§1. Матрицы. Основные понятия.

Определение 1. **Матрицей** размера $m \times n$ называется таблица чисел вида:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

где a_{ij} **– элементы матрицы.** $(i = 1, 2, \dots, m; \; j = 1, 2, \dots, n)$.

Матрица обозначается $A_{m\times n}$, B, ( ), [ ], ‖ ‖, (a_{ij}).

Элементы $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ образуют i **– ю строку.**

Элементы $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}$ образуют j **– й столбец.**

Столбцы и строки называются **рядами.**

Различают следующие матрицы:

1. **Квадратная матрица** – число строк совпадает с числом столбцов $(m = n)$.

$$A_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$ *Например:* $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

В квадратной матрице элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ образуют **главную диагональ**, а элементы $a_{n1}, a_{(n-1)2}, \dots, a_{1n}$ – **побочную диагональ**.

2. **Матрица-столбец.** *Например:* $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3. **Матрица-строка.** *Например:* $A = (1 \quad 0 \quad 4 \quad 1)$.

4. **Нулевая матрица** – все элементы равны нулю. *Например:* $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5. **Единичная матрица** – на главной диагонали расположены единицы, остальные элементы равны нулю. *Например:* $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6. **Диагональная матрица** – на главной диагонали расположены произвольные числа, остальные элементы равны нулю. *Например:* $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

7. **Верхняя треугольная матрица** – ниже главной диагонали расположены нули.

Например: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

8. **Нижняя треугольная матрица** – выше главной диагонали расположены нули.

Например: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

§2. Действия над матрицей.

Определение 1. **Суммой двух матриц $A_{m\times n}$ и $B_{m\times n}$ называется матрица $C_{m\times n}$, для каждого элемента которой справедливо: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, где $i = 1, 2, \dots, m; \; j = 1, 2, \dots, n$.** Аналогично вводится понятие разности.

Пример 1. Найти $A + B$ где $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & 1+1 & 3+1 \\ 1+0 & 0-1 & 2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Определение 2. **Произведением матрицы $A_{m\times n}$ на вещественное число λ называется матрица $C_{m\times n}$, для элементов которой справедливо $c_{ij} = \lambda a_{ij}$, где $i = 1, 2, \dots, m; \; j = 1, 2, \dots, n$.**

Пример 2. Найти $2A - C$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. $2A - C = 2\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Определение 3. **Произведением двух матриц $A_{m\times k}$ и $B_{k\times n}$ называется матрица $C_{m\times n}$, для элементов которой справедливо $c_{ij} = \sum_{s=1}^{s=\kappa} a_{is} b_{sj}$.**

Замечание 1. Используя **правило Эйнштейна (по повторяющимся индексам подразумевается суммирование)**, выражение $c_{ij} = \sum_{s=1}^{\kappa} a_{is} b_{sj}$ кратко можно записать $c_{ij} = a_{is} b_{sj}$. *Например:* $a_{1i}b_{2i} = a_{11}b_{21} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{23}$

Перемножать можно только **согласованные** матрицы, т.е. число столбцов матрицы A должно быть равно числу строк матрицы B.

Пример 3 Найти AB, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 3 + 2\cdot 2 & 1\cdot 3 + 2\cdot 1 \\ 0\cdot 3 + 1\cdot 2 & 0\cdot 3 + 1\cdot 1 \\ 1\cdot 3 + 1\cdot 2 & 1\cdot 3 + 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Определение 4. **Матрица $B_{n\times m}$ называется транспонированной по отношению к матрице $A_{m\times n}$, если для всех элементов матриц $A_{m\times n}$ и $B_{n\times m}$ выполняется $a_{ij} = b_{ji}$. Обозначается $A^T = B$.**

Протранспонировать матрицу – каждую ее строку записать столбцом.

Пример 4. Найти A^T, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение. $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Для матриц справедливы следующие свойства:

1. $A + B = B + A$ **– коммутативность.**
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ **– ассоциативность.**
3. $A + 0 = A$ **– существование нулевого элемента.**
4. $A + (-A) = 0$ **– существование обратного элемента.**
5. $1 \cdot A = A$.
6. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$.
7. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.
8. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.
9. $(AB)C = A(BC)$.
10. $\alpha(AB) = (\alpha A)B$.
11. $(A + B)C = AC + BC$.
    $C(A + B) = CA + CB$.
12. $(A^T)^T = A$.
13. $(A + B)^T = A^T + B^T$.

Доказательство. $(A + B)^T = \left((a_{ij}) + (b_{ij})\right)^T = \left((a_{ij} + b_{ij})\right)^T = (a_{ji} + b_{ji}) = (a_{ji}) + (b_{ji}) = (a_{ij})^T + (b_{ij})^T = A^T + B^T$

14. $(AB)^T = B^T A^T$.

Доказательство. $(AB)^T = (a_{is}b_{sj})^T = (a_{js}b_{si}) = (b_{si}a_{js}) = (b_{si})(a_{js}) = (b_{is})^T(a_{sj})^T = B^T A^T$

Упражнения.

1. Найти $2A + B$, где $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.
2. Найти $4A - 2B$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Найти AB, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
4. Найти AB, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
5. Найти AB и BA, где $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B = (0 \quad 1 \quad 2)$.
6. Найти AB^T, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
7. Найти AE и EA, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
8. Решить уравнение $AB - X = 2C$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

§3. Перестановки.

Определение 1. **Перестановкой из n натуральных чисел называется любое их расположение и обозначается $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.**

Например: $(4,3,2,1,5)$ *и* $(5,1,3,2,4)$ являются перестановками натуральных чисел 1,2,3,4,5

Из натуральных чисел можно образовать $n!$ перестановок. (По определению $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \dots \cdot n$).

Определение 2. **Если в перестановке большее число стоит впереди меньшего, то два числа образуют инверсию.**

Число инверсий в перестановке $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ обозначается $\kappa(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

Пример 2. Найти число инверсий в перестановке $(2,4,7,6,3,1,5)$.

Решение. $\kappa(2,4,7,6,3,1,5) = 1+2+4+3+1+0+0 = 11.$

Если число инверсий в перестановке четное (нечетное), то перестановка **четная (нечетная).**

Теорема 1. При перестановке местами двух чисел четность перестановки меняется на противоположную.

§4. Определители.

Определение 1. **Определителем квадратной матрицы $A_{n\times n}$ называется число, полученное по следующим правилам:**

1. сумма $n!$ слагаемых

2. каждое слагаемое – это произведение n элементов матрицы A, взятых по одному из каждой строки и столбца

3. знак слагаемого определяется как $(-1)^\kappa$, где κ – число инверсий вторых индексов элементов матрицы при условии, что первые индексы располагаются в порядке возрастания

$$\det A_{n\times n} = \sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)}^{n!} (-1)^{\kappa(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n},$$

определитель обозначается $\det A_{n\times n}$, $|A_{n\times n}|$, Δ.

Из определения определителя получим правило вычисления определителя первого порядка, т.е. положим $n = 1$, тогда матрица $A = [a_{11}]$ а используя определение получим $\det[a_{11}] = (-1)^{\kappa(1)} a_{11} = a_{11}$.

Определитель 1-го порядка равен элементу определителя.

Пример 1. Найти определитель от матрицы $A = [7]$.

Решение. $\det[7] = 7.$

Из определения определителя получим правило вычисления определителя второго порядка, т.е. положим $n = 2$, тогда

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix} = (-1)^{\kappa(1,2)} a_{11}a_{22} + (-1)^{\kappa(2,1)} a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Определитель 2-го порядка равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали, минус произведение элементов, стоящих на побочной диагонали.

Пример 2. Найти определитель от матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1\end{bmatrix}$.

Решение. $\det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1\end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1\end{vmatrix} = 1\cdot(-1) - 3\cdot 2 = -7.$

Найдем как вычисляются определители третьего порядка, т.е. $n = 3$, тогда

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{\kappa(1,2,3)} a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^{\kappa(2,3,1)} a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^{\kappa(3,1,2)} a_{13}a_{21}a_{32} +$$

$$+ (-1)^{\kappa(3,2,1)} a_{13}a_{22}a_{31} + (-1)^{\kappa(2,1,3)} a_{12}a_{21}a_{33} + (-1)^{\kappa(1,3,2)} a_{11}a_{23}a_{32} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Определитель 3-го порядка вычисляется по правилу **треугольников или Саррюса,** *которое символически можно записать так:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} = + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}.$$

Пример 3. Найти определитель от матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$.

Решение.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix} = 1\cdot 0\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 1 + 0\cdot 1\cdot 2 - 0\cdot 0\cdot 1 - 2\cdot 1\cdot 1 - 1\cdot 1\cdot 2 = 0+2+0-0-2-2 = -2.$$

Из определения определителя следуют следующие свойства:

1. $\det A = \det A^T$.

2. Если в определителе члены некоторого ряда равны нулю, то и определитель равен нулю.

3. Если в определителе члены некоторого ряда имеют множитель α, то его можно вынести за знак определителя.

4. Если в определителе два параллельных ряда поменять местами, то определитель поменяет знак на противоположный.

5. Если определитель имеет два одинаковых параллельных ряда, то определитель равен нулю.

6. Если в определителе члены какого-то ряда разбить на сумму, то определитель равен сумме определителей. Первый определитель содержит в этом ряду первые слагаемые, второй – вторые слагаемые.

Например. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1+2 & 1 \\ 2 & 3+2 & 4 \\ 1 & 1+1 & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$

7. Если в определителе к некоторому ряду прибавить параллельный ряд, умноженный на произвольное число, то определитель не изменится.

Пример 4. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix}$.

Решение. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -5 & -7\end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -7\end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3\end{vmatrix} = -3\cdot 3 = -9.$

8. Детерминант $\det(AB) = \det A \det B$.

Используя свойства определителя, можно вычислить определители четвертого и старших порядков приводя их к верхнетреугольному виду. Т.к. все слагаемые в верхнетреугольном определителе равны нулю за исключением произведения элементов матрицы, стоящих на главной диагонали.

Пример 5. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0\end{vmatrix}$

Решение. Приведем его к верхнетреугольному виду:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -2 & 0\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & 0\end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -4\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 3\end{vmatrix} = -9.$$

Упражнения.

1. Найти число инверсий в перестановке $(2,4,7,6,3,1,5)$.

2. Найти число инверсий в перестановке $(2,4,7,6,3,1,5,9,8)$.

3. Найти определитель от матрицы $A = [9]$.

4. Найти определитель от матрицы $A = [-3]$.

5. Найти определитель от матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1\end{bmatrix}$.

6. Найти определитель от матрицы $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1\end{bmatrix}$.

7. Найти $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

8. Найти $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

9. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0\end{vmatrix}$.

10. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0\end{vmatrix}$.

§5. Миноры и алгебраические дополнения.

Пусть дана квадратная матрица $A_{n\times n}$. Выберем в этой матрице s строк и s столбцов.

Определение 1. **Минором M порядка s матрицы $A_{n\times n}$ называется определитель, составленный из элементов матрицы А, стоящих на пересечении s строк и s столбцов.**

Пример 1. Дана матрица $A_{6\times 6}=\begin{bmatrix}1&2&0&4&5&6\\2&1&-1&4&3&2\\0&-1&1&2&0&3\\1&1&2&3&1&4\\1&2&1&1&1&1\\-2&3&1&0&2&2\end{bmatrix}$. Найти ее минор, стоящий на пересечении 1-й, 3- й, 4- й строк и 2-го, 3-го, 5-го столбцов.

Решение. Выбрав в данной матрице 1-ю, 3-ю, 4-ю строки и 2-й, 3-й, 5-й столбцы, получим минор 3-го порядка:

$$M_{134235}=\begin{vmatrix}2&0&5\\-1&1&0\\1&2&1\end{vmatrix}=2\cdot1\cdot1+0\cdot0\cdot1+5\cdot(-1)\cdot2-5\cdot1\cdot1-2\cdot0\cdot2-1\cdot(-1)\cdot0=-13$$

Определение 2. **Дополнительным минором $\widetilde{M}$ к минору M называется определитель, составленный из не вычеркнутых элементов матрицы $A_{n\times n}$.**

Пример 2. Дана матрица $A_{6\times 6}=\begin{bmatrix}1&2&0&4&5&6\\2&1&-1&4&3&2\\0&-1&1&2&0&3\\1&1&2&3&1&4\\1&2&1&1&1&1\\-2&3&1&0&2&2\end{bmatrix}$.

Найти ее дополнительный минор $\widetilde{M}_{134235}$.

Решение. Выбрав в данной матрице 1-ю, 3-ю, 4-ю строки и 2-й, 3-й, 5-й столбцы, получим минор 3-его порядка:

$$\widetilde{M}_{134235}=\begin{vmatrix}2&4&2\\1&1&1\\-2&0&2\end{vmatrix}=2\cdot1\cdot2+4\cdot(-2)\cdot1+1\cdot0\cdot2-2\cdot(-2)\cdot1-2\cdot1\cdot0-2\cdot4\cdot1=-8.$$

Определение 3. **Алгебраическим дополнением $\mathcal{A}$ к минору M матрицы $A_{n\times n}$ называется определитель равный $(-1)^k\widetilde{M}$, где k – сумма номеров вычеркнутых строк и столбцов.**

Пример 3. Найти алгебраическое дополнение к минору M_{134235} из примера 1.

Решение. $\mathcal{A}_{134235}=(-1)^{1+3+4+2+3+5}\widetilde{M}_{124235}=(-1)^{18}\widetilde{M}_{124235}=-8.$

Теорема Лапласа. **Определитель матрицы $A_{n\times n}$ равен сумме произведений элементов некоторого его ряда на алгебраические дополнения этих элементов.** (Разложение определителя по элементам некоторого ряда)

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix},\qquad \det A=a_{21}\mathcal{A}_{21}+a_{22}\mathcal{A}_{22}+a_{23}\mathcal{A}_{23}$$

Пример 4. Дан определитель $\Delta=\begin{vmatrix}2&4&2\\1&1&1\\-2&0&2\end{vmatrix}$. Разложить его по элементам 3-й строки.

Решение. $\Delta=\begin{vmatrix}2&4&2\\1&1&1\\-2&0&2\end{vmatrix}=-2\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}4&2\\1&1\end{vmatrix}+0\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2&2\\1&1\end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2&4\\1&1\end{vmatrix}=-2\cdot2+0+2\cdot(-2)=-8.$

Пример 5. Дан определитель $\Delta=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&1&0\\1&1&0\end{vmatrix}$. Разложить его по элементам 3-о столбца.

Решение. $\Delta=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&1&0\\1&1&0\end{vmatrix}=3\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}+0\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix}+0\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}=3\cdot1+0+0=3.$

Замечание 1. Если в разложении определителя по элементам некоторого ряда вместо этих элементов написать элементы параллельного ряда, то определитель будет равен нулю т.к. получится определитель с двумя одинаковыми рядами.

§6. Ранг матрицы.

Определение 1. **Рангом матрицы $A_{m\times n}$ называется наибольший порядок ее минора, отличного от нуля.**

Обозначается ранг матрицы $Rang\ A=k$, где $k\le\min(m,n)$ – наименьшее значение из m и n.

Пример 1. Дана матрица $A_{3\times4}=\begin{bmatrix}1&2&1&3\\0&1&2&1\\1&0&0&2\end{bmatrix}$. Найти ранг матрицы.

Решение. Из определения ранга $Rang\ A=k\le3$. Вычисляем

$$\begin{vmatrix}1&2&1\\0&1&2\\1&0&0\end{vmatrix}=1\cdot1\cdot0+2\cdot2\cdot1+0\cdot0\cdot1-1\cdot1\cdot1-0\cdot2\cdot0-0\cdot2\cdot=$$

$$=0+4+0-1-0-0=3\ne0.$$

Так как определитель не равен нулю, то ранг данной матрицы равен 3. $Rang\ A=3$

Замечание. Если ранг матрицы $A_{m\times n}$ равен нулю, то матрица нулевая.

$$0<Rang\ A_{m\times n}\le\min(m,n)$$

*Так как вычисление ранга сводится к вычислению определителей, то следующие преобразования не меняют ранга матрицы(**элементарные преобразования**):*

1. *Перемена местами двух параллельных рядов.*
2. *Умножение произвольного ряда на любое число $\alpha\ne0$.*
3. *Прибавление к одному ряду матрицы другого параллельного ряда, умноженного на произвольное число.*

Элементарные преобразования позволяют легко находить ранг матрицы, приводя ее к трапециевидному виду. Т.к. в левом верхнем углу матрицы будет стоять определитель отличный от нуля и порядок которого и есть ранг.

Пример 2. Дана матрица $A_{3\times3}=\begin{bmatrix}1&-2&3\\2&-4&6\\5&1&4\end{bmatrix}$. Найти ранг матрицы.

Решение. Вычислим ранг данной матрицы, приведя ее к трапециевидному виду.

$$A_{3\times3}=\begin{bmatrix}1&-2&3\\2&-4&6\\5&1&4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-2&3\\0&0&0\\0&11&-11\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-2&3\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix},\quad\begin{vmatrix}1&-2\\0&1\end{vmatrix}=1\ne0,\quad Rang\begin{bmatrix}1&-2&3\\2&-4&6\\5&1&4\end{bmatrix}=2$$

Определение 2. **Базисным минором матрицы А называется любой ее минор, отличный от нуля и равный рангу матрицы.**

Например. $Rang\begin{bmatrix}1&-2&3\\2&-4&6\\5&1&4\end{bmatrix}=2$, минор $\begin{vmatrix}1&-2\\2&-4\end{vmatrix}=0$ не являться базисным, а минор $\begin{vmatrix}2&-4\\5&1\end{vmatrix}=22\ne0$ являться базисным.

§7. Обратная матрица.

Определение 1. **Матрица A^{-1} называется обратной к матрице A, если $AA^{-1}=A^{-1}A=E$ (единичной матрице).**

Определение 2. **Матрица A называется невырожденной, если ее определитель не равен нулю.**

Обратная матрица к матрице $A_{n\times n}$, определяемой, как

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}\mathcal{A}_{11}&\mathcal{A}_{21}&\dots&\mathcal{A}_{n1}\\\mathcal{A}_{12}&\mathcal{A}_{22}&\dots&\mathcal{A}_{n2}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\\mathcal{A}_{1n}&\mathcal{A}_{2n}&\dots&\mathcal{A}_{nn}\end{pmatrix},$$ где $\mathcal{A}_{ij}$ – алгебраические дополнения элемента a_{ij} матрицы A.

Теорема 1. **Для существования обратной матрицы необходимо и достаточно, чтобы она была невырожденной.**

Доказательство.

Необходимость. Пусть матрица A невырожденная. Докажем, что A^{-1}, является обратной.

То есть $AA^{-1}=E$. Найдем $AA^{-1}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{n1}&a_{n2}&\dots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathcal{A}_{11}&\mathcal{A}_{21}&\dots&\mathcal{A}_{n1}\\\mathcal{A}_{12}&\mathcal{A}_{22}&\dots&\mathcal{A}_{n2}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\\mathcal{A}_{1n}&\mathcal{A}_{2n}&\dots&\mathcal{A}_{nn}\end{pmatrix}\frac{1}{\det A}=$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}\mathcal{A}_{11}+a_{12}\mathcal{A}_{12}+\dots+a_{1n}\mathcal{A}_{1n}=\det A&0&\dots&0\\0&\det A&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&\det A\end{pmatrix}\frac{1}{\det A}=\begin{pmatrix}1&0&\dots&0\\0&1&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&1\end{pmatrix}=E.$$ ***Ч.т.д.***

Достаточность. По условию, $AA^{-1}=E$. необходимо доказать, что $det\ A\ne0$. Т.к. $AA^{-1}=E$, то $\det(AA^{-1})=det\,E$. А $\det(AA^{-1})=\det A\cdot det A^{-1}$ и $\det E=1$, то следует, что $\det A\cdot det A^{-1}=1$. Следовательно, $det\ A\ne0$. ***Ч.т.д.***

Пример 1. Найти обратную матрицу A^{-1} к матрице $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&0\\1&1&0\end{bmatrix}$.

Решение. Вычислим определитель матрицы A. $det\ A=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&1&0\\1&1&0\end{vmatrix}=0+0+6-3-0-0=3.$

Т.к. определитель матрицы A отличен от нуля, то обратная матрица существует и равна

$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}\mathcal{A}_{11}&\mathcal{A}_{21}&\mathcal{A}_{31}\\\mathcal{A}_{12}&\mathcal{A}_{22}&\mathcal{A}_{32}\\\mathcal{A}_{13}&\mathcal{A}_{23}&\mathcal{A}_{33}\end{pmatrix}$. Вычислим алгебраические дополнения $\mathcal{A}_{ij}$ элементов a_{ij}.

$\mathcal{A}_{11}=(-1)^{1+1}\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}=0\quad \mathcal{A}_{21}=(-1)^{2+1}\begin{pmatrix}2&3\\1&0\end{pmatrix}=3\quad \mathcal{A}_{31}=(-1)^{3+1}\begin{pmatrix}2&3\\1&0\end{pmatrix}=-3$

$\mathcal{A}_{12}=(-1)^{1+2}\begin{pmatrix}2&0\\1&0\end{pmatrix}=0\quad \mathcal{A}_{22}=(-1)^{2+2}\begin{pmatrix}1&3\\1&0\end{pmatrix}=-3\quad \mathcal{A}_{32}=(-1)^{3+2}\begin{pmatrix}1&3\\2&0\end{pmatrix}=6$

$\mathcal{A}_{13}=(-1)^{1+3}\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}=1\quad \mathcal{A}_{23}=(-1)^{2+3}\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}=1\quad \mathcal{A}_{33}=(-1)^{3+3}\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}=-3$

Тогда $A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0&3&-3\\0&-3&6\\1&1&-3\end{pmatrix}$.

Упражнения.

1. Найти минор M_{2413}, дополнительный минор $\widetilde{M}_{2413}$, алгебраическое дополнение $\mathcal{A}_{2413}$ матрицы $A=\begin{bmatrix}1&2&1&0\\2&0&1&2\\1&2&0&1\\1&1&1&0\end{bmatrix}$.
2. Найти минор M_{24}, дополнительный минор $\widetilde{M}_{24}$, алгебраическое дополнение $\mathcal{A}_{24}$ матрицы $A=\begin{bmatrix}1&2&1&0\\2&0&1&3\\1&0&0&1\\1&1&1&0\end{bmatrix}$.
3. Найти определитель от матрицы A, используя теорему Лапласа $A=\begin{bmatrix}1&2&0\\1&3&1\\2&1&2\end{bmatrix}$.
4. Найти определитель от матрицы A используя теорему Лапласа $A=\begin{bmatrix}1&2&1&0\\2&0&1&3\\1&0&0&0\\1&1&1&0\end{bmatrix}$.
5. Найти ранг матрицы A и указать базисный минор $A=\begin{bmatrix}1&-2&3\\3&-6&9\\5&1&4\end{bmatrix}$.
6. Найти ранг матрицы A и указать базисный минор $A=\begin{bmatrix}1&-2&3\\3&-6&9\\2&1&1\end{bmatrix}$.
7. Найти обратную матрицу A^{-1} к матрице A $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&0\\1&1&0\end{bmatrix}$.
8. Найти обратную матрицу A^{-1} к матрице A $A=\begin{bmatrix}3&4\\2&3\end{bmatrix}$.

§8. Матричная запись системы линейных уравнений.

Определение 1. **Системой m линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \dots, x_n$ называется выражение вида**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = h_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = h_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = h_m, \end{cases}$$

где a_{ij}– коэффициенты системы, h_k – некоторые вещественные числа.

Например. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 5, \\ 2x_1 - x_2 = 1. \end{cases}$ Система 2-х линейных уравнений с 2-я неизвестными x_1, x_2.

Матрица, составленная из коэффициентов системы, называется **основной матрицей системы** и имеет вид $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

Если к матрице A добавить столбец свободных членов, то она называется **расширенной матрицей** и обозначается $\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & h_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & h_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & h_m \end{array}\right)$.

матрицей неизвестных $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$,

матрица-столбец свободных членов $H = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \dots \\ h_m \end{pmatrix}$.

Тогда систему линейных уравнений можно записать в **матричном виде**

$AX = H$ или развернуто $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}_{n\times 1} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \dots \\ h_m \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \dots \\ h_m \end{pmatrix}$$

Пример 1. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 5, \\ 2x_1 - x_2 = 1. \end{cases}$ Записать ее матричным методом.

Решение. Составим основную матрицу системы $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, матрицу свободных членов $H = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, матрицу неизвестных $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Тогда, получим:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad AX = H.$$

Определение 2. **Решением системы линейных уравнений называется упорядоченная система чисел, которая обращает каждое уравнение в системе в верное тождество $AC = H$.**

Где решение системы записано в виде матрицы-столбца $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}$

Определение 3. **Если существует хотя бы одно решение, то система линейных уравнений называется совместной. В противном случае – несовместной.**

Определение 4. **Система имеющая единственное решение, называется определенной, более одного решения – неопределенной.**

Определение 5. **Решить систему – это значит выяснить совместна она или несовместна, и если совместна – найти решения.**

Определение 6. **Две системы называются эквивалентными (равносильными) если решение одной системы является и решением другой.**

*Следующие преобразования системы оставляют ее эквивалентной(**эквивалентные преобразования**):*

1. *Перемена местами двух уравнений.*

Например. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 5, \\ 2x_1 - x_2 = 1. \end{cases}$ эквивалентна $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 = 5. \end{cases}$

2. *Если умножить обе части уравнения на произвольное число $\alpha \neq 0$.*

Например. $\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 = 10, \\ 2x_1 - x_2 = 1. \end{cases}$ эквивалентна $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 5, \\ 2x_1 - x_2 = 1. \end{cases}$

3. *Прибавление к одному уравнению другого, умноженного на произвольное число.*

Например. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1, \\ 9x_1 - x_2 = 8. \end{cases}$ эквивалентна $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 = 5. \end{cases}$ первую строчку умножили на 3 и сложили со второй.

§9. Решение невырожденных систем линейных уравнений. Формула Крамера.

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = h_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = h_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = h_n, \end{cases}$$

Или $AX = H$, где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \dots \\ h_n \end{pmatrix}$,

матрица A квадратная (число неизвестных равно числу уравнений).

Определение 1. **Если определитель матрицы A не равен нулю, то система называется невырожденной.**

Найдём решение невырожденной системы линейных уравнений $AX = H$ в матричном виде. Т.к. основная матрица системы A невырожденная, то существует обратная матрица A^{-1}. Умножим обе части уравнения $AX = H$ на A^{-1} слева, тогда $A^{-1}AX = A^{-1}H$ $\quad EX = A^{-1}H$ $\quad X = A^{-1}H$ – **решение системы в матричном виде.**

Пример 1. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 5, \\ 2x_1 - x_2 = 1. \end{cases}$. Решить ее матричным методом.

Решение. Основная матрица системы $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, матрица неизвестных $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, матрица свободных членов $H = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$. Найдем обратную матрицу A^{-1}, $detA = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1\cdot 3 - 2\cdot 2 = -7$.

$\mathcal{A}_{11} = (-1)^{1+1}(-1) = -1$; $\mathcal{A}_{21} = (-1)^{2+1}2 = -2$;

$\mathcal{A}_{12} = (-1)^{1+2}2 = -2$; $\quad \mathcal{A}_{22} = (-1)^{2+2}3 = 3$. $\quad A^{-1} = \frac{1}{-7}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение системы $X = A^{-1}H$, получаем: $\quad X = \frac{1}{-7}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-7}\begin{pmatrix} -7 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, т.е. $x_1 = 1$, $x_2 = 1$.

Распишем решение системы $X = A^{-1}H$ в общем виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{21} & \dots & \mathcal{A}_{n1} \\ \mathcal{A}_{12} & \mathcal{A}_{22} & \dots & \mathcal{A}_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{A}_{1n} & \mathcal{A}_{2n} & \dots & \mathcal{A}_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \dots \\ h_n \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11}h_1 + \mathcal{A}_{21}h_2 + \dots + \mathcal{A}_{n1}h_n \\ \mathcal{A}_{12}h_1 + \mathcal{A}_{22}h_2 + \dots + \mathcal{A}_{n2}h_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathcal{A}_{1n}h_1 + \mathcal{A}_{2n}h_2 + \dots + \mathcal{A}_{nn}h_n \end{pmatrix}.$$

Введя обозначения, где используется теорема Лапласа о разложении определителя по столбцу,

$detA = \Delta$,

$$\mathcal{A}_{11}h_1 + \mathcal{A}_{21}h_2 + \dots + \mathcal{A}_{n1}h_n = \begin{vmatrix} h_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ h_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta_1,$$

$$\mathcal{A}_{12}h_1 + \mathcal{A}_{22}h_2 + \dots + \mathcal{A}_{n2}h_n = \begin{vmatrix} a_{11} & h_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & h_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & h_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta_2,$$

……………………………………………………………

$$\mathcal{A}_{11}h_1 + \mathcal{A}_{21}h_2 + \dots + \mathcal{A}_{n1}h_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & h_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & h_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & h_n \end{vmatrix} = \Delta_n$$

решение системы $AX = H$ коротко записывается

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \dots \\ \Delta_n \end{pmatrix}$, или $\boxed{x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}}$.**(формула Крамера)**.

где Δ_i – определитель матрицы A, где вместо i-того столбца стоит столбец свободных членов.

Пример 2. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 5, \\ 2x_1 - x_2 = 1. \end{cases}$. Решить ее по формулам Крамера.

Решение. Воспользуемся формулой Крамера $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$, найдем Δ, и Δ_i: $\quad \Delta = detA = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7$,

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1\cdot 5 - 2\cdot 1 = -7$, $\quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot 1 - 5\cdot 2 = -7$,

$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-7}{-7} = 1$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-7}{-7} = 1$.

Упражнения.

1. Решить систему матричным методом. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1, \\ 2x_1 - x_2 = 2. \end{cases}$

2. Решить систему матричным методом. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$

3. Решить систему по формулам Крамера. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5, \\ 2x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$

4. Решить систему по формулам Крамера. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 5. \end{cases}$

§10. Решение произвольных систем. Метод Гаусса.

Решение системы m линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = h_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = h_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = h_m, \end{cases}$$

методом Гаусса заключается в приведении системы линейных уравнений к трапециевидному виду, используя эквивалентные преобразования, подобно вычислению ранга матрицы или определителя. Т.е. на основании первой строчки получаем нули в первом столбце ниже главной диагонали, на основании второй строчки получаем нули во втором столбце ниже главной диагонали и т. д. … . Для сокращения записи, эквивалентные преобразования будем производить не с системой линейных уравнений, а с расширенной матрицей система:

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{11} & \dots & a_{1n} & h_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & h_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & h_m \end{array}\right]$$

При этом система преобразуется к одному из трех случаев:

I случай.

В результате преобразования расширенная матрица система примет вид:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} & \dots & a_{1n} & h_1 \\ 0 & \widetilde{a_{22}} & \widetilde{a_{23}} & \dots & \widetilde{a_{2n}} & \widetilde{h_2} \\ 0 & 0 & \widetilde{a_{33}} & \dots & \widetilde{a_{33}} & \widetilde{h_3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \widetilde{h_r} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \widetilde{h_m} \end{bmatrix}, => \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = h_1, \\ \widetilde{a_{22}}x_2 + \widetilde{a_{22}}x_3 + \dots + \widetilde{a_{2n}}x_n = \widetilde{h_2}, \\ \widetilde{a_{33}}x_3 + \dots + \widetilde{a_{3n}}x_n = \widetilde{h_3}, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots, \\ 0x_n = \widetilde{h_r}. \end{cases}$$

Последнее уравнение содержит противоречие $0x_n = \widetilde{h_r}$, что означает **отсутствие решений** системы(**несовместность**). На языке рангов, ранг основной матрицы Rang A, не равен рангу расширенной матрицы Rang $\tilde{A}$. Отсюда следует **теорема Кронекера-Капели.**

<u>Теорема 1.</u> **Необходимым и достаточным условием совместности системы является равенство рангов основной матрицы и расширенной, т.е. $Rang\ A = Rang\ \tilde{A}$.**

Пример 1. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ 5x_1 - 5x_2 + 8x_3 - 7x_4 = 3. \end{cases}$

Решение. Составим расширенную матрицу данной системы и приведем её к трапециевидному виду:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 5 & -5 & 8 & -7 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right].$$

Возвращаясь к системе получим:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_3 + x_4 = 1, \\ 0 = -5. \end{cases}$$

Очевидно, что у данной системы, которая эквивалентна начальной нет решений т.к. 0 не может равняться -5. Ранг основной матрицы Rang A $= 2$, а ранг расширенной матрицы $Rang\ \tilde{A} = 3$.

II случай.

В результате преобразования расширенная матрица система примет вид:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} & \dots & a_{1n} & h_1 \\ 0 & \widetilde{a_{22}} & \widetilde{a_{23}} & \dots & \widetilde{a_{2n}} & \widetilde{h_2} \\ 0 & 0 & \widetilde{a_{33}} & \dots & \widetilde{a_{3n}} & \widetilde{h_3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \widetilde{a_{pp}} & \dots & \widetilde{a_{pn}} & \widetilde{h_p} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, => \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = h_1, \\ \widetilde{a_{22}}x_2 + \widetilde{a_{22}}x_3 + \dots + \widetilde{a_{2n}}x_n = \widetilde{h_2}, \\ \widetilde{a_{33}}x_3 + \dots + \widetilde{a_{3n}}x_n = \widetilde{h_3}, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \widetilde{a_{pp}}x_p + \dots + \widetilde{a_{pn}}x_n = \widetilde{h_p}, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

То есть ранг основной матрицы равен рангу расширенной матрицы и меньше числа неизвестных $Rang\ A = Rang\ \tilde{A} < n$. Тогда неизвестные не входящие в базисный минор переносятся в правую часть системы и обозначаются за произвольные константы $C_1, C_2, \dots, C_{n-p}$, то есть система имеет **бесконечное множество решений.**

Пример 2. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5, \\ 5x_1 + 8x_2 + 3x_3 = 11. \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$.

Решение. Составим расширенную матрицу данной системы:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & 8 & 3 & 11 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 8 & 3 & 11 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -7 & -7 & -14 \\ 0 & -7 & -7 & -14 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Перейдем к системе:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5, \\ x_2 + x_3 = 2, \\ 0 = 0, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Для решения этой системы те неизвестные, которые не входят в базисный минор, переносим в правую часть и обозначаем их через константы.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 5 - 2x_3, \\ x_2 = 2 - x_3, \end{cases} => \begin{cases} x_3 = C, \\ x_1 + 3x_2 = 5 - C, \\ x_2 = 2 - C, \end{cases} => \begin{cases} x_3 = C, \\ x_1 + 3(2 - C) = 5 - C, \\ x_2 = 2 - C, \end{cases} => \begin{cases} x_1 = -1 + C, \\ x_2 = 2 - C, \\ x_3 = C. \end{cases}$$

Следовательно, система имеет множество решений, где C – любое число.

III случай

В результате преобразования расширенная матрица система примет вид:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} & \dots & a_{1n} & h_1 \\ 0 & \widetilde{a_{22}} & \widetilde{a_{23}} & \dots & \widetilde{a_{2n}} & \widetilde{h_2} \\ 0 & 0 & \widetilde{a_{33}} & \dots & \widetilde{a_{33}} & \widetilde{h_3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \widetilde{a_{nn}} & \widetilde{h_n} \end{bmatrix}, => \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = h_1, \\ \widetilde{a_{22}}x_2 + \dots + \widetilde{a_{2n}}x_n = \widetilde{h_2}, \\ \dots \quad \dots \quad \dots, \\ \widetilde{a_{2n}}x_n = \widetilde{h_n}. \end{cases}$$

То есть ранг основной матрицы равен рангу расширенной матрицы и равен числу неизвестных $Rang\ A = Rang\ \tilde{A} = n$. То есть система имеет **единственное решение.**

Пример 3. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 = 5, \\ 4x_1 + 5x_2 = 9. \end{cases}$.

Решение. Составим расширенную матрицу данной системы и приведем её к трапециевидному виду:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 9 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Ранг основной матрицы равен рангу расширенной матрицы и равен числу неизвестных $Rang\ A = Rang\ \tilde{A} = n = 2$. То есть система имеет единственное решение.

Перейдя, к системе линейных уравнений получим:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_2 = 1, \end{cases} => \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 1. \end{cases}$$

Упражнения.

1. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.
$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 3, \\ 4x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 7. \end{cases}$

2. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.
$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ 5x_1 - 5x_2 + 8x_3 - 7x_4 = 3, \\ 5x_1 - 5x_2 + 8x_3 - 7x_4 = 3. \end{cases}$

3. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.
$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

4. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.
$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 3. \end{cases}$

5. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.
$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 5, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 3. \end{cases}$

6. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.
$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 7, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 5x_1 - x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$

§11. Понятие векторного (линейного) пространства.

Пусть в множестве V, состоящем из элементов $x, y, z, \dots$ $(x, y, z, \dots \in V)$заданы две операции:

1. **Внутренняя операция** $+$ (сложение), ставящая любым двум элементам множества V третий элемент $x + y = z$, где $z \in V$.
2. **Внешняя операция** (умножение на число), ставящая любому элементу из множества V и любому числу $\alpha \in R$ элемент $\alpha x = z$, где $z \in V$.

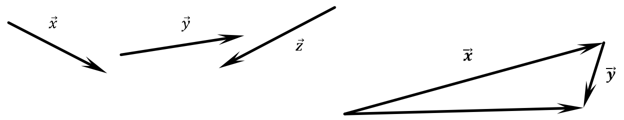
Определение 1. **Множество с двумя операциями, внутренней и внешней, для элементов которого выполняются следующие 8 аксиом:**

1. $\boldsymbol{x + y = y + x}$ **– коммутативность.**
2. $\boldsymbol{(x + y) + z = y + (x + z)}$ **– ассоциативность.**
3. $\boldsymbol{x + 0 = x}$ **– существование нулевого элемента.**
4. $\boldsymbol{x + (-x) = 0}$ **– существование противоположного элемента($\boldsymbol{x \in V}$).**
5. $\boldsymbol{1x = x}$
6. $\boldsymbol{\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x,}$ **где** $\boldsymbol{\alpha, \beta \in R,\ x \in V.}$
7. $\boldsymbol{\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y,}$ **где** $\boldsymbol{\alpha \in R,\ x, y \in V.}$
8. $\boldsymbol{(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x,}$ **где** $\boldsymbol{\alpha, \beta \in R,\ x \in V.}$

называется векторным (линейным) пространством $\boldsymbol{V}$**, а элементы векторного пространства** $\boldsymbol{V}$ **называются векторами.**

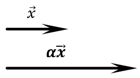
Пример 1. Показать, что множество направленных отрезков в плоскости образуют векторное пространство.

Решение. За элементы множества V примем множество направленных отрезков различной длины и направления, лежащих в одной плоскости$(x, y, z, \dots \in V)$.

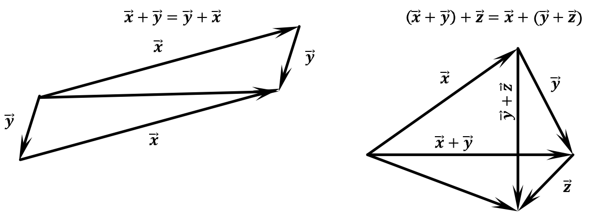


⊞ Внутренняя операция $\vec{x} + \vec{y} = \vec{z}$, **правило треугольника** $\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}$

⊠ Внешняя операция **удлинение** вектора $\vec{x}$ на число α



Далее проверяем все 8 аксиом векторного пространства, принимая за нулевой вектор направленный отрезок нулевой длины, а за противоположный вектор, направленный отрезок той же длины но противоположного направления. Проиллюстрируем первые две аксиомы:



Направленные отрезки с двумя этими операциями будут образовывать векторное пространство.

Пример 2. Показать, что множество матриц вида $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ образуют векторное пространство.

Решение. За элементы множества V множество матриц вида: $x = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$

⊞ Операция сложения матриц $x + y = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} = z$

⊠ Операция умножение матрицы на число. $\alpha x = \alpha \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{pmatrix} = z$

Из свойств матриц следует выполнение всех 8 аксиом линейного пространства.

1. $A + B = B + A$ **– коммутативность.**
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ **– ассоциативность.**
3. $A + 0 = A$ **– существование нулевого элемента.**
4. $A + (-A) = 0$ **– существование обратного элемента.**
5. $1 \cdot A = A$.
6. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$.
7. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.
8. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.

<u>Из определения векторного пространства следуют следующие свойства:</u>

1. *Существование единственного нулевого элемента.*

Доказательство. Предположим, что существуют два нулевых элемента 0_1 и 0_2, это означает, что для всех элементов x векторного пространства V включая и нулевые $x + 0_1 = x$ и $x + 0_2 = x$, тогда на основании аксиом 3,1,3 получим: $0_2 =^3 0_2 + 0_1 =^1 0_1 + 0_2 =^3 0_1$. Следовательно $0_2 = 0_1$. *Ч.т.д.*

2. *Существование единственного противоположного элемента.*

Доказательство. Предположим что для элемента x, что существует два противоположных элемента $(-x_1)$ и $(-x_2)$, то есть $x + (-x_1) = 0$ и $x + (-x_2) = 0$, тогда используя аксиомы векторного пространства, получим: $(-x_2) =^3 (-x_2) + 0 =^4 (-x_2) + \big(x + (-x_1)\big) =^2 \big((-x_2) + x\big) + (-x_1) =^1$ $=^1 \big(x + (-x_2)\big) + (-x_1) =^4 0 + (-x_1) =^1 (-x_1) + 0 =^3 - x_1$. Следовательно $-x_2 = -x_1$. *Ч.т.д.*

3. *Для* $\boldsymbol{-x}$ ***противоположным является*** $\boldsymbol{x}$***, т.е.*** $\boldsymbol{-x + x = 0}$**.**

Доказательство. Используя аксиомы , получим: $-x + x =^1 x + (-x) =^4 0$. *Ч.т.д.*

4. *Произведение числа* $\boldsymbol{0}$ ***на любой вектор*** $\boldsymbol{x}$ $\boldsymbol{(x \in V)}$ ***равно нулевому вектору, т.е.*** $\boldsymbol{0x = 0}$**.**

Доказательство. Используя аксиомы, получим: $0x =^3 0x + 0 =^4 0x + \big(x + (-x)\big) =^2$ $=^2 (0x + x) + (-x) =^5 (0x + 1x) + (-x) =^8 (0 + 1)x + (-x) = 1x + (-x) =^5 x + (-x) =^4 0$. *Ч.т.д.*

5. *Произведение* $\boldsymbol{-1}$ ***на любой вектор*** $\boldsymbol{x (x \in V)}$ ***равно противоположному вектору, т.е.*** $\boldsymbol{-1\,x = -x}$**.**

Доказательство. Используя аксиомы векторного пространства, получим:
$-1x =^3 - 1x + 0 =^4 (-1x) + \big(x + (-x)\big) =^2 (-1x + x) + (-x) =^5 (-1x + 1x) + (-x) =^8$ $=^8 (-1 + 1)x + (-x) = 0x + (-x) =^{4c} 0 + (-x) =^1 (-x) + 0 =^3 - x$ *Ч.т.д.*

6. *Произведение действительного числа* $\boldsymbol{\alpha}$ ***на нулевой вектор*** $\boldsymbol{0}$ ***равно нулевому вектору, т.е.*** $\boldsymbol{\alpha 0 = 0}$**.**

Доказательство. Используя аксиомы и ранее доказанные свойства векторного пространства, получим:
$\alpha 0 =^4 \alpha\big(x + (-x)\big) =^{55c} \alpha(1x + (-1)x) =^8 \alpha\Big(\big(1 + (-1)\big)x\Big) = \alpha(0x) =^6 (\alpha 0)x = 0x =^{4c} 0$ *Ч.т.д.*

7. *Если* $\boldsymbol{\alpha x = 0}$ ***и*** $\boldsymbol{\alpha \neq 0}$***, то*** $\boldsymbol{x = 0}$**.**

Доказательство. По условию, $\alpha x = 0$ и $\alpha \neq 0$, следовательно, $\frac{1}{\alpha} \neq 0$. Тогда $\frac{1}{\alpha}\alpha x = \frac{1}{\alpha}0$, $1x = \frac{1}{\alpha}0$, $x = 0$ *Ч.т.д.*

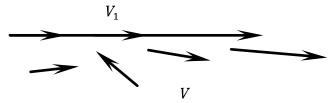
8. *Если* $\boldsymbol{\alpha x = 0}$ ***и*** $\boldsymbol{x \neq 0}$***, то*** $\boldsymbol{\alpha = 0}$**.**

Доказательство. Предположим, что $\alpha \neq 0$. Тогда по седьмому свойству $x = 0$, что противоречит условию, следовательно $\alpha = 0$. *Ч.т.д.*

Определение 2. **Множество** $\boldsymbol{V_1}$ **элементов векторного пространства** $\boldsymbol{V}$ **называется подпространством пространства** $\boldsymbol{V}$**, если выполняются следующие условия:**

1. **Операции сложения и умножения на число выполняются в множестве** $\boldsymbol{V_1}$ **аналогично как в множестве** $\boldsymbol{V}$**.**
2. **Если** $\boldsymbol{x, y \in V_1}$**, то** $\boldsymbol{(x + y) \in V_1}$**.**
3. **Если** $\boldsymbol{x \in V_1}$**, то** $\boldsymbol{\alpha x \in V_1}$**.**

Например. V – множество векторов в плоскости. Подпространство V_1 – множество векторов, лежащих на одной прямой лежащей в этой плоскости.



Упражнения.

1. Показать, что множество действительных чисел R образуют векторное пространство.
2. Показать, что множество функций вида $f(x) = ax + b$ $(a, b \in R)$ образуют векторное пространство V.

§12. Линейная зависимость и линейная независимость векторов.

Определение 1. **Система векторов $x_1, x_2, \dots, x_n$ векторного пространства V называется линейно независимой, если выражение (линейная комбинация) обращается в ноль $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0$, тогда и только тогда, когда все коэффициенты $\alpha_i = 0 (\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0)$.**

Замечание 1. Если линейная комбинация обращается в ноль $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0$ и хотя бы один из коэффициентов не равен нулю $\alpha_i \neq 0$, то система векторов **линейно зависима**.

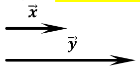
Например: Система, состоящая из одного ненулевого вектора $x_1 (x_1 \neq 0)$, – линейно независима. Так как равенство $\alpha_1 x_1 = 0$, при ненулевом векторе x_1 достигается тогда и только тогда когда $\alpha_1 = 0$.

Пример 1. Проверить линейную зависимость матриц $x_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $x_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ в линейном пространстве матриц вида $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Решение. Составим линейную комбинацию $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0$ или $\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \alpha_1 & 2\alpha_1 \\ \alpha_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\alpha_2 & \alpha_2 \\ 3\alpha_2 & \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 & 2\alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 & \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Отсюда следует система четырех уравнений с двумя неизвестными α_1, α_2. $\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0, \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 = 0, \\ 2\alpha_2 = 0. \end{cases}$ решая её, получим $\alpha_1 = 0, \ \alpha_2 = 0$.

Следовательно, матрицы(вектора) x_1, x_2 линейно независимы.

Определение 2. **Два вектора линейного пространства V называются коллинеарными (параллельными), если они линейно зависимы, и неколлинеарными, если они линейно независимы.**

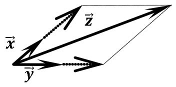


Например: Два параллельных направленных отрезка $\vec{x}, \vec{y}$ линейно зависимы т.к. $\vec{y} = \lambda \vec{x}$ или $1\vec{y} - \lambda \vec{x} = 0$, следовательно $\alpha_1 = 1 \neq 0$; $\alpha_2 = \lambda \neq 0$.

Пример 2. Убедится что две матрицы $x_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, и $x_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ параллельны(линейно зависимы).

Решение. Составим линейную комбинацию $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0$ или $\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \alpha_1 & 2\alpha_1 \\ \alpha_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\alpha_2 & 4\alpha_2 \\ 2\alpha_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 & 2\alpha_1 + 4\alpha_2 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Отсюда следует система четырех уравнений с двумя неизвестными α_1, α_2. $\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0, \\ 2\alpha_1 + 4\alpha_2 = 0, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0, \\ 0 = 0. \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0$ решая её, получим $\alpha_1 = -2C, \ \alpha_2 = C. (C \in R)$. Следовательно, матрицы x_1, x_2 параллельны(линейно независимы).

Определение 3. **Три вектора пространства V называются компланарными (лежат в одной плоскости), если они линейно зависимы, и некомпланарными, если они линейно независимы.**



Например: Три направленных отрезка $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ лежащих в одной плоскости линейно зависимы т.к. $\vec{z} = \alpha_1 \vec{x} + \alpha_2 \vec{y}$ или $\alpha_1 \vec{x} + \alpha_2 \vec{y} - \vec{z} = 0$, следовательно $\alpha_3 = -1 \neq 0$, а равенство ноль выполняется.

Пример 3. Убедится, что три матрицы $x_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $x_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ лежат в одной плоскости(линейно зависимы).

Решение. Составим линейную комбинацию $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$ или

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 \\ 2\alpha_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\alpha_2 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\alpha_3 & 2\alpha_3 \\ 3\alpha_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 & \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Отсюда следует система четырех уравнений с тремя неизвестными $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0, \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0, \\ 0 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0, \\ -\alpha_2 - \alpha_3 = 0, \\ -3\alpha_2 - 3\alpha_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0, \\ -\alpha_2 - \alpha_3 = 0, \\ 0 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = -3\alpha_3, \\ \alpha_2 = -\alpha_3. \end{cases}$$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -C, \\ \alpha_2 = -C, \\ \alpha_3 = C. \end{cases}$ где $C \in R$. Следовательно, матрицы x_1, x_2, x_3 лежат в одной плоскости(линейно зависимы).

Справедливы следующие свойства:

Теорема 1. **Если к системе n линейно зависимых векторов прибавить m векторов, то система $n + m$ будет линейно зависима.**

Доказательство. По условию теоремы, система n векторов линейно зависима, т.е. $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0$, и какой-то коэффициент $\alpha_i \neq 0$. Добавим к линейной комбинации m векторов с нулевыми коэффициентами $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n + 0x_{n+1} + 0x_{n+2} + \dots + 0x_{n+m} = 0$. Она также линейно зависима, т.к. в ней этот же $\alpha_i \neq 0$, а равенство ноль выполняется. *Ч.т.д.*

Теорема 2. **Если из системы n линейно независимых векторов вычесть m $(m < n)$ векторов, то получится линейно независимая система векторов.**

Доказательство.

По условию система n векторов линейно независима. Т.е. $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0$ и все коэффициенты $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. Вычтем из этой системы m векторов. Тогда линейная комбинация из оставшихся векторов $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_{m-m} x_{n-m} = 0$, также линейно независима, т.к. если бы она была линейно зависима, то, по предыдущей теореме, должна быть линейно зависима и первоначальная система n векторов, что противоречит условию теоремы. *Ч.т.д.*

Теорема 3. **Для того чтобы векторы $x_1, x_2, \dots, x_n$ были линейно зависимы необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из векторов являлся линейной комбинацией остальных.**

Доказательство.

Необходимость. Пусть векторы $x_1, x_2, \dots, x_n$ линейно зависимы. Докажем, что один из векторов можно выразить через остальные, т.е. он являлся линейной комбинацией остальных. По условию, векторы $x_1, x_2, \dots, x_n$ – линейно зависимы, т.е. $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0$, и где какой-то коэффициент, например $\alpha_1 \neq 0$. Поэтому умножим обе части на $-\frac{1}{\alpha_1} \neq 0$ и получим $x_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} x_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} x_3 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} x_n$. *Ч.т.д.*

Достаточность. Пусть один из векторов является линейной комбинацией остальных (например x_1). $x_1 = \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \dots + \alpha_n x_n$ или $-x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \dots + \alpha_n x_n = 0$ следовательно $\alpha_1 = -1 \neq 0$ поэтому система линейно зависима. *Ч.т.д.*

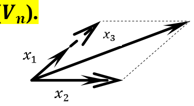
Упражнения.

1. Проверить линейную зависимость матриц $x_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $x_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Проверить линейную зависимость матриц $x_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $x_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$
3. Проверить параллельность (линейную зависимость) двух матриц $x_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, и $x_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.
4. Проверить параллельность (линейную зависимость) двух матриц $x_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, и $x_2 = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.
5. Проверить, что три матрицы $x_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $x_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ лежат в одной плоскости (линейно зависимы).
6. Проверить, что три матрицы $x_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $x_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ лежат в одной плоскости (линейно зависимы).

§13. Размерность и базис линейного пространства.

Определение 1. **Векторное пространство V называется n–мерным, если найдется n линейно независимых векторов, а любая система $n+1$ векторов линейно зависима. Обозначается $\dim V = n,\ (V_n)$.**

Например. Множество направленных отрезков принадлежащих плоскости образуют двухмерное пространство V_2, т.к. два вектора в нем:
x_1 , x_2 – линейно независимы(параллельны) т.к. $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0$,
$\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0$, а три вектора x_1, x_2, x_3 – линейно зависимы(компланарны),
т.к. $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 - x_3 = 0,\ \ \alpha_3 = -1$.



Определение 2. **Базисом линейного n–мерного пространства V_n называется любая упорядоченная система n линейно независимых векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$.**

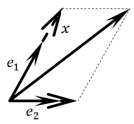
Теорема 1. **Любой вектор x линейного пространства V_n линейно выражается(раскладывается) через векторы базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$, ($x = \alpha_1^* e_1 + \alpha_2^* e_2 + \dots + \alpha_n^* e_n$, где α_i^* – координаты вектора x и обозначается $x(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_n^*)$).**

Доказательство. По условию теоремы, пространство V_n n–мерно и $e_1, e_2, \dots, e_n$– базис, следовательно линейная комбинация $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = 0$ линейно независима т.е. $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, а линейная комбинация $n+1$ вектора $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n + \beta_1 x = 0$ линейно зависима и при этом коэффициент $\beta_1 \neq 0$, т.к. если бы $\beta_1 = 0$, то и линейная комбинация $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = 0$, была бы, линейно зависимой, что противоречит условию теоремы. Поэтому любой вектор x можно представить $x = -\frac{\alpha_1}{\beta_1} e_1 - \frac{\alpha_2}{\beta_1} e_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\beta_1} e_n$. Обозначим $-\frac{\alpha_i}{\beta_1} = \alpha_i^*$ $\quad x = \alpha_1^* e_1 + \alpha_2^* e_2 + \dots + \alpha_n^* e_n$, где α_i^* – координаты вектора x в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$. *Ч.т.д.*

Замечание 1. **Любой вектор x единственным образом раскладывает по базису $e_1, e_2, \dots, e_n$.**

Доказательство. Предположим противное, что вектор x раскладывается по базису $e_1, e_2, \dots, e_n$, двумя способами, т. е. $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$ и $x = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_n e_n$, тогда $x - x = x + (-1)x = x + (-x) = 0$ или $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n - (\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_n e_n) = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n - \beta_1 e_1 - \beta_2 e_2 - \dots - \beta_n e_n = (\alpha_1 - \beta_1) e_1 + (\alpha_2 - \beta_2) e_2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) e_n = 0$. Вектора $e_1, e_2, \dots, e_n$ составляющие базис, линейно независимы, поэтому $\alpha_1 - \beta_1 = \alpha_2 - \beta_2 = \alpha_n - \beta_n = 0$, а значит $\alpha_1 = \beta_1,\ \alpha_2 = \beta_2, \dots,\ \alpha_n = \beta_n$, т.е. вектор x единственным образом раскладывается по базису. *Ч.т.д.*

Пример 1. Найти координаты вектора x, линейного пространства V_2 множество направленных отрезков плоскости в базисе e_1, e_2, где:
x - направленный отрезок, соединяющий точку $A(2{,}3)$ с началом координат,
e_1 - направленный отрезок, соединяющий точку $B(1{,}0)$ с началом координат,
e_2 - направленный отрезок, соединяющий точку $C(0{,}1)$ с началом координат.



Решение. Ра
$x = 2e_1 + 1{,}5 e_2$
$x(2{,}5; 1{,}5)$
$e_1(1; 0)$
$e_1 = 1\vec{e_1} + 0\vec{e_2}$
$e_2(0; 1)$
$e_2 = 0\vec{e_1} + 1\vec{e_2}$

Пример 2. Найти координаты вектора $x = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, линейного пространства V_4 матриц вида $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, в базисе $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Разложим вектор x по базису e_1, e_2, e_3, e_4. Т.е. представим $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4$,
$x = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 3e_1 + 2e_2 + 4e_3 + 5e_4, \quad x(3{,}2{,}4{,}5)$.

Справедливы следующие свойства:

1. Вектор является нулевым вектором линейного пространства V_n, тогда и только тогда, когда все его координаты равны нулю в любом базисе.

Доказательство.
Необходимость. Пусть вектор имеет нулевые координаты $x(0{,}0, \dots, 0)$. Разложим его по базису. $x = 0e_1 + 0e_2 + \dots + 0e_n$, т.к. произведение нуля на любой вектор – нулевой вектор, а сумма нулевых векторов также вектор ноль, то $x = 0$. *Ч.т.д.*
Достаточность. Пусть $x = 0$, разложим его по базису: $0 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$. Т.к. $e_1, e_2, \dots, e_n$– базис, то нулевой вектор в силу линейной независимости достигается тогда, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, *т.е.* координаты нулевые. *Ч.т.д.*

2. Координаты суммы двух векторов в некотором базисе равны сумме координат этих векторов в этом же базисе.

Доказательство. По условию, дано пространство V_n и базис в нем $e_1, e_2, \dots, e_n$. Разложим вектора x и y по базису: $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$, $y = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_n e_n$. Сложим эти векторы и преобразуем в соответствии с 8 аксиомами векторного пространства: $x + y = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n + \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_n e_n = (\alpha_1 + \beta_1) e_1 + (\alpha_2 + \beta_2) e_2 + \dots + (\alpha_n + \beta_n) e_n$, *т.е.* координаты векторов складываются. *Ч.т.д.*

Пример 3. В пространстве V_4, с базисом e_1, e_2, e_3, e_4 заданы векторы x и y:
$x = 2e_1 + 3e_2 + 4e_4$, $y = e_1 + 2e_2 + 3e_3 - e_4$ или $x(2{,}3{,}0{,}4)$, $y(1{,}2{,}3{,}-1)$. Найти $z = x + y$.
Решение. Сложим вектора: $z = x + y = (2e_1 + 3e_2 + 4e_4) + (e_1 + 2e_2 + 3e_3 - e_4) = 3e_1 + 5e_2 + 3e_3 + 3e_4$, $z(3{,}5{,}3{,}3)$.

3. Умножение вектора x на число λ сводится к умножению всех координат вектора на это число.

Доказательство. По условию, дано пространство V_n и базис в нем $e_1, e_2, \dots, e_n$. Любой вектор $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$, $\lambda x = \lambda(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n) = \lambda\alpha_1 e_1 + \lambda\alpha_2 e_2 + \dots + \lambda\alpha_n e_n$, *т.е.* координаты вектора умножаются на число λ. *Ч.т.д.*

Пример 4. Дано пространство V_4, базис в нем e_1, e_2, e_3, e_4, вектор $x = 2e_1 + 3e_2 + e_4$ или $x(2{,}3{,}0{,}1)$. Найти координаты вектора $2x$.
Решение. $y = 2x = 2(2e_1 + 3e_2 + e_4) = 4e_1 + 6e_2 + 2e_4$, $y(4{,}6{,}0{,}2)$.

4. Два вектора равны, когда равны их соответствующие координаты.

Доказательство. Пусть даны два векторы x и y: $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$, $y = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_n e_n$, $x = y$ или $x - y = 0$, $(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n) - (\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_n e_n) = 0$
$(\alpha_1 - \beta_1) e_1 + (\alpha_2 - \beta_2) e_2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) e_n = 0$, Т.к. вектора $e_1, e_2, \dots, e_n$ базисные, значит, они линейно независимы, тогда $\alpha_1 - \beta_1 = \alpha_2 - \beta_2 = \alpha_n - \beta_n = 0$, отсюда следует $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_n = \beta_n$, *т.е.* равны соответствующие координаты векторов. *Ч.т.д.*

Упражнения.

1. Найти минор M_{2413}, дополнительный минор $\widetilde{M}_{2413}$, алгебраическое дополнение $\mathcal{A}_{2413}$ матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

2. Найти минор M_{24}, дополнительный минор $\widetilde{M}_{24}$, алгебраическое дополнение $\mathcal{A}_{24}$ матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

3. Найти определитель от матрицы A, используя теорему Лапласа
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. Найти определитель от матрицы A используя теорему Лапласа
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

5. Найти ранг матрицы A и указать базисный минор
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 9 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

6. Найти ранг матрицы A и указать базисный минор
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Найти обратную матрицу A^{-1} к матрице A
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

8. Найти обратную матрицу A^{-1} к матрице A
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

§14. Матрицы перехода от одного базиса к другому. Преобразование координат вектора при переходе от одного базиса к другому.

Пусть в векторном пространстве V_n заданы два базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ и $e_1', e_2', \dots, e_n'$.

$$x \in V_n$$
$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$$
$$x = \alpha_1' e_1' + \alpha_2' e_2' + \dots + \alpha_n' e_n'$$

Разложим вектора $e_1', e_2', \dots, e_n'$ по первому базису.

$$e_1' = t_{11} e_1 + t_{21} e_2 + \dots + t_{n1} e_n$$
$$e_2' = t_{12} e_1 + t_{22} e_2 + \dots + t_{n2} e_n$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$e_n' = t_{1n} e_1 + t_{2n} e_2 + \dots + t_{nn} e_n$$

Введем обозначения:

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}$$ – матрица перехода от одного базиса к другому.

$$e' = \begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \\ \dots \\ e_n' \end{pmatrix}, e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \dots \\ e_n \end{pmatrix}$$

$$e' = (T^T) e$$

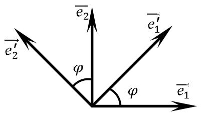
Т.к. e_1 можно выразить через новый базис, т.е. записать через систему 1, то всегда существует обратная матрица для данной матрицы, значит $\det T \neq 0$

Пример 1. Найти матрицу поворота системы координат на угол φ.

Решение.

Дано пространство V_2 и векторы e_1, e_2

Повернем на угол φ



$$e_1' = \cos\varphi\, e_1 + \sin\varphi\, e_2$$

$e_2' = -\sin\varphi\, e_1 + \cos\varphi\, e_2$

Тогда матрица перехода примет вид:

$$T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Пусть координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$, т.е. $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$, то координаты этого же вектора в новом базисе $e_1', e_2', \dots, e_n'$

$$x = \alpha_1' e_1' + \alpha_2' e_2' + \dots + \alpha_n' e_n'$$

Найдем связь между координатами старого базиса и нового базиса, считая, что координаты нового и старого базисов связаны следующим образом:

$$\begin{cases} e_1' = t_{11} e_1 + t_{21} e_2 + \dots + t_{n1} e_n, \\ e_2' = t_{12} e_1 + t_{22} e_2 + \dots + t_{n2} e_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ e_n' = t_{1n} e_1 + t_{2n} e_2 + \dots + t_{nn} e_n. \end{cases}$$

$$e' = (T^T) e$$

$$\begin{aligned} x = \alpha_1' e_1' + \alpha_2' e_2' + \dots + \alpha_n' e_n' &= \alpha_1'(t_{11} e_1 + t_{21} e_2 + \dots + t_{n1} e_n) \\ &+ {}+\alpha_2'(t_{12} e_1 + t_{22} e_2 + \dots + t_{n2} e_n) + \dots \\ &+ \alpha_n'(t_{1n} e_1 + t_{2n} e_2 + \dots + t_{nn} e_n) = \\ &= (\alpha_1' t_{11} + \alpha_2' t_{12} + \dots + \alpha_n' t_{1n}) e_1 + \\ &+(\alpha_1' t_{12} + \alpha_2' t_{22} + \dots + \alpha_n' t_{2n}) e_2 + \\ &+\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + \\ &+(\alpha_1' t_{n1} + \alpha_2' t_{n2} + \dots + \alpha_n' t_{nn}) e_n \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_1' t_{11} + \alpha_2' t_{12} + \dots + \alpha_n' t_{1n}, \\ \alpha_2 = \alpha_1' t_{12} + \alpha_2' t_{22} + \dots + \alpha_n' t_{2n}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \alpha_n = \alpha_1' t_{n1} + \alpha_2' t_{n2} + \dots + \alpha_n' t_{nn}. \end{cases}$$

Введем обозначения: $\alpha' = \begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ \dots \\ \alpha_n' \end{pmatrix}$, $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$

$\alpha = T\alpha^{-1}$где α' – новые координаты, α' – старые координаты.

$\alpha = T^{-1}\alpha$ – связь между старым и новым базисами

Пример 1. Найти координаты вектора $\vec{x}(1;-2)$ в пространстве V_2 в новом базисе, если старый базис связан с новым следующим образом:

$$e_1' = e_1$$
$$e_2' = e_1 + e_2$$
$$x = e_1 - 2e_2$$
$$x = ?\, e_1' + ?\, e_2'$$

Решение.

$$\alpha = T^{-1}\alpha$$

Найдем обратную матрицу T^{-1}, если $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Для этого найдем $\det T = 1 \times 1 - 1 \times 0 = 1$ и алгебраические дополнения элементов матрицы T

$$\mathcal{A}_{11} = (-1)^2 1 = 1$$
$$\mathcal{A}_{12} = (-1)^3 0 = 0$$
$$\mathcal{A}_{21} = (-1)^3 1 = -1$$
$$\mathcal{A}_{22} = (-1)^4 1 = 1$$

Следовательно, обратная матрица примет вид:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Тогда, подставив значения в формулу, получим:

$$\alpha' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$
$$x(3;2)$$
$$x = 3e_1' - 2e_2'$$

§15. Евклидово пространство. Длина вектора.

Дополним линейное (векторное) пространство V, которому принадлежат векторы x, y, z, третьей операцией, ставящей двум векторам в соответствие число. Эта операция$(x \cdot y)$ удовлетворяет следует четырем аксиомам:

1. $x \cdot y = y \cdot x$
2. $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$
3. $(\lambda x) \cdot y = \lambda(x \cdot y)$
4. $x \cdot x = x^2 \geq 0$, причем равенство 0 достигается тогда и только тогда, когда $x = 0$.

Такое линейное пространство называется Евклидовым и обозначается

Определение 1. Длиной вектора (модулем) x в Евклидовом пространстве называется арифметическое значение квадратного корня из скалярного квадрата вектора: $|x| = \sqrt{x \cdot x}$

Исходя из этого определения, справедливы следующие свойства:

1. $|x| = 0$, когда и только тогда, когда $x = 0$.

Доказательство

По определению, $|x| = \sqrt{x \cdot x}$

По четвертой аксиоме $x = 0$.

Свойство доказано.

2. $|\lambda x| = |\lambda||x|$

Доказательство

По определению, $|\lambda x| = \sqrt{\lambda x \cdot \lambda x}$

По третьей аксиоме $\sqrt{\lambda x \cdot \lambda x} = \sqrt{\lambda x \cdot \lambda x} = \sqrt{\lambda(x \cdot \lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 (x \cdot x)} = \sqrt{\lambda^2}\sqrt{x \cdot x} = |\lambda| \cdot |x|$

Свойство доказано.

3. $|x \cdot y| = |x||y|$– неравенство Коши – Буняковского.

Доказательство

Рассмотрим выражение $(\lambda x - y)^2 \geq 0$, где λ – произвольное число, а x, y – вектора.

Извлечем корень: $(\lambda x - y) \cdot (\lambda x - y) \geq 0$

$$\lambda^2 x \cdot x - 2\lambda x \cdot y + y \cdot y \geq 0$$
$$\lambda^2 x^2 - 2\lambda x \cdot y + y^2 \geq 0$$
$$D = 4(x \cdot y)^2 - 4x^2 y^2 \leq 0$$
$$(x \cdot y)^2 \leq x^2 \cdot y^2$$
$$|x \cdot y| \leq |x| \cdot |y|$$

Свойство доказано.

4. $|x + y| \leq |x| + |y|$– неравенство треугольника.

§16. Угол между векторами. Ортонормированный базис.

Рассмотрим неравенство Коши – Буняковского для любых векторов Евклидова пространства $\mathcal{E}_n$:

$$|x\cdot y|\le |x||y|$$
$$\frac{|x\cdot y|}{|x||y|}\le 1$$
$$\left|\frac{x\cdot y}{|x||y|}\right|\le 1$$
$$-1\le\left|\frac{x\cdot y}{|x||y|}\right|\le 1$$
$$\frac{x\cdot y}{|x||y|}=\cos\varphi$$
$$x\cdot y=|x||y|\cos\varphi$$

Из этого выражения видно, что $x\cdot y=0$, когда $\cos\varphi=0$, т.е. векторы перпендикулярны.

Векторы ортогональны (перпендикулярны), когда их скалярное произведение равно нулю.

Определение 1. **Система векторов называется ортогональной, если векторы попарно ортогональны, т.е. выполняется:**

$$x_i\cdot x_j=\begin{cases}0,\text{если } i\ne j\\ \ge 0,\text{если } i=j\end{cases}$$

Теорема 1. Ортогональная система ненулевых векторов линейно независима.

Доказательство

Пусть система векторов $x_1,x_2,\dots,x_n$– ортогональна, т.е. выполняется

$$x_i\cdot x_j=\begin{cases}0,\text{если } i\ne j\\ \ge 0,\text{если } i=j\end{cases}$$
$$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\dots+\alpha_nx_n=0$$

Предположим, что $\alpha_k\ne 0$, т.е. система линейно зависима:

$$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\dots+\alpha_kx_k+\dots+\alpha_nx_n=0$$

Умножим скалярно на x_k обе части уравнения:

$$(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\dots+\alpha_kx_k+\dots+\alpha_nx_n)\cdot x_k=0\cdot x_k$$

Преобразовав последнее выражение, получаем:

$$\alpha_kx_k\cdot x_k=0$$

По предположению $\alpha_k\ne 0$, а по четвертой аксиоме $x_k>0$. Получили противоречие.

Значит, должно α_k равняться нулю, следовательно система ненулевых векторов линейно независима.

Что и требовалось доказать.

Определение 2. **Система векторов $x_1,x_2,\dots,x_n$ называется ортонормированной, если они попарно ортогональны и длина каждого вектора равна 1:**

$$x_i\cdot x_j=\begin{cases}0,\text{если } i\ne j\\ 1,\text{если } i=j\end{cases}$$

Теорема 2. В любом n–мерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.

Пример 1. В евклидовом пространстве $\mathcal{E}_3$, пространстве направленных отрезков, ортонормированный базис равен:

$$i\cdot j=|i||j|\cos 0=1$$

$i\cdot j=|i||j|\cos\frac{\pi}{2}=0$,

где i,j - единичные векторы.

В евклидовом пространстве $\mathcal{E}_4$ ортонормированный базис равен:

$e_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $e_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, $e_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$

§17. Выражение скалярного произведения через координаты в ортонормированном базисе.

Пусть даны два вектора x и y в некотором n–мерном евклидовом пространстве, в котором имеется ортонормированный базис $e_1,e_2,\dots,e_n$.

Разложим эти векторы по данному базису:

$$x=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\dots+\alpha_ne_n$$
$$y=\beta_1e_1+\beta_2e_2+\dots+\beta_ne_n$$

Скалярное произведение этих векторов:

$$\begin{aligned}x\cdot y&=(\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\dots+\alpha_ne_n)\cdot(\beta_1e_1+\beta_2e_2+\dots+\beta_ne_n)=\\&=\alpha_1\beta_1e_1\cdot e_1+\alpha_1\beta_2e_1\cdot e_2+\dots+\alpha_1\beta_ne_1\cdot e_n+\\&+\alpha_2\beta_1e_2\cdot e_1+\alpha_2\beta_2e_2\cdot e_2+\dots+\alpha_2\beta_ne_2\cdot e_n+\\&+\dots+\dots+\dots+\dots+\\&+\alpha_n\beta_1e_n\cdot e_1+\alpha_n\beta_2e_n\cdot e_2+\dots+\alpha_n\beta_ne_n\cdot e_n=\\&=\alpha_1\beta_1+0+\dots+0+\\&+0+\alpha_2\beta_2+\dots+0+\\&+\dots+\dots+\dots+\dots+\\&+0+0+\dots+\alpha_n\beta_n=\\&=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\dots+\alpha_n\beta_n\end{aligned}$$

(т.к. $e_1,e_2,\dots,e_n$ – ортонормированный базис, то $e_k\cdot e_j=\begin{cases}0,\text{если } k\ne i\\ 1,\text{если } k=i\end{cases}$)

Таким образом, если векторы заданы координатами в ортонормированном базисе, то их скалярное произведение равно сумме произведений одноименных координат.

Пример 1. Найти угол между векторами $x=i+2j+3k$ и $y=2i+k$ в ортонормированном базисе в евклидовом пространстве $\mathcal{E}_3$.

Решение

Для нахождения угла между векторами вычислим их скалярное произведение

$$x\cdot y=1\cdot 2+2\cdot 0+3\cdot 1=5$$

длину вектора x

$$|x|=\sqrt{x\cdot x}=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}$$

длину вектора y

$$|y|=\sqrt{y\cdot y}=\sqrt{2^2+0^2+1^2}=\sqrt{5}$$

Найдем косинус угла между этими векторами:

$$\cos\varphi=\frac{x\cdot y}{|x||y|}$$
$$\cos\varphi=\frac{5}{\sqrt{14}\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{5}{14}}$$

Следовательно, угол между векторами равен:

$$\varphi=\arccos\sqrt{\frac{5}{14}}$$

§18. Векторное произведение векторов.

Векторное произведение определяется только для евклидова пространства $\mathcal{E}_3$.

Определение 1. **Векторным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий трем условиям:**

1. $\vec{c}\perp\vec{a}$, $\vec{c}\perp\vec{b}$

2. $|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$, т.е. равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

3. вектор $\vec{c}$ направлен по правилу буравчика.

Обозначается: $\vec{a}\times\vec{b}$ $[\vec{a},\vec{b}]$

Из этого определения следуют свойства:

1. $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$
2. $\lambda\vec{a}\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$
3. $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$

Если $\vec{a}\times\vec{b}=0$, то вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ параллельны.

Если два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют координаты $\vec{a}(a_1,a_2,a_3)$ и $\vec{b}(b_1,b_2,b_3)$, пропорциональные друг другу, т.е. $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$,то они параллельны.

Найдем выражение векторного произведения.

Пусть даны два вектора $\vec{a}(a_1,a_2,a_3)$ и $\vec{b}(b_1,b_2,b_3)$ в ортонормированном базисе.

Их скалярное произведение равно:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

Возьмем ортонормированный базис $\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$:

$$\vec{\imath}\times\vec{\imath}=0$$

Т.к. $|\vec{\imath}\times\vec{\jmath}|=|\vec{\imath}|\times|\vec{\jmath}|\sin\frac{\pi}{2}$, то $\vec{\imath}\times\vec{\jmath}=\vec{k}$.

Таким образом, для векторного произведения ортонормированного базиса можно составить таблицу:

	$\vec{\imath}$	$\vec{\jmath}$	$\vec{k}$
$\vec{\imath}$	0	$\vec{k}$	$-\vec{\jmath}$
$\vec{\jmath}$	$-\vec{k}$	0	$\vec{\imath}$
$\vec{k}$	$\vec{\jmath}$	$-\vec{\imath}$	0

Пусть в прямоугольной системе координат даны два вектора $\vec{a}(a_1,a_2,a_3)$ и $\vec{b}(b_1,b_2,b_3)$. Тогда $\vec{a}=a_1\vec{\imath}+a_2\vec{\jmath}+a_3\vec{k}$, $\vec{b}=b_1\vec{\imath}+b_2\vec{\jmath}+b_3\vec{k}$.

Найдем векторное произведение этих векторов:

$$\begin{gathered}\vec{a}\times\vec{b}=(a_1\vec{\imath}+a_2\vec{\jmath}+a_3\vec{k})\times(b_1\vec{\imath}+b_2\vec{\jmath}+b_3\vec{k})=\\=a_1b_1\vec{\imath}\times\vec{\imath}+a_1b_2\vec{\imath}\times\vec{\jmath}+a_1b_3\vec{\imath}\times\vec{k}+\\+a_2b_1\vec{\jmath}\times\vec{\imath}+a_2b_2\vec{\jmath}\times\vec{\jmath}+a_2b_3\vec{\jmath}\times\vec{k}+\\+a_3b_1\vec{k}\times\vec{\imath}+a_3b_2\vec{k}\times\vec{\jmath}+a_3b_3\vec{k}\times\vec{k}=\\=0+a_1b_2\vec{k}-a_1b_3\vec{\jmath}-\\-a_2b_1\vec{k}+0+a_2b_3\vec{\imath}+\\+a_3b_1\vec{\jmath}-a_3b_2\vec{\imath}+0=\end{gathered}$$

$$=(a_2b_3-a_3b_2)\vec{\imath}-(a_1b_3-a_3b_1)\vec{\jmath}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}=\begin{vmatrix}\vec{\imath}&\vec{\jmath}&\vec{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}.$$

Следовательно, векторное произведение двух векторов $\vec{a}(a_1,a_2,a_3)$ и $\vec{b}(b_1,b_2,b_3)$ можно записать в виде:

$$\boldsymbol{\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{\imath}&\vec{\jmath}&\vec{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}}$$

Пример 1. Найти площадь треугольника, вершины которого имеют следующие координаты: $A(0,0,0)$, $B(2,0,0)$, $C(0,3,0)$.

Решение.

Составим два вектора $\overrightarrow{AB}(2,0,0)$ и $\overrightarrow{AC}(0,3,0)$.

Их векторное произведение равно:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{\imath}&\vec{\jmath}&\vec{k}\\2&0&0\\0&3&0\end{vmatrix}=(0*0-0*3)\vec{\imath}-(2*0-0*0)\vec{\jmath}+(2*3-0*0)\vec{k}=6\vec{k}$$

Т.к. $\vec{k}=1$ – единичный вектор, то $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=6$.

Тогда площадь треугольника ABC равна:

$$S_\Delta=\frac{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}{2}=\frac{6}{2}=3$$

§19. Смешанное произведение векторов.

Смешанное произведение определяется только в евклидовом пространстве $\mathcal{E}_3$.

Определение 1. **Смешанным произведением трех векторов $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, полученное от умножения векторного произведения $\vec{a}\times\vec{b}$ скалярно на вектор $\vec{c}$ и обозначается $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ или $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.**

Для смешанного произведения справедливо следующее свойство:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\vec{c}\vec{a}\vec{b}=\vec{b}\vec{c}\vec{a}=-\vec{b}\vec{a}\vec{c}=-\vec{c}\vec{b}\vec{a}=-\vec{a}\vec{c}\vec{b}$$

Выясним геометрический смысл смешанного произведения.

$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=|\vec{a}\times\vec{b}||\vec{c}|\cos\varphi$,

где $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\alpha$.

Геометрический смысл модуля смешанного произведения трех векторов $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$ – это объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Отсюда следует, что если смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ равно нулю, то эти векторы лежат в одной плоскости (т.е. компланарны, линейно зависимы).

Найдем выражение смешанного произведения через координаты в ортонормированном базисе, т.е. $\vec{a}=a_1\vec{\imath}+a_2\vec{\jmath}+a_3\vec{k}$, $\vec{b}=b_1\vec{\imath}+b_2\vec{\jmath}+b_3\vec{k}$, $\vec{c}=c_1\vec{\imath}+c_2\vec{\jmath}+c_3\vec{k}$.

По определению 1, $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{\imath}&\vec{\jmath}&\vec{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}\cdot(c_1\vec{\imath}+c_2\vec{\jmath}+c_3\vec{k})=$
$\left(\vec{\imath}\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix}-\vec{\jmath}\begin{vmatrix}a_1&a_3\\b_1&b_3\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}\right)\cdot(c_1\vec{\imath}+c_2\vec{\jmath}+c_3\vec{k})=c_1\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix}+$
$c_2\begin{vmatrix}a_1&a_3\\b_1&b_3\end{vmatrix}+c_3\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}$

Следовательно, смешанное произведение трех векторов $\vec{a}(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}(b_1,b_2,b_3)$ и $\vec{c}(c_1,c_2,c_3)$можно записать в виде:

$$\boldsymbol{\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}}$$

Пример 1. Найти объем пирамиды, вершины которой имеют следующие координаты: $A(2,0,0)$, $B(0,0,0)$, $C(0,3,0)$, $D(0,0,1)$

Решение.

Составим два вектора $\overrightarrow{BA}(2,0,0)$ и $\overrightarrow{BC}(0,3,0)$, $\overrightarrow{BD}(0,0,1)$.

Т.к. смешанное произведение векторов равно объему параллелепипеда построенного на этих векторов, получим:

$$V_{\text{параллелепипеда}}=\overrightarrow{BA}\overrightarrow{BC}\overrightarrow{BD}=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{vmatrix}=(3*1-0*0)2-(0*1-0*0)0+(0*0-3*0)0=6$$

Тогда объём пирамиды $ABCD$ равна:

$$V_{\text{пирамиды}}=\frac{V_{\text{параллелепипеда}}}{6}=\frac{1}{6}6=1.$$

Аналитическая геометрия базируется на следующих понятиях:
1. Два вектора перпендикулярны, когда $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$
2. Два вектора параллельны, когда $\vec{a}\times\vec{b}=0$ или $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$, т.е. координаты пропорциональны.
3. Три вектора лежат в одной плоскости, когда их смешанное произведение равно нулю.
4. Любому геометрическому объекту (прямой, плоскости и т.д.) в соответствие ставится вектор (или нормальный или направленный).
Таким образом, любая геометрическая задача сводится к векторам.

§20. Векторное уравнение прямой на плоскости.

Рассмотрим двухмерное пространство $\mathcal{E}_2$.
Пусть положение прямой на плоскости определяется точкой $M(x,y)$, через которую она проходит и ненулевым единичным вектором $\vec{n}(\cos\alpha\,,\cos\beta)$, перпендикулярным к прямой. Вектор называется **нормальным вектором** прямой на плоскости. $\cos\alpha\,,\cos\beta$ – направляющие косинусы.
ρ будем считать расстоянием от начала координат до прямой. Радиус-вектор точки $M(x,y)$ есть $\vec{r}(x,y)$.
Рассмотрим скалярное произведение:

$$\vec{n}\cdot\vec{r}=|\vec{n}||\vec{r}|\cos\varphi$$

где φ – угол между $\vec{r}$ и ρ.
Окончательно, векторное уравнение прямой на плоскости примет вид:

$$\boldsymbol{\vec{n}\cdot\vec{r}-\rho=0}$$

§21. Векторное уравнение плоскости в пространстве.

Рассмотрим двухмерное пространство $\mathcal{E}_3$.
Пусть положение плоскости в пространстве определяется точкой $M(x,y,z)$, через которую она проходит и ненулевым единичным вектором $\vec{n}(\cos\alpha\,,\cos\beta\,,\cos\gamma)$, перпендикулярным к плоскости.
ρ будем считать расстоянием от начала координат до плоскости. Радиус-вектор точки $M(x,y,z)$ есть $\vec{r}(x,y,z)$.
Рассмотрим скалярное произведение:

$$\vec{n}\cdot\vec{r}=|\vec{n}||\vec{r}|\cos\varphi$$

где φ – угол между $\vec{r}$ и ρ.
Окончательно, векторное уравнение плоскости в пространстве примет вид:

$$\boldsymbol{\vec{n}\cdot\vec{r}-\rho=0}$$

§22. Нормальное уравнение прямой на плоскости и плоскости в пространстве.

Возьмем векторное уравнение прямой на плоскости:

$$\vec{n}\cdot\vec{r}-\rho=0$$

Т.к. векторы $\vec{n}$ и $\vec{r}$ имеют координаты $(\cos\alpha\,,\cos\beta)$ и (x,y) соответственно, то распишем их скалярное произведение:

$$\vec{n}\cdot\vec{r}=x\cos\alpha+y\cos\beta$$

Тогда нормальное уравнение прямой на плоскости будет иметь вид:

$$\boldsymbol{x\cos\alpha+y\cos\beta-\rho=0}$$

Возьмем векторное уравнение плоскости в пространстве:

$$\vec{n}\cdot\vec{r}-\rho=0$$

Т.к. векторы $\vec{n}$ и $\vec{r}$ имеют координаты $(\cos\alpha\,,\cos\beta\,,\cos\gamma)$ и (x,y,z) соответственно, то распишем их скалярное произведение:

$$\vec{n}\cdot\vec{r}=x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma$$

Тогда нормальное уравнение плоскости в пространстве будет иметь вид:

$$\boldsymbol{x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-\rho=0}$$

§23. Общее уравнение прямой на плоскости и общее уравнение плоскости в пространстве и общее уравнение плоскости в пространстве.

Возьмем нормальное уравнение прямой на плоскости:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta - \rho = 0$$

Умножим обе части уравнения на число λ:

$$x\lambda\cos\alpha + y\lambda\cos\beta - \lambda\rho = 0$$

Введя обозначения $\lambda\cos\alpha = A, \lambda\cos\beta = B, -\lambda\rho = C$, получим **общее уравнение прямой на плоскости:**

$$\boldsymbol{Ax + By + C = 0}$$

Тогда координаты нормального вектора $\vec{N}(A, B)$.

Возьмем нормальное уравнение прямой на плоскости:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - \rho = 0$$

Умножим обе части уравнения на число λ:

$$x\lambda\cos\alpha + y\lambda\cos\beta + z\lambda\cos\gamma - \lambda\rho = 0$$

Введя обозначения $\lambda\cos\alpha = A, \lambda\cos\beta = B, \lambda\cos\gamma = C, -\lambda\rho = D$, получим **общее уравнение прямой на плоскости:**

$$\boldsymbol{Ax + By + Cz + D = 0}$$

Тогда координаты нормального вектора $\vec{N}(A, B, C)$.

Пример 1. Найти общее уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(1,2)$и $M_2(4,6)$.

Решение.

Введём «бегающую» точку $M(x, y)$ на искомой прямой.

Составим векторы $\overline{M_1M_2}(3,4)$ и $\overline{M_1M}(x-1, y-2)$.

Они лежат на одной прямой, следовательно, $\overline{M_1M_2} \parallel \overline{M_1M}$, т.е. их координаты пропорциональны:

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4}$$

$$4x - 4 = 3y - 6$$

$$4x - 3y + 2 = 0.$$

§24. Частные случаи расположения прямой на плоскости и плоскости в пространстве.

Рассмотрим общее уравнение прямой на плоскости в случаях, когда некоторые коэффициенты равны нулю:

1. Пусть $C = 0$, тогда уравнение будет иметь вид
$$Ax + By = 0$$
Полученное уравнение определяет прямую, проходящую через начало координат.
2. Пусть $B = 0$, тогда уравнение будет иметь вид
$$Ax + C = 0$$
Полученное уравнение определяет прямую, параллельную оси Oy.
3. Пусть $B = C = 0$, тогда уравнение будет иметь вид
$$Ax + D = 0$$
Полученное уравнение определяет прямую, совпадающую с осью Oy.

Рассмотрим общее уравнение плоскости в случаях, когда некоторые коэффициенты равны нулю:

4. Пусть $D = 0$, тогда уравнение будет иметь вид
$$Ax + By + Cz = 0$$
Полученное уравнение определяет плоскость, проходящую через начало координат.
5. Пусть $C = 0$, тогда уравнение будет иметь вид
$$Ax + By + D = 0$$
Полученное уравнение определяет плоскость, параллельную оси Oz.
6. Пусть $B = 0$, тогда уравнение будет иметь вид
$$Ax + Cz + D = 0$$
Полученное уравнение определяет плоскость, параллельную оси Oy.
7. Пусть $A = 0$, тогда уравнение будет иметь вид
$$By + Cz + D = 0$$
Полученное уравнение определяет плоскость, параллельную оси Ox.
8. Пусть $B = C = 0$, тогда уравнение будет иметь вид
$$Ax + D = 0$$
Полученное уравнение определяет плоскость, параллельную координатной плоскости yOz.

§25. Уравнение прямой и плоскости в отрезках.

Рассмотрим общее уравнение прямой на плоскости:

$$Ax + By + C = 0$$

Перенесем C в правую часть уравнения:

$$Ax + By = -C$$

Разделим обе части уравнения на $-C$:

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1$$

Введя обозначения $a = -\frac{C}{A}, b = -\frac{C}{B}$, получим **уравнение прямой на плоскости:**

$$\boldsymbol{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$

где a, b, c – отрезки, отсекаемые прямой на осях координат.

Рассмотрим общее уравнение плоскости в пространстве:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Перенесем D в правую часть уравнения:

$$Ax + By + Cz = -D$$

Разделим обе части уравнения на $-D$:

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}} + \frac{y}{-\frac{D}{B}} + \frac{z}{-\frac{D}{C}} = 1$$

Введя обозначения $a = -\frac{D}{A}, b = -\frac{D}{B}, c = -\frac{D}{C}$, получим **уравнение плоскости в отрезках:**

$$\boldsymbol{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1}$$

где a, b, c – отрезки, отсекаемые плоскостью на осях координат.

Пример 1. Построить плоскость, заданную уравнением $6x + 2y + 3z - 6 = 0$

Решение.

Найдем уравнение плоскости в отрезках:

$$6x + 2y + 3z - 6 = 0$$

$$6x + 2y + 3z = 6$$

$$\frac{6x}{6} + \frac{2y}{6} + \frac{3z}{6} = 1$$

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1$$

Следовательно, отрезок, отсекаемый на оси Ox равен 1, на оси Oy – 3, на оси Oz – 2.

Тогда данная плоскость имеет вид

§26. Уравнение прямой, проходящей через две точки.

Пусть даны плоскость и две точки $M_1(x_1, y_1)$и $M_2(x_2, y_2)$, .
Введем «бегающую» точку M, лежащую на одной прямой с M_1 и M_2.
Составим два вектора $\overrightarrow{M_1M}(x - x_1, y - y_1)$ и $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.
Т.к. они лежат на одной прямой, то $\overrightarrow{M_1M} \parallel \overrightarrow{M_1M_2}$, следовательно, их координаты пропорциональны.
Таким образом, получим **уравнение прямой, проходящей через две точки**:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Пример 1. Найти общее уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(1,1)$ и $M_2(2,3)$.
Решение.
Введем «бегающую» точку M, лежащую на одной прямой с M_1 и M_2.
Составим два вектора $\overrightarrow{M_1M}(x - 1, y - 1)$ и $\overrightarrow{M_1M_2}(1,2)$.
Т.к. они лежат на одной прямой, то $\overrightarrow{M_1M} \parallel \overrightarrow{M_1M_2}$, следовательно, их координаты пропорциональны:

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 1}{2}$$

Перейдем к общему уравнению прямой:

$$2(x - 1) = 1(y - 1)$$
$$2x - 2 = y - 1$$
$$2x - y - 1 = 0$$

§27. Уравнение плоскости, проходящей через три точки.

Пусть даны три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$, не лежащие на одной прямой.
Введем «бегающую» точку M, принадлежащую искомой плоскости.
Составим три вектора $\overrightarrow{M_1M}(x - x_1, y - y_1, z - z_1)$, $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ и $\overrightarrow{M_1M_3}(x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$.
Т.к. эти векторы лежат в одной плоскости, то их смешанное произведение равно нулю, следовательно, уравнение плоскости, проходящей через три точки имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Пример 1. Найти общее уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(1,0,0)$, $M_2(0,3,0)$ и $M_3(0,0,2)$.
Решение.
Введем «бегающую» точку M, принадлежащую искомой плоскости.
Составим три вектора $\overrightarrow{M_1M}(x - 1, y, z)$, $\overrightarrow{M_1M_2}(-1, -3, 0)$ и $\overrightarrow{M_1M_3}(-1, 0, 2)$.
Т.к. эти векторы лежат в одной плоскости, то их смешанное произведение равно нулю, следовательно, уравнение искомой плоскости равно:

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y & z \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Раскрывая определитель по элементам первой строки, перейдем к общему уравнению плоскости:

$$(3 * 2 - 0 * 0)(x - 1) — (-1 * 2 - (-1) * 0)y + (-1 * 0 - (-1) * 3)z = 0$$
$$6(x - 1) + 2y + 3z = 0$$
$$6x + 2y + 3z - 6 = 0$$

§28. Угол между прямыми на плоскости. Угол между плоскостями в пространстве.

Пусть две прямые заданы уравнениями в общем виде:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0$$
$$A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

Нормальные векторы этих прямых:

$$\overrightarrow{N_1}(A_1, B_1)$$
$$\overrightarrow{N_2}(A_2, B_2)$$

Угол между прямыми равен углу между их нормальными векторами:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{N_1} \cdot \overrightarrow{N_2}}{|\overrightarrow{N_1}||\overrightarrow{N_2}|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

Пусть две плоскости заданы уравнениями в общем виде:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Нормальные векторы этих плоскостей:

$$\overrightarrow{N_1}(A_1, B_1, C_1)$$
$$\overrightarrow{N_2}(A_2, B_2, C_2)$$

Угол между плоскостями равен углу между их нормальными векторами:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{N_1} \cdot \overrightarrow{N_2}}{|\overrightarrow{N_1}||\overrightarrow{N_2}|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Пример 1. Найти угол между прямыми $\sqrt{3}x + y + 4 = 0$ и $x + \sqrt{3}y + 6 = 0$.
Решение.
Нормальные векторы этих прямых:

$$\overrightarrow{N_1}(\sqrt{3}, 1)$$
$$\overrightarrow{N_2}(1, \sqrt{3})$$

Угол между прямыми равен углу между их нормальными векторами:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{N_1} \cdot \overrightarrow{N_2}}{|\overrightarrow{N_1}||\overrightarrow{N_2}|} = \frac{\sqrt{3} * 1 + 1 * \sqrt{3}}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{2 * 2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\varphi = \arccos\varphi = \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$$

§29. Параметрическое уравнение прямой на плоскости и в пространстве.

Рассмотрим двухмерное пространство $\mathcal{E}_2$.
Пусть положение прямой на плоскости определяется точкой $M_o(x_o, y_o)$ и направляющим вектором $\vec{s}(m,n)$.
Возьмём «бегающую» точку $M(x,y)$. Векторы $\overrightarrow{M_oM}$ и $\vec{s}$ коллинеарны, поэтому при любом положении точки M на прямой будет иметь место следующее равенство:

$$\overrightarrow{M_oM} = t\vec{s}$$

где t – числовой множитель, который может быть любым действительным числом в зависимости от положения точки M на прямой.
Пусть $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ – радиус-вектор точки M, а $\vec{r_o} = \overrightarrow{OM_o}$ – радиус-вектор точки M_o. По правилу треугольника видно, что
$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_o} + \overrightarrow{M_oM}$
или
$\boldsymbol{\vec{r} = \vec{r_o} + t\vec{s}}$ – **векторное уравнение прямой на плоскости, заданной через направляющий вектор.**
Распишем по координатам векторы $\vec{r}, \vec{r_o}$ и $\vec{s}$:

$$\vec{r}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j}$$
$$\vec{r_o}(x_o,y_o) = x_o\vec{i} + y_o\vec{j}$$
$$\vec{s}(m,n) = m\vec{i} + n\vec{j}$$

Подставим полученные выражения в векторное уравнение прямой:

$$x\vec{i} + y\vec{j} = x_o\vec{i} + y_o\vec{j} + (m\vec{i} + n\vec{j})t$$

В следствии преобразований получим **параметрическое уравнение прямой, проходящей через точку $M_o(x_o, y_o)$ и параллельной направляющему вектору $\vec{s}(m,n)$:**

$$\begin{cases} x = x_o + mt \\ y = y_o + nt \end{cases}$$

Аналогично можно получить и параметрическое уравнение прямой в трехмерном пространстве.
Пусть положение прямой на плоскости определяется точкой $M_o(x_o, y_o, z_o)$ и направляющим вектором $\vec{s}(m,n,p)$.
Возьмём «бегающую» точку $M(x,y,z)$. Векторы $\overrightarrow{M_oM}$ и $\vec{s}$ коллинеарны, поэтому при любом положении точки M на прямой будет иметь место следующее равенство:

$$\overrightarrow{M_oM} = t\vec{s}$$

где t – числовой множитель, который может быть любым действительным числом в зависимости от положения точки M на прямой.
Пусть $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ – радиус-вектор точки M, а $\vec{r_o} = \overrightarrow{OM_o}$ – радиус-вектор точки M_o. По правилу треугольника видно, что
$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_o} + \overrightarrow{M_oM}$
или
$\boldsymbol{\vec{r} = \vec{r_o} + t\vec{s}}$ – **векторное уравнение прямой на плоскости, заданной через направляющий вектор.**
Распишем по координатам векторы $\vec{r}, \vec{r_o}$ и $\vec{s}$:

$$\vec{r}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$
$$\vec{r_o}(x_o,y_o,z_o) = x_o\vec{i} + y_o\vec{j} + z_o\vec{k}$$
$$\vec{s}(m,n,p) = m\vec{i} + n\vec{j} + p\vec{k}$$

Подставим полученные выражения в векторное уравнение прямой:

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x_o\vec{i} + y_o\vec{j} + x_o\vec{k} + \left(m\vec{i} + n\vec{j} + p\vec{k}\right)t$$

В следствии преобразований получим **параметрическое уравнение прямой, проходящей через точку $M_o(x_o, y_o, z_o)$ и параллельной направляющему вектору $\vec{s}(m,n,p)$:**

$$\begin{cases} x = x_o + mt \\ y = y_o + nt \\ z = x_o + pt \end{cases}$$

Пример 1. Найти параметрическое уравнение прямой в пространстве, проходящей через точку $M_o(1,2,1)$ параллельно направляющему вектору $\vec{s}(3,1,1)$.
Решение.
Подставив данные значения в параметрическое уравнение прямой, получим:

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

§30. Каноническое уравнение прямой на плоскости и в пространстве.

Воспользуемся параметрическим уравнением прямой на плоскости:

$$\begin{cases} x = x_o + mt \\ y = y_o + nt \end{cases}$$

Исключим параметр t, для чего сначала решим каждое из этих уравнений относительно

$$t = \frac{x - x_o}{m}$$
$$t = \frac{y - y_o}{n}$$

а затем приравняем правые части этих равенств и получим **каноническое уравнение прямой на плоскости:**

$$\frac{x - x_o}{m} = \frac{y - y_o}{n}$$

Аналогично выводится и **каноническое уравнение прямой в пространстве:**

$$\frac{x - x_o}{m} = \frac{y - y_o}{n} = \frac{z - z_o}{p}$$

Можно получить каноническое уравнение прямой и другим способом.
Введем «бегающую» точку $M(x,y)$ на прямой. Тогда вектор $\overrightarrow{M_oM}(x - x_o y - y_o)$ будет параллелен вектору $\vec{s}(m,n)$, следовательно их координаты пропорциональны, т.е.

$$\frac{x - x_o}{m} = \frac{y - y_o}{n}$$

Пример 1. Найти каноническое уравнение прямой в пространстве, проходящей через точку $M_o(3,2,1)$ параллельно направляющему вектору $\vec{s}(1,0,2)$.
Решение.
Подставив данные значения в каноническое уравнение прямой, получим:

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-1}{2}$$

§31. Общее уравнение прямой в пространстве и приведение его к каноническому виду.

Зададим прямую в пространстве, как пересечение двух плоскостей:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Тогда прямая перпендикулярна к каждому из нормальных векторов $\overrightarrow{N_1}(A_1, B_1, C_1)$ и $\overrightarrow{N_2}(A_2, B_2, C_2)$ этих плоскостей.
Поэтому в качестве направляющего вектора можно взять вектор $\vec{s}(m,n,p)$, перпендикулярный к векторам $\overrightarrow{N_1}$ и $\overrightarrow{N_2}$:

$$\vec{s} = \overrightarrow{N_1} \times \overrightarrow{N_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

Для нахождения точки $M_o(x_o, y_o, z_o)$, принадлежащей прямой, положим $z = 0$ и получим:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + D_2 = 0 \end{cases}$$

Решив уравнения этой системы получим координаты точки M_o. Подставив полученные координаты, получим каноническое уравнение прямой.
Пример 1. Найти каноническое уравнение прямой в пространстве, заданной общим уравнением прямой

$$\begin{cases} 3x + y - z + 5 = 0 \\ 2x + y + 2z + 3 = 0 \end{cases}$$

Решение.
Полагая, например, $z = 0$, из данного уравнения прямой получаем систему:

$$\begin{cases} 3x + y + 5 = 0 \\ 2x + y + 3 = 0 \end{cases}$$
$$-\begin{cases} 3x + y + 5 = 0 \\ 2x + y + 3 = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Таким образом, одна из точек, принадлежащих искомой прямой имеет координаты $(-2,1,0)$.
Найдем направляющий вектор прямой. Имеем $\overrightarrow{N_1}(3,1,-1)$ и $\overrightarrow{N_2}(2,1,2)$. Найдем координаты направляющего вектора прямой:

$$\vec{s} = \overrightarrow{N_1} \times \overrightarrow{N_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}(1*2 - (-1)*1) - \vec{j}(3*2 - (-1)*2) + \vec{k}(3*1 - 1*2) = 3\vec{i} - 8\vec{j} + \vec{k}$$

т.е. $m = 3, n = -8, p = 1$
Отсюда каноническое уравнение прямой запишется в виде:

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-8} = \frac{z}{1}$$

§32. Угол между двумя прямыми в пространстве. Условие параллельности и перпендикулярности прямых в пространстве.

Пусть в пространстве заданы две прямые в каноническом виде:

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}$$
$$\frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$$

Первая прямая проходит через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и имеет направляющий вектор $\overrightarrow{s_1}(x_1, y_1, z_1)$.
Вторая прямая проходит через точку $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и имеет направляющий вектор $\overrightarrow{s_2}(x_2, y_2, z_2)$.
Следовательно, **угол между прямыми в пространстве** находится как:

$$\boldsymbol{\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{s_1} \cdot \overrightarrow{s_2}}{|\overrightarrow{s_1}||\overrightarrow{s_2}|} = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}}$$

Условие параллельности двух прямых:

$$\boldsymbol{\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}}$$

Условие перпендикулярности двух прямых:

$$\boldsymbol{\overrightarrow{s_1} \cdot \overrightarrow{s_2} = m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0}$$

§33. Угол между прямой и плоскостью.

Пусть дана плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$, нормальный вектор которой $\vec{N}(A, B, C)$, и прямая $\frac{x-x_o}{m} = \frac{y-y_o}{n} = \frac{z-z_o}{p}$, которая проходит через точку $M_o(x_o, y_o, z_o)$ и имеет направляющий вектор $\vec{s}(m, n, p)$.
Искомый угол обозначим φ:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

где α – угол между векторами $\vec{N}$ и $\vec{s}$.
Найдем угол α:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{N}\cdot\vec{s}}{|\vec{N}||\vec{s}|} = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

отсюда

$$\alpha = \arccos\frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

Следовательно искомый угол находится как:

$$\boldsymbol{\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}}$$

Пример 1. Найти угол φ между прямой $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{3}$ и плоскостью $x + 2y + 3z - 5 = 0$

Решение.

Найдем угол α между нормальным вектором $\vec{N}(1,2,3)$ плоскости и направляющий вектором $\vec{s}(2,1,3)$ прямой, проходящей через точку $M_o(0,1,2)$:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{N}\cdot\vec{s}}{|\vec{N}||\vec{s}|} = \frac{1*2+2*1+3*3}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}\sqrt{2^2+1^2+3^2}} = \frac{13}{14}$$

отсюда

$$\alpha = \arccos\frac{13}{14}$$

Следовательно, искомый угол равен:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{13}{14}$$

§34. Расстояние от точки до плоскости и от точки до прямой на плоскости.

Пусть в трехмерном пространстве заданы точка $M_o(x_o, y_o, z_o)$ и плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$, нормальный вектор которой $\vec{N}(A, B, C)$.
Проведем перпендикуляр M_oK на данную плоскость.
Точка $K(x_1, y_1, z_1)$ принадлежит плоскости, значит удовлетворяет уравнению:

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$$
$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 = -D$$

Составим вектор $\overrightarrow{KM_o}(x_o - x_1, y_o - y_1, z_o - z_1)$.
Найдем скалярное произведение векторов $\vec{N}$ и $\overrightarrow{KM_o}$:

$$\vec{N}\cdot\overrightarrow{KM_o} = |\vec{N}||\overrightarrow{KM_o}|\cos\varphi = |\vec{N}||\overrightarrow{KM_o}|1$$

отсюда

$$|\overrightarrow{KM_o}| = \frac{\vec{N}\cdot\overrightarrow{KM_o}}{|\vec{N}|}$$

Обозначим $|\overrightarrow{KM_o}| = d$
Подставим d в последнее выражение:

$$d = \frac{\vec{N}\cdot\overrightarrow{KM_o}}{|\vec{N}|} = \frac{A(x_o - x_1) + B(y_o - y_1) + C(z_o - z_1)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{Ax_o + By_o + Cz_o - Ax_1 - By_1 - Cz_1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{Ax_o + By_o + Cz_o + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Следовательно, **расстояние от точки до плоскости** находится по следующей формуле:

$$\boldsymbol{d = \frac{Ax_o + By_o + Cz_o + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$$

Аналогично можно получить **расстояние от точки до прямой на плоскости**:

$$\boldsymbol{d = \frac{Ax_o + By_o + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$$

Пример 1. Найти расстояние d от точки $M_o(1,2,3)$ до плоскости $2x - y + z - 5 = 0$.

Решение.

Расстояние согласно выведенной формуле равно:

$$d = \frac{|2*1 + 2*(-1) + 1*3 + (-5)|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{|-2|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

§35. Расстояние от точки до прямой в пространстве.

Пусть даны точки $M_o(x_o, y_o, z_o)$ и прямая $\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{p}$, которая проходит через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и имеет направляющий вектор $\vec{s}(m, n, p)$.
Составим вектор $\overrightarrow{M_1M_o}(x_o - x_1, y_o - y_1, z_o - z_1)$.
Найдем векторное произведение векторов $\vec{s}$ и $\overrightarrow{M_1M_o}$, равное площади параллелограмма, построенного на этих векторах:

$$S_{\text{параллелограмма}} = |\vec{s}\times\overrightarrow{M_1M_o}| = |\vec{s}||\overrightarrow{M_1M_o}|\sin\varphi$$

С другой стороны, площадь параллелограмма находится по формуле:

$$S_{\text{параллелограмма}} = h|\vec{s}|$$

Приравняем эти выражения:

$$h|\vec{s}| = |\vec{s}\times\overrightarrow{M_1M_o}|$$

Выразив , получим формулу для определения **расстояния от точки до прямой в пространстве:**

$$\boldsymbol{h = \frac{|\vec{s}\times\overrightarrow{M_1M_o}|}{|\vec{s}|}}$$

Пример 1. Найти расстояние h от точки $M_o(1,2,1)$ до прямой $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{2}$.

Решение.

Прямая $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{2}$ проходит через точку $M_1(2,0,1)$.
Найдем векторное произведение векторов $\vec{s}$ и $\overrightarrow{M_1M_o}$:

$$\vec{s}\times\overrightarrow{M_1M_o} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (3*0 - 2*2)\vec{i} - (1*0 - (-1)*2)\vec{j} + (1*2 - (-1)*3)\vec{k} = -4\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$$

Расстояние согласно выведенной формуле равно:

$$h = \frac{|\vec{s}\times\overrightarrow{M_1M_o}|}{|\vec{s}|} = \frac{\sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + 5^2}}{\sqrt{1^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{14}}$$

Пример 1. Найти расстояние d между прямыми $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{1}$ и $\frac{x}{3} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-1}{0}$.

Решение.

Прямая $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{1}$ проходит через точку $M_1(1,2,0)$ и имеет направляющий вектор $\vec{s_1}(2,3,1)$.
Прямая $\frac{x}{3} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-1}{0}$ проходит через точку $M_2(0,2,1)$ и имеет направляющий вектор $\vec{s_2}(3,5,0)$.
Проведем вектор $\vec{N}$ перпендикулярно $\vec{s_1}$ и $\vec{s_2}$. Тогда

$$\vec{N} = \vec{s_1}\times\vec{s_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = (3*0 - 1*5)\vec{i} - (2*0 - 1*3)\vec{j} + (5*2 - 3*3)\vec{k} = -5\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$$

Плоскость, проходящая через первую прямую имеет вид:

$$-5x + 3y + z + D_1 = 0$$

Т.к. эта плоскость проходит и через точку $M_1(1,2,0)$, то подставив координаты точки M_1 в уравнение плоскости, получим:

$$-5*1 + 3*2 + 0 + D_1 = 0$$

отсюда

$$D_1 = -1$$

Тогда окончательно общее уравнение первой плоскости примет вид:

$$-5x + 3y + z - 1 = 0$$

Плоскость, проходящая через вторую прямую имеет вид:

$$-5x + 3y + z + D_2 = 0$$

Т.к. эта плоскость проходит и через точку $M_2(0,2,1)$, то подставив координаты точки M_2 в уравнение плоскости, получим:

$$-5*0 + 3*2 + 1 + D_2 = 0$$

отсюда

$$D_2 = -7$$

Тогда окончательно общее уравнение второй плоскости примет вид:

$$-5x + 3y + z - 7 = 0$$

Первая и вторая плоскости параллельны.
Найдем $|\vec{N}|$:

$$|\vec{N}| = \sqrt{(-5)^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{35}$$

Тогда нормальное уравнение первой плоскости примет вид:

$$-\frac{5}{\sqrt{35}}x + \frac{3}{\sqrt{35}}y + \frac{1}{\sqrt{35}}z - \frac{1}{\sqrt{35}} = 0$$

а нормальной уравнение второй плоскости:

$$-\frac{5}{\sqrt{35}}x + \frac{3}{\sqrt{35}}y + \frac{1}{\sqrt{35}}z - \frac{7}{\sqrt{35}} = 0$$

Следовательно, расстояние d между прямыми определяется как разность между содержащими их плоскостями:

$$d = \frac{7}{\sqrt{35}} - \frac{1}{\sqrt{35}} = \frac{6}{\sqrt{35}}$$

§36. Эллипс.

Определение 1. **Эллипс – множество точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух фиксированных точек $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$, называемых фокусами, есть величина постоянная и равная $2a$.**

Составим векторы $\overrightarrow{F_1M}(x+c,y)$ и $\overrightarrow{F_2M}(x-c,y)$.

По формуле расстояний между двумя точками имеем:

$$|\vec{r_1}| = |\overrightarrow{F_1M}| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$
$$|\vec{r_2}| = |\overrightarrow{F_2M}| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Из определения эллипса следует, что для всех его точек сумма $|\vec{r_1}| + |\vec{r_2}|$ есть величина постоянная; обозначим ее через $2a$, тогда

$$|\vec{r_1}| + |\vec{r_2}| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

или

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

Упрощая это выражения и вводя обозначение $b^2 = a^2 - c^2$, получим **уравнение эллипса** в декартовой системе координат:

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

где a – большая полуось, а b – малая полуось.

Отсюда видно, что если $x = 0$, то $y = b$; если $y = 0$, то $x = a$.

Величина $\varepsilon = \frac{c}{a}$ называется **эксцентриситетом**, который определяет меру вытянутости эллипса.

Прямые $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ называются **директрисами**.

Уравнение эллипса можно представить в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = a\cos\varphi \\ y = b\sin\varphi \end{cases}$$

§37. Гипербола.

Определение 1. **Гипербола – множество точек плоскости, разность расстояний от которых до двух фиксированных точек $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$, называемых фокусами, есть величина постоянная и равная $2a$.**

Составим векторы $\overrightarrow{F_1M}(x+c,y)$ и $\overrightarrow{F_2M}(x-c,y)$.

По формуле расстояний между двумя точками имеем:

$$|\vec{r_1}| = |\overrightarrow{F_1M}| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$
$$|\vec{r_2}| = |\overrightarrow{F_2M}| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Из определения гиперболы следует, что для всех его точек разность $|\vec{r_1}| - |\vec{r_2}|$ есть величина постоянная; обозначим ее через $2a$, тогда

$$|\vec{r_1}| + |\vec{r_2}| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

или

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

Упрощая это выражения и вводя обозначение $b^2 = a^2 - c^2$, получим **уравнение гиперболы** в декартовой системе координат:

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

где a – большая полуось, а b – малая полуось.

Величина $\varepsilon = \frac{c}{a}$ называется **эксцентриситетом**.

Прямые $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ называются **директрисами**.

§38. Парабола.

Определение 1. **Парабола – множество точек плоскости, равноудаленных от некоторой прямой, называемой директрисой, и точки $F_1(\frac{p}{2},0)$, называемой фокусом параболы.**

Составим векторы $\overrightarrow{FM}(x-\frac{p}{2},y)$.

Тогда

$$|\vec{r_1}| = |\overrightarrow{FM}| = \sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$$
$$|\vec{r_2}| = \frac{p}{2} + x$$

Приравняв $|\vec{r_1}|$ и $|\vec{r_2}|$ получим:

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \frac{p}{2} + x$$

Упрощая это выражении, получим **уравнение параболы:**

$$\boldsymbol{y^2 = 2px}$$

Прямая $x = -\frac{p}{2}$ называется **директрисой**.

Прямая $\varepsilon = 1$ называется **эксцентриситетом.**

§39. Поверхности второго порядка.

Определение 1. **Эллипсоид – поверхность, выраженная уравнением:**

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1}$$

Отсюда видно, что если $x = 0$, то $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; если $y = 0$, то $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; если $z = 0$, то $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Определение 2. **Параболоид – поверхность, выраженная уравнением:**

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 = 2pz}$$

Отсюда видно, что если $x = 0$, то $y^2 = 2pz$; если $y = 0$, то $x^2 = 2pz$; если $z = 0$, то $x = 0, y = 0$; если $z = \frac{1}{2p}$, то $x^2 + y^2 = 1$; если $z = \frac{1}{p}$, то $x^2 + y^2 = (\sqrt{2})^2$.

§40. Действительные числа. Изображение действительных чисел. Абсолютная величина действительных чисел.

Исторически понятие «число» – натуральные числа $(1, 2, 3, \dots, N)$.
Первой операцией было сложение, затем вычитание. Так появилось понятие целых чисел $(Z = -N, \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, N)$.
Далее операция умножения и деления – рациональные числа где – целые числа.

Определение 1. **Совокупность дробных и целых чисел, как положительных, так и отрицательных, и нуль называется рациональными числами и обозначается $\boldsymbol{Q}$.**

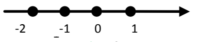
Рациональные числа могут быть представлены в виде конечных или бесконечных периодических дробей:
$\frac{10}{3} = 3{,}3333 \dots 3 = 3,(3)$.

Определение 2. **Число, которое представляется бесконечной, но не периодической дробью называется иррациональным.**

Числа $\sqrt{2}, \pi, e$ являются иррациональными.

Определение 3. **Совокупность иррациональных и рациональных чисел называется действительными числами (вещественными) и обозначается $\mathcal{R}$.**

Действительные числа упорядочены по величине, т.е. для любых двух из них существует только одно соотношение $(x = y, x < y, x > y)$.
Действительные числа можно изображать в виде точек на числовой прямой.



Теорема 1. Каждое действительное число α с любой степенью точности можно выразить с помощью рациональных чисел.

Пример 1. Выразить число $\sqrt{2}$ с точностью до сотых.
Решение. Используя рациональные числа, выразим данное число с точностью до десятых $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$.
Используя рациональные числа, выразим данное число с точностью до сотых $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$.

Определение 4. **Абсолютной величиной действительного числа называется неотрицательное число удовлетворяющее:**

$$|x| = \begin{cases} x, \text{где } x \geq 0, \\ -x, \text{где } x < 0. \end{cases}$$

Для модуля справедливы следующие свойства:

1. $|x + y| \leq |x| + |y|$
2. $|x - y| \geq |x| - |y|$
3. $|xy| = |x||y|$
4. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

§40. Комплексные числа.

Определение 1. **Комплексным числом называется число вида $z = x + iy$,**
где $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица, x, y – действительные числа.
$x = Re\, z = Re\,(x + iy)$ – действительная часть комплексного числа.
$y = Im\, z = Im\,(x + iy)$ – мнимая часть комплексного числа.
Тогда $i^2 = -1$, $i^3 = -1\sqrt{-1}$, $i^4 = 1$, $i^5 = \sqrt{-1}$ и т.д.

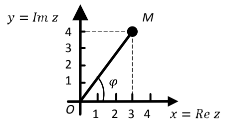
Пример 1. Найти мнимую и действительную части комплексного числа $z = 2 + 3i$.
Решение. Действительная часть: $Re(2 + 3i) = 2$.
Мнимая часть: $Im(2 + 3i) = 3$.

Определение 2. **Комплексное число $\bar{z}$ называется комплексно сопряженным числу $z = x + iy$, если выполняется $\bar{z} = \overline{(x + iy)} = x - iy$.**

Пример 2. Найти комплексно сопряженное числу $z = 3 + 4i$.
Решение. $\bar{z} = \overline{(3 + 4i)} = 3 - 4i$.

Комплексные числа изображаются точкой на комплексной плоскости.

Пример 3. Изобразить комплексное число в виде точки на комплексной плоскости.
Решение.

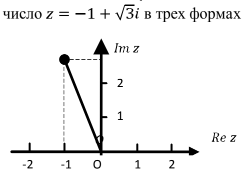


Длина отрезка OM называется модулем комплексного числа z.
Примем $\varphi = arg\, z$.
Главное значение аргумента: $0 < arg\, z < 2\pi$.
$Arg\, z = arg\, z + 2\pi$.
При n =0 получаем главное значение аргумента.

Различают три формы комплексных чисел:

1. алгебраическая
$$z = x + iy$$
2. тригонометрическая
$z = x + iy = \rho cos\, \varphi + i\rho \sin \varphi = |z|(\cos(\arg z) + i \sin(\arg z)) = |z|(\cos(\operatorname{Arg} z) + i \sin(\operatorname{Arg} z))$.
$z = |z|(\cos(\operatorname{Arg} z) + i \sin(\operatorname{Arg} z))$.
3. Показательная
Согласно формуле Эйлера $(e^{i\varphi} = \cos \varphi + isin\varphi)$ получим:
$$z = \rho(cos\, \varphi + i \sin \varphi) = \rho e^{i\varphi}$$
$$z = \rho e^{i\varphi}$$
$$z = \rho e^{i\varphi} = |z| e^{i(argz + 2\pi n)} = |z| e^{iArgz}$$

Пример 5. Записать число $z = -1 + \sqrt{3}i$ в трех формах
Решение.



Найдем модуль данного комплексного числа $|\boldsymbol{z}| = |-\boldsymbol{1} + \sqrt{\boldsymbol{3}}\boldsymbol{i}| = \sqrt{(-\boldsymbol{1})^2 + (\sqrt{\boldsymbol{3}})^2} = \boldsymbol{2}$.
Найдем главное значение аргумента $argz = arg(-1 + \sqrt{3}i) = \frac{2\pi}{3}$.
Найдем общее значение аргумента $Argz = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$.
Следовательно, запишем число z в трех формах:

- алгебраической $z = -1 + \sqrt{3}i$
- тригонометрической $z = -1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right)\right)$
- показательной $z = -1 + \sqrt{3}i = 2e^{i(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n)}$

§42. Действия над комплексными числами.

Определение 1. **Суммой комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число вида $(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$.**

Аналогично вводится разность: $(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$.

Пример 1. Найти сумму комплексных чисел $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = -2 + i$.

Решение. $z_1 + z_2 = (3 + 4i) + (-2 + i) = (3 - (-2)) + i(4 + 1) = 1 + 5i$.

Определение 2. **Произведением комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число вида:**

$z_1z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 + i^2y_1y_2 = (x_1x_2 - y1y2+i(x1y2+x2y1)$.

Пример 2. Найти произведение комплексных чисел $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = -2 + i$.

Решение. $z_1z_2 = (3 + 4i)(-2 + i) = -6 + 3i - 8i + 4i^2 = -6 - 5i - 4 = -10 - 5i$.

Пример 3. Найти произведение комплексных чисел z и $\bar{z}$, где $z = 3 + 4i$.

Решение. $z\bar{z} = (3 + 4i)\overline{(3 + 4i)} = (3 + 4i)(3 - 4i) = 9 - 12i + 12i - 16i^2 = 9 + 16 = 25$.

Произведение комплексного числа на его комплексно сопряженное есть действительное положительное число.

Определение 3. **Деление двух комплексных чисел сводится к умножению числителя и знаменателя на комплексно сопряженное знаменателя:**

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{x_2 + iy_2}{x_1 + iy_1} = \frac{(x_2 + iy_2)(x_1 - iy_1)}{(x_1 + iy_1)(x_1 - iy_1)}$$

Пример 4. Найти частное от деления $z_2 = -2 + i$ на $z_1 = 3 + 4i$.

Решение. $\frac{z_2}{z_1} = \frac{-2+i}{3+4i} = \frac{(-2+i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{-6+8i+3i-4i^2}{25} = \frac{-2+11i}{25}$

Замечание 1. Умножение и деление комплексных чисел удобно выполнять в показательной форме.

Определение 4. Возведение в степень определяется как $z^n = \underbrace{z \times z \times \ldots \times z}_{n}$.

$z = pe^{i\varphi}$,

где $p = |z|, \varphi = Arg\, z = \arg z + 2\pi n$.

$z^n = \underbrace{z \times z \times \ldots \times z}_{n} = (pe^{i\varphi})^n = p^n e^{in\varphi} = p^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$.

Удобнее всего возводить в степень в показательной форме.

Пример 5. Возвести в степень 12 комплексно число $z = (-1 + i\sqrt{3})$.

Решение $|z| = |-1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

$$arctg\,(-1 + i\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3}$$

$$z = -1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$z^{12} = (-1 + i\sqrt{3})^{12} = \left(2e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{12} = 2^{12}e^{i0} = 2^{12} = 4096$$

Определение 5. Извлечение корня сводится к возведению в рациональную степень. Выполняется всегда в показательной форме

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}}$$

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = \left(pe^{i(\varphi+2\pi k)}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{p}e^{i(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi k}{n})}$$

Пример 6. $\sqrt[3]{-1} = (-1)^{\frac{1}{3}}$

$$-1$$

$$-1 = ie^{i(\varphi+2\pi n)}$$

$$\sqrt[3]{-1} = (-1)^{\frac{1}{3}} = (1e^{i(\pi+2\pi n)})^{\frac{1}{3}} = e^{i(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi n}{3})}$$

$$n = 0: \sqrt[3]{-1}_0 = e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$n = 1: \sqrt[3]{-1}_1 = e^{i(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3})} = e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$$

$$n = 2: \sqrt[3]{-1}_2 = e^{i(\frac{\pi}{3}+\frac{4\pi}{3})} = e^{i\frac{5\pi}{3}} = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$n = 3: \sqrt[3]{-1}_3 = e^{i(\frac{\pi}{3}+\frac{3\times2\pi}{3})} = e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Из бесконечного числа значений корня кубического различных будет только 3.

§43. Постоянные и переменные величины.

Определение 1. Переменной величиной называется величина, которая принимает различные числовые значения и обозначается последними буквами латинского алфавита (x, y, z)

Если переменная принимает одно и то же значение, то она называется постоянной величиной и обозначается $C = const$.

Пример 1. Упорядоченная переменная $x, x_1 = 1, x_2 = 1 + \frac{1}{2}, x_3 = 1 + \frac{1}{3}, \ldots, x_n = 1 + \frac{1}{n}$

Определение 2. Переменная называетя упорядоченной, если сказать, какое значение является предыдущим, а какое последующим.

Совокупность всех числовых значений переменной величины называется областью изменений переменной величины.

Различают интервал (a, b), $a < x < b$, отрезок(или сегмент) $[a, b]$, $a \le x \le b$

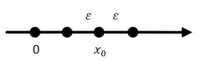
Определение 3. ε Окрестностью точки x_0 называется интервал, определенный как $|x - x_0| < \varepsilon$

$$|x - x_0| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < x - x_0 < \varepsilon$$

$$-\varepsilon + x_0 < x < \varepsilon + x_0$$

$$x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$$



Определение 4. Переменная величина x называется возрастающей (убывающей), если каждая последующая больше (меньше) предыдущей $x_{n+1} > x_n$

Определение 5. Переменная величина x называется ограниченной, если существует такое $M > 0$, что все последующие значения переменной удовлетворяют неравенству $|x| < M$

$$-M < x < M$$

§44. Функция.

Определение 1. **Если каждому значению переменной x, принадлежащей некоторой области, ставится по некоторому правилу (закону) одно определенное значение другой переменной y, то говорят, что задана функция. Совокупность значений переменной x называется область определения. Совокупность значений переменной y называется область значений.**

Пример 1. Задана функция $f(2x) = \sin x$. Найти $f(x)$.

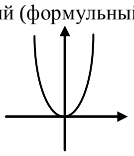
Решение. Преобразуем выражение $f(2x) = \sin x = \sin\frac{1}{2}2x$. Тогда $f(x) = \sin\frac{x}{2}$.

Определение 2. **Если функция $y = f(x)$ такова, что большему значению x соответствует большее значение $f(x)$, т.е. $x_2 > x_1$, $f(x_2) > f(x_1)$, функция является возрастающей.**

Если функция такова, что большему значению x соответствует меньшее значение y, т.е. $x_2 > x_1$, $f(x_2) < f(x_1)$, функция является убывающей.

Функции задаются тремя способами:

1. аналитический (формульный): $y = x^2$.
2. графический:



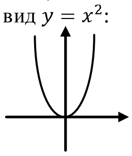
3. табличный:

x	1	2	3
y	1	4	9

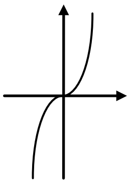
§45. Основные элементарные функции.

I. Степенная функция: $y = x^\alpha$.

1. Пусть $\alpha = n$, где n – целое положительное число, то функция примет вид $y = x^2$:

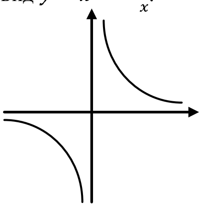


$y = x^3$:

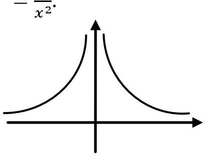


$y = x^k$, где k – четное целое положительное число, отображаются также как $y = x^2$, только уже.
$y = x^k$, где k – нечетное целое положительное число, отображаются также как $y = x^3$, только уже.

2. Пусть $\alpha = n$, где n – целое отрицательное число, то функция примет вид $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$:

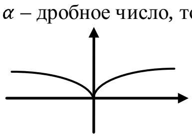


$y = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$:

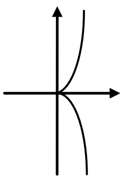


$y = x^k$, где k – нечетное целое отрицательное число, отображаются также как $y = x^{-1}$, только ближе к началу координат.
$y = x^k$, где k – четное целое отрицательное число, отображаются также как $y = x^{-2}$, только ближе к началу координат.

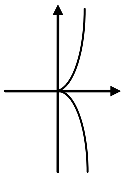
3. Пусть α – дробное число, то функция примет вид $y = x^{\frac{2}{3}}$:



$y = x^{\frac{3}{2}}$:



II. Показательная функция: $y = a^x$, где $a > 0, a \neq 1$.



III. Логарифмическая функция: $y = \log_a x$, где $a > 0, a \neq 1$.

IV. Тригонометрическая функция:
$y = \sin x$:
$y = \cos x$:
$y = tg\ x$:
$y = ctg\ x$:
Обратные функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \mathrm{arctg}\, x$, $y = \mathrm{arcctg}\, x$ изображаются как начальные функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tg\ x$, $y = ctg\ x$, отображенные от биссектрисы первого и третьего координатных углов.

§46. Алгебраические функции.

I. **Целая алгебраическая функция** (полином, многочлен):
$\boldsymbol{P_{n(x)} = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n}$, где a_i – некоторые числа.
$P_{0(x)} = a_0x^0 = a;$
$P_{1(x)} = a_0x + a_1 = ax + b;$
$P_{2(x)} = a_0x^2 + a_1x + a_2 = ax^2 + bx + c$ – полином второго порядка.

II. **Дробно-рациональная функция:**
$\boldsymbol{y = \frac{P_{n(x)}}{Q_{m(x)}} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n}{a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \dots + a_m}}$.
Если $m > n$, то дробь правильная.

III. **Иррациональная функция.**
Функция $y = f(x)$ будет иррациональной, если в правой части стоят операции сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в рациональную степень. Функция $y = \frac{x^2+\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$ дробно-иррациональная.

§47. Предел переменной величины. Бесконечно большая переменная величина.

Определение 1. **Постоянное число a называется пределом переменной величины x, если для любого сколь угодно малого положительного ε можно указать такое значение переменной x, что для всех последующих x будет выполняться $|x - a| < \varepsilon$. Обозначается: $\lim x = a$.**

Пример 1. Показать, что переменная величина x, принимающая значения $x_1 = \frac{1+1}{1}$, $x_2 = \frac{2+1}{2}$, …, $x_n = \frac{n+1}{n}$, имеет предел $a = 1$.

Решение. Составим выражение $|x - a| < \varepsilon$ и получим:
$\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| < \varepsilon,$
$\left|1 + \frac{1}{n} - 1\right| < \varepsilon,$
$\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon.$
Для любого ε все последующие значения переменной, начиная с номера n, где $\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$, будут удовлетворять неравенству $|x_n - 1| < \varepsilon$, что требовалось доказать.

Замечание 1. Постоянная величина рассматривается как переменная, значение которой постоянно, т.е. $lim\ s = s$

Замечание 2. Не всякая переменная величина x имеет предел.

Пример 2. Показать, что переменная величина x, принимающая значения $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1 - \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{1}{8}$, …, $x_{2k} = 1 - \frac{1}{2^{2k}}$, $x_{2k+1} = \frac{1}{2^{2k+1}}$, не имеет предела.

Решение. При достаточно большом k значение x_{2k} и все последующие значения с четными номерами будут отличаться как угодно мало от единицы, а следующее значение x_{2k+1} и все последующие значения x с нечетными номерами будут как угодно мало отличаться от нуля. Следовательно, переменная x не стремиться к пределу.

Определение 2. **Переменная величина x стремиться к бесконечности, т.е. $x \to \infty$, если для любого сколь угодно большого числа M найдется такое значение x, что для всех последующих x выполняется $|x| > M$. Обозначается: $\lim x = \infty$.**

Пример 3. Показать, что переменная величина x, принимающая значения $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, …, $x_n = n$, стремиться к бесконечности, т.е. $\lim x = \infty$.

Решение. Переменная величина x стремиться к бесконечности, т.к. при произвольном $M > 0$ все последующие значения переменной, начиная с некоторого, будут удовлетворять неравенству $M < x$.

§48. Предел функции.

Определение 1. **Число b называется пределом функции $y = f(x)$ при x, стремящемся к a,если для сколь угодно малого положительного ε найдется такое дельта δ, зависящее от ε, что для всех значений $|x - a| < \delta$ будет выполняться $|f(x) - b| < \varepsilon$. Обозначается: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.**

При стремлении $x \to a$, y сколь угодно близко приближается к b.

Пример 1. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 2}(3x + 1) = 7$, исходя из определения.

Решение. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое δ, зависящее от ε, что для всех значений $|x - 2| < \delta$ будет выполняться $|(3x - 1) - 7| < \varepsilon$. Преобразуем последнее неравенство.
$|(3x - 1) - 7| < \varepsilon,$
$|3x - 6| < \varepsilon,$
$3|x - 2| < \varepsilon,$
$|x - 2| < \frac{\varepsilon}{3}.$
Таким образом, при любом произвольном ε неравенство $|(3x - 1) - 7| < \varepsilon$ будет выполняться, если будет выполняться неравенство $|x - 2| < \frac{\varepsilon}{3} = \delta$. А это и значит, что 7 есть предел данной функции при $x \to 2$.

Замечание 1. Если функция $y = f(x)$ имеет предел b_1 при x, стремящемся к a, причем $x > a$ то существует предел справа. Обозначается: $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = b_1$.
Если функция $y = f(x)$ имеет предел b_1 при $x \to a$, причем $x < a$ то существует предел слева. Обозначается: $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = b_2$.

Замечание 2. Для существования предела функции $f(x)$ при x, стремящемся к a, не требуется, чтобы функция в точке x была определена.

Пример 2. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = 4$.

Решение. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое δ, зависящее от ε, что для всех значений $|x - 2| < \delta$ будет выполняться $\left|\frac{x^2-4}{x-2} - 4\right| < \varepsilon$. Преобразуем последнее неравенство.
$\left|\frac{x^2-4}{x-2} - 4\right| < \varepsilon,$
$\left|\frac{(x-2)(x+2)}{x-2} - 4\right| < \varepsilon,$
$|x + 2 - 4| < \varepsilon,$
$|x - 2| < \varepsilon.$
Таким образом, при любом произвольном ε неравенство $\left|\frac{x^2-4}{x-2} - 4\right| < \varepsilon$ будет выполняться, если будет выполняться неравенство $|x - 2| < \varepsilon = \delta$. А это и значит, что 4 есть предел данной функции при $x \to 2$.

Определение 2. **Функция $f(x)$ имеет предел b при x, стремящемся к ∞ , если для любого сколь угодно малого положительного ε найдется такое значение N, что для всех $|x| > N$ будет $|f(x) - b| < \varepsilon$. Обозначается: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$.**

Пример 3. Доказать, что $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{x} = 1$.

Решение. Для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует такое значение N, где $|x| > N$, что будет выполняться
$\left|\frac{x+1}{x} - 1\right| < \varepsilon,$
$\left|1 + \frac{1}{x} - 1\right| < \varepsilon,$
$\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon.$
$|x| > \frac{1}{\varepsilon} = N.$
Следовательно, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{x} = 1$.

Определение 3. **Функция $f(x)$ стремиться к ∞ при x, стремящемся к a, если для любого сколь угодно большого числа M найдется такое дельта δ, зависящее от M, что для всех значений x, удовлетворяющих $|x - a| < \delta$ будет выполняться $|f(x)| > M$. Обозначается: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$.**

Пример 4. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{(1-x)^2} = \infty$.

Решение. Для любого сколь угодно большого числа $M > 0$ найдется такое δ, зависящее от M, что для всех значений x, удовлетворяющих $|x - 1| < \delta$ будет выполняться
$\left|\frac{1}{(1-x)^2}\right| > M,$
$\frac{1}{|1-x|^2} > M,$
$|1 - x|^2 < \frac{1}{M},$
$|x - 1| < \frac{1}{\sqrt{M}} = \delta.$
Следовательно, $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{(1-x)^2} = \infty$.

§49. Ограниченные функции.

Определение 1. **Функция $f(x)$ называется ограниченной в данной области изменения аргумента x, если существует такое положительное число M, что для всех значений x для этой области выполняется $|f(x)| < M$.**

Пример 1. Функция $f(x) = \sin x$, определенная на интервале $[0,\pi]$, является ограниченной, т.к. при всех x

$$|\sin x| \le 1 = M.$$

Определение 2. **Функция $f(x)$ ограничена при x, стремящемся к a, если существует окрестность точки a, в которой данная функция ограничена.**

Определение 3. **Функция $f(x)$ ограничена при x, стремящемся к ∞, если существует такое положительное число N, что для всех значений $|x| > N$ функция ограничена.**

Теорема 1. Если предел функции $f(x)$ равен b, т.е. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, то функция $f(x)$ ограничена при x, стремящемся к a.

Доказательство

Из равенства $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое δ, зависящее от ε, что для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $|x-a| < \delta$, будет выполняться $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Воспользовавшись свойством модуля($|a-b| \ge |a| - |b|$) получим

$|f(x)| - |b| < \varepsilon$,

$$|f(x)| < \varepsilon + |b|.$$

Обозначив $\varepsilon + |b| = M$, получим $|f(x)| < M$, следовательно, функция $f(x)$ ограничена при $x \to a$.

Замечание 1. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, то функция $f(x)$ неограниченна при

Теорема 2. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, где $b \ne 0$, то функция $\frac{1}{f(x)}$ ограничена при x, стремящемся к a.

Доказательство

Из равенства $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, где $b \ne 0$, следует, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое δ, зависящее от ε, что для всех значений $|x-a| < \delta$, будет выполняться $\big||f(x) - b|\big| < \varepsilon$ или $-\varepsilon < |f(x) - b| < \varepsilon$.

Воспользовавшись свойством модуля($|a-b| \ge |a| - |b|$) получим

$-\varepsilon < |f(x)| - |b| < \varepsilon$,

$$-\varepsilon + |b| < |f(x)| < \varepsilon + |b|,$$

$\frac{1}{-\varepsilon+|b|} < \frac{1}{|f(x)|} < \frac{1}{\varepsilon+|b|}$,

$\left|\frac{1}{f(x)}\right| < \frac{1}{-\varepsilon+|b|}$.

Обозначив $\frac{1}{-\varepsilon+|b|} = M$, получим $\left|\frac{1}{f(x)}\right| < M$, следовательно, функция $\frac{1}{f(x)}$ ограничена при $x \to a$.

§50. Бесконечно малые и их свойства.

Определение 1. **Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при x, стремящемся к a, если $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$.**

Пример 1. Функция $\alpha(x) = x - 1$ есть бесконечно малая при $x \to 1$, т.к. $\lim\limits_{x\to 1} (x-1) = 0$.

Функция $\beta(x) = \frac{1}{x}$ есть бесконечно малая при $x \to \infty$, т.к. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Теорема 1. Если функция $f(x)$ представима в виде суммы постоянного числа b и бесконечно малой $\alpha(x)$, то $\lim f(x) = b$. И наоборот: если $\lim f(x) = b$, то $f(x) = b + \alpha(x)$.

Доказательство

1) прямая теорема:

Из равенства $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая, следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое δ, зависящее от ε, что для всех значений $|x-a| < \delta$, будет выполняться $|\alpha(x)| < \varepsilon$.

Преобразуем выражение $f(x) = b + \alpha(x)$:

$f(x) - b = \alpha(x)$.

Подставив данное выражение в неравенство $|\alpha(x)| < \varepsilon$, получим

$|f(x) - b| < \varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, что и требовалось доказать.

2) обратная теорема:

Из равенства . $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое δ, зависящее от ε, что для всех значений $|x-a| < \delta$, будет выполняться $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Введем обозначение $f(x) - b = \alpha(x)$. То, подставив его в неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$, получим $|\alpha(x)| < \varepsilon$, т.е. $\alpha(x)$ – бесконечно малая. Следовательно, $f(x) = b + \alpha(x)$, что и требовалось доказать.

Теорема 2. Если функция $\alpha(x)$ бесконечно малая при x, стремящемся к a, то функция $\frac{1}{\alpha(x)}$ стремиться к бесконечности при x, стремящемся к a.

Доказательство

По условию, $\alpha(x)$ – бесконечно малая, т.е. что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое δ, зависящее от ε, что для всех значений $|x-a| < \delta$, будет выполняться $|\alpha(x)| < \varepsilon$.

Преобразуем выражение $|\alpha(x)| < \varepsilon$:

$\left|\frac{1}{\alpha(x)}\right| > \frac{1}{\varepsilon}$.

Введя обозначение $\frac{1}{\varepsilon} = M$, получим $\left|\frac{1}{\alpha(x)}\right| > M$.

Следовательно, функция $\frac{1}{\alpha(x)}$ стремиться к бесконечности.

Теорема 3. Алгебраическая сумма двух бесконечно малых $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ будет бесконечно малой: $\alpha(x) + \beta(x) = j(x)$.

Доказательство (для $x \to a$)

По условию, $\alpha(x)$ – бесконечно малая, т.е. что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое δ_1, зависящее от ε, что для всех значений $|x-a| < \delta_1$, будет выполняться $|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. $\beta(x)$ – бесконечно малая, т.е. что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое δ_2, зависящее от ε, что для всех значений $|x-a| < \delta_2$, будет выполняться $|\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Возьмем β равным меньшему из величин δ_1 и δ_2.

Найдем сумму этих бесконечно малых:

$|\alpha(x) + \beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$,

$|\alpha(x) + \beta(x)| < \varepsilon$.

Введя обозначение $\alpha(x) + \beta(x) = j(x)$, получим $|j(x)| < \varepsilon$. Следовательно, $j(x)$ - бесконечно малая, что и требовалось доказать.

Теорема 4. Произведение бесконечно малой $\alpha(x)$ на ограниченную функцию $z(x)$ есть бесконечно малая: $\alpha(x)z(x) = j(x)$.

Доказательство (для $x \to a$)

По условию теоремы, $\alpha(x)$ – бесконечно малая, следовательно, $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$, т.е. для любого $\frac{\varepsilon}{M} > 0$ найдется такое δ_1, зависящее от $\frac{\varepsilon}{M}$, что для всех значений $|x-a| < \delta_1$, будет выполняться $|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$; $z(x)$ – ограниченная функция, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое δ_2, зависящее от ε, что для всех значений $|x-a| < \delta_2$, будет выполняться $|z(x)| < M$.

Составим произведение бесконечно малой на ограниченную функцию, обозначив $\delta_3 = \min(\delta_1, \delta_2)$:

$$|\alpha(x)z(x)| < \frac{\varepsilon}{M} M$$

$$|\alpha(x)z(x)| < \varepsilon$$

Последнее неравенство выполняется для всех значений $|x-a| < \delta_3$. Тогда:

$$\lim_{x\to a} \alpha(x)\, z(x) = 0$$

Следовательно, произведение $\alpha(x)z(x)$ является также бесконечно малой.

Следствие 1. Если $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to a} \beta(x) = 0$, то $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x)\beta(x) = 0$

Следствие 2. Если $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$ и $c = const$, то $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x)c = 0$

Теорема 5. Частное от деления $\alpha(x)$ на $z(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая, а $\lim\limits_{x\to a} z(x) = b \ne 0$ есть бесконечно малая при $z(x) \ne 0$.

Доказательство

По условию теоремы,

$$\lim_{x\to a} \alpha(x) = 0$$

$$\lim_{x\to a} z(x) = b \ne 0$$

На основании теоремы 2 §49 следует, что $\frac{1}{z(x)}$ есть величина ограниченная. Тогда, на основании теоремы 4 §50, дробь $\frac{\alpha(x)}{z(x)} = \alpha(x)\frac{1}{z(x)}$ есть произведение величины бесконечно малой на величину ограниченную, т.е. величина бесконечно малая.

Что и требовалось доказать.

§51. Основные теоремы о пределах.

Далее $\lim\limits_{x\to a} U(x) = b$ и $\lim\limits_{x\to\infty} U(x) = b$ будем обозначать как $\lim U(x) = b$

Теорема 1. Предел алгебраической суммы двух функций $U_1(x)$ и $U_2(x)$ равен алгебраической сумме пределов: $\boldsymbol{\lim(U_1(x) + U_2(x)) = \lim U_1(x) +}$ **lim⎕U2x.**

Доказательство

Введем обозначения: $\lim U_1(x) = a_1$ и $\lim U_2(x) = a_2$.

Тогда на основании теоремы 1 §50 можно записать:

$$U_1(x) = a_1 + \alpha_1(x),$$
$$U_2(x) = a_2 + \alpha_2(x)$$

где $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ – бесконечно малые. Следовательно, сумма двух функций:

$$U_1(x) + U_2(x) = a_1 + \alpha_1(x) + a_2 + \alpha_2(x) = (a_1 + a_2) + (\alpha_1(x) + \alpha_2(x)).$$

Так как из теоремы 3 §50 следует, что $(a_1 + a_2)$ ест постоянная величина, а $(\alpha_1(x) + \alpha_2(x))$ – величина бесконечно малая, то по теореме 1 §50 заключаем, что

$$\lim(U_1(x) + U_2(x)) = \lim U_1(x) + \lim U_2(x).$$

Что и требовалось доказать.

Пример 1. Вычислить предел

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 2x}{x^2}$$

Решение.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 2x}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{2}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} 1 + \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x} = 1 + 0 = 1$$

Теорема 2. Предел произведения двух функций $U_1(x)$ и $U_2(x)$ равен произведению пределов этих функций: $\boldsymbol{\lim(U_1(x)U_2(x)) = \lim U_1(x) \lim U_2(x)}$.

Доказательство

Введем обозначения: $\lim U_1(x) = a_1$ и $\lim U_2(x) = a_2$.

Тогда на основании теоремы 1 §50 можно записать:

$$U_1(x) = a_1 + \alpha_1(x),$$
$$U_2(x) = a_2 + \alpha_2(x)$$

где $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ – бесконечно малые. Следовательно, произведение двух функций:

$$U_1(x)U_2(x) = (a_1 + \alpha_1(x))(a_2 + \alpha_2(x)) = a_1a_2 + a_2\alpha_1(x) + a_1\alpha_2(x) + \alpha_1(x)\alpha_2(x) = a_1a_2 + \gamma(x),$$

где, на основании теоремы 3 §50, $a_2\alpha_1(x) + a_1\alpha_2(x) + \alpha_1(x)\alpha_2(x) = \gamma(x)$ - сумма бесконечно малых.

Тогда, по теореме 1 §50, заключаем, что

$$\lim(U_1(x)U_2(x)) = a_1a_2$$

или, вернувшись к первоначальным обозначениям,

$$\lim(U_1(x)U_2(x)) = \lim U_1(x) \lim U_2(x)$$

Что и требовалось доказать.

Пример 2. Вычислить предел

$$\lim_{x\to\infty} 5x^2$$

.

Решение.

Теорема 3. Предел частного двух функций $U_1(x)$ и $U_2(x)$ равен частному пределов этих функций: $\boldsymbol{\lim \frac{U_1(x)}{U_2(x)} = \frac{\lim U_1(x)}{\lim U_2(x)}}$, где $\lim U_2(x) \neq 0$.

Доказательство

Введем обозначения: $\lim U_1(x) = a_1$ и $\lim U_2(x) = a_2 \neq 0$.

Тогда на основании теоремы 1 §50 можно записать:

$$U_1(x) = a_1 + \alpha_1(x),$$
$$U_2(x) = a_2 + \alpha_2(x)$$

где $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ – бесконечно малые. Следовательно, частное двух функций:

$$\frac{U_1(x)}{U_2(x)} = \frac{a_1 + \alpha_1(x)}{a_2 + \alpha_2(x)} = \frac{a_1}{a_2} + \left(\frac{a_1 + \alpha_1(x)}{a_2 + \alpha_2(x)} - \frac{a_1}{a_2}\right) = \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_1a_2 + a_2\alpha_1(x) - a_1a_2 - a_1\alpha_2(x)}{a_2(a_2 + \alpha_2(x))} = \frac{a_1}{a_2} + \gamma(x),$$

где $\frac{a_1a_2 + a_2\alpha_1(x) - a_1a_2 - a_1\alpha_2(x)}{a_2(a_2 + \alpha_2(x))} = \gamma(x)$ - бесконечно малая.

Тогда, по теореме 1 §50, заключаем, что

$$\lim \frac{U_1(x)}{U_2(x)} = \frac{a_1}{a_2}$$

или, вернувшись к первоначальным обозначениям,

$$\lim \frac{U_1(x)}{U_2(x)} = \frac{\lim U_1(x)}{\lim U_2(x)}$$

Что и требовалось доказать.

Пример 3. Вычислить предел

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 2x}{x^2}$$

.

Решение.

Теорема 4. Если между соответствующими значениями трех функций $u(x), z(x), v(x)$ выполняется неравенство $u(x) < z(x) < v(x)$ и предел функций $u(x), v(x)$ равен числу b при $x \to a$, то $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a} z(x) = b}$.

Доказательство

По условию теоремы,

$$\lim_{x\to a} u(x) = b$$

т.е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое δ_1, зависящее от ε, что для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta_1$, будет выполняться $|u(x) - b| < \varepsilon$;

$$\lim_{x\to a} v(x) = b$$

т.е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое δ_2, зависящее от ε, что для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta_2$, будет выполняться $|v(x) - b| < \varepsilon$.

Для $\delta_3 = \min(\delta_1, \delta_2)$ будет выполняться:

$$\varepsilon < u(x) - b < \varepsilon$$

и

$$\varepsilon < v(x) - b < \varepsilon$$

а следовательно, будут выполняться неравенства

$$\varepsilon < z(x) - b < \varepsilon$$

Переписав последнее неравенство, получим

$$|z(x) - b| < \varepsilon$$

т.е.

$$\lim_{x\to a} z(x) = b$$

Что и требовалось доказать.

Теорема 5. Если функция $f(x)$ принимает неотрицательные значения, т.е. $f(x) \geq 0$, и при этом стремиться к пределу b, то b – неотрицательное число, т.е. $b \geq 0$.

Доказательство

По условию теоремы, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое δ, зависящее от ε, что для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, будет выполняться $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Предположим, что $b < 0$. Тогда

$$|f(x) - b| \geq |b|$$

т.е. модуль разности $|f(x) - b|$ больше положительного числа $|b|$ и, следовательно, не стремится к нулю при $x \to a$. Но тогда $f(x)$ при $x \to a$ не стремится к b, что противоречит условию теоремы. Значит, предположение, что $b < 0$, ошибочно. Следовательно, $b \geq 0$.

Что и требовалось доказать.

Теорема 6. Если между соответствующими значениями функций $u(x)$ и $v(x)$ выполняется $u(x) \geq v(x)$, то и $\boldsymbol{\lim u(x) \geq \lim v(x)}$.

Доказательство

По условию теоремы, $u(x) \geq v(x)$.

Перепишем данное неравенство, перенеся $v(x)$ в левую часть:

$$u(x) - v(x) \geq 0$$

Следовательно, (по теореме 5 51), $\lim(u(x) - v(x)) \geq 0$ или (по теореме 3 50), $\lim u(x) - \lim v(x) \geq 0$, т.е. $\lim u(x) \geq \lim v(x)$.

Что и требовалось доказать.

Теорема 7. Если переменная величина V возрастающая, т.е. всякое ее последующее значение больше предыдущего, и ограничена, т.е. $|V| < M$, то эта переменная величина имеет предел $\lim V = a$, причем $a < M$

§52. Предел функции $\frac{\sin x}{x}$ (первый замечательный предел).

Функция $\frac{\sin x}{x}$ не определена при $x \to 0$, т.к. числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль. Вычислим предел этой функции при $x \to 0$.

Выполним следующий чертеж.

Возьмем тригонометрический круг; обозначим центральный угол MOB через x, при этом $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Восстановим перпендикуляр AC и проведем дугу MA.

Следовательно, площадь треугольника MOA: $\Delta S_{MOA} = \frac{1}{2}OA \cdot MB = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x = \frac{1}{2}\sin x$.

Площадь сектора MOA: сек $S_{MOA} = \frac{x}{2}$

Площадь треугольника COA: $\Delta S_{COA} = \frac{1}{2}OA \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg} x$

Следовательно,

$$\Delta S_{MOA} < \text{сек } S_{MOA} < \Delta S_{COA}$$
$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2}$$

Сократим последнее неравенство на 2:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x$$

Сократим полученное неравенство на $\sin x$:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

или

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

Рассмотрим пределы $\lim_{x\to 0} 1 = 1$:

$$\lim_{x\to 0} \cos x = 1$$

Используя теорему 4 §51, получим

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Пример 1. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$$

Решение.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \cdot 1 = 1$$

Пример 2. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{x}$$

Решение.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{3\sin(3x)}{3x} = \lim_{x\to 0} 3 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{3x} = 3 \cdot 1 = 3$$

§53. Число e (второй замечательный предел).

Теорема 1. Переменная величина $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ при $n\to\infty$ имеет предел, заключенный между 2 и 3.

Доказательство

Используя формулу бинома Ньютона, распишем $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{n}{1}\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3+\dots+$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(n-1))}{n!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)+$$
$$+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\dots+\frac{1}{n!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

Следовательно, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>2$ при любом значении n. С увеличением n величина $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ возрастает.

Произведем следующие преобразования.

Заменим все скобки на 1:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}$$

Увеличим неравенство, заменяя $3,4,\dots,n$ на 2:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

Все члены правой части этого неравенства, кроме первого, образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q=\frac{1}{2}$ и первым членом $a=1$, поэтому

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+\left[1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\dots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]=1+\frac{a-aq^n}{1-q}=1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$$
$$=1+\left[2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]<3$$

Следовательно, для всех n получаем:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$$

Таким образом, получаем неравенства

$$2<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$$

Этим установлено, что переменная величина $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ограничена,

Т.к. переменная величина $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ – возрастающая и ограниченная, то на основании теоремы 7 §51 она имеет предел, обозначаемый буквой e.

Второй замечательный предел:

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e}$$

Теорема 2. Функция $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ при $x\to\infty$ имеет предел e, т.е.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

Пример 1. Вычислить предел $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5}$

Решение.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^5\right]=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^5=e\cdot 1=e$$

Пример 2. Вычислить предел $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x$

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x=\lim_{\frac{x}{3}\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}}\right)^3=e^3$$

§54. Непрерывность функции.

Определение 1. **Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке a, если выполняется $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$.**

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке $x=a$, т.е. $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$.

Воспользуемся: $\lim_{x\to a}x=a$, тогда $\lim_{x\to a}f(x)=f(\lim_{x\to a}x)$, т.е. если функция непрерывна в точке, то знак предела можно вносить под знак функции.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна при $x\to a$, т.е. $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$. Преобразуем выражение $\lim_{x\to a}f(x)-f(a)=0$.

Т.к. предел константы $f(a)$ равен самой константе:

$$\lim_{x\to a}[f(x)-f(a)]=0$$

$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$, где $\Delta x=f(a+\Delta x)-f(a)$

Пример 1. Доказать, функция $y=x^2$ непрерывна в точке $x=2$.

Решение.

Т.к. $\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$, то

$$\Delta y=f(2+\Delta x)-f(2)=(2+\Delta x)^2-2^2=2^2+2\cdot 2\cdot\Delta x+\Delta x^2-2^2$$
$$=\Delta x^2+4\Delta x$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x^2+4\Delta x)=0$$

Теорема 1. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны в точке $x=a$, то функция $f_1(x)+f_2(x)$ тоже непрерывна в этой точке.

Доказательство

По условию теоремы, $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны в точке $x=a$, т.е.

$\lim_{x\to a}f_1(x)=f_1(a)$

и

$\lim_{x\to a}f_2(x)=f_2(a)$

Введем обозначения:

$$\varphi(x)=f_1(x)+f_2(x)$$

, т.е.

$\lim_{x\to a}\varphi(x)=\lim_{x\to a}[f_1(x)+f_2(x)]=\lim_{x\to a}f_1(x)+\lim_{x\to a}f_2(x)=f_1(a)+f_2(a)=\varphi(a)$

Следовательно, сумма $\varphi(x)=f_1(x)+f_2(x)$ есть непрерывная функция, что и требовалось доказать.

Теорема 2. Произведение и частное двух непрерывных функций есть функция непрерывная

Теорема 3. Если функция $U=\psi(x)$ непрерывна в точке $x=x_0$ и функция $f(U)$ непрерывна в точке $U_0=\psi(x_0)$, то сложная функция $f(\psi(x))$ непрерывна в точке $x=x_0$.

Теорема 4. Всякая элементарная функция непрерывна в каждой ее точке.

Определение 2. **Если функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке интервала $[a;b]$,то $f(x)$ непрерывна на этом интервале.**

Определение 3. **Если для функции $f(x)$ в точке $x=a$ не выполняется условие непрерывности то функция в этой точке имеет разрыв.**

Определение 4. **Если функция $f(x)$ такова, что $\lim_{x\to a+0}f(x)=b_1$ и $\lim_{x\to a-0}f(x)=b_2$, где $b_1\neq b_2$ то функция $f(x)$ при $x=0$ имеет разрыв первого рода.**

Пример 2. Функция $f(x)=\frac{|x|}{x}$ не определена в точке $x=0$:

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0+0}\frac{x}{x}=1$$
$$\lim_{x\to 0-0}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0-0}\frac{-x}{x}=-1$$

Следовательно, функция $f(x)$ имеет разрыв первого рода.

Определение 5. **Если функция $f(x)$ такова, что $\lim_{x\to a}f(x)=\infty$, то функция имеет разрыв второго рода.**

Пример 3. Функция $y=2^{\frac{1}{x}}$ при $x=0$ не определена и разрывна, т.к.

$$\lim_{x\to 0+0}2^{\frac{1}{x}}=\infty$$
$$\lim_{x\to 0+0}2^{\frac{1}{x}}=0$$

§55. Сравнение бесконечно малых.

Пусть одновременно несколько бесконечно малых величин

$$\alpha,\beta,\gamma,\dots$$

Являются функциями одного и того же аргумента x и стремятся к нулю при стремлении x к некоторому пределу или к бесконечности.

Определение 1. **Если отношение $\frac{\beta}{\alpha}$ имеет конечный и отличный от нуля предел, т.к. если $\lim\frac{\beta}{\alpha}=\frac{1}{A}\neq 0$, а следовательно, $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\frac{1}{A}\neq 0$, то бесконечно малые и называются бесконечно малыми одного порядка.**

Определение 2. **Если отношение двух бесконечно малых $\frac{\beta}{\alpha}$ стремиться к нулю, т.е. $\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$ (а $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\infty$), то бесконечно малая β называется бесконечно малой величиной высшего порядка, чем бесконечно малая α, а бесконечно малая α называется бесконечно малой низшего порядка, чем бесконечно малая β.**

Определение 3. **Бесконечно малая β называется бесконечно малой k-го порядка относительно бесконечно малой α, если β и α^k – бесконечно малые одного порядка, т.е. если $\lim\frac{\beta}{\alpha^k}=A\neq 0$.**

Определение 4. **Если отношение двух бесконечно малых $\frac{\beta}{\alpha}$ стремиться к единице, т.е. если $\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$, то бесконечно малые β и α называют эквивалентными бесконечно малыми и пишут $\alpha\approx\beta$.**

Теорема 1. Если α и β – эквивалентные бесконечно малые, то их разность $\alpha-\beta$ есть бесконечно малая высшего порядка, чем α и чем β.

Доказательство

$$\lim\frac{\alpha-\beta}{\alpha}=\lim\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right)=1-\lim\frac{\beta}{\alpha}=1-1=0$$

Теорема 2. Если разность двух бесконечно малых $\alpha-\beta$ есть бесконечно малая высшего порядка, чем α и чем β, то α и β есть эквивалентные бесконечно малые.

Доказательство

Пусть $\lim\frac{\alpha-\beta}{\alpha}=0$, тогда $\lim\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right)=0$, или $1-\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$, или $\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$, т.е. $\alpha\approx\beta$.

Если $\lim\frac{\alpha-\beta}{\beta}=0$, то $\lim\left(\frac{\alpha}{\beta}-1\right)=0$, $\lim\frac{\alpha}{\beta}=1$, т.е. $\alpha\approx\beta$.

Замечание 1. Если отношение двух бесконечно малых $\frac{\beta}{\alpha}$ не имеет предела и не стремится к бесконечности, то α и β не сравнимы между собой в указанном выше смысле.