Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 3 (96), 2016

Краткие сообщения

УДК 512.542

Факторизации конечных групп $\mathbb{P}$-субнормальными подгруппами с заданными вложениями

В.Н. Тютянов[1], Т.В. Тихоненко[1], П.В. Бычков[3]

Исследованы некоторые произведения $\mathbb{P}$-субнормальных подгрупп с ограничениями на подгруппы.
Ключевые слова: конечная группа, простая неабелева группа, факторизуемая группа, $\mathbb{P}$-субнормальная подгруппа.

Some products of $\mathbb{P}$-subnormal subgroup with restrictions imposed on subgroups are investigated in the paper.
Keywords: finite group, simple non-abelian group, factorized group, $\mathbb{P}$-subnormal subgroup.

Введение. Будем рассматривать только конечные группы. В работе [1] было введено

Определение. *Подгруппа H группы G называется $\mathbb{P}$-субнормальной в G (обозначается через H $\mathbb{P}$-sn G), если либо H = G, либо существует цепь подгрупп* $H = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_{n-1} \subset H_n = G$ *такая, что* $|H_i : H_{i-1}|$ *– простое число для любого* $i = 1,\ldots,n$.

Данное определение послужило источником многих работ. В [2] была установлена разрешимость конечной группы, факторизуемой двумя разрешимыми $\mathbb{P}$-субнормальными подгруппами. В [3] рассматривались группы $G = AB$ при условии, что A и B $\mathbb{P}^2$-субнормальны в G. В частности, была установлена разрешимость группы G при условии, что A и B разрешимы. В [4] установлена разрешимость и r-разрешимость группы $G = AB$ с $\mathbb{P}_r^t$-, $\mathbb{P}^\infty$- и $\mathbb{P}$-субнормальными разрешимыми или r-разрешимыми подгруппами A и B.

В данной работе с использованием теоремы о классификации простых неабелевых групп доказан следующий основной результат.

Теорема. *Пусть $G = AB$, $(|A|, |B|) = 1$ и $|A|$ – нечетное число. Если A $\mathbb{P}$-sn G и B $\mathbb{P}$-sn G, тогда $A \subseteq S(G)$ и простые неабелевы композиционные факторы группы G принадлежат списку: $PSL_2(7)$; $PSL_2(11)$; $SL_3(3)$, $SL_3(5)$, $SL_2(2^n)$, где $2^n+1 = p$ – простое число Ферма.*

1. Обозначения и предварительные результаты.

Принятые обозначения стандартны, их можно найти в [5]. Через $S(G)$ обозначается наибольшая нормальная разрешимая подгруппа группы G. Запись $G = [A]B$ означает, что группа G является полупрямым произведением подгрупп A и B с нормальной подгруппой A.

Лемма 1.1 [6, лемма 1.2]. *Пусть G – простая неабелева группа и* 1 $\mathbb{P}$*-sn G, тогда* $G \in \{SL_3(3); SL_3(5); PSL_2(7); PSL_2(11); SL_2(2^n)$, *где* $2^n + 1 = p$ *– простое число Ферма*$\}$.

Лемма 1.2 [2, лемма 3.1]. *Пусть H – подгруппа группы G, N – нормальная подгруппа в группе G. Тогда, если H $\mathbb{P}$-sn G, то $(H \cap N)$ $\mathbb{P}$-sn G и HN/N $\mathbb{P}$-sn G/N.*

2. Доказательство основного результата.

Теорема 2.1. *Пусть G=AB, $(|A|, |B|) = 1$ и $|A|$ – нечетное число. Если A $\mathbb{P}$-sn G и B $\mathbb{P}$-sn G, тогда $A \subseteq S(G)$ и простые неабелевы композиционные факторы группы G принадлежат списку: $PSL_2(7)$; $PSL_2(11)$; $SL_3(3)$, $SL_3(5)$, $SL_2(2^n)$, где $2^n+1 = p$ – простое число Ферма.*

Доказательство. Если G является разрешимой группой, то теорема верна. Поэтому будем считать, что группа G неразрешима. По теореме Томпсона-Фейта A – разрешимая подгруппа группы G. Так как A является разрешимой группой, то 1 $\mathbb{P}$-*sn A*. Поскольку A $\mathbb{P}$-*sn G,* то 1 $\mathbb{P}$-*sn* *G*. Из леммы 1.1 и леммы 1.2 следует, что простые неабелевы композиционные факторы группы *G* принадлежат списку из заключения теоремы.

Пусть *G* – минимальный контрпример к теореме. Так как *A* $\mathbb{P}$-*sn* *G, B* $\mathbb{P}$-*sn* *G* и $(|A|, |B|) = 1$, то группа *G* обладает двумя подгруппами различных простых индексов. По лемме 2.1 [1] группа *G* не является простой неабелевой группой.

Покажем, что $S(G) = 1$. Пусть $S(G) \neq 1$. Рассмотрим фактор-группу

$$\overline{G} = G/S(G) = AS(G)/S(G) \cdot BS(G)/S(G) = \overline{A}\overline{B}$$

Если $\overline{A} \neq 1$, $\overline{B} \neq 1$, тогда по лемме 1.2 группа $\overline{G}$ удовлетворяет условиям теоремы. Так как *G* – минимальный контрпример к теореме, то $\overline{A} \subseteq S(\overline{G})$. Отсюда следует, что $A \subseteq S(G)$. Последнее невозможно. Если $\overline{A} = 1$ и $\overline{B} \neq 1$, тогда $A \subseteq S(G)$, что невозможно. Если $\overline{A} \neq 1$, $\overline{B} = 1$, то $B \subseteq S(G)$. Противоречие с тем, что *G* – неразрешимая группа. Таким образом, $S(G) = 1$.

Пусть *T* – произвольная собственная нормальная подгруппа группы *G*. Покажем, что $T \subseteq B$. Так как $(|A|, |B|) = 1$, то $T = (T \cap A)(T \cap B)$. Если $(T \cap B) = 1$, то $T = T \cap A \subseteq S(G) = 1$. Последнее невозможно. Значит $T \cap B \neq 1$. Если $T \cap A = 1$, тогда $T = T \cap B$ и $T \subseteq B$. Поэтому $T \cap B \neq 1$ и $T \cap A \neq 1$. По лемме 1.2 $T \cap B$ $\mathbb{P}$-*sn* *T* и $T \cap A$ $\mathbb{P}$-*sn* *T*. Следовательно, *T* удовлетворяет условиям теоремы. Так как *G* минимальный контрпример, то $T \cap A \subseteq S(T)$ $char T \lhd G$ и $S(G) \neq 1$. Последнее невозможно. Значит, $T \subseteq B$ для всякой подгруппы $T \lhd G$.

Покажем, что $B \lhd G$. Пусть $T_1 \lhd G$. Если $T_1 = B$, то $B \lhd G$. Поэтому $T_1 \subset B$. Рассмотрим фактор-групп $\overline{G} = G/T_1 = \overline{A}\overline{B}$, где $\overline{A} \neq 1$ и $\overline{B} \neq 1$. По лемме 1.2. $\overline{A}$ $\mathbb{P}$-*sn* $\overline{G}$ и $\overline{B}$ $\mathbb{P}$-*sn* $\overline{G}$ Следовательно, $\overline{G}$ имеет две подгруппы различных простых индексов. По лемме 2.1 [1] $\overline{G}$ не простая. Так как всякая нормальная в *G* подгруппа содержится в *B*, то нормальная в $\overline{G}$ подгруппа $\overline{T_2}$ содержится в $\overline{B}$. Обозначим T_2 полный прообраз в *G* группы $\overline{T_2}$. Продолжая данный процесс, получим возрастающую цепь нормальных в *G* подгрупп $T_1 \subset T_2 \subset \cdots$, содержащихся в *B*. Отсюда следует, что $B \lhd G$.

Если в $\overline{G} = G/B \cong A$ имеется собственная нормальная подгруппа, то в *G* существует нормальная подгруппа, не содержащаяся в *B*. Последнее невозможно. Следовательно, $|A| = r$ – простое число и $G = [B]<a>$, где $<a> \cong Z_r$.

Пусть $N = N_1 \times \ldots \times N_k$ – минимальная нормальная подгруппа в группе *G*, где N_i – изоморфные простые неабелевы группы. Рассмотрим группу $N<a>$. Пусть $N<a> \neq G$. Покажем, что $N<a>$ удовлетворяет условиям теоремы. Для этого достаточно показать, что $<a>$ $\mathbb{P}$-*sn* $N<a>$. Так как $<a>$ $\mathbb{P}$-*sn* *G,* то имеется цепь: $<a> \subset <a>B_1 \subset \cdots \subset <a>B_{n-1} \subset <a>B_n = G$, где $B_i \subseteq B$ и B_i – $<a>$-инвариантные подгруппы. Рассмотрим $<a>$-инвариантную цепь:

$$1 \subseteq B_1 \cap N \subseteq \cdots \subseteq B_{n-1} \cap N \subseteq B_n \cap N = N .$$

Так как $|B_i \cap N : B_{i-1} \cap N| = |(B_i \cap N) B_{i-1} : B_{i-1}|$, а по лемме об индексах $|B_i : B_{i-1}| = |B_i : (B_i \cap N) B_{i-1}| \cdot |(B_i \cap N) : B_{i-1}|$, то $|B_i \cap N : B_{i-1} \cap N|$ делит простое число. Отсюда легко заключить, что $<a>$ $\mathbb{P}$-*sn* $N<a>$.

В силу минимальности контрпримера, $<a> \subseteq S(<a>N)$. Поэтому $<a>N = <a> \times N$ и $<a> \subseteq C_G(N) \lhd G$. Очевидно, что $C_G(N) \neq G$. Следовательно, $C_G(N) \lhd G$ и в *G* имеется нормальная подгруппа не содержащаяся в *B*, что невозможно. Таким образом, $G = [N]<a>$ и $N = B$.

Пусть сначала $k \geq 2$. Так как, $<a>$ $\mathbb{P}$-*sn* *G,* то в *G* существует подгруппа *Q*, содержащая $<a>$, индекса *q*, где *q* – простое число, делящее $|N|$. Очевидно, что *Q* не содержит подгрупп нормальных в *G*. Поэтому *G* изоморфно вкладывается в симметрическую группу S_q. Однако $(|G|, q^2) = q^2$, что невозможно.

Следовательно, $k = 1$ и *N* – простая неабелева группа из списка леммы 1.1. Из [7] следует, что в первых четырех случаях *N* не имеет внешнего автоморфизма, порядок которого взаимно прост с $|N|$. В последнем случае, так как $2^n+1 = p$ – простое число Ферма, то $n = 2^t$ и $|Out(N)| = 2\cdot 2^t = 2^{t+1}$. Поэтому $|Out(N)|$ делит $|N|$. Последнее противоречие. Теорема доказана.

Отметим следующий критерий непростоты конечной группы, факторизуемой двумя $\mathbb{P}$-субнормальными подгруппами.

Теорема 2.2. *Пусть $G=AB$, где A $\mathbb{P}$-sn G и B $\mathbb{P}$-sn G. Тогда G не является простой неабелевой группой.*

Доказательство. Пусть G – простая неабелева группа. Так как A $\mathbb{P}$-*sn* G, то G обладает цепью подгрупп $A = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_{k-1} \subset A_k = G$, где $|G : A_{k-1}| = p$ – простое число. Поскольку A_{k-1} не содержит подгрупп нормальных в G, то G изоморфно вкладывается в симметрическую группу S_p. Отсюда, в частности, следует, что $p = \max\pi(G)$, $(p, |A|) = 1$ и $(p, |B|) = p$. Так как B $\mathbb{P}$-*sn* G, то G – имеет цепь подгрупп $B = B_0 \subset B_1 \subset \cdots \subset B_{t-1} \subset B_t = G$, где $|B : B_{t-1}| = q$ – простое число и G изоморфно вкладывается в симметрическую группу S_q. Как и выше, $q = \max\pi(G)$, $(q, |B|) = 1$. Противоречие с тем, что $(p, |B|) = p = \max\pi(G)$. Теорема доказана.

Если в теореме 2.2 $A \cap B = 1$, то имеет место следующий результат.

Теорема 2.3. *Пусть $G = AB$, где A $\mathbb{P}$-sn G и B $\mathbb{P}$-sn G. Если $A \cap B = 1$, тогда группа G не является простой неабелевой группой и ее простые неабелевы композиционные факторы принадлежат списку: $SL_3(3)$; $SL_3(5)$; $PSL_2(7)$; $PSL_2(11)$; $SL_2(2^n)$, где $2^n+1 = p$ – простое число Ферма.*

Доказательство. Из теоремы 2.2 следует, что G не является простой неабелевой группой. Из леммы 4.1 [2] индукцией легко получить, что 1 $\mathbb{P}$-*sn* A и 1 $\mathbb{P}$-*sn* B. Поскольку A $\mathbb{P}$-*sn* G и $A \cap B = 1$, то имеем, что 1 $\mathbb{P}$-*sn* G. Из леммы 1.1 и леммы 1.2 следует, что простые неабелевы композиционные факторы группы G принадлежат списку из заключения теоремы. Теорема доказана.

В [4] было введено следующее определение. Пусть $\mathbb{N}$ и $\mathbb{P}$ – множества всех натуральных и всех простых чисел соответственно. Для фиксированного $t \in \mathbb{N}$ положим $\mathbb{P}^t = \left\{ p^k \mid p \in \mathbb{P}, k \in \{0\} \cup \mathbb{N}, k \le t \right\}$.

Подгруппа H называется $\mathbb{P}^t$-субнормальной подгруппой группы G, если существует цепочка подгрупп $H = H_0 \subset H_1 \subset \cdots \subset H_n = G$, такая, что $|H_i{:}H_{i-1}| \in \mathbb{P}^t$ для всех i, при этом используется обозначение H $\mathbb{P}^t$-*sn* G. В частности, при $k = 1$ получим понятие $\mathbb{P}$-субнормальной подгруппы.

Задача. *Описать конечные группы G такие, что $G = AB$, $(|A|, |B|) = 1$ и $|A|$ – нечетное число* и A $\mathbb{P}^{t_1}$-*sn* G, B $\mathbb{P}^{t_2}$-*sn* G, для произвольных фиксированных $t_1, t_2 \in \mathbb{N}$.

Литература

1. Васильев, А.Ф. О конечных группах сверхразрешимого типа / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сиб. мат. журнал. – 2010. – Т. 51, № 6. – С. 1270–1281.
2. Васильев, А.Ф. О произведениях $\mathbb{P}$-субнормальных подгрупп в конечных группах / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сиб. мат. журнал. – 2012. – Т. 53, № 1. – С. 59–67.
3. Княгина, В.Н. Конечные факторизуемые группы с разрешимыми $\mathbb{P}^2$-субнормальными подгруппами / В.Н. Княгина, В.С. Монахов // Сиб. мат. журнал. – 2013. – Т. 54, № 1. – С. 77–85.
4. Тютянов, В.Н. Факторизации конечных групп r-разрешимыми подгруппами с заданными вложениями / В.Н. Тютянов, В.Н. Княгина // Укр. мат. журнал. – 2014. – Т. 66, № 10. – С. 1431–1435.
5. Gorenstein, D. Finite groups / D. Gorenstein. – New York : Harper and Row, 1968.
6. Тютянов, В.Н. О конечных группах с заданной системой силовских подгрупп / В.Н. Тютянов, Т.В. Тихоненко // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 3 (20). – С. 85–87.
7. Conway, J.H. Atlas of finite groups / J.H. Conway [et al.]. – London : Clarendon, 1985. – 252 p.

[1]Международный университет «МИТСО»,
Гомельский филиал

[2]Гомельский государственный технический
университет им. П.О. Сухого

[3]Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 22.02.2016