.

Решение.

$\int\frac{dx}{(1+x^2)^2} = \int\frac{(x^2+1)-x^2}{(1+x^2)^2}dx = \int\frac{x^2+1}{(1+x^2)^2}dx - \int\frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx = \int\frac{dx}{1+x^2} - \int\frac{x\cdot x}{(1+x^2)^2}dx = \int\frac{dx}{1+x^2} - \frac{1}{2}\int\frac{x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}dx = \int\frac{dx}{1+x^2} - \frac{1}{2}\int\frac{xd(x^2+1)}{(1+x^2)^2}dx = \int\frac{dx}{1+x^2} - \frac{1}{2}\int xd\left(\frac{1}{x^2+1}\right) = \int\frac{dx}{1+x^2} - \frac{1}{2}x\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arcctg} x - \frac{1}{2}x\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arcctg} x = \frac{3}{2}\operatorname{arcctg} x - \frac{x}{2(1+x^2)} + C$

§39. Разложение правильных рациональных дробей на простейшие и их интегрирование.

Любую правильную рациональную дробь вида $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ можно представить как сумму простейших дробей.
Сформулируем правило нахождения этих простейших дробей по виду правильных рациональных дробей.

Пусть дана правильная рациональная дробь $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ и знаменатель этой дроби имеет s действительных корней и $2t$ комплексных корней, которые попарно сопряжены, т.е. они являются корнями уравнения $x^2+px+q=0$, где p и q – действительные числа. Тогда каждому действительному корню кратности k, т.е. $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=\frac{Q_m(x)}{(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\dots(x-a_s)^{k_s}(x^2+p_1x+q_1)^{\mu_1}(x^2+p_2x+q_2)^{\mu_2}\dots(x^2+p_tx+q_t)^{\mu_t}}$, в соответствие ставим сумму простейших дробей с неопределенными коэффициентами, которые необходимо определить, используя метод неопределенных коэффициентов:

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A_{11}}{x-a_1}+\frac{A_{12}}{(x-a_1)^2}+\dots+\frac{A_{1k_1}}{(x-a_1)^{k_1}}+\dots+\frac{A_{s1}}{x-a_s}+\frac{A_{s2}}{(x-a_s)^2}+\dots+\frac{A_{sk_s}}{(x-a_s)^{k_s}}+$$
$$\frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{B_{12}x+C_{12}}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+\dots+\frac{B_{1\mu_1}x+C_{1\mu_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\mu_1}}+\dots+\frac{B_{t1}x+C_{t1}}{x^2+p_tx+q_t}+\frac{B_{t2}x+C_{t2}}{(x^2+p_tx+q_t)^2}+\dots+$$
$$\frac{B_{t\mu_t}x+C_{t\mu_t}}{(x^2+p_tx+q_t)^{\mu_t}}$$

Пример 1. Разложить правильную рациональную дробь $\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}$ на простейшие.

Решение.

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}=\frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2}{(x+1)^2}+\frac{A_3}{(x+1)^3}+\frac{B}{x-2}=\frac{A_1(x+1)^2(x-2)+A_2(x+1)(x-2)+A_3(x-2)+B(x+1)^3}{(x+1)^3(x-2)}$$

Приравнивая числители, получим:

$$x^2+2=A_1(x+1)^2(x-2)+A_2(x+1)(x-2)+A_3(x-2)+B(x+1)^3$$

Пусть $x=2$:

$$2^2+2=B(2+1)^3$$
$$6=27B$$
$$B=\frac{6}{27}=\frac{2}{9}$$

Пусть $x=-1$:

$$(-1)^2+2=A_3(-1-2)$$
$$3=-3A_3$$
$$A_3=-1$$

Пусть $x=0$:

$$2=A_1(0+1)^2(0-2)+A_2(0+1)(0-2)+A_3(0-2)+B(0+1)^3$$
$$2=-2A_1-2A_2-2A_3+B$$

Пусть $x=1$:

$$1^2+2=A_1(1+1)^2(1-2)+A_2(1+1)(1-2)+A_3(1-2)+B(1+1)^3$$
$$3=-4A_1-2A_2-A_3+8B$$

Получив систему двух уравнений, подставим в них найденные коэффициенты $A_3=-1,\ B=\frac{2}{9}$:

$$\begin{cases} 2=-2A_1-2A_2-2(-1)+\frac{2}{9} \\ 3=-4A_1-2A_2-(-1)+8\cdot\frac{2}{9} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1+A_2=\frac{1}{9} \\ 2A_1+A_2=-\frac{1}{9} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1=-\frac{2}{9} \\ A_2=\frac{1}{3} \end{cases}$$

В результате получаем разложение:

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}=\frac{-\frac{2}{9}}{x+1}+\frac{\frac{1}{3}}{(x+1)^2}+\frac{-1}{(x+1)^3}+\frac{\frac{2}{9}}{x-2}$$

Чтобы вычислить интеграл от рациональной функции $\int\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}dx$ необходимо рациональную дробь разложить на простейшие методом неопределенных коэффициентов.

Пример 2. Вычислить интеграл $\int\frac{x}{(x^2+1)(x-1)}dx$.

Решение.

Разложим подынтегральную функцию на простейшие:

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)}$$

Приравнивая числители, получим:

$$x=A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1)$$

Пусть $x=1$:

$$1=A(1^2+1)$$
$$1=2A$$
$$A=\frac{1}{2}$$

Пусть $x=0$:

$$1=A(0+1)+(0+C)(0-1)$$
$$A=C=\frac{1}{2}$$

Пусть $x=-1$:

$$-1=A((-1)^2+1)+(B(-1)+C)(-1-1)$$
$$-1=2A+2B-2C$$

Подставим в последнее уравнение найденные коэффициенты $A=C=\frac{1}{2}$:

$$-1=2\cdot\frac{1}{2}+2B-2\cdot\frac{1}{2}$$
$$1-1+1=-2B$$
$$B=-\frac{1}{2}$$

В результате получаем разложение:

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)}=\frac{\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{x^2+1}$$

Следовательно, интеграл примет вид:

$$\int\frac{x}{(x^2+1)(x-1)}dx=\int\left(\frac{\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{x^2+1}\right)dx=\int\frac{\frac{1}{2}}{x-1}dx+\int\frac{-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{2}\int\frac{x-1}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{d(x-1)}{x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{2x-2}{x^2+1}dx=$$
$$\frac{1}{2}\int\frac{d(x-1)}{x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{2x}{x^2+1}dx+\frac{1}{4}\int\frac{2dx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x-1)}{x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln|x^2+1|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$$

§40. Интегрирование от иррациональных функций.

Рассмотрим интегралы вида $\int R(x,x^{\frac{m}{n}},\dots,x^{\frac{r}{s}})$
где R – рациональная функция.
Данный интеграл рационализируется заменой переменной $x=t^k$, где k – общий знаменатель дробей $\frac{m}{n},\dots,\frac{r}{s}$.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}dx$

Решение.

Введем обозначение $x=t^4$, тогда $t=\sqrt[4]{x}$

$$dx=4t^3dt$$

Следовательно, интеграл примет вид:

$$\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}dx=\int\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}}+1}dx=\int\frac{(t^4)^{\frac{1}{2}}4t^3}{(t^4)^{\frac{3}{4}}+1}dt=4\int\frac{t^5}{t^3+1}dt=4\int\frac{(t^3+1)t^2-t^2}{t^3+1}dt=4\int t^2dt-4\int\frac{t^2}{t^3+1}dt=$$
$$4\int t^2dt-\frac{4}{3}\int\frac{3t^2}{t^3+1}dt=4\int t^2dt-\frac{4}{3}\int\frac{d(t^3+1)}{t^3+1}=\frac{4}{3}t^3-\frac{4}{3}\ln|t^3+1|+C=\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}-\frac{4}{3}\ln\left|\sqrt[4]{x^3}+1\right|+C$$

Интегралы вида $\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+a}\right)^{\frac{m}{n}},\dots,\left(\frac{ax+b}{cx+a}\right)^{\frac{r}{s}}\right)$

Рационализируются заменой $\frac{ax+b}{cx+a}=t^k$

где k – общий знаменатель дробей $\frac{m}{n},\dots,\frac{r}{s}$.

Пример 2. Вычислить интеграл $\int\frac{\sqrt{x+4}}{x}dx$

Решение.

Введем обозначение $x+4=t^2$, тогда $x=t^2-4$
$t=\sqrt{x+4}$

$$dx=2tdt$$

Следовательно, интеграл примет вид:

$$\int\frac{\sqrt{x+4}}{x}dx=\int\frac{\sqrt{t^2}2t}{t^2-4}dt=2\int\frac{t^2}{t^2-4}dt=2\int\frac{t^2-4+4}{t^2-4}dt=2\int\frac{t^2-4}{t^2-4}dt+2\int\frac{4}{t^2-4}dt=2\int dt+8\int\frac{dt}{t^2-2^2}=$$
$$2t+8\cdot\frac{1}{2\cdot2}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|+C=2\sqrt{x+4}+8\cdot\frac{1}{2\cdot2}\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right|+C$$

§41. Интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$ (подстановки Эйлера).

Рассмотрим интеграл

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$$

где $a \neq 0$.

1. Если в данном интеграле $a > 0$, то интеграл рационализируется **первой подстановкой Эйлера:**

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \mp\sqrt{a}x + t$$

Возведем обе части в квадрат

$$ax^2+bx+c = ax^2 \mp 2\sqrt{a}tx + t^2$$
$$bx + c = \mp 2\sqrt{a}tx + t^2$$
$$bx \mp 2\sqrt{a}tx = t^2 - c$$
$$x(b \mp 2\sqrt{a}t) = t^2 - c$$
$$x = \frac{t^2 - c}{b \mp 2\sqrt{a}t}$$

тогда $dx = (\text{рациональная функция})dt$

Следовательно, при данной подстановке интеграл рационализируется.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$, используя первую подстановку Эйлера.

Решение.

Т.к. $a = 1 > 0$, то полагаем

$$\sqrt{x^2+1} = -x + t$$

Возведем обе части в квадрат

$$x^2 + 1 = x^2 - 2tx + t^2$$
$$2tx = t^2 - 1$$

откуда

$$x = \frac{t^2-1}{2t}$$

Тогда

$$dx = \frac{2t\cdot 2t - 2(t^2-1)}{4t^2}dt = \frac{2t^2+2}{4t^2}dt = \frac{t^2+1}{2t^2}dt$$
$$\sqrt{x^2+1} = -x + t = -\frac{t^2-1}{2t} + t = \frac{t^2+1}{2t}$$

Возвращаясь к исходному интегралу, получим:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{\frac{t^2+1}{2t^2}}{\frac{t^2+1}{2t}}dt = \int \frac{dt}{t} = +C = \ln\left|\sqrt{x^2+1} + x\right| + C$$

2. Если $c > 0$, применяется **вторая подстановка Эйлера:**

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \mp \sqrt{c}$$

Возведем обе части в квадрат

$$ax^2+bx+c = x^2t^2 \mp 2\sqrt{c}tx + c$$
$$x(ax+b) = x(xt^2 \mp 2\sqrt{c}t)$$
$$ax + b = xt^2 \mp 2\sqrt{c}t$$
$$ax - xt^2 = \mp 2\sqrt{c}t - b$$
$$x(a - t^2) = \mp 2\sqrt{c}t - b$$
$$x = \frac{\mp 2\sqrt{c}t - b}{a - t^2}$$

тогда $dx = (\text{рациональная функция})dt$

Следовательно, при данной подстановке интеграл рационализируется.

Пример 2. Вычислить интеграл $\int \frac{(1-\sqrt{1+x+x^2})^2}{x^2\sqrt{1+x+x^2}}dx$.

Решение.

Т.к. $c = 1 > 0$, то полагаем

$$\sqrt{1+x+x^2} = xt + 1$$

Возведем обе части в квадрат

$$x^2 + x + 1 = x^2t^2 + 2tx + 1$$

Разделим обе части на x:

$$x + 1 = xt^2 + 2t$$
$$x(1-t^2) = 2t - 1$$

откуда

$$x = \frac{2t-1}{1-t^2}$$

Тогда

$$dx = \frac{2(1-t^2) - (2t-1)\cdot(-2t)}{(1-t^2)^2}dt = \frac{2-2t^2+4t^2-2t}{(1-t^2)^2}dt = \frac{2t^2-2t+2}{(1-t^2)^2}dt$$
$$\sqrt{1+x+x^2} = xt + 1 = \frac{2t-1}{1-t^2}t + 1 = \frac{2t^2-t+1-t^2}{1-t^2} = \frac{t^2-t+1}{1-t^2}$$
$$1 - \sqrt{1+x+x^2} = 1 - \frac{2t-1}{1-t^2}t + 1 = -\frac{2t-1}{1-t^2}t$$

Возвращаясь к исходному интегралу, получим:

$$\int \frac{(1-\sqrt{1+x+x^2})^2}{x^2\sqrt{1+x+x^2}}dx = \int \frac{\left(-\frac{2t-1}{1-t^2}t\right)^2}{\left(\frac{2t-1}{1-t^2}\right)^2\frac{t^2-t+1}{1-t^2}}\frac{2(t^2-t+1)}{(1-t^2)^2}dt = 2\int \frac{t^2}{1-t^2}dt = -2\int \frac{1-t^2+1}{1-t^2}dt = -2\int \frac{1-t^2}{1-t^2}dt - 2\int \frac{dt}{1-t^2} = -2t - 2\cdot \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = -\frac{2\left(\sqrt{1+x+x^2}-1\right)}{x} - 2\ln\left|\frac{1+\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}}{1-\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}}\right| + C = -\frac{2\left(\sqrt{1+x+x^2}-1\right)}{x} - 2\ln\left|\frac{x+\sqrt{1+x+x^2}-1}{x-\sqrt{1+x+x^2}+1}\right| + C$$

3. Если α и β – корни трехчлена ax^2+bx+c, то интеграл рационализируется **третьей подстановкой Эйлера:**

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)t$$

Используя теорему Виета, получим:

$$\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = (x-\alpha)t$$

Возведем обе части в квадрат

$$a(x-\alpha)(x-\beta) = (x-\alpha)^2t^2$$

Разделим обе части на $(x-\alpha)$:

$$a(x-\beta) = (x-\alpha)t^2$$
$$ax - a\beta = xt^2 - \alpha t^2$$
$$x(a - t^2) = a\beta - \alpha t^2$$
$$x = \frac{a\beta - \alpha t^2}{a - t^2}$$

тогда $dx = (\text{рациональная функция})dt$

Следовательно, при данной подстановке интеграл рационализируется.

Пример 3. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}}$.

Решение.

Используя теорему Виета, получим:

$$x^2 + 3x - 4 = (x+4)(x-1)$$

Т.о. полагаем

$$\sqrt{(x+4)(x-1)} = (x+4)t$$

Возведем обе части в квадрат

$$(x+4)(x-1) = (x+4)^2t^2$$

Разделим обе части на $(x+4)$:

$$x - 1 = xt^2 + 4t^2$$
$$x(1-t^2) = 4t^2 + 1$$

откуда

$$x = \frac{4t^2+1}{1-t^2}$$

Тогда

$$dx = \frac{8t(1-t^2) + 2t(4t^2+1)}{(1-t^2)^2}dt = \frac{8t - 8t^3 + 8t^3 + 2t}{(1-t^2)^2}dt = \frac{10t}{(1-t^2)^2}dt$$
$$\sqrt{(x+4)(x-1)} = (x+4)t = \left(\frac{4t^2+1}{1-t^2} + 4\right)t = \frac{5t}{1-t^2}$$

Возвращаясь к исходному интегралу, получим:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}} = \int \frac{\frac{10t}{(1-t^2)^2}dt}{\frac{5t}{1-t^2}} = 2\int \frac{dt}{1-t^2} = 2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = 2\ln\left|\frac{1+\frac{\sqrt{(x+4)(x-1)}}{x+4}}{1-\frac{\sqrt{(x+4)(x-1)}}{x+4}}\right| + C = 2\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}}\right| + C$$

§42. Интегрирование некоторых тригонометрических функций.

1. Рассмотрим интеграл вида

$$\int R(\sin x, \cos x)dx$$

Данный интеграл всегда рационализируется универсальной тригонометрической подстановкой $\mathbf{tg}\,\frac{x}{2} = t$

тогда

$$\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t$$
$$x = 2\operatorname{arctg} t$$
$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Выразим $\sin x$ и $\cos x$ через $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, а следовательно и через t:

$$\sin x = \sin\left(2\cdot\frac{x}{2}\right) = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{1} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \cos\left(2\cdot\frac{x}{2}\right) = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{1} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^2}{1+\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

При подстановке в интеграл получится рациональная функция, зависящая от t.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int\frac{dx}{\sin x}$.

Решение.

Введем обозначение $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, тогда $x = 2\operatorname{arctg} t$

отсюда

$\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Следовательно, интеграл примет вид:

$$\int\frac{dx}{\sin x} = \int\frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}dt = \int\frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$$

2. С точки зрения вычислений часто удобнее применять другие подстановки, например:

$$\mathbf{\sin x = t}$$
$$\mathbf{\cos x = t}$$
$$\mathbf{tg\, x = t}$$
$$\mathbf{ctg\, x = t}$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int\frac{\sin^3 x}{2-\cos x}dx$.

Решение.

Введем обозначение $\cos x = t$, тогда $x = \arccos t$

отсюда

$\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{1-t^2}$

$$dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

Следовательно, интеграл примет вид:

$\int\frac{\sin^3 x}{2-\cos x}dx = \int\frac{\left(\sqrt{1-t^2}\right)^3}{2-t}\left(-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right)dt = -\int\frac{1-t^2}{2-t}dt = \int\frac{t^2-1}{t-2}dt = \int\frac{(t-2)(t+2)+3}{t-2}dt = \int\frac{(t-2)(t+2)}{t-2}dt + \int\frac{3dt}{t-2} =$
$\int(t+2)dt + 3\int\frac{dt}{t-2} = \int t\,dt + \int 2dt + 3\int\frac{d(t-2)}{t-2} = \frac{t^2}{2} + 2t + 3\ln|t-2| + C = \frac{\cos^2 x}{2} + 2\cos x + 3\ln|\cos x - 2| + C$

3. Рассмотрим интеграл вида

$$\int\sin^m x\cos^n x\,dx$$

Здесь рассмотрим три случая.

а) m и n – числа разной четности, т.е. интеграл примет вид:

$$\int\mathbf{\sin^{2k} x\cos^{2p+1} x\,dx}$$

Преобразуем его:

$\int\sin^{2k} x\cos^{2p+1} x\,dx = \int\sin^{2k} x\cos^{2p} x\cos x\,dx = \int\sin^{2k} x\,(1-\sin^2 x)^p\,d(\sin x)$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int\frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx$.

Решение.

$$\int\frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx = \int\frac{\cos^2 x\cos x}{\sin^4 x}dx = \int\frac{1-\sin^2 x}{\sin^4 x}d(\sin x)$$

Введем обозначение $\sin x = t$.

Следовательно, интеграл примет вид:

$$\int\frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx = \int\frac{1-t^2}{t^4}dt = \int\frac{dt}{t^4} - \int\frac{dt}{t^4} = -\frac{1}{3t^3} + \frac{1}{t} + C = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{3\sin^3 x} + C$$

б) m и n – четные положительные числа.

В этом случае можно использовать прием понижения степени, используя следующие формулы:

$$\mathbf{\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}}$$
$$\mathbf{\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}}$$

Пример 4. Вычислить интеграл $\int\sin^4 x\,dx$.

Решение.

$\int\sin^4 x\,dx = \int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int(1-2\cos 2x+\cos^2 2x)dx = \frac{1}{4}\int 1dx - \frac{1}{4}\int 2\cos 2x\,dx + \frac{1}{4}\int\cos^2 2x\,dx =$
$\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\int\cos 2x\,d(2x) + \frac{1}{4}\int\frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\int 1dx + \frac{1}{8}\int\cos 4x\,dx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x +$
$\frac{1}{32}\int\cos 4x\,d(4x) = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$

в) m и n – четные числа, одно из которых отрицательно.

В этом случае применяем подстановку $\mathbf{tg\, x = t}$

Пример 5. Вычислить интеграл $\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx$.

Решение.

Введем обозначение $\operatorname{tg} x = t$, тогда $x = \operatorname{arctg} t$

отсюда

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

Выразим $\sin^2 x$ и $\cos^2 x$ через $\operatorname{tg} x$, а следовательно и через t:

$$\sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{1} = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x+\cos^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x+1} = \frac{t^2}{t^2+1}$$
$$\cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{1} = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x+\cos^2 x} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x+1} = \frac{1}{t^2+1}$$

Следовательно, интеграл примет вид:

$\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int\frac{\frac{t^2}{t^2+1}}{\frac{1}{t^2+1}}\frac{1}{1+t^2}dt = \int\frac{t^2}{t^2+1}dt = \int\frac{(t^2+1)-1}{t^2+1}dt = \int dt - \int\frac{dt}{t^2+1} = t - \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{tg} x - x + C$

При вычислении интегралов вида

$$\int\cos nx\cdot\sin mx\,dx$$
$$\int\cos mx\cdot\cos nx\,dx$$
$$\int\sin mx\cdot\sin nx\,dx$$

Используются следующие формулы:

$$\mathbf{\cos mx\cdot\cos nx = \frac{1}{2}(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x)}$$
$$\mathbf{\cos nx\cdot\sin mx = \frac{1}{2}(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x)}$$
$$\mathbf{\sin nx\cdot\sin mx = \frac{1}{2}(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x)}$$

Пример 6. Вычислить интеграл $\int\sin 5x\cdot\sin 3x\,dx$

Решение.

$\int\cos 5x\cdot\sin 3x\,dx = \int\frac{1}{2}(\cos(5-3)x - \cos(5+3)x)dx = \frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx - \frac{1}{2}\int\cos 8x\,dx =$
$\frac{1}{4}\int\cos 2x\,d(2x) - \frac{1}{16}\int\cos 8x\,d(8x) = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 8x + C$

§43. Понятие определенного интеграла.

Пусть на отрезке $[a,b]$ задана непрерывная функция $y = f(x)$.
Разделим отрезок $[a,b]$ на n маленьких частей

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

Введем обозначение $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, где Δx_i – длина i–го отрезка:

$$\Delta x_2 = x_2 - x_1$$

Внутри i–го отрезка выберем точку ξ_i.
Вычислим значение функции в этой точке, т.е. $f(\xi_i)$. Составим произведение $f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$, которое является площадью прямоугольника.
Просуммируем по каждому прямоугольнику, т.е. составим интегральную сумму:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$$

где $n\to\infty$, чтобы $\max\Delta x_i \to 0$.
Тогда, если существует предел последовательности интегральных сумм при $n\to\infty$ и он равен S, то этот предел называется определенным интегралом:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\max\Delta x_i\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$$

где $f(x)$ – подынтегральная функция;
dx – переменное интегрирование;
a – нижний предел;
b – верхний предел.
Функция, для которой существует определенный интеграл, называется интегрируемой.
Геометрический смысл определенного интеграла – это площадь криволинейной трапеции.
Из определения определенного интеграла следуют свойства:

1. $\int_a^b f(x)dx = 0$
2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
3. $\int_a^b f(x)dx = b - a$

Теорема 1. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема, т.е. существует определенный интеграл.

§44. Основные свойства определенного интеграла.

Свойство 1. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

Доказательство.
Воспользуемся определением определенного интеграла:

$$\int_a^b cf(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\max\Delta x_i\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} cf(\xi_i)\cdot\Delta x_i$$

Используя определение суммы и предела, получим:

$$\int_a^b cf(x)dx = c\lim_{\substack{n\to\infty \\ (\max\Delta x_i\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i = c\int_a^b f(x)dx$$

Что и требовалось доказать.

Свойство 2. Определенный интеграл от суммы двух функций равен сумме определенных интегралов от этих функций:

$$\int_a^b \big(f_1(x) + f_2(x)\big)dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$$

Доказательство.
Воспользуемся определением определенного интеграла:

$$\int_a^b \big(f_1(x) + f_2(x)\big)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\max\Delta x_i\to 0)}} \sum_{i=1}^{n}\big(f_1(\xi_i) + f_2(\xi_i)\big)\cdot\Delta x_i = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\max\Delta x_i\to 0)}}\left(\sum_{i=1}^{n} f_1(\xi_i)\cdot\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} f_2(\xi_i)\cdot\Delta x_i\right)$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\max\Delta x_i\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f_1(\xi_i)\cdot\Delta x_i + \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\max\Delta x_i\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f_2(\xi_i)\cdot\Delta x_i = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$$

Что и требовалось доказать.

Свойство 3. Если на отрезке $[a,b]$, где $a<b$, функция удовлетворяет неравенству $f(x)\le\varphi(x)$, то:

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx$$

Доказательство.
По условию теоремы, $f(x)\le\varphi(x)$, т.е. $f(x)-\varphi(x)\le 0$
Рассмотрим разность интегралов:

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b \varphi(x)dx = \int_a^b \big(f(x)-\varphi(x)\big)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\max\Delta x_i\to 0)}} \sum_{i=1}^{n}\big(f(\xi_i) - \varphi(\xi_i)\big)\cdot\Delta x_i$$

Здесь каждая разность $f(\xi_i) - \varphi(\xi_i)\le 0$, $\Delta x_i > 0$. Следовательно, предел суммы отрицателен, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b \varphi(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\max\Delta x_i\to 0)}} \sum_{i=1}^{n}\big(f(\xi_i) - \varphi(\xi_i)\big)\cdot\Delta x_i \le 0$$

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b \varphi(x)dx \le 0$$

Отсюда следует неравенство

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx$$

Что и требовалось доказать.

Свойство 4. Если m и M – наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, то выполняется:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

Доказательство.
По условию теоремы, m и M – наименьшее и наибольшее значения функции, т.е.

$$m \le f(x) \le M$$

На основании свойства 3 имеем:

$$\int_a^b m dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M dx$$

Отсюда следует неравенство

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

Что и требовалось доказать.

Свойство 5.(Теорема о среднем) Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то найдется такая точка ξ, которая принадлежит отрезку $[a,b]$, что справедлива формула:

$$\int_a^b f(x)dx \le f(\xi)(b-a)$$

Доказательство.
Для определенности считаем, что $a<b$.
Т.к. по условию теоремы, $f(x)$ – непрерывная функция, то она имеет наименьшее m и наибольшее M значения, т.е.

$$m \le f(x) \le M$$

На основании свойства 4 имеем:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

Разделим все части неравенства на $(b-a)$:

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)dx}{(b-a)} \le M$$

Введем обозначение $\frac{\int_a^b f(x)dx}{(b-a)} = \mu$, тогда предыдущее неравенство примет вид:

$$m \le \mu \le M$$

Т.к. функция непрерывна на отрезке $[a,b]$, то можно найти такую точку ξ, значение функции в которой равно μ, т.е. $f(\xi)=\mu$
Тогда

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{(b-a)} = f(\xi)$$

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

Что и требовалось доказать.

Свойство 6. Для любых трех чисел справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Доказательство.
Воспользуемся определением определенного интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\max\Delta x_i\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\max\Delta x_i\to 0)}}\left(\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i + \sum_{j=1}^{l} f(\xi_j)\cdot\Delta x_j\right)$$

$$= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Что и требовалось доказать.

§45. Вычисление определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница.

Пусть в определенном интеграле $\int_a^b f(x)dx = \Phi$ нижний предел a постоянный, а верхний предел b переменный. Введем обозначение $b = t$ и получим интеграл $\int_a^t f(x)dx = \Phi(t)$ с верхним переменным пределом.

Теорема 1. Если $f(x)$ – непрерывная функция и $\int_a^t f(x)dx = \Phi(t)$, то выполняется

$$\boldsymbol{[\Phi(t)]' = f(t)}$$

Доказательство.
Воспользуемся определением производной:

$$\Phi'(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Phi(t+\Delta t)-\Phi(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\int_a^{t+\Delta t} f(x)dx - \int_a^t f(x)dx}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\int_t^{t+\Delta t} f(x)dx + \int_t^a f(x)dx}{\Delta t}$$

Воспользуемся свойством 6 определенного интеграла, а затем теоремой о среднем:

$$\Phi'(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\int_t^{t+\Delta t} f(x)dx}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(\xi)\Delta t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} f(\xi) = f(t)$$

где ξ принадлежит Δt, т.е.

$$[\Phi(t)]' = f(t)$$

Что и требовалось доказать.

Функция $\Phi(t)$ есть первообразная функции $f(t)$.

Теорема 2. Если $F(x)$ есть первообразная функции $f(x)$, то справедлива формула

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$$

Эта формула называется *формулой Ньютона-Лейбница*.

Доказательство.
Рассмотрим интеграл

$$\int_a^t f(x)dx = \Phi(t) = F(t) + C$$

Положим, что $t = a$, тогда получим:

$$\int_a^a f(x)dx = F(a) + C = 0$$

$$C = -F(a)$$

Подставив данное выражение в первоначальный интеграл, получим:

$$\int_a^t f(x)dx = F(t) - F(a)$$

Положим, что $t = b$, тогда получим:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Что и требовалось доказать.

Пример 1. Вычислить определенный интеграл $\int_1^3 x^2 dx$.

Решение.

$$\int_1^3 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{26}{3}$$

§46. Замена переменной в определенном интеграле.

Теорема 1. Если дан определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и переменная x представляет собой некоторую функцию $\varphi(t)$, причем $\varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b$, и функции $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$, то справедлива формула

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dx}$$

Доказательство.
Рассмотрим неопределенный интеграл, где $F(x)$ есть первообразная функции $f(x)$:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Осуществим замену переменной в неопределенном интеграле:
$x = \varphi(t)$, тогда $dx = \varphi'(t)dt$
Следовательно, интеграл примет вид:

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C$$

Рассмотрим определенный интеграл:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Осуществим замену переменной в определенном интеграле:
$x = \varphi(t)$, тогда $dx = \varphi'(t)dt$
По условию теоремы $\varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b$, следовательно, интеграл примет вид:

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a)$$

Отсюда получаем:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dx$$

Что и требовалось доказать.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx$.

Решение.
Осуществим замену переменной:

$$x = 2\sin t$$

тогда

$$dx = 2\cos t\,dt$$

Если $x = 0$, то $t = 0$.
Если $x = 2$, то $t = \frac{\pi}{2}$.
Следовательно, интеграл примет вид:

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4\sin^2 t}\,2\cos t\,dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\cos t\,dt$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)dt$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t\,dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t\,d(2t) = 2t|_0^{\frac{\pi}{2}} + \sin 2t|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2\cdot\frac{\pi}{2} - 2\cdot 0 + \sin\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right) - \sin 0 = \pi$$

§47. Интегрирование по частям.

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемые функции. Тогда

$$d(uv) = vdu + udv$$

Интегрируя обе части тождества в пределах от a до b, получим:

$$\int_a^b d(uv) = \int_a^b (vdu + udv)$$

Используем свойства определенного интеграла:

$$\int_a^b d(uv) = \int_a^b vdu + \int_a^b udv$$

$$uv|_a^b = \int_a^b vdu + \int_a^b udv$$

Окончательно получим:

$$\boldsymbol{\int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu}$$

Пример 1. Вычислить интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$.

Решение.
Обозначим $u = x,\ dv = \sin x\,dx$, тогда

$$du = dx,$$

Возьмем интегралы от обеих частей равенства $dv = \sin x\,dx$:

$$\int dv = \int \sin x\,dx,$$

$$v = -\cos x + C$$

Т.к. это выражение справедливо для любого C то положим $C = 0$.
Подставив полученные выражения в формулу интегрирования по частям, получим

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx = x(-\cos x)|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x)dx = \frac{\pi}{2}\left(-\cos\frac{\pi}{2}\right) - 0(\cos 0) + \sin x|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot 0 - 0 + \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$$

§48. Несобственные интегралы с бесконечными пределами.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на интервале $[a,\infty)$.
Найдем площадь этой бесконечной фигуры:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$$

Если предел существует, то интеграл сходится, а если не существует (а именно, равен ∞), то интеграл расходится.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$.

Решение.

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty}\left(\operatorname{arctg} x|_0^b\right) = \lim_{b\to\infty}(\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 0) = \lim_{b\to\infty}\operatorname{arctg} b = \frac{\pi}{2}$$

т.е. интеграл сходится.

Теорема 1. Если для всех x $(x \ge a)$ выполняется неравенство $0 \le f(x) \le \varphi(x)$ и если несобственный интеграл $\int_a^\infty \varphi(x)dx$ сходится, то и $\int_a^\infty f(x)dx$ также сходится.

Пример 2. Выяснить поведение несобственного интеграла $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$.

Решение.

Рассмотрим функцию $\frac{1}{x^2}$ на отрезке $[1,\infty)$, где $\frac{1}{x^2(1+e^x)} < \frac{1}{x^2}$

Тогда

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{x}\Big|_1^b\right) = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}+\frac{1}{1}\right) = 1$$

т.е. интеграл сходится, следовательно, по теореме 1 и $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$ также сходится.

Теорема 2. Если для всех x $(x \ge a)$ выполняется неравенство $\le \varphi(x) \le f(x)$ и интеграл $\int_a^\infty \varphi(x)dx$ расходится, то расходится и $\int_a^\infty f(x)dx$.

Пример 3. Исследовать сходимость интеграла $\int_1^\infty \frac{x+1}{\sqrt{x^3}}dx$.

Решение.

На интервале $[1,\infty)$ будет выполняться неравенство:

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^3}} > \frac{x}{\sqrt{x^3}}$$

Тогда

$$\int_1^\infty \frac{x}{\sqrt{x^3}}dx = \int_1^\infty x^{-\frac{1}{2}}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-\frac{1}{2}}dx = \lim_{b\to\infty}\left(2\sqrt{x}\Big|_1^b\right) = \lim_{b\to\infty}(2\sqrt{b} - 2\sqrt{1}) = \infty$$

т.е. интеграл расходится, следовательно, по теореме 2 и $\int_1^\infty \frac{x+1}{\sqrt{x^3}}dx$ также расходится.

Теорема 3. Если несобственный интеграл $\int_a^\infty |f(x)|dx$ сходится, то и несобственный интеграл $\int_a^\infty f(x)dx$ тоже сходится. В этом случае последний интеграл называется абсолютно сходящимся.

§49. Несобственные интегралы от разрывных функций.

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна при $a \le x < c$, а в точке $x = c$ функция либо не определена, либо терпит разрыв второго рода. В этом случае интеграл $\int_a^c f(x)dx$ не определен.

Интеграл $\int_a^c f(x)dx$ от функции $f(x)$, разрывной в точке c, определяется следующим образом:

$$\int_a^c f(x)dx = \lim_{b\to c-0}\int_a^b f(x)dx$$

Если предел, стоящий справа, существует, т.е. при его нахождении получается число, то интеграл называют несобственным сходящимся интегралом, в противном случае интеграл называют расходящимся.

Замечание 1. Если функция $f(x)$ имеет разрыв в точке c, лежащей внутри отрезка $[a,b]$, то выполняется равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Пример 1. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

Решение.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{b\to 1-0}\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{b\to 1-0}\left(-\int_0^b \frac{d(1-x)}{\sqrt{1-x}}\right) = -\lim_{b\to 1-0}\int_0^b (1-x)^{-\frac{1}{2}}d(1-x) = -\lim_{b\to 1-0}\left(2\sqrt{1-x}\Big|_0^b\right)$$
$$= -\lim_{b\to 1-0}(2\sqrt{1-x} - 2) = 2$$

Для несобственных интегралов от разрывных функций справедливы те же теоремы, что и для интегралов с бесконечными пределами.

§50. Интегралы, зависящие от параметра. Гамма-функция (функция Эйлера).

Пусть дан интеграл

$$I(\alpha)=\int_a^b f(x,\alpha)dx$$

в котором подынтегральная функция зависит от некоторого параметра α.
Научимся находить производную от функции $I(\alpha)$, т.е. $I'(\alpha)$.
Воспользуемся определением производной:

$$I'(\alpha)=\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{I(\alpha+\Delta\alpha)-I(\alpha)}{\Delta\alpha}=\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{\int_a^b f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx-\int_a^b f(x,\alpha)dx}{\Delta\alpha}$$
$$=\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{\int_a^b[f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)]\,dx}{\Delta\alpha}$$
$$=\int_a^b\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)}{\Delta\alpha}$$

Применяя теорему Лагранжа к подынтегральной функции, получим

$$I'(\alpha)=\int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)dx$$

Окончательно, получим

$$\boldsymbol{\left[\int_a^b f(x,\alpha)dx\right]'_\alpha=\int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)dx}$$

Последняя формула называется *формулой Лейбница.*
Усложним исходный интеграл. Предположим, что в нем пределы интегрирования a и b являются функциями от α:

$$I(\alpha)=\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x,\alpha)dx=\Phi\big(\alpha,a(\alpha),b(\alpha)\big)$$

Для нахождения производной от $I(\alpha)$, применим правило дифференцирования сложной функции от нескольких переменных:

$$I'(\alpha)=\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}\frac{d\alpha}{d\alpha}+\frac{\partial\Phi}{\partial b}\frac{db}{d\alpha}+\frac{\partial\Phi}{\partial a}\frac{da}{d\alpha}$$

где

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}=\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x,\alpha)dx=\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f'_\alpha(x,\alpha)dx$$

$$\frac{d\alpha}{d\alpha}=1$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial b}=\frac{\partial}{\partial b}\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x,\alpha)dx=f(b(\alpha),\alpha)$$

$$\frac{db}{d\alpha}=b'(\alpha)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial a}=\frac{\partial}{\partial a}\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x,\alpha)dx=\frac{\partial}{\partial a}\left(-\int_{b(\alpha)}^{a(\alpha)} f(x,\alpha)dx\right)=f(a(\alpha),\alpha)$$

$$\frac{da}{d\alpha}=a'(\alpha)$$

Подставляя в формулу полученные выражения производных, будем иметь:

$$I'(\alpha)=\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f'_\alpha(x,\alpha)dx\cdot 1+f(b(\alpha),\alpha)\cdot b'(\alpha)-f(a(\alpha),\alpha)\cdot a'(\alpha)$$

Окончательно получим:

$$\boldsymbol{\left[\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x,\alpha)dx\right]'_\alpha=\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f'_\alpha(x,\alpha)dx\cdot 1+f(b(\alpha),\alpha)\cdot b'(\alpha)-f(a(\alpha),\alpha)\cdot a'(\alpha)}$$

В качестве интеграла, зависящего от параметра рассмотрим гамма-функцию Эйлера:

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$$

Найдем значения $\Gamma(\alpha)$ при целых α. При $\alpha=1$ имеем

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty x^{1-1}e^{-x}dx=\int_0^\infty e^{-x}dx=-\int_0^\infty x^{1-1}e^{-x}d(-x)=-\lim_{b\to\infty}e^{-x}|_0^b$$
$$=-\lim_{b\to\infty}(e^{-b}-e^0)=1$$

Пусть целое $\alpha>1$. Интегрируем по частям:

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx=-\int_0^\infty x^{\alpha-1}de^{-x}=-x^{\alpha-1}e^{-x}|_0^\infty+\int_0^\infty e^{-x}(\alpha-1)x^{\alpha-2}dx$$

Вычислим предел от подынтегральной функции с помощью правила Лопиталя:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\alpha-1)x^{\alpha-2}}{e^x}=0$$

Подставив, получим:

$$-\lim_{b\to\infty}e^{-x}|_0^b=0$$

Тогда

Окончательно получим:

$$\boldsymbol{\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)}$$

Вычислим по данной формуле значения $\Gamma(\alpha)$:

$$\Gamma(2)=(2-1)\Gamma(2-1)=1\Gamma(1)=1=1!$$
$$\Gamma(3)=(3-1)\Gamma(3-1)=2\Gamma(2)=1\cdot 2=2!$$
$$\Gamma(4)=(4-1)\Gamma(4-1)=3\Gamma(3)=1\cdot 2\cdot 3=3!$$

и т.д.
Таким образом, при $\alpha=n$

$$\boldsymbol{\Gamma(n+1)=n!}$$

Тогда

$$\Gamma(1)=0!$$

§51. Приложение определенного интеграла.

Объем тела вращения вокруг оси Ox.

Найдем объем тела вращения некоторой функции $y = f(x)$ вокруг оси Ox.
Т.к.

$$dV = dx\pi[f(x)]^2$$

то объем тела вращения вокруг оси Ox находится по формуле:

$$\boldsymbol{V_{Ox} = \pi \int_a^b f^2(x)dx}$$

Объем тела вращения вокруг оси Oy.

Найдем объем тела вращения некоторой функции $y = f(x)$ вокруг оси Oy.
Т.к.

$$dV = 2\pi x f(x)dx$$

то объем тела вращения вокруг оси Oy находится по формуле:

$$\boldsymbol{V_{Oy} = 2\pi \int_a^b xf(x)dx}$$

Пример 1. Найти объем тела вращения функции $y = x$ вокруг оси Ox на отрезке $[0,1]$.
Решение.

$$V_{Ox} = \pi \int_0^1 x^2dx = \pi \frac{x^3}{3}\bigg|_0^1 = \frac{\pi}{3}$$

Пример 2. Найти объем тела вращения функции $y = x$ вокруг оси Oy на отрезке $[0,1]$.
Решение.

$$V_{Oy} = 2\pi \int_0^1 x \cdot xdx = \frac{2\pi}{3}$$

Длина дуги, заданной функцией в декартовых координатах.

Дана декартова система координат и некоторая функция $y = f(x)$. Найдем длину дуги l:

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

отсюда

$$l = \int_a^b dl = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

Окончательно получим:

$$\boldsymbol{l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}dx}$$

Пример 3. Найти длину дуги функции $y = x$, заданной на отрезке $[0,1]$.
Решение.

$$l = \int_0^1 \sqrt{1 + (x')^2}dx = \sqrt{2}x|_0^1 = \sqrt{2}$$

§52. Приложение определенного интеграла.

Площадь поверхности тела вращения.

Найдем боковую поверхность тела вращения функции $y = f(x)$ вокруг оси Ox.
Т.к.

$$dS = 2\pi f(x)dl$$

то боковую поверхность тела вращения вокруг оси Ox находится по формуле:

$$\boldsymbol{S_{Ox} = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx}$$

Пример 4. Найти площадь поверхности вращения функции $y = x$ вокруг оси Ox на отрезке $[0,1]$.
Решение.

$$S_{Ox} = 2\pi\int_0^1 x\sqrt{1+(x')^2}dx = 2\pi\sqrt{2}\int_0^1 xdx = 2\pi\sqrt{2}\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \pi\sqrt{2}$$

Аналогично выводится формула для нахождения боковой поверхности вращения функции $y = f(x)$ вокруг оси Oy:

$$\boldsymbol{S_{Oy} = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1+(f'(x))^2}dx}$$

Работа по перемещению тела с переменной силой.

Т.к.

$$dA = F(x)dx$$

то работа по перемещению тела с переменной силой F находится по формуле:

$$\boldsymbol{A = \int_a^b F(x)dx}$$

Пример 5. Вычислить работу по растяжению пружины на отрезке $[0,1]$.
Решение.
Сила F и перемещение x связаны в данном случае следующей зависимостью

$$F = kx$$

где k – постоянная.
Тогда

$$A = \int_0^1 kxdx = k\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{k}{2}$$

Координаты центра тяжести пластинки.

Пусть пластинка (область) задана некоторой функцией $y = f(x)$ и имеет плотность ρ.
Найдем центр тяжести площадки по оси Ox.
Координаты центра тяжести:

$$x_ц = \frac{m_1\cdot x_1 + m_2\cdot x_2}{m_1+m_2}$$

Следовательно, координаты центра тяжести для n точек:

$$\vec{r} = \frac{m_1\cdot\vec{r_1} + m_2\cdot\vec{r_2}}{m_1+m_2}$$

Т.к.

$$dm = \rho dS = \rho f(x)dx$$

то координаты центра тяжести пластинки находятся по формуле:

$$\boldsymbol{x_ц = \frac{\int_a^b \rho f(x)xdx}{\int_a^b \rho f(x)dx}}$$

Пример 6. Найти координаты центра тяжести пластинки, заданной уравнением на отрезке $[0,2]$ и имеющей плотность .
Решение.

$$x_ц = \frac{\int_a^b \rho\cdot x\cdot xdx}{\int_a^b \rho\cdot xdx} = \frac{\frac{x^3}{3}\Big|_0^2}{\frac{x^2}{2}\Big|_0^2} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{4}{2}} = \frac{4}{3}$$

Площадь плоской фигуры и длина дуги кривой в полярной системе координат.

Полярная система координат имеет следующий вид:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

Т.к.

$$dS = \frac{r^2(\varphi)}{2}d\varphi$$

то площадь плоской фигуры находится по формуле:

$$\boldsymbol{S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)d\varphi}$$

Пример 7. Найти площадь круга радиуса $r = 5$.
Решение.

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 5^2 d\varphi = \frac{1}{2}5^2|_0^{2\pi} = \frac{2\pi 5^2}{2} = \pi 5^2$$

Найдем длину дуги кривой в полярной системе координат.
Т.к.

$$dl = \sqrt{dx^2+dy^2}$$
$$dx = (r'\cos\varphi - r\sin\varphi)d\varphi$$
$$dy = (r'\sin\ \varphi - r\cos\varphi)d\varphi$$

то

$$dx^2 = (r'^2\cos^2\varphi - 2r'r\cos\varphi\sin\varphi + r^2\sin^2\varphi)d\varphi$$
$$dy^2 = (r'^2\sin^2\varphi - 2r'r\cos\varphi\sin\varphi + r^2\cos^2\varphi)d\varphi$$

отсюда

$$l = \int_l dl = \int_l \sqrt{dx^2+dy^2}d\varphi$$
$$= \int_l \sqrt{r'^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi + r'^2\sin^2\varphi + r^2\cos^2\varphi}\,d\varphi$$
$$= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{r'^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi) + r^2(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)}d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{r'^2+r^2}d\varphi$$

Окончательно получаем:

$$\boldsymbol{l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{r'^2+r^2}d\varphi}$$

Пример 8. Найти длину дуги окружности радиуса $r = 5$.
Решение.

$$l = \int_0^{2\pi}\sqrt{5^2+0}d\varphi = 5\varphi|_0^{2\pi} = 10\pi$$