УДК 631.371.06

РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ И АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТРАНСПОРТНОГО ПЕРЕЕЗДА МОБИЛЬНОГО СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННОГО АГРЕГАТА

В. Б. ПОПОВ, А. А. БАБИЧ

Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого», Республика Беларусь

Введение

Мобильный сельскохозяйственный агрегат (МСХА), состоящий из универсального энергетического средства (УЭС) и агрегатируемой с ним посредством подъемно-навесного устройства (ПНУ) навесной машины, регулярно эксплуатируется в режиме транспортного переезда.

Важным эксплуатационным качеством МСХА является плавность хода, характеризующая его способность поглощать толчки и вибрации, возникающие при движении по неровной опорной поверхности. Плавность хода МСХА в режиме транспортного переезда оказывает влияние на эксплуатационную надежность его компонент, безопасность движения, самочувствие оператора и уплотнение почвы. Как тракторы, так и УЭСы относятся к мобильным энергетическим средствам (МЭС), колебания которых исследовались многими авторами [1]–[6], но изучены недостаточно.

В режиме транспортного переезда МСХА, состоящий из УЭС 290/450 и комбайна навесного кормоуборочного КНК-500, контактирует с опорной поверхностью только колесами энергоносителя. В сравнительно большом объеме информации, связанной с моделированием колебаний колесных МЭС [1]–[6], для режима транспортного переезда вышеупомянутого МСХА нет подходящего аналитического описания для оценки плавности его хода.

Цель работы – формирование функциональной математической модели и алгоритма решения задачи транспортного переезда МСХА, состоящего из универсального энергетического средства УЭС 290/450 и комбайна навесного кормоуборочного КНК-500.

Основная часть

Неровности опорной поверхности, в данном случае ее микропрофиль, являются основным источником низкочастотных колебаний как УЭС, так и МСХА. При этом основное влияние на плавность хода оказывают вертикальные поступательные и продольные угловые колебания [1]–[4].

От колес колебания передаются на корпус УЭС 290/450 и одновременно на находящийся в транспортном положении КНК-500. Это влечет за собой колебания нагрузки в звеньях механизма навески (МН) ПНУ, с одной стороны, и снижение уровня управляемости МСХА, с другой [7].

Геометрия неровностей микропрофиля опорной поверхности представляют собой случайный процесс, в котором, как правило, присутствуют гармонические составляющие. Так, например, сельскохозяйственный фон в виде стерни кукурузы после уборки на силос (движение поперек направления уборки) описывается корреляционной функцией с малой случайностью и большой периодичностью [2], т. е. представляет процесс близкий к обычному гармоническому. В этом случае профиль поля в первом приближении можно представить изменяющимся по гармоническому закону.

Результаты исследований показывают, что периодические неровности можно рассматривать как непрерывное повторение единичных неровностей [2], которые можно представить в виде волны синусоидальной формы:

$$q = q_0 \sin\left(\frac{2\pi l}{l_0}\right), \;\; 0 \le l \le l_0,$$

где $2q_0$, l_0 – высота и длина единичной неровности, соответственно.

Выражения, описывающие микропрофиль в виде периодических неровностей, целесообразно переписать в виде функций времени t:

$$l = vt,$$

где v – установившаяся скорость движения УЭС 290/450.

Тогда для периодических неровностей имеем:

$$q = q_0 \sin(\omega t), \;\; 0 \le t \le t_{\text{пер}}, \qquad (1)$$

где $\omega = 2\pi v / l_0$ – циклическая частота периодических неровностей, $t_{\text{пер}}$ – время, необходимое МСХА для переезда нескольких неровностей.

При составлении расчетной схемы динамической модели транспортного переезда МСХА были приняты следующие допущения:

– УЭС движется равномерно и прямолинейно, и профиль опорной поверхности под его правым и левым движителями одинаков;

– колебания МСХА рассматриваются в продольной вертикальной плоскости его движения;

– КНК-500 в транспортном положении считается жестко связанным с корпусом УЭС 290/450, его влияние учитывается изменениями положения центра тяжести и момента инерции МСХА;

– возникающие в шинах УЭС 290/450 упругие и диссипативные силы пропорциональны изменению характеристик неровности $(q, \dot{q})$ опорной поверхности;

– колебания трансмиссии и сидения водителя не влияют на колебания УЭС 290/450, так как они малы;

– в движении колеса сохраняют точечный, но постоянный контакт с опорной поверхностью.

С учетом принятых допущений и ограничений расчетная схема динамической модели УЭС 290/450 представляет колебательную систему с двумя степенями свободы (рис. 1).

Важным компоновочным параметром УЭС и МСХА, в зависимости от которого выбирается его расчетная схема, является коэффициент распределения подрессоренных масс:

$$\varepsilon = \rho^2 / L_1 L_2; \;\; \rho = \sqrt{J / M}, \qquad (2)$$

где ρ – радиус инерции корпуса УЭС; L_1, L_2 – расстояния от осей заднего и переднего мостов УЭС до его центра тяжести; J, M – момент инерции и масса УЭС.

Если коэффициент распределения подрессоренных масс близок к единице, то колебания передней и задней частей УЭС теоретически становятся не связанными между собой [2], [3]. При навешивании на УЭС комбайна КНК-500 происходит перераспределение веса МСХА по мостам, что вызывает изменение коэффициента ε, который уже отличается от единицы, что должно учитываться при формировании его динамической модели.

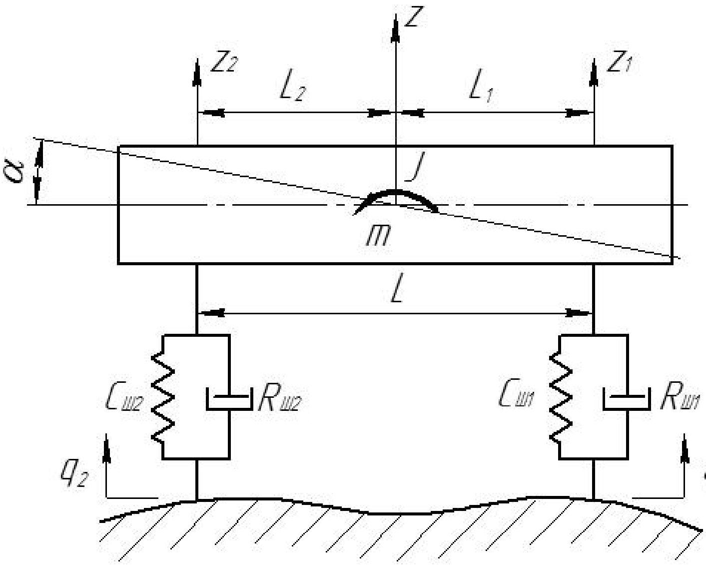

Рис. 1. Расчетная схема динамической модели УЭС (МСХА)

Для вывода уравнений движения, описывающих колебания УЭС и МСХА в вертикальной плоскости, используем уравнения Лагранжа второго рода в виде:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_{\text{К}}}{\partial \dot{x}_i}+\frac{\partial E_{\text{П}}}{\partial x_i}+\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}_i}=0, \qquad (3)$$

где $E_{\text{К}}$ и $E_{\text{П}}$ – кинетическая и потенциальная энергии системы; Φ – функция рассеивания; x_i – i-я обобщенная координата.

За обобщенные координаты на схеме (рис. 1) приняты вертикальные перемещения центра тяжести z и угловые колебания α относительно центра упругости УЭС. Обобщенные координаты связаны с вертикальными перемещениями его осей через выражения:

$$z=\frac{z_1L_2+z_2L_1}{L};\ \ \text{tg}\alpha=(z_2-z_1)/L. \qquad (4)$$

При малых угловых перемещениях $\text{tg}\alpha\approx\alpha$. Тогда $\alpha=(z_2-z_1)/L$.

В этом случае кинетическая энергия УЭС определяется как:

$$E_k=\frac{1}{2}M\dot{z}^2+\frac{1}{2}J\dot{\alpha}^2=\frac{1}{2}M\left(\frac{\dot{z}_1L_2+\dot{z}_2L_1}{L}\right)^2+\frac{1}{2}J\left(\frac{\dot{z}_2-\dot{z}_1}{L}\right)=\frac{1}{2}m_1\dot{z}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{z}_2^2+m_3\dot{z}_1\dot{z}_2, \qquad (5)$$

где $m_1=M\dfrac{L_2^2+\rho^2}{L^2}$; $m_2=M\dfrac{L_1^2+\rho^2}{L^2}$; $m_3=M\dfrac{L_1L_2-\rho^2}{L^2}$.

Навеска на УЭС 290/450 комбайна КНК-500 вызывает перераспределение масс по осям УЭС (m_1 и m_2), при этом появление массы m_3 свидетельствует об отличии коэффициента ε от единицы.

Приняв за начало отсчета положение статического равновесия УЭС (МСХА), получим выражение для его потенциальной энергии:

$$E_{\Pi} = \frac{1}{2} 2c_{ш_1} (z_1 - q_1)^2 + \frac{1}{2} 2c_{ш_2} (z_2 - q_2)^2, \tag{6}$$

где $c_{ш_1}$ и $c_{ш_2}$ – радиальная жесткость шин переднего и заднего моста; q_1, q_2 – высота неровностей под передними и задними колесами.

Следует отметить, что высота неровностей изменяется в зависимости от времени (1), причем воздействие, вызванное неровностью поверхности, поступает на заднее колесо с запаздыванием τ относительно переднего колеса. Следовательно:

$$q_1 = q(t); \quad q_2 = q(t - \tau); \quad \tau = \frac{L}{\nu},$$

где ν – скорость установившегося движения МСХА.

Диссипативная функция, характеризующая рассеяние энергии в шинах, имеет вид:

$$\Phi = \frac{1}{2} 2k_{ш_1} (\dot{z}_1 - \dot{q}_1)^2 + \frac{1}{2} 2k_{ш_2} (\dot{z}_2 - \dot{q}_2)^2, \tag{7}$$

где $k_{ш_1}$ и $k_{ш_2}$ – коэффициенты демпфирования в шинах передних и задних колес; $\dot{z}_1$ и $\dot{z}_2$ – производные от вертикальных перемещений соответствующих осей; $\dot{q}_1$ и $\dot{q}_2$ – производные от высот неровностей под передними и задними колесами УЭС.

Далее, выполнив необходимые дифференцирования выражений для кинетической и потенциальной энергии, а также диссипативной функции, подставим производные в уравнения Лагранжа (3). После алгебраических преобразований уравнения вынужденных колебаний МСХА можно записать как:

$$\begin{cases} m_1\ddot{z}_1 + k_{ш_1}\dot{z}_1 + c_{ш_1}z_1 + m_3\ddot{z}_2 = k_{ш_1}\dot{q}_1 + c_{ш_1}q_1; \\ m_2\ddot{z}_2 + k_{ш_2}\dot{z}_2 + c_{ш_2}z_2 + m_3\ddot{z}_1 = k_{ш_2}\dot{q}_2 + c_{ш_2}q_2, \end{cases} \tag{8}$$

где $q_1 = q_0(1 - \cos\omega t)$; $\dot{q}_1 = q_0\omega\sin\omega t$; $q_2 = q_0(1 - \cos\omega(t-\tau))$; $\dot{q}_1 = q_0\omega\sin\omega(t-\tau)$; ω – циклическая частота колебаний периодических неровностей опорной поверхности. Разделим первое и второе уравнения системы уравнений (8) на m_1 и m_2, соответственно, в результате получим:

$$\begin{cases} \ddot{z}_1 + 2h_1\dot{z}_1 + \omega_{к_1}^2 z_1 + \eta_1\ddot{z}_2 = 2h_1\dot{q}_1 + \omega_{к_1}^2 q_1; \\ \ddot{z}_2 + 2h_2\dot{z}_2 + \omega_{к_2}^2 z_2 + \eta_2\ddot{z}_1 = 2h_2\dot{q}_2 + \omega_{к_2}^2 q_2, \end{cases} \tag{9}$$

где $2h_1 = \dfrac{2k_{ш_1}}{m_1}$; $2h_2 = \dfrac{2k_{ш_2}}{m_2}$, $\omega_{к_1}^2 = \dfrac{2c_{ш_1}}{m_1}$; $\omega_{к_2}^2 = \dfrac{2c_{ш_2}}{m_2}$; $\eta_1 = \dfrac{m_3}{m_1}$; $\eta_2 = \dfrac{m_3}{m_2}$.

Здесь η_1, η_2 – коэффициенты связи; h_1, h_2 – коэффициенты демпфирования колебаний; $\omega_{к_1}$, $\omega_{к_2}$ – частоты собственных колебаний осей УЭС.

Частоты собственных колебаний, соответствующие передним и задним осям УЭС, определяются из выражений [2]:

$$\omega_{\text{к}_1}^2 = \frac{1}{2(1-\eta_1\eta_2)}\left[\omega_1^2 + \omega_2^2 + \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4\eta_1\eta_2\omega_1^2\omega_2^2}\right];$$

$$\omega_{\text{к}_2}^2 = \frac{1}{2(1-\eta_1\eta_2)}\left[\omega_1^2 + \omega_2^2 - \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4\eta_1\eta_2\omega_1^2\omega_2^2}\right],$$

где ω_1 и ω_2 – парциальные частоты УЭС:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{c_1 L^2}{M(L_2^2 + \rho^2)}}; \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{c_2 L^2}{M(L_1^2 + \rho^2)}}.$$

Как видно из приведенных выражений, частоты собственных колебаний осей УЭС $\omega_{\text{к}_1}$ и $\omega_{\text{к}_2}$ отличаются от парциальных частот. Их также называют частотами связи. Одна из них соответствует низкой, другая – высокой частоте собственных колебаний.

Правые части системы уравнений (9) представляют собой кинематические (внешние) воздействия со стороны опорной поверхности, которые можно представить как:

$$f_1 = (2h_1\dot{q}_1 + \omega_1^2 q_1)\theta(t); \;\; f_2 = (2h_2\dot{q}_2 + \omega_2^2 q_2)\theta(t-\tau), \quad (10)$$

где $\theta(t)$ – функция Хевисайда, позволяющая учесть запаздывание воздействия на вторую колесную пару.

В итоге система дифференциальных уравнений (ДУ) принимает вид:

$$\begin{cases} \ddot{z}_1 + 2h_1\dot{z}_1 + \omega_{\text{к}_1}^2 z_1 + \eta_1\ddot{z}_2 = f_1; \\ \ddot{z}_2 + 2h_2\dot{z}_2 + \omega_{\text{к}_2}^2 z_2 + \eta_2\ddot{z}_1 = f_2. \end{cases} \quad (11)$$

Дополним систему ДУ начальными условиями:

$$z_1(0) = \dot{z}_1(0) = 0; \;\; z_2(0) = z_{20}; \;\; \dot{z}_2(0) = \dot{z}_{20}. \quad (12)$$

Таким образом, в функциональной математической модели (ФММ), имитирующей динамику транспортного переезда МСХА, колебания передней и задней осей УЭС связаны между собой. Функциональная математическая модель включает распределенную массу МСХА (M), его момент инерции (J), а также упругие $(c_{\text{ш}_1}, c_{\text{ш}_2})$ и демпфирующие элементы $k_{\text{ш}_1}, k_{\text{ш}_2}$ шин, воспринимающие и смягчающие толчки со стороны сельскохозяйственного фона (q_1, q_2).

Систему линейных ДУ (11), (12) удобно решать с помощью операционного исчисления. Обозначим изображения оригиналов $z_1(t)$ и $z_2(t)$ как $Z_1(p)$ и $Z_2(p)$, соответственно. Тогда, используя свойства преобразования Лапласа, для изображений получаем следующую алгебраическую систему:

$$\begin{cases} P_{11}Z_1 + P_{12}Z_2 = F_1 + Q_1; \\ P_{21}Z_1 + P_{22}Z_2 = F_2 + Q_2, \end{cases} \quad (13)$$

где $P_{11}(p) = p^2 + 2h_1 p + {\omega_{\text{к}_1}}^2$; $P_{12}(p) = \eta_1 p^2$; $P_{21}(p) = \eta_2 p^2$; $P_{22}(p) = p^2 + 2h_2 p + \omega_{\text{к}_2}^2$.

Функции $F_1(p)$ и $F_2(p)$ есть изображения внешних воздействий $f_1(t)$ и $f_2(t)$. Многочлены $Q_1(p)$ и $Q_2(p)$ определяются с учетом начальных условий. В нашем случае они записываются как:

$$\begin{aligned} &Q_1(p) = \eta_1(pz_{20} + \dot{z}_{20}); \\ &Q_2(p) = pz_{20} + \dot{z}_{20} + 2h_2 z_{20}. \end{aligned} \tag{14}$$

Решение системы (13) представим в виде суммы двух слагаемых, первое из которых зависит от внешних воздействий, а второе – от начальных условий:

$$Z_1(p) = Z_1^f(p) + Z_1^q(p);\;\; Z_2(p) = Z_2^f(p) + Z_2^q(p), \tag{15}$$

где
$$Z_1^f = pZ_1^{(1)}F_1 + pZ_1^{(2)}F_2;\;\; Z_2^f = pZ_2^{(1)}F_1 + pZ_2^{(2)}F_2; \tag{16}$$

$$Z_1^q = \frac{1}{\Delta}(Q_1P_{22} - Q_2P_{12});\;\; Z_2^q = \frac{1}{\Delta}(-Q_1P_{21} + Q_2P_{11}). \tag{17}$$

Функции $Z_{1,2}^{(1,2)}$ имеют вид:

$$Z_1^{(1)} = \frac{1}{p}\frac{P_{22}}{\Delta};\;\; Z_2^{(1)} = -\frac{1}{p}\frac{P_{21}}{\Delta};\;\; Z_1^{(2)} = -\frac{1}{p}\frac{P_{12}}{\Delta};\;\; Z_2^{(2)} = \frac{1}{p}\frac{P_{11}}{\Delta}. \tag{18}$$

Здесь $\Delta = P_{11}P_{22} - P_{12}P_{21}$. Специальный вид функций $Z_{1,2}^f(p)$ дает возможность записать их оригиналы $z_{1,2}^f(t)$ в интегральной форме. Действительно, используя интеграл Дюамеля с учетом начальных условий, имеем:

$$z_1^f(t) = \int_0^t z_1^{(1)}(\xi)\dot{f}_1(t-\xi)d\xi + \int_\tau^t z_1^{(2)}(\xi)\dot{f}_2(t-\xi)d\xi; \tag{19}$$

$$z_2^f(t) = \int_0^t z_2^{(1)}(\xi)\dot{f}_1(t-\xi)d\xi + \int_\tau^t z_2^{(2)}(\xi)\dot{f}_2(t-\xi)d\xi. \tag{20}$$

Далее, заметим, что $\eta_1\eta_2 << 1$. Этот факт с достаточной для последующего анализа точностью позволяет пренебречь квадратичными по $\eta_{1,2}$ слагаемыми, в частности, можно положить $\Delta = P_{11}P_{22} - \eta_1\eta_2 p^4 \approx P_{11}P_{22}$. Тогда с учетом соотношений (18) парциальные функции $z_{1,2}^{(1,2)}(t)$ могут быть вычислены как оригиналы следующих рациональных выражений:

$$\begin{aligned} &Z_1^{(1)}(p) = \frac{1}{p}\frac{1}{p^2 + 2h_1p + \omega_1^2}; \\ &Z_2^{(1)}(p) = -\eta_2\frac{p}{(p^2 + 2h_1p + \omega_1^2)(p^2 + 2h_2p + \omega_2^2)}; \\ &Z_1^{(2)}(p) = -\eta_1\frac{p}{(p^2 + 2h_1p + \omega_1^2)(p^2 + 2h_2p + \omega_2^2)}; \\ &Z_2^{(2)}(p) = \frac{1}{p}\frac{1}{p^2 + 2h_2p + \omega_2^2}. \end{aligned} \tag{21}$$

Аналогично определяется и явный вид оригиналов функций $Z^{q}_{1,2}(p)$ (17). Физический и графический анализ решений системы (11), (12) будет представлен в отдельной работе, которая готовится в настоящее время к публикации.

Заключение

На основе разработанной ФММ транспортного переезда МСХА, состоящего из универсального энергетического средства УЭС 290/450 и КНК-500, был сформирован алгоритм расчета отдельных характеристик плавности его хода. Сформирована математическая модель, учитывающая распределение масс на передние и задние оси, а также их взаимное влияние друг на друга. Разработан алгоритм решения системы ДУ методами операционного исчисления.

Литература

1. Чудаков, Д. А. Основы теории и расчета трактора и автомобиля / Д. А. Чудаков. – М. : Колос, 1972.
2. Тракторы: Теория / В. В. Гуськов [и др.]. – М. : Машиностроение, 1988. – 384 с. : ил.
3. Многоцелевые гусеничные и колесные машины. Теория / В. П. Бойков [и др.]. – Минск : Новое знание, 2012. – 543 с.
4. Кутьков, Г. М. Тракторы и автомобили. Теория и технологические свойства : учеб. для студентов высш. учеб. зав-ний / Г. М. Кутьков. – М. : КолосС, 2004. – 504 с. : ил.
5. Золотаревская, Д. И. Математическое моделирование колебаний колесного трактора / Д. И. Золотаревская // Тракторы и сельхозмашины. – 2011. – № 7. – С. 14–18.
6. Попов, В. Б. Математическое моделирование мобильного сельскохозяйственного агрегата в режиме транспортного переезда / В. Б. Попов // Вестн. Гомел. гос. техн. ун-та им. П. О. Сухого. – 2005. – № 3 – С. 13–18.
7. Попов, В. Б. Влияние параметров мобильного сельскохозяйственного агрегата на некоторые характеристики плавности его хода в режиме транспортного переезда / В. Б. Попов, С. Ф. Андреев // Вестн. Гомел. гос. техн. ун-та им. П. О. Сухого. – 2014. – № 1. – С. 39–44.

Получено 23.09.2016 г.