Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Высшая математика»

А. А. Бабич, И. Л. Соловцов

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

ПОСОБИЕ
по одноименному курсу для студентов всех специальностей дневной и заочной форм обучения

Электронный аналог печатного издания

Гомель 2011

УДК 517.91(075.8)
ББК 22.161.6я73
Б12

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом факультета автоматизированных и информационных систем ГГТУ им. П. О. Сухого (*протокол № 7 от 12.03.2007 г.*)

Рецензенты: канд. физ-мат. наук, доц. каф. «Высшая математика» ГГТУ им. П. О. Сухого *В. И. Лашкевич*;
д-р физ.-мат. наук, проф. каф. «Алгебра и геометрия» ГГУ им. Ф. Скорины *В. Н. Тютянов*

Бабич, А. А.

Б12 Теория вероятностей и элементы математической статистики : пособие по одноим. курсу для студентов всех специальностей днев. и заоч. форм обучения / А. А. Бабич, И. Л. Соловцов. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2011. – 138 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: http://lib.gstu.local. – Загл. с титул. экрана.

ISBN 978-985-420-775-9.

Подготовлено в соответствии с программой курса высшей математики для технических и инженерно-экономических специальностей учреждений высшего образования. Охватывает все основные разделы теории вероятностей и ряд важных для решения практических задач вопросов математической статистики. Приведены задачи и примеры их решения.

Для студентов всех специальностей дневной и заочной форм обучения.

УДК 517.91(075.8)
ББК 22.161.6я73

ISBN 978-985-420-775-9

Оглавление

...это учение, объединяющее точность математических доказательств с неопределенностью случая и примиряющее эти, казалось бы, противоречивые элементы, с полным правом может претендовать на титул «математика случайного».

Б. Паскаль
(из писем к П. Ферма)

Предисловие

Пособие написано на основе курса лекций по теории вероятностей и математической статистики, который читался авторами на протяжении ряда лет для будущих инженеров и экономистов.

Материал, вошедший в пособие, прошел самый тщательный отбор, изложен достаточно компактно и по возможности упрощенно. Вместе с тем мы старались сохранить баланс между упрощением изложения и необходимой строгостью подачи материала.

Большое внимание в пособии уделяется иллюстрациям и разъяснениям теоретического материала с помощью включенных в текст примеров. Примеры решения задач разобраны достаточно подробно. Их проработка позволит Читателю самостоятельно решать задачи по тематике курса. Вопросы и задачи для самоконтроля приведены в конце глав.

В Приложении 1 даны наиболее употребительные комбинаторные формулы. Основные формулы теории вероятностей вынесены для удобства применения в Приложение 2. Необходимые для численных расчетов таблицы некоторых функций приведены в Приложениях 3–6. В конце пособия приведен подробный алфавитный указатель, который дополняет оглавление.

В пособии, конечно, не нашли отражения многие детали и ряд вопросов теории вероятностей и математической статистики остался за его рамками. Для Читателя, у которого возникнет желание более подробного изучения курса теории вероятностей и математической статистики, мы рекомендуем список литературы, который помещен в конце пособия.

Авторы

Введение

В повседневной деятельности, инженерной и научной практике мы часто сталкиваемся с ситуацией, когда результат какого-либо наблюдения, опыта или события нельзя заранее достоверно предугадать. Так, мы наверняка затруднимся ответить на следующие вопросы:

- Понравится или нет премьера спектакля, который будут давать в воскресенье в театре?
- Выиграет ли очередную встречу по футболу «Спартак» у «Динамо»?
- Пойдет ли сегодня дождь, так как с утра была пасмурная погода?
- Какой будет курс валют через месяц?
- Будет ли среди ста отобранных для контроля изделий хотя бы одно бракованное?
- Придется ли ждать более десяти минут автобуса на остановке?
- Удастся ли за полчаса подобрать код замка, если известно, что этот код состоит из четырех цифр?

В первом вопросе с театром неопределенность носит скорее *субъективный* характер, поскольку помимо уровня игры актеров и режиссуры постановки она во многом зависит от настроения, самочувствия, уровня культурного образования зрителя. Но во всех других примерах неопределенность от состояния наблюдателя не зависит, она присуща самим событиям и явлениям, а потому носит характер *объективный*.

Правда в вопросах с погодой, автобусом и кодом неопределенность исчезает, если предварительно ознакомиться с прогнозом погоды, с расписанием движения автобусов или найти записную книжку с нужным кодом. Однако важно отметить, что при отсутствии необходимой дополнительной информации эти события будут казаться такими же непредсказуемыми, как и предыдущие три.

Как правило мы догадываемся о причинах объективно существующей неопределенности и связываем последнюю с наличием *множества* известных и неизвестных факторов, влияющих на конечный результат. Однако естественная попытка уменьшить долю неопределенности наталкивается на целый ряд других проблем. Например, появляются новые неопределенности в виде неизвестных начальных параметров, которые входят в вводимые дополнительные связи и соотношения; возникает потребность использовать неизвестную на данный момент информацию; происходит чрезмерное удорожание измерительной аппаратуры; значительно усложняется процесс наблюдения и т.д. Яркий пример такой ситуации – это движение молекулы в газе, проследить траекторию которой невозможно.

Таким образом, можно сделать вывод, что помимо хорошо описываемых явлений, таких как предсказание солнечных затмений, которые естественно назвать *детерминированными событиями*, существуют явления и процессы, в которых неопределенность *принципиально* не устранима при заданных или фиксированных условиях наблюдения. Такие явления и процессы разумно называть *событиями случайными.*

Случайность отдельного явления не имеет большой познавательной ценности, так как ее нельзя целенаправленно использовать. Но давайте теперь понаблюдаем за *серией* или *совокупностью* случайных процессов. И здесь в ряде случаев мы обнаруживаем поразительное появление устойчивых закономерностей. Так, характер устойчивости проявляет частота появления герба в длинной серии подбрасываний монеты, среднее число посетителей супермаркета за фиксированный период наблюдений, среднее число бракованных изделий в партиях готовой продукции, среднее время ожидания автобуса.

Удивительное на первый взгляд возникновение устойчивых закономерностей, конечно, обусловлено сглаживанием, усреднением, взаимной компенсацией факторов случайности. Понятно также, что компенсация возможна только в том случае, если интенсивности влияния факторов, ответственных за случайность в отдельно взятом процессе, сопоставимы между собой за весь период наблюдения, а последовательность случайных событий наблюдается при неизменных условиях. Последнее условие является наиболее важным и определяющим. Оно не выполняется, например, для вышеприведенных примеров, связанных с футболом, курсом валют и погодой. Действительно, футбольные матчи проводятся разными составами, под руководством разных тренеров. Курс валют зависит от постоянно меняющихся экономических условий. Немаловажное влияние на курс валют оказывает и политика государств. Современная погода все больше подвергается слабоуправляемому техногенному воздействию человека на природу. Все это приводит к тому, что выигрыш в футбольном поединке, изменение курса валют на бирже, погода на длительный период времени являются слабопрогнозируемыми событиями.

Подведем итог вышеизложенному.

1. В окружающем нас мире существуют процессы, в которых случайность имеет принципиально объективный характер. Такие процессы в дальнейшем мы будем называть *случайными процессами*, или *случайными опытами*.

2. В рассмотренных в совокупности случайных процессах, которые происходят при постоянных условиях, появляются качественно новые устойчивые закономерности. Такие закономерности будем называть *статистическими закономерностями*.

3. Статистические закономерности имеют общий характер, требуют математического описания и формализации. Статистические закономерности являются предметом изучения *теории вероятностей* и *математической статистики*.

Глава 1.

Случайные события и вероятности

Основные понятия и определения. Случайные события. Алгебра событий. Вероятность. Аксиомы теории вероятностей и их следствия. Классическая вероятностная схема. «Геометрические» вероятности.

1.1. Основные понятия и определения. Случайные события

Любая строгая математическая теория содержит в себе основополагающие, первичные понятия, которые нельзя определить, а которые можно только пояснить. Одним из первичных понятий теории вероятностей является понятие *случайного опыта*. Суть опыта со случайным исходом подробно обсуждалась во Введении. Здесь же мы рассмотрим другие два основные понятия теории вероятностей, а именно *элементарный исход* и *множество всех элементарных исходов*.

Под *элементарным исходом* в теории вероятностей понимают результат, который может наблюдаться только в одном случайном опыте или только в одной серии опытов. Данное утверждение не является определением потому, что классификация исходов случайных опытов как элементарных невозможна без предварительного анализа условий регистрации результатов наблюдений. Действительно, при одних условиях регистрации события следует рассматривать как элементарные, а при других они допускают дальнейшее разложение на составляющие.

Для более полного раскрытия содержания понятий элементарного исхода и множества элементарных исходов, которые далее будем обозначать как ω и Ω, соответственно, рассмотрим ряд примеров.

Пример 1.1. Подбрасывание монеты.

Решение. Элементарными исходами в этом опыте будут: выпадение герба и выпадение решки. Обозначим эти события как

$$\omega_1 \equiv \text{Г} = \{\text{выпал герб}\},$$
$$\omega_2 \equiv \text{Р} = \{\text{выпала решка}\}.$$

Таким образом, в рассматриваемой математической модели множество элементарных исходов состоит из двух событий:

$$\Omega = \{\text{Г},\ \text{Р}\}.$$ ▲

Пример 1.2. Подбрасывание игрального кубика.

Решение. Обозначим через ω_k результат подбрасывания, состоящий в выпадении k очков. Тогда множество элементарных исходов содержит шесть взаимоисключающих результатов

$$\Omega = \{\ \omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \omega_4,\ \omega_5,\ \omega_6\}.$$ ▲

Пример 1.3. Монета подбрасывается n раз.

Решение. Элементарный исход серии подбрасываний представляет собой цепочку вида

$$\underbrace{\text{ГГРГРР}\ldots\text{РГ}}_{n}.$$

Тогда множество элементарных исходов Ω состоит из всевозможных последовательностей длины n. Например, при $n = 3$ множество Ω состоит из восьми исходов

$$\Omega = \{\text{ГГГ}, \text{ГГР}, \text{ГРГ}, \text{РГГ}, \text{ГРР}, \text{РГР}, \text{РРГ}, \text{РРР}\}.$$

При произвольном n число элементарных исходов равно 2^n. ▲

Пример 1.4. Размещение трех шаров по трем ящикам.

Решение. Предположим, что все шары и ящики различимы. Например, шары окрашены в разные цвета. Тогда всего имеется $3 \times 3 \times 3 = 27$ элементарных размещений, которые схематично изображены на рис. 1.1.

В случае одинаковых шаров (например, все шары окрашены в один цвет, имеют один и тот же размер) некоторые размещения нельзя отличить друг от друга. Поэтому множество элементарных исходов уменьшается и содержит всего 10 разных размещений (в комбинаторике – сочетаний), которые указаны на рис. 1.2.

И наконец в случае, когда неразличимыми являются и шары, и ящики имеется всего 3 принципиально различных размещения, которые приведены на рис. 1.3. ▲

Последний пример демонстрирует тот факт, что построение множества элементарных исходов зависит от условий регистрации событий. При изменении условий (например, условий различимости объектов, их упорядоченности, требования возвращения извлеченных предметов в исходную совокупность и т. п.) результаты опытов, которые рассматривались как элементарные исходы, перестают быть таковыми.

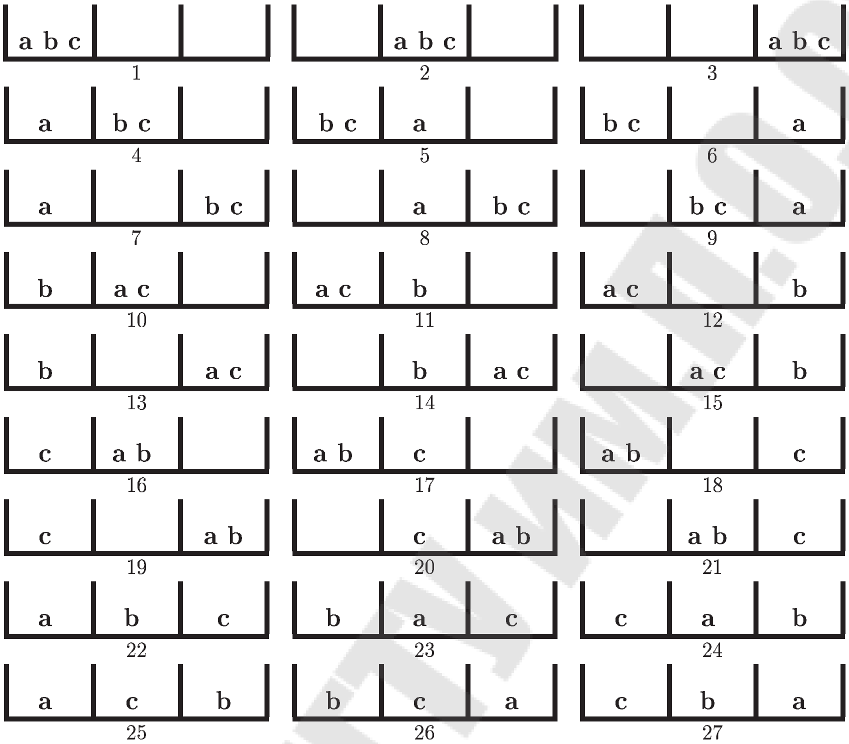

Рис. 1.1. Шары и ящики различимы

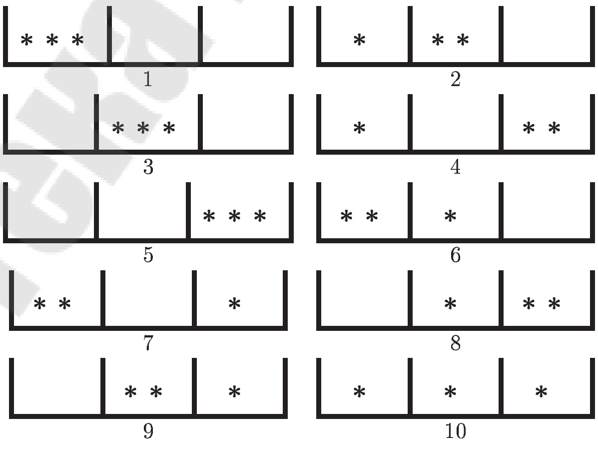

Рис. 1.2. Шары неразличимы, ящики различимы

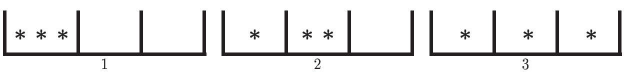

Рис. 1.3. Неразличимы шары и ящики

Понятия *«элементарный исход»* и *«множество элементарных исходов»* в теории вероятностей аналогичны понятиям «точка»и «точечное множество»(то есть множество, состоящее из точек) в геометрии. Такая аналогия очень удобна как для графического изображения событий в виде различного рода диаграмм и рисунков, так и для введения составных (неэлементарных) событий.

☞ *Событием* в опыте со случайным исходом или в серии опытов называется любое подмножество множества элементарных исходов Ω.

Таким образом, *случайное событие* следует рассматривать просто как множество, включающее в себя часть элементарных исходов. Данное определение позволяет автоматически гарантировать, что по результатам опыта всегда можно точно судить произошло конкретное событие или нет. События обозначаются большими латинскими буквами $A, B, C, \dots$ При этом согласно определению имеем $A \subseteq \Omega$. Всякое множество имеет, по крайней мере, два подмножества – само множество и пустое множество $\varnothing$, которые называются несобственными подмножествами. Несобственным подмножествам соответствуют специальные события.

☞ *Достоверным событием* называется событие Ω.

☞ *Невозможным событием* называется событие $\varnothing$.

Пример 1.5. Подбрасывание двух игральных кубиков.

Решение. Элементарный исход представим в виде упорядоченной пары чисел (k, l), где k – число очков, выпавших на одном кубике, а l – на другом. Тогда множество всех элементарных исходов Ω состоит из $6 \times 6 = 36$ пар:

$$\Omega = \{(k, l) | k, l = \overline{1, 6}\}.$$

События

$$A = \{\text{сумма выпавших очков равна } 10\}$$

и

$$B = \{\text{сумма выпавших очков равна } 6\}$$

представляются множествами

$$A = \{(4, 6), (5, 5), (6, 4)\}$$

и

$$B = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}.$$

Событие $C = \{$сумма выпавших очков равна 13$\}$ является невозможным, то есть $C = \varnothing$. В свою очередь событие $D = \{$сумма выпавших очков меньше 15$\}$ есть событие достоверное, то есть $D = \Omega$.

Следует особо подчеркнуть, что парам (k,l) и (l,k), где $k \neq l$, в нашей модели опыта с подбрасыванием игральных кубиков соответствуют разные элементарные исходы. Такое различие кажется не соответствующим действительности с точки зрения обычного игрока в случае, если кубики совершенно одинаковы. Более естественным представляется сопоставить элементарному исходу упорядоченную пару (k,l), где $k \leq l$. Тем не менее обе модели описания опыта совершенно равноправны. Отличие их заключается в том, что использование неупорядоченных пар приводит к построению однородного с точки зрения вероятностей множества элементарных исходов, в то время как использование упорядоченных пар эту однородность нарушает. ▲

Теоретико-множественная трактовка событий позволяет естественным образом ввести операции над событиями аналогичные операциям над множествами.

☞ *Суммой* (или объединением) событий A и B называется событие, обозначаемое как $A + B$ (или $A \cup B$), состоящее в том, что из двух событий A и B происходит, по крайней мере, одно.

Это понятие иллюстрируется на рис. 1.4,*а*. Рисунок, как и в теории множеств, называется диаграммой Венна. В теории вероятностей прямоугольник соответствует достоверному событию Ω, а круги событиям A и B.

☞ *Произведением* (или совмещением) событий A и B называется событие, обозначаемое AB (или $A \cap B$), состоящее в том, что одновременно происходят как A, так и B (рис. 1.4,*б*).

☞ *Разностью* событий A и B называется событие, обозначаемое как $A \setminus B$, состоящее в том, что событие A происходит, в то время как B не происходит (рис. 1.4,*в*).

☞ Событие $\bar{A} = \Omega \setminus A$, состоящее в том, что A не происходит, называется *противоположным* событию A (рис. 1.4,*г*).

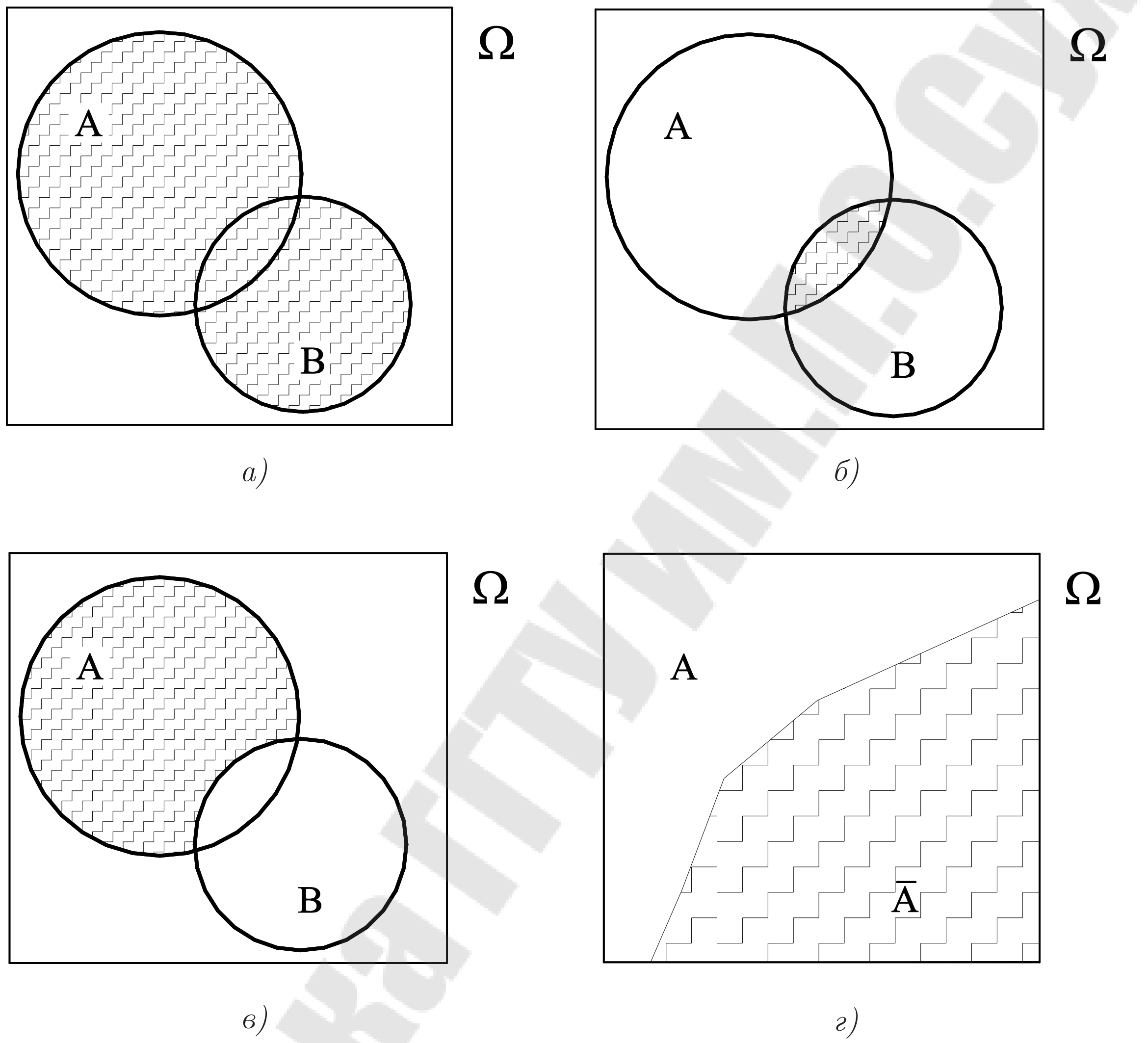

Рис. 1.4. Действия с событиями. Заштрихованная область соответствует: *а* – сумме событий $A + B$; *б* – произведению AB; *в* – разности $A \setminus B$; *г* – противоположному событию $\bar{A} = \Omega \setminus A$

Введенные операции позволяют не только получать новые события, но и представлять сложные события в виде некоторой комбинации более простых (не обязательно элементарных) событий.

Пример 1.6. Три стрелка стреляют одновременно по одной мишени. Выразить события $A = \{$в мишень попал только один стрелок$\}$ и $B = \{$в мишень попал, по крайней мере, один стрелок$\}$ через события $S_k = \{$в мишень попал k-й стрелок$\}$.

Решение. Событие $A = \{$ в мишень попал только один стрелок $\}$ можно представить в виде суммы трех простых событий, каждое из которых соответствует тому, что в мишень попал один из стрелков, а два другие промахнулись. Поэтому для A имеем

$$A = S_1\,\overline{S_2}\,\overline{S_3} + \overline{S_1}\,S_2\,\overline{S_3} + \overline{S_1}\,\overline{S_2}\,S_3.$$

Во втором случае удобно вначале рассмотреть противоположное событие $\overline{B}$, заключающееся в том, что промахнулись все три стрелка. Тогда последовательно получаем

$$\overline{B} = \overline{S_1}\,\overline{S_2}\,\overline{S_3} \quad \Rightarrow \quad B = \overline{\overline{S_1}\,\overline{S_2}\,\overline{S_3}}.$$

▲

1.2. Алгебра событий

Сумма и произведение событий обладают следующими *свойствами*:

1. $A + B = B + A,\qquad AB = BA$ (коммутативность).
2. $(A + B) + C = A + (B + C),\qquad (AB)C = A(BC)$ (ассоциативность).
3. $A(B + C) = AB + AC$ (дистрибутивность).
4. $A + A = A,\qquad AA = A.$
5. $A + \bar{A} = \Omega,\qquad A\bar{A} = \varnothing.$
6. $A + \Omega = \Omega,\qquad A\Omega = A.$
7. $A + \varnothing = A,\qquad A\varnothing = \varnothing.$
8. $\overline{\overline{A}} = A.$

Используя эти свойства, можно преобразовывать различные комбинации событий с целью упрощения. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1.7. Показать, что $(A + B)(A + C) = A + BC$.

Решение. Воспользовавшись правилом дистрибутивности, а также свойствами 5 и 6, последовательно получаем

$$\begin{aligned}(A + B)(A + C) &= AA + AB + AC + BC = A + AB + AC + BC = \\ &= A\Omega + AB + AC + BC = A(\Omega + B + C) + BC = \\ &= A\Omega + BC = A + BC,\end{aligned}$$

что и требовалось показать. ▲

При доказательстве было получено, по-существу, еще одно полезное соотношение, которое можно добавить к отмеченным выше свойствам:

9. $A + AB = A$ (правило поглощения).

Пример 1.8. Показать, что

$$\overline{\bar{A}\bar{B}} = A + B,$$

$$\overline{\bar{C} + \bar{D}} = CD.$$

Решение. В первом равенстве событие $\bar{A}\bar{B}$ означает, что события A и B не произошли. Противоположное событие $\overline{\bar{A}\bar{B}}$ означает, что, по крайней мере, одно из событий A или B имеет место, но это сумма $A + B$.

Второе равенство вытекает из первого, если положить $C = \bar{A}$ и $D = \bar{B}$. Тогда получаем $\overline{A + B} = \bar{A}\bar{B}$, или $A + B = \overline{\bar{A}\bar{B}}$, то есть задача свелась к предыдущему случаю.

▲

Пример 1.9. Упростить выражение $(A + B)(A + \bar{B})$.

Решение. Последовательно, применяя алгебраические свойства событий, получаем

$$(A + B)(A + \bar{B}) = \underbrace{AA}_{=A} + A\underbrace{(B + \bar{B})}_{=\Omega} + \underbrace{B\bar{B}}_{=\varnothing} = A\,.$$

▲

☞ События A и B называются *несовместными*, если их произведение является невозможным событием: $AB = \varnothing$.

Несовместность событий означает, что наступление одного из них исключает наступление другого.

☞ События E_1, E_2, $\ldots$, E_n образуют *полную группу*, если они попарно несовместны $(E_iE_j = \varnothing,\ i \neq j)$ и $E_1 + E_2 + \cdots + E_n = \Omega$.

Иными словами, полная группа – это множество попарно несовместных событий, если при каждом повторении испытания должно произойти хотя бы одно из них. Простейший пример полной группы представляет собой множество $\{A, \bar{A}\}$.

Рассмотрим другой простой пример, поясняющий понятие полной группы событий. При бросании игральной кости, в силу симметрии кубика, можно считать, что события E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, состоящие в появлении цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, одинаково возможны, то есть равновероятны. События E_i и E_j $(i \neq j)$ несовместны. В результате опыта должно произойти одно из событий E_k. Таким образом, события E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 образуют полную группу.

Пусть Ω – множество элементарных исходов для некоторого случайного опыта.

☞ Множество событий $\mathfrak{D}$ называется *алгеброй событий*, если

➢ $\Omega \subset \mathfrak{D}$;

➢ $A \subset \mathfrak{D}$ и $B \subset \mathfrak{D}$, то $AB \subset \mathfrak{D}$, $A + B \subset \mathfrak{D}$ и $A \diagdown B \subset \mathfrak{D}$.

Иными словами, алгебра событий – это такое множество, которое включает в себя в качестве элемента множество элементарных исходов Ω, а определенные выше действия с его элементами (сложение, умножение и вычитание) не выводят результат за его пределы. Другими словами множество $\mathfrak{D}$ является замкнутой системой относительно введенных над его элементами операций. Простейший и минимальный способ построения алгебры событий состоит в расширении пространства событий Ω невозможным событием $\varnothing$. В этом случае

$$\mathfrak{D} = \{\varnothing, \Omega\}.$$

1.3. Вероятность. Аксиомы теории вероятностей

В случайном опыте некоторые события происходят чаще, а некоторые реже. Количественной мерой частоты появления событий служит понятие вероятности. Формально вероятность можно задать с помощью следующей системы аксиом[1].

Определим числовую функцию $P(A)$, заданную на множестве $\mathfrak{D}$ ($A \subset \mathfrak{D}$).

☞ Функция $P(A)$ называется **вероятностью,** если выполняются следующие условия (**аксиомы):**

① множество $\mathfrak{D}$ является алгеброй событий; [A1]

② для любого A функция $P(A)$ неотрицательна

$$P(A) \geq 0; \qquad [A2]$$

③ вероятность достоверного события равна единице

$$P(\Omega) = 1; \qquad [A3]$$

[1]Теоретико-множественный подход, используемый при формулировке аксиом теории вероятностей, был разработан академиком А. Н. Колмогоровым в 1933 году.

④ для несовместных событий A и B выполняется

$$P(A+B) = P(A) + P(B)\,. \qquad [A4]$$

Для задач, в которых фигурируют бесконечные последовательности событий, приведенные аксиомы дополняются следующей аксиомой непрерывности:

⑤ для любой последовательности событий из $\mathfrak{D}$ такой, что

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \ldots \supset A_n \ldots$$

и

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing,$$

имеет место

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0. \qquad [A5]$$

Следует отметить, что указанная система аксиом не позволяет однозначно зафиксировать вероятности событий. Приписывая элементарным событиям фиксированные значения вероятностей, но так, чтобы аксиомы выполнялись, мы просто выделяем одну частную вероятностную модель из класса моделей, которые имеют отношение к проводимому случайному опыту. Например, при подбрасывании игральной кости из-за симметрии кубика естественно утверждать, что вероятности выпадания числа очков равны по $1/6$. Но с тем же успехом можно приписать вероятность равную 1, скажем, событию $A = \{\text{выпала единица}\}$, а остальным пяти событиям – нулевые вероятности. До проведения серии подбрасываний обе модели совершенно равноправны. Только первая соответствует кубику, у которого геометрический центр совпадает с центром тяжести, а вторая – кубику, у которого в грань, противоположной грани с единицей, например, вдавлена свинцовая дробинка. Правильность вероятностной модели для описания конкретного случайного эксперимента или наблюдения проверяется практикой.

1.4. Следствия из аксиом

① Вероятность противоположного события равна единице минус вероятность события

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A). \qquad (1.1)$$

Доказательство

Из определения противоположного события следует, что $A+\bar{A}=\Omega$. События A и $\bar{A}$ несовместны, так как $A\bar{A}=\varnothing$. Тогда, из аксиом [А3] и [А4] следует $P(A)+P(\bar{A})=1$ или соотношение (1.1). ■

② Вероятность невозможного события равна нулю

$$P(\varnothing)=0. \tag{1.2}$$

Доказательство

Полагая в (1.1) $A=\Omega$ и используя аксиому [А3], получаем (1.2). ■

③ Для попарно несовместных событий A_1, A_2, ..., A_n (то есть таких, что $A_iA_j=\varnothing$ при $i\neq j$) имеет место равенство

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)\,. \tag{1.3}$$

В справедливости нетрудно убедиться, основываясь на аксиоме [А4] и методе индукции. ■

④ Для любых событий A и B имеет место соотношение

$$\boxed{P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)\,.} \tag{1.4}$$

Доказательство

Поскольку $A+\bar{A}=\Omega$ и для любого события C выполняется $C\Omega=$ $=C$, получаем следующую цепочку соотношений:

$$\begin{aligned} A+B&=(A+B)\Omega=(A+B)(A+\bar{A})=\\ &=\underbrace{AA}_{=A}+AB+\underbrace{A\bar{A}}_{=\varnothing}+\bar{A}B=\underbrace{A+AB}_{=A}+\bar{A}B=A+\bar{A}B. \end{aligned}$$

Таким образом, сумма произвольных событий A и B представлена в виде суммы несовместных событий A и $\bar{A}B$[1], для вычисления вероятности которых можно воспользоваться аксиомой [А4]

$$P(A+B)=P(A+\bar{A}B)=P(A)+P(\bar{A}B)\,.$$

[1]Так как их произведение $A\bar{A}B=\varnothing$.

Записывая далее событие B в виде $B = B\Omega = B(A + \bar{A}) = AB + \bar{A}B$, получаем

$$P(B) = P(AB) + P(\bar{A}B).$$

Выражая отсюда $P(\bar{A}B)$ и подставляя в предыдущее равенство, получим (1.4). ■

⑤ Вероятность суммы двух событий не превосходит сумму вероятностей этих событий

$$P(A + B) \leq P(A) + P(B). \tag{1.5}$$

Доказательство

Из аксиомы [A2] следует, что $P(AB) \geq 0$. Используя это неравенство в (1.4), получим требуемое неравенство (1.5). ■

⑥ Если событие A влечет за собой событие B, то

$$P(A) \leq P(B). \tag{1.6}$$

Доказательство

Если событие A влечет за собой событие B, то

$$A \subset B\,.$$

В этом случае $B = \Omega B = (A + \bar{A})B = AB + \bar{A}B$. Поскольку $A \subset B$, то в последнем равенстве $AB = A$ и можно переписать B в виде суммы несовместных событий: $B = A + \bar{A}B$. Для вероятностей, в соответствии с аксиомами [A4] и [A2], получаем

$$P(B) = P(A) + P(\bar{A}B) \geq P(A).$$ ■

⑦ Вероятность любого события не превосходит единицы

$$P(A) \leq 1. \tag{1.7}$$

Доказательство

Так как $\varnothing \subset A \subset \Omega$, $P(\varnothing) = 0$ и $P(\Omega) = 1$, то получаем

$$\boxed{0 \leq P(A) \leq 1.} \tag{1.8}$$

■

1.5. Классическая модель

Пусть в серии из n испытаний событие A произошло n_A раз. Отношение n_A/n называется **частотой** события A. Как показывает практика, при достаточно большом числе испытаний n частоты n_A/n в различных сериях оказываются приблизительно одинаковыми[1], то есть значения частот n_A/n группируются вокруг некоторого числа $P(A)$. Иными словами, случайные процессы обладают следующей закономерностью. Для случайного события A существует такое значение $P(A)$, что при достаточно большом числе опытов выполняется

$$P(A) \approx \frac{n_A}{n}. \tag{1.9}$$

На этом свойстве частот основывается обсуждаемое ниже классическое определение вероятности.

Рассмотрим систему случайных событий таких, что в этой системе:

– число элементарных исходов конечно;

– все элементарные события являются равновозможными, то есть имеют одинаковую вероятность.

Система событий с этими свойствами называется **классической моделью, или *классической вероятностной схемой.***

Событие B называется *благоприятствующим* событию A, если наступление B влечет за собой наступление события A.

По аналогии с формулой (1.9), устанавливающей взаимосвязь вероятности и частоты события, в классической модели *вероятность события A* определяется как отношение числа исходов, благоприятствующих этому событию, к общему числу событий

$$\boxed{P(A) = \frac{N_A}{N}}. \tag{1.10}$$

Можно показать, что такое определение согласуется с аксиомами вероятности.

Во многих случаях вычисление вероятности по классической схеме сводятся к решению комбинаторных задач. Наиболее употребительные комбинаторные формулы приведены в *Приложении 1.*

[1]Такая статистическая устойчивость частоты отражает некоторые объективные закономерности случайного процесса.

Пример 1.10. В урне находится 10 шаров, из которых 3 белых и 7 черных. Наудачу извлекают 2 шара. Какова вероятность, что оба шара окажутся белыми?

Решение. Общее число исходов N равно числу способов, которыми можно из 10 шаров в урне вынуть 2 шара. Это число равно числу сочетаний 2-х элементов из 10:

$$N = C_{10}^2 = \frac{10!}{2!\,(10-2)!} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45.$$

Число благоприятствующих исходов

$$N_A = C_3^2 = \frac{3!}{2!\,(3-2)!} = 3\,.$$

Следовательно, искомая вероятность

$$P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{3}{45} = \frac{1}{15} \approx 0,067.$$

▲

Пример 1.11. Проверяется партия из 100 изделий. Наугад отбирают 10 и проверяют их качество. Если среди выбранных нет бракованного изделия, то вся партия принимается, в противном случае партия не принимается. Какова вероятность того, что партия, в которой имеются 10 бракованных изделий, будет принята?

Решение. Число всех способов N, с помощью которых можно отобрать 10 изделий из 100, равно числу сочетаний из 100 по 10, то есть

$$N = C_{100}^{10} = \frac{100!}{10!\,90!}.$$

Общее число доброкачественных изделий равно 90. Число благоприятных исходов, приводящих к принятию партии (событие A), есть

$$N_A = C_{90}^{10} = \frac{90!}{10!\,80!}.$$

Следовательно, вероятность того, что партия будет принята равна

$$P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{81 \cdot 82 \cdots 90}{91 \cdot 92 \cdots 100} \approx 0,349.$$

▲

Пример 1.12. Колода состоит из 36 карт. Наудачу вынимают три карты. Какова вероятность того, что среди них окажется *точно* один туз?

Решение. Полная группа равновероятных и несовместных событий состоит из числа сочетаний по 3 карты из 36, то есть это число равно $N = C_{36}^3$. Один туз можно выбрать C_4^1 способами. Две другие карты, которые по условию должны быть не тузами, выбираются из $36 - 4 = 32$ карт. Число таких способов для каждого определенного туза есть C_{32}^2. Таким образом, число благоприятных событий $N_A = C_4^1\, C_{32}^2$. Искомая вероятность равна

$$P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{C_4^1\, C_{32}^2}{C_{36}^3} = \frac{4!\,32!}{1!\,3!\,2!\,30!}\frac{3!\,33!}{36!} = \frac{31 \cdot 16}{353 \cdot 17} \approx 0,278.$$

▲

Пример 1.13. Колода состоит из 36 карт. Наудачу вытаскивают три карты. Какова вероятность того, что среди них окажется *хотя бы* один туз?

Решение. Интересующее нас событие обозначим A. Противоположное событие $\bar{A}$ означает, что среди выбранных трех карт нет ни одного туза. Эти три карты (не тузы) можно выбрать C_{32}^3 способами. Следовательно,

$$P(\bar{A}) = \frac{C_{32}^3}{C_{36}^3} = \frac{30 \cdot 31 \cdot 32}{34 \cdot 35 \cdot 36} \approx 0,695.$$

Таким образом,

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) \approx 0,305.$$

▲

1.6. «Геометрические»вероятности

В классической схеме, когда речь идет о конечном числе испытаний с равновероятными исходами, вероятность определяется как доля тех исходов, которые приводят к наступлению события. Обобщением этой схемы на случай бесконечного числа равновероятных исходов является подсчет «геометрических»вероятностей.

В этом случае событию сопоставляется некоторая точка фигуры[1]. Отношение площади, образованной благоприятствующими событиями $S(A)$ к площади всей фигуры S, и есть искомая вероятность

$$P(A) = \frac{S(A)}{S}\,. \tag{1.11}$$

Поясним изложенное выше на примерах.

Пример 1.14. На отрезок длины L наугад бросается точка. Какова вероятность того, что она упадет не дальше, чем на расстоянии a (рис. 1.5), от середины указанного отрезка?

Решение. Имеем бесконечно много возможных исходов, так как точка может попасть в любую точку рассматриваемого отрезка. Примем середину отрезка за начало отсчета. Событие A, состоящее в том, что точка упадет на расстояние, не превышающее a от середины отрезка, наступает тогда, когда координата точки x удовлетворяет условию $-a \leqslant x \leqslant a$. Длина отрезка, образованного благоприятствующими событиями при $2a \leqslant L$, есть $L(A) = 2a$ и доля благоприятствующих событий составляет $2a/L$. При $2a > L$ интересующее нас событие становится достоверным. Таким образом, для искомой вероятности получаем

$$P(A) = \begin{cases} L(A)/L = 2a/L, & \text{если} \quad 2a \leqslant L; \\ 1, & \text{если} \quad 2a > L. \end{cases}$$

▲

[1] Речь может также идти об объеме или длине.

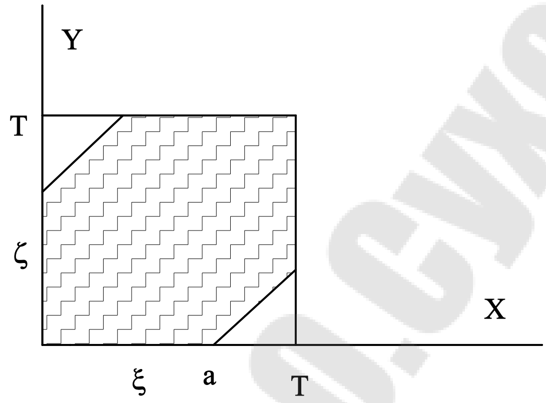

Рис. 1.5. Рисунок к примеру 1.14 *Рис. 1.6.* Рисунок к примеру 1.15

Пример 1.15. Два человека договариваются о встрече на временном промежутке T. Один из них приходит первым и ожидает в течение времени $a < T$, а затем уходит. Определить вероятность такой встречи.

Решение. Множество событий представляет собой квадрат со стороной T (рис. 1.6). Благоприятствующие исходы состоят из точек плоскости, расположенных внутри квадрата и удовлетворяющих условию $|y-x| < a$, то есть это точки квадрата, лежащие между прямыми

$$y = x - a\,, \qquad y = x + a\,.$$

Множество таких точек соответствует заштрихованной области, изображенной на рис. 1.6. Нетрудно вычислить ее площадь (площадь квадрата минус площади двух незаштрихованных треугольников) $S(A) = T^2 - (T-a)^2$. Поделив эту площадь на площадь квадрата $S = T^2$, получим вероятность встречи

$$P(A) = 1 - \left(1 - \frac{a}{T}\right)^2 = \frac{a}{T}\left(2 - \frac{a}{T}\right). \qquad \blacktriangle$$

1.7. Вопросы и задачи для самоконтроля

Вопросы

1. Определить понятия:
    - случайное событие;
    - элементарный исход;
    - достоверное событие;
    - невозможное событие;
    - противоположное событие;
    - благоприятствующее событие;
    - вероятности в классической модели;
    - «геометрическая» вероятность.

2. Определить действия с событиями (сумма, произведение, разность) и дать им геометрическую трактовку.
3. Что такое алгебра событий?
4. Сформулировать аксиомы теории вероятностей.
5. Какие следствия вытекают из аксиом теории вероятностей? Как они доказываются?

Задачи

1.1. Убедиться в справедливости соотношений:
а) $(A + B)C = AC + BC$;
б) $A + A = AA = A$;
в) $\overline{A + B} = \overline{AB}$;
г) $\overline{A} + \overline{B} = \overline{AB}$;
д) $(A + B)\diagdown B = A\diagdown AB = A\bar{B}$.

1.2. Упростить выражения:
а) $(A + B)(B + C)$;
б) $(A + B)(\bar{A} + B)(A + \bar{B})$.

1.3. A, B и C – произвольные события. Написать выражение для события, состоящего в том, что из A, B, C:
а) произошло только A;
б) произошли все три события;
в) произошли события A и B, а событие C не произошло;
г) произошло, по крайней мере, одно из событий;
д) ни одно из событий не произошло.

1.4. В урне находится 10 белых, 2 зеленых, 7 красных и 5 синих шаров. Какова вероятность, что наугад извлеченный шар не окажется белым?

1.5. В лотерее разыгрывается 1000 билетов, из которых половина выигрывает, а половина нет. Приобретены два билета. Какова вероятность, что оба выиграют?

1.6. Три стрелка попадают в цель с вероятностями $0,75$, $0,80$ и $0,90$. Определить вероятность того, что:

а) все три стрелка попадут в цель;
б) хотя бы один стрелок попадет в цель.

1.7. Из 10 шаров, лежащих в урне, 9 белых и 1 черный. Какова вероятность, что из 3-х извлеченных шаров все оказались белыми?

Глава 2.

Условные вероятности. Последовательности испытаний

Условные вероятности. Вероятность произведения событий. Независимые события. Формула полной вероятности. Формулы Байеса. Конечные последовательности испытаний. Предельные теоремы в схеме Бернулли.

2.1. Вероятность произведения событий

Чтобы установить зависимость между вероятностями событий A, B и вероятностью их произведения AB, рассмотрим соотношение, которое возникает для относительных частот:

$$\frac{n_A}{n}, \qquad \frac{n_B}{n}, \qquad \frac{n_{AB}}{n}.$$

Имеет место равенство

$$\frac{n_{AB}}{n} = \frac{n_A}{n}\,\frac{n_{AB}}{n_A}. \tag{2.1}$$

Частоты n_A/n и n_{AB}/n связаны с вероятностями наступления событий A и AB. Частота n_{AB}/n_A соответствует вероятности события B *при условии* осуществления события A. Такая вероятность называется *условной* и обозначается $P(B|A)$.

Таким образом,

☞ *условная вероятность* $P(B|A)$ – это вероятность события B при условии, что произошло событие A.

В терминах вероятностей соотношение (2.1) записывается в виде

$$\boxed{P(AB) = P(A)\,P(B|A).} \tag{2.2}$$

Полученная формула выражает вероятность произведения событий через условную вероятность. Меняя события A и B местами, получаем

$$P(AB) = P(A|B)\,P(B). \tag{2.3}$$

Правило умножения вероятностей (2.2) (или (2.3)) читается так: вероятность произведения (совмещения) двух случайных событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого.

Правило (2.2) можно обобщить на большее число событий. Например, для трех событий A, B и C получаем

$$P(ABC) = P(AB)\,P(C|AB) = P(A)\,P(B|A)\,P(C|AB). \tag{2.4}$$

События A и B называются **независимыми,** если

$$P(AB) = P(A)P(B). \tag{2.5}$$

В том случае, если n событий A_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ независимы, получаем

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n). \tag{2.6}$$

Для условной вероятности из (2.2) находим

$$\boxed{P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}.} \tag{2.7}$$

Аналогично, вероятность события A при условии осуществления события B записывается в виде

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.} \tag{2.8}$$

Условная вероятность (2.8) удовлетворяет всем аксиомам теории вероятностей (см. с. 18). В частности, $P(A|B) \geqslant 0$, $P(\Omega|B) = 1$ и для несовместных событий A_1 и A_2 выполняется аксиома [A4]:

$$P(A_1 + A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B).$$

Если события A и B являются независимыми, то, как вытекает из (2.5), справедливы равенства $P(A|B) = P(A)$ и $P(B|A) = P(B)$. Для независимых событий A и B общее правило вычисления вероятности суммы событий (1.4) позволяет непосредственно выразить вероятность суммы событий $P(A+B)$ через вероятности событий A и B:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A)\,P(B). \tag{2.9}$$

Пример 2.1. Монета подбрасывается 10 раз. Какова вероятность выпадения герба в каждом испытании?

Решение. Обозначим через A_k событие, состоящее в выпадении герба в k-м испытании. Его вероятность $P(A_k) = 1/2$. События A_k являются независимыми в совокупности. Нас интересует вероятность совмещения десяти таких событий. Применяя формулу (2.6), находим

$$P(A_1 A_2 \cdots A_{10}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}.$$ ▲

Пример 2.2. При производстве некоторых изделий вероятность брака составляет $3\,\%$. Изделия первого сорта в массе небракованной продукции составляют $80\,\%$. Найти вероятность, что выбранное наудачу изделие окажется первосортным.

Решение. Пусть событие A состоит в том, что выбрано небракованное изделие, а B – выбранное изделие первосортное. Тогда, $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0,03 = 0,97$ и $P(B|A) = 0,80$. Нас интересует вероятность события AB. Применяя формулу для вероятности произведения событий (2.2), получаем

$$P(AB) = 0,97 \cdot 0,80 = 0,776.$$ ▲

Вернемся к *примеру 1.10* и рассмотрим его другим способом, привлекая понятие условной вероятности. Извлечение двух шаров равносильно последовательному их извлечению. Пусть A обозначает появление белого шара при первом извлечении, а B – при втором. Тогда совмещение этих событий AB состоит в появлении двух белых шаров. В соответствии с (2.2) имеем $P(AB) = P(A)\,P(B|A)$. Вероятность появления белого шара при первом извлечении $P(A) = 3/10$, а вероятность появления белого шара при втором извлечении при условии, что при первом извлечении был также отобран белый шар, составляет $P(B|A) = (3-1)/(10-1) = 2/9$. Итак, $P(AB) = 3/10 \cdot 2/9 = 1/15$.

Пример 2.3. Два стрелка независимо друг от друга стреляют по цели. Вероятность поражения цели первым стрелком равна 0,9, вторым – 0,8. Определить вероятность того, что хотя бы один стрелок попадет в цель.

Решение. Пусть A событие, состоящее в том, что первый стрелок попадает в цель, B – второй. Событие $A+B$ состоит в том, что хотя бы один стрелок попадет в цель. Так как A и B независимы, то для вычисления вероятности суммы событий можно воспользоваться формулой (2.9):

$$P(A+B) = 0,9 + 0,8 - 0,9 \cdot 0,8 = 0,98\,.$$ ▲

2.2. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Пусть событие A принадлежит сумме попарно несовместных событий H_k: $A \subset \sum_{k=1}^{n} H_k$. Тогда имеет место следующая *формула полной вероятности*

$$\boxed{P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A|H_k)\, P(H_k).} \tag{2.10}$$

Действительно, поскольку $A \subset H_1 + H_2 + \cdots + H_n$ и $H_iH_j = \varnothing$ при $i \neq j$, то событие A представимо в виде следующей суммы попарно несовместных событий

$$A = AH_1 + AH_2 + \cdots + AH_n\,.$$

Воспользовавшись (1.3) и применяя (2.2), находим

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(AH_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A|H_k)\, P(H_k).$$

События H_k в (2.10) обычно называют *гипотезами*. Гипотезы H_k исчерпывают все возможные предположения относительно возможных исходов опыта.

Рассмотрим условную вероятность $P(H_k|A)$. Из (2.7) и (2.3) получаем

$$P(H_k|A) = \frac{P(AH_k)}{P(A)} = \frac{P(H_k)\, P(A|H_k)}{P(A)}.$$

Подставляя сюда $P(A)$ в виде (2.10), получаем **формулу Байеса**[1]

$$\boxed{P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)\, P(H_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(A|H_k)\, P(H_k)}.} \tag{2.11}$$

Формула (2.11) позволяет сделать переоценку вероятности гипотезы H_i, принятой до опыта и называемой априорной (от лат. *a priori* – доопытные). В результате проведенного опыта вычисляются вероятности $P(H_i|A)$, которые называются апостериорными (от лат. *a posteriori* – послеопытные).

Если все гипотезы до опыта имеют одинаковую вероятность $P(H_1) = P(H_2) = \cdots = P(H_n)$, то выражение (2.11) принимает вид

$$P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(A|H_k)}. \tag{2.12}$$

[1] Т. Байес (1702–1763) – английский математик.

Пример 2.4. На общий конвейер поступают одинаковые детали, которые производят два станка-автомата. Производительность первого станка в два раза больше производительности второго. Первый станок производит в среднем 80 % изделий первого сорта, второй – 90 %. Определить вероятность того, что взятая наугад с конвейера деталь, оказавшаяся первосортной, изготовлена на первом станке.

Решение. Обозначим через H_1 событие, состоящее в том, что наугад взятая с конвейера деталь изготовлена на первом станке, H_2 – на втором. Пусть A обозначает событие, что наугад взятая с конвейера деталь является первосортной. Тогда находим вероятности:

$P(H_1) = 2/3$ – вероятность того, что наугад взятая с конвейера деталь изготовлена на первом станке;

$P(H_2) = 1/3$ – вероятность того, что наугад взятая с конвейера деталь изготовлена на втором станке;

$P(A|H_1) = 0,8$ – вероятность производства первосортных деталей первым станком;

$P(A|H_2) = 0,9$ – вероятность производства первосортных деталей вторым станком.

По формуле полной вероятности (2.10) для вероятности того, что наугад взятая с конвейера деталь окажется первосортной, получаем

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) = \\ = 0,8 \cdot \frac{2}{3} + 0,9 \cdot \frac{1}{3} \approx 0,833.$$

Интересующая нас вероятность того, что взятая наугад с конвейера деталь, оказавшаяся первосортной, произведена на первом станке, вычисляется согласно формуле (2.11):

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1) \cdot P(H_1)}{P(A)} = \frac{0,8 \cdot 2/3}{0,833} \approx 0,640.$$

▲

Пример 2.5. На склад поступают изделия трех предприятий. Первое поставляет 25 %, второе – 35 %, третье – 40 %. Известно, что бракованная продукция соответственно составляет 5, 4 и 2 %. Какова вероятность того, что случайно выбранное изделие:

1. Оказалось бракованным?
2. Оказалось бракованным и изготовленным на первом предприятии?

Решение. 1. Пусть A событие, состоящее в том, что случайно выбранное изделие окажется бракованным, а H_k обозначают события, состоящие в том, что выбранное изделие изготовлено на k-м предприятии. Формула полной вероятности (2.10) дает вероятность того, что случайно выбранное изделие окажется бракованным

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) + P(A|H_3)P(H_3) = \\ = 0,05 \cdot 0,25 + 0,04 \cdot 0,35 + 0,02 \cdot 0,40 = 0,0345.$$

2. Вероятность того, что бракованное изделие было произведено на k-м пред-

приятии есть условная вероятность $P(H_k|A)$. По формуле Байеса (2.11) получаем

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)\,P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{0,25 \cdot 0,05}{0,0345} \approx 0,362,$$
$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2)\,P(A|H_2)}{P(A)} = \frac{0,35 \cdot 0,04}{0,0345} \approx 0,406,$$
$$P(H_3|A) = \frac{P(H_3)\,P(A|H_3)}{P(A)} = \frac{0,40 \cdot 0,02}{0,0345} \approx 0,232.$$

▲

Пример 2.6. Имеется две партии изделий. В одной из них все детали доброкачественные, а в другой – четвертая часть бракованных. Изделие, взятое из наудачу выбранной партии, оказалось доброкачественным. Оно возвращается обратно в ту же партию. Определить вероятность, что второе изделие, взятое из этой же партии, окажется бракованным.

Решение. Пусть гипотеза H_1 состоит в том, что взята партия с бракованными изделиями, H_2 – взята партия доброкачественных изделий. Соответствующие вероятности: $P(H_1) = P(H_2) = 1/2$. Обозначим через A событие, состоящее в том, что взятое первым изделие оказалось доброкачественным. Соответствующие условные вероятности: $P(A|H_1) = 3/4$, $P(A|H_2) = 1$. По формуле полной вероятности (2.10) вероятность события A определяется следующим образом:

$$P(A) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} + 1\right) = \frac{7}{8}.$$

После первого испытания вероятность того, что партия содержит бракованные изделия равна

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1)\,P(H_1)}{P(A)} = \frac{1/2 \cdot 3/4}{7/8} = \frac{3}{7}.$$

Вероятность того, что партия содержит только доброкачественные изделия

$$P(H_2|A) = \frac{4}{7}.$$

Пусть событие B состоит в том, что при втором испытании изделие оказалось недоброкачественным. Вероятность данного события находится по формуле полной вероятности (2.10). Если P_1 и P_2 – вероятности гипотез H_1 и H_2, то в соответствии с предыдущими вычислениями $P_1 = 3/7$, $P_2 = 4/7$. Учитывая, что $P(B|H_1) = 1/4$ и $P(B|H_2) = 0$, получаем

$$P(B) = \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{28}.$$

▲

Пример 2.7. На склад поступают детали от двух предприятий. Вероятность поступления нестандартной детали от первого предприятия равна $0,075$, от второго – $0,09$. Второе предприятие поставляет вдвое больше деталей, чем первое. Найти вероятность того, что наудачу взятая со склада деталь окажется нестандартной.

Решение. Пусть H_1 обозначает событие, состоящее в том, что наугад взятая деталь изготовлена на первом предприятии, H_2 – на втором. Соответствующие вероятности равны

$$P(H_1) = \frac{1}{3}, \qquad P(H_2) = \frac{2}{3}.$$

Обозначим через A событие, состоящее в том, что наудачу взятая со склада деталь окажется нестандартной. Тогда, по условию

$$P(A|H_1) = 0,075, \qquad P(A|H_2) = 0,09\,.$$

По формуле полной вероятности (2.10) находим

$$P(A) = P(H_1)\,P(A|H_1) + P(H_2)\,P(A|H_2) = \frac{1}{3}\cdot 0,075 + \frac{2}{3}\cdot 0,09 = 0,085.$$

▲

Пример 2.8. По линии связи передаются два сигнала A и B с вероятностями $P(A) = 0,84$ и $P(B) = 0,16$. Из-за помех $1/6$ сигналов A искажается и принимается как сигналы B, а $1/8$ часть переданных сигналов B принимается как сигнал A. Требуется:

1) найти вероятность того, что при приеме появится сигнал A (сигнал B);

2) известно, что принят сигнал A. Какова вероятность, что он же и был передан?

Решение. 1. Введем следующие гипотезы: H_A – передан сигнал A, H_B – передан сигнал B.

По условию $P\,(H_A) = 0,84$, $P\,(H_B) = 0,16$. Вероятность того, что принят сигнал A, при условии, что он же и послан, равна

$$P\,(A|H_A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

Вероятность того, что принял сигнал A, при условии, что послан сигнал B равна $P\,(A|H_B) = 1/2$.

Тогда по формуле полной вероятности получаем

$$P(A) = P(H_A)\,P(A|H_A) + P(H_B)\,P(A|H_B) = 0,84\cdot\frac{5}{6} + 0,16\cdot\frac{1}{8} = 0,72.$$

Аналогично, для сигнала B находим

$$P(B) = P(H_A)\,P(B|H_A) + P(H_B)\,P(B|H_B) = 0,84\cdot\frac{1}{6} + 0,16\cdot\left(1 - \frac{1}{8}\right) = 0,28.$$

2. Вероятность того, что был передан сигнал A, при условии, что он же и принят, вычисляем по формуле Байеса:

$$P(H_A|A) = \frac{P(H_A)P(A|H_A)}{P(A)} = \frac{0,84\cdot 5/6}{0,72} = \frac{35}{36} \approx 0,97.$$

▲

2.3. Конечные последовательности испытаний

Рассмотрим n независимых испытаний, в каждом из которых может наступить событие A. Обозначим вероятность наступления события A через p:

$$P(A) = p. \tag{2.13}$$

Вероятность противоположного события $\bar{A}$, то есть ненаступления события A, обозначим через q:

$$P(\bar{A}) = q = 1 - p. \tag{2.14}$$

Наступление события A называют *«успехом»*, а его ненаступление (то есть противоположное событие $\bar{A}$) – *«неудачей»*.

Обозначим через μ_n число успехов в серии из n испытаний и найдем вероятность $P_n(\mu_n = m)$ того, что при n испытаниях событие A произойдет m раз. Порядок наступления события A при этом не учитывается (неупорядоченное множество). Таким образом, благоприятной является всякая комбинация, в которую A входит m раз, а $\bar{A}$ входит $n - m$ раз. Например, благоприятной является цепочка, когда событие A происходит в первых m испытаниях

$$\underbrace{A\,A\,\cdots\,A}_{m \text{ раз}}\;\underbrace{\bar{A}\,\bar{A}\,\cdots\,\bar{A}}_{(n-m) \text{ раз}}.$$

Вероятность появления каждой подобной цепочки составляет $p^m\,q^{n-m}$. Число таких цепочек есть число сочетаний из n элементов по m. Следовательно,

$$\boxed{P_n(\mu_n = m) = C_n^m\,p^m\,q^{n-m} = C_n^m\,p^m\,(1-p)^{n-m},} \tag{2.15}$$

где число сочетаний C_n^m определено в Приложении 1. [формула (П.1.9)]. Используя формулу бинома Ньютона (П.1.10), нетрудно убедиться, что

$$\sum_{m=0}^{n} P_n(m) = 1.$$

Выражение (2.15) называется **формулой Бернулли,** а описанная выше схема испытаний называется *схемой Бернулли*[1].

[1] Я. Бернулли (1654–1705) – швейцарский математик.

Наиболее вероятное число успехов в серии из n испытаний удовлетворяет неравенству

$$(n+1)p - 1 \le \bar{m} < (n+1)p. \tag{2.16}$$

Пример 2.9. При одном выстреле цель поражается с вероятностью 0,7. Производится пять выстрелов. Какова вероятность, что три из них попадут в цель?

Решение. Реализуется схема Бернулли. Здесь $n = 5$, $m = 3$, $p = 0,7$ и $q = 1 - 0,7 = 0,3$. Следовательно,

$$P_5(3) = \frac{5!}{3!\,(5-3)!}\, 0,7^3 \cdot 0,3^{5-3} \approx 0,309.$$

▲

Пример 2.10. В среднем каждый двадцатый лотерейный билет выигрывает. Какова вероятность того, что среди десяти купленных билетов два билета выиграют?

Решение. Требуется найти вероятность $m = 2$ успехов из $n = 10$ испытаний в схеме Бернулли с вероятностью успеха $p = 1/20 = 0,05$. По формуле (2.15) эта вероятность равна

$$P_{10}(2) = C_{10}^2 \cdot 0,05^2 \cdot 0,95^8 \approx 0,0746.$$

▲

2.4. Предельные теоремы в схеме Бернулли

При небольших значениях n и m вычисления по формуле (2.15) достаточно просты. Однако на практике часто приходится проводить расчеты для больших значений n и m. В этом случае использование (2.15) для численных оценок затруднительно. При вычислении вероятности того, что число успехов лежит в пределах от a до b приходится вычислять суммы вида

$$P(a < \mu_n < b) = \sum_{a<m<b} P(\mu_n = m). \tag{2.17}$$

Затруднения с проведением вычислений возникают также при малых значениях p или q.

Рассмотрим некоторые асимптотические формулы, позволяющие упростить вычисления в предельных случаях схемы Бернулли. Сформулируем эти результаты в виде теорем, которые в теории вероятностей известны как предельные теоремы Пуассона[1] и Муавра[2]–Лапласа[3].

[1]С.Пуассон (1781–1840) – знаменитый французский физик и математик.
[2]А. Муавр (1667–1754) – английский математик французского происхождения.
[3]П. Лаплас (1749–1827) – французский математик и астроном.

Теорема (теорема Пуассона). *Пусть число испытаний $n \to \infty$ и $p \to 0$, при этом произведение $n \cdot p$ остается конечным и стремится к λ, $0 < \lambda < \infty$. Тогда*

$$P(\mu_n = m) \to \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \tag{2.18}$$

при любом фиксированном $m = 0, 1, 2 \dots$

Доказательство

Определим $\lambda_n = np$. В рассматриваемом пределе $\lambda_n \to \lambda$. Выразим в формуле Бернулли (2.15) p и q через λ_n:

$$p = \frac{\lambda_n}{n}, \qquad q = 1 - \frac{\lambda_n}{n}.$$

Выражение для вероятности (2.15) перепишем в виде

$$\begin{aligned} P(\mu_n = m) &= C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} \left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^m \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-m} = \\ &= \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!} \left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^m \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-m} = \\ &= \frac{\lambda_n^m}{m!} \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{m-1}{n}\right) \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{-m}. \end{aligned}$$

Полученное выражение приводит к требуемому результату (2.18), если учесть, что в рассматриваемом пределе $\lambda_n \to \lambda$, а второй замечательный предел[1] дает

$$\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^n \to e^{-\lambda}.$$

■

Приближенное равенство

$$\boxed{P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}} \tag{2.19}$$

называют *формулой Пуассона.* Эту формулу обычно применяют при достаточно больших $n > 50$ и при малых вероятностях p ($np < 10$), то есть в случаях *редких событий.*

[1]Второй замечательный предел записывается следующим образом:

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Формула Пуассона применяется в теории массового обслуживания. Ее можно считать простой математической моделью потока событий. Под *потоком событий* понимают последовательность событий, наступающих в случайные моменты времени. Можно показать, что вероятность появления m событий за время t для простейшего потока определяется формулой Пуассона (2.19) с заменой $\lambda \to t \cdot b$.

Теорема (локальная теорема Муавра–Лапласа). *Пусть число испытаний $n \to \infty$, p – фиксировано $(0 < p < 1)$, а величина*

$$x_m = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \tag{2.20}$$

равномерно ограничена по m и по n $(-\infty < a \leqslant x_m \leqslant b < \infty)$, тогда

$$P(\mu_n = m) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x_m^2/2} \left(1 + \alpha_n(m)\right), \tag{2.21}$$

где $|\alpha_n| < C/\sqrt{n}$, $x_m \in [a, b]$, а C – положительная постоянная.

Отметим, что условия данной теоремы означают, что n, а также m стремятся к бесконечности. Таким образом, для использования приближенной формулы

$$P(\mu_n = m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x_m^2/2} \tag{2.22}$$

следует иметь в виду, что n и m должны быть большими, но не сильно отличающимися друг от друга числами. Практически формулы имеют высокую точность при выполнении неравенств

$$np < 3\sqrt{npq} \qquad \text{и} \qquad nq > 3\sqrt{npq}. \tag{2.23}$$

Так, при $n > 100$ неравенства выполняются уже при $npq > 8$.

Для численных вычислений выражение (2.22) удобно переписать в виде

$$P(\mu_n = m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x_m), \tag{2.24}$$

где функция[1]

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \tag{2.25}$$

затабулирована (см. Приложение 3.).

[1] Функцию (2.25) иногда называют малой функцией Лапласа.

Теорема (интегральная теорема Муавра–Лапласа). *Пусть число испытаний $n \to \infty$, p – фиксировано $(0 < p < 1)$, тогда*

$$P(a \leqslant x_m \leqslant b) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_a^b dx\, e^{-x^2/2}, \tag{2.26}$$

равномерно по a и b.

Условия применимости приближенной формулы

$$P(a \leqslant x_m \leqslant b) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_a^b dx\, e^{-x^2/2} \tag{2.27}$$

такие же, как и выражения (2.22).

Приведем основные соотношения, которые часто используются при решении задач. Во-первых, непосредственно из интегральной теоремы имеем

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a < \frac{m-np}{\sqrt{npq}} < b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_a^b e^{-x^2/2} dx. \tag{2.28}$$

В частности, данное предельное соотношение остается справедливым и при $a = -\infty$ и при $b = +\infty$. Функция

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-t^2/2} dt \tag{2.29}$$

называется функцией Лапласа. Ее значения при $x \geq 0$ затабулированы (см. Приложение 4.), а значения от отрицательных аргументов находятся с использованием свойства нечетности:

$$\Phi(-x) = -\Phi(x). \tag{2.30}$$

Далее, используя (2.28) и (2.29), можно записать приближенное равенство:

$$P\left(a < \frac{m-np}{\sqrt{npq}} < b\right) \approx \Phi(b) - \Phi(a), \tag{2.31}$$

откуда при $a = -t$ и $b = t$ находим

$$P\left(\left|\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right| < t\right) = 2\Phi(t). \tag{2.32}$$

Из (2.32) можно получить следующие, полезные для приложений, формулы. Обозначим

$$a = np - t\sqrt{npq}, \qquad b = np + t\sqrt{npq},$$

тогда

$$P(a < m < b) = 2\Phi(t); \tag{2.33}$$

$$P(m_1 < m < m_2) = \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right); \tag{2.34}$$

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < t\sqrt{\frac{pq}{n}}\right) = 2\Phi(t); \tag{2.35}$$

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < t\right) = 2\Phi\left(t\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \tag{2.36}$$

Пример 2.11. Пусть вероятность изготовления нестандартной детали равна $0,004$. Найти вероятность того, что среди 1000 деталей окажется пять нестандартных.

Решение. Здесь $n = 1000$, $p = 0,004$, а $\lambda = np = 1000 \cdot 0,004 = 4$. Воспользуемся законом редких событий и формулой Пуассона (2.19). Все условия закона редких событий выполняются, поэтому для $n = 4$ и $m = 5$ получаем

$$P_{5,1000} \approx \frac{4^5}{5!} e^{-4} \approx 0,1563.$$

Найдем вероятность того же события по формуле Муавра–Лапласа. Для этого вычислим величину

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{5 - 1000 \cdot 0,004}{\sqrt{1000 \cdot 0,004 \cdot 0,996}} \approx \frac{1}{1,996} \approx 0,501.$$

По таблице для функции $\varphi(x)$ (см. Приложение 3.) находим ее значение $\varphi(0,50) \approx 0,3521$, следовательно,

$$P_{5,1000} \approx \frac{\varphi(0,50)}{1,996} \approx \frac{0,3521}{1,9960} \approx 0,1764.$$

Точное же значение вероятности по формуле Бернулли равно:

$$P_{5,1000} = C_{1000}^5 0,004^5 \cdot 0,996^{995} \approx 0,1552.$$

Таким образом, относительная погрешность вычисления вероятности $\mathrm{P}_{5,1000}$ по формуле Муавра–Лапласа равна

$$\frac{0,1563 - 0,1552}{0,1552} \approx 0,137$$

или 13,7 %, в то время как по формуле Пуассона

$$\frac{0,1763 - 0,1552}{0,1552} \approx 0,007$$

или $0,7\,\%$, что во много раз точнее. ▲

Пример 2.12. В порту каждые сутки может появиться одно большегрузное судно с вероятностью $p = 1/6$. Вероятность появления более одного судна в течение суток пренебрежимо мала. Какова вероятность того, что за месяц (30 дней) порт посетят не более 4 судов?

Решение. Можно считать, что имеются $n = 30$ испытаний Бернулли с вероятностью успеха $p = 1/6$. Требуется найти вероятность $P(m \leq 4)$. Считая, что n «велико», а p «мало», воспользуемся предельной теоремой Пуассона:

$$\lambda = np = 5, \qquad P_n(k) = \frac{e^{-5} \cdot 5^k}{k!}, \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

По таблицам вероятностей Пуассона находим

$$P_n(0) \approx 0,0067, \quad P_n(1) \approx 0,0337, \quad P_n(2) \approx 0,0842, \quad P_n(3) \approx 0,1404, \quad P_n(4) \approx 0,1755.$$

Таким образом,

$$P(m \leq 4) = \sum_{k=0}^{4} P_n(k) \approx 0,4405.$$

▲

Пример 2.13. Вероятность найти белый гриб среди прочих равна $0,25$. Какова вероятность того, что среди 80 грибов белых будет 20?

Решение. Будем считать успехом нахождение белого гриба, тогда $p = 0,25$; $q = 0,75$. Требуется найти вероятность $P_n(m)$, где $n = 80$, $m = 20$. По локальной теореме Муавра–Лапласа

$$P_n(m) \cong \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(m-np)^2}{2npq}\right] = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(0),$$

так как $m = np = 20$. Далее находим $\varphi(0) = 1/\sqrt{2\pi} \approx 0,399$, поэтому

$$P_n(m) = \frac{0,3989}{\sqrt{80 \cdot 0,25 \cdot 0,75}} \approx 0,103.$$

▲

Пример 2.14. В среднем вступительные экзамены в университет выдерживают $25\,\%$ абитуриентов. В приемную комиссию поступило 1800 заявлений. Чему равна вероятность того, что хотя бы 450 поступающих успешно сдадут экзамены?

Решение. Можно считать, что имеются $n = 1800$ испытаний Бернулли с вероятностью успеха $p = 0,25$. Пусть m – число успехов. Требуется найти вероятность $P(m \geq 450)$. Используя интегральную предельную теорему Муавра–Лапласа, получаем

$$P(m \geq 450) = P(450 \leq m < +\infty) = \Phi(+\infty) - \Phi\left(\frac{450 - 1800 \cdot 0,25}{1800 \cdot 0,25 \cdot 0,75}\right) == \frac{1}{2} - 0 = 0,5.$$

▲

Пример 2.15. Сколько нужно произвести бросаний монеты, чтобы с вероятностью $0,99$ можно было бы утверждать, что частота выпадения герба отличается от $0,5$ не более чем на $\varepsilon = 0,01$?

Решение. Воспользуемся формулой (2.35). Из условия $\Phi(t) = 0,99$ находим $t = 2,58$. Число испытаний можно определить из условия $t\sqrt{pq/n} = \varepsilon$, тогда

$$n = pq\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{2,58}{0,01}\right)^2 = 16641.$$ ▲

Пример 2.16. При одном выстреле стрелок попадает в мишень с вероятностью 0,7. Какова вероятность того, что при 200 выстрелах 160 попадут в цель?

Решение. Воспользуемся формулой (2.24). В данном случае $n = 200$, $p = 0,7$, $q = 1 - p = 0,3$ и $m = 160$. Поэтому $\sqrt{npq} = \sqrt{200 \cdot 0,7 \cdot 0,3} = \sqrt{42} \approx 6,48$, а величина

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{160 - 200\cdot 0,7}{6,48} \approx 3,09.$$

Функция $\varphi(3,09) \approx 0,0034$ (см. Приложение 3.). В результате получаем искомую вероятность

$$P_{200}(160) = \frac{\phi(x)}{\sqrt{npq}} \approx \frac{0,0034}{6,48} \approx 0,0005.$$ ▲

2.5. Вопросы и задачи для самоконтроля

Вопросы

1. Определить понятие условной вероятности.
2. Как выражается вероятность произведения событий через условную вероятность?
3. Получить формулу полной вероятности.
4. Получить формулу Байеса.
5. Записать формулу Бернулли.
6. Как вычисляется число сочетаний?
7. Как выводится формула Пуассона и какова область ее применения?
8. Сформулировать локальную и интегральную теоремы Муавра–Лапласа.

Задачи

2.1. Монета подбрасывается 8 раз. Какова вероятность, что герб выпадет 6 раз?

2.2. На отрезок длины L наугад и независимо бросаются две разные точки. Какова вероятность, что расстояние между ними не превзойдет ℓ ($\ell < L$)?

2.3. Какова вероятность того, что дни рождения 12 человек придутся на разные месяцы.

2.4. Партия изделий содержит 90 годных и 10 бракованных. Определить вероятность того, что из 10 взятых наугад изделий не окажется бракованных.

2.5. Бросаются три игральные кости. Выпадают разные грани. Какова вероятность того, что хотя бы на одной из них выпала единица?

2.6. На склад поступило 1000 деталей. Из них 350 изготовлено на первом предприятии, 440 – на втором и 210 – на третьем. Вероятность того, что деталь окажется бракованной, равна 0,03 для первого предприятия, 0,02 – для второго и 0,01 – для третьего. Взятая наудачу деталь оказалась бракованной. Какова вероятность того, что она изготовлена на первом предприятии?

2.7. Сколько раз надо бросить монету, чтобы вероятность выпадения хотя бы одного герба была не меньше, чем 0,9?

2.8. Из трех партий изделий взято одно. Какова вероятность обнаружения бракованной продукции, если известно, что в одной партии треть изделий нестандартные, а в двух других – бракованной продукции нет.

Глава 3.

Случайные величины

Случайная величина. Дискретные случайные величины. Функция распределения вероятностей случайной величины. Непрерывные случайные величины. Непрерывные распределения. Равномерное распределение. Нормальное распределение. Показательное распределение. Гистограммы. Многомерные случайные величины.

Одним из основных понятий теории вероятностей является понятие *случайной величины*, под которой понимается величина ξ, принимающая в опытах то или иное заранее неизвестное числовое значение. Со значениями случайной величины связаны определенные события. Любое правило, позволяющее сопоставить этим событиям вероятности, *называется законом распределения случайной величины.* Случайные величины можно разбить на два класса – дискретные и непрерывные.

3.1. Дискретные случайные величины

☞ Случайная величина (с.в.) ξ, принимающая значения из конечного $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ или счетного $\{x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots\}$ множества называется *дискретной случайной величиной* (д.с.в.).

Определим закон распределения д.с.в. как функцию $p(x)$, значение которой в точке $x = x_k$ равно вероятности события, заключающегося в том, что д.с.в. ξ принимает значение x_k:

$$\boxed{p(x_k) = P(\xi = x_k).} \qquad (3.1)$$

Так как при каждом испытании случайная величина принимает какое-либо из значений x_k, то $\sum\limits_k p(x_k) = 1$, то есть сумма всех вероятностей равна единице.

☞ Дискретная случайная величина ξ имеет *биномиальный закон распределения* с параметрами n и p, если она принимает значения из множества $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ с вероятностями, вычисляемыми по формуле Бернулли

$$\boxed{p_n(m) = P_n(\xi = m) = C_n^m\, p^m\, q^{n-m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}\, p^m\, q^{n-m}.} \qquad (3.2)$$

Примером д.с.в., распределенной по биномиальному закону, является число успехов в серии однородных независимых испытаний (схема Бернулли).

☞ Дискретная случайная величина ξ имеет распределение Пуассона с положительным параметром λ, если она принимает счетные значения $\{0, 1, \dots, m, \dots\}$ с вероятностями, вычисляемыми по формуле

$$\boxed{p(m; \lambda) = P(\xi = m; \lambda) = \frac{\lambda^m}{m!}\, e^{-\lambda}.} \qquad (3.3)$$

Как следует из теоремы Пуассона, распределение Пуассона является предельным для распределения Бернулли при $n \to \infty$, $p \to 0$, при этом параметр λ равен $n\,p$. В этом случае распределение Пуассона называется «законом редких событий». Распределению Пуассона подчиняется также число событий, регистрируемых за фиксированный временной интервал τ, в так называемом пуассоновском потоке (простейший поток независимых событий).

Приведем два других примера распределений дискретной случайной величины.

☞ *Геометрическое распределение* с параметром p есть распределение д.с.в. ξ, которая принимает значения $\{1, 2, \dots\}$ с вероятностями

$$\boxed{p(m) = P(\xi = m) = (1-p)^m\, p\,, \quad m = 0, 1, 2, \dots} \qquad (3.4)$$

☞ *Гипергеометрическое распределение* с параметрами N, M и n есть распределение д.с.в. ξ, которая принимает значения $0, 1, \ldots, \min\{M, n\}$ с вероятностями

$$\boxed{p(m) = P(\xi = m) = \frac{C_M^m\, C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}, \quad m = 0, 1, \ldots, \min\{M, n\}.} \qquad (3.5)$$

Геометрическому распределению подчиняется, например, число безуспешных попыток до появления первого успеха в схеме Бернулли. Гипергеометрическое распределение имеет важное значение для задач контроля за качеством продукции. При этом N – общее число изделий, n – число изделий, попавших на контроль, M – число бракованных изделий во всей партии, а д.с.в. ξ – число бракованных изделий в контрольной партии.

Для конечного набора возможных значений с.в. ее закон распределения можно задать в виде таблицы, в которой значению x_k сопоставляется соответствующая вероятность $p_k = p(x_k)$. Такую таблицу называют *рядом распределения д.с.в.* На плоскости $\{\xi, p\}$ ряд распределения изображается n точками с координатами (x_k, p_k). Если эти точки соединить отрезками прямых, то образуется так называемый *многоугольник распределения.*

3.2. Функция распределения вероятностей

Ряд распределения можно ввести как закон распределения только для д.с.в. Универсальной формой закона распределения для всех типов случайных величин как дискретных, так и непрерывных является функция распределения.

☞ *Функцией распределения $F_\xi(x)$ случайной величины* ξ называется вероятность того, что значение случайной величины ξ окажется меньше, чем x:

$$\boxed{F_\xi(x) = P(\xi < x).} \qquad (3.6)$$

Непосредственно из этого определения следует, что вероятность попадания с.в. ξ в интервал $a \leqslant \xi < b$ в терминах функции распределения вычисляется по формуле

$$\boxed{P(a \leqslant \xi < b) = F_\xi(b) - F_\xi(a).} \qquad (3.7)$$

Функция распределения $F_\xi(x)$ обладает следующими основными *свойствами*:

1. $F_\xi(x)$ *есть функция неубывающая.*

Доказательство основано на том факте, что вероятность любого события неотрицательна.

2. *Функция распределения ограничена* $0 \leqslant F_\xi(x) \leqslant 1$, *причем*

$$\lim_{x\to-\infty} = F_\xi(-\infty) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} = F_\xi(+\infty) = 1.$$

3. *Функция распределения* $F_\xi(x)$ *непрерывна слева, то есть*

$$\lim_{x\to x_0-0} = F_\xi(x_0).$$

Пример 3.1. Партия из 100 деталей содержит 10 бракованных. Из этой партии случайным образом выбирается 5 деталей. Случайная величина ξ соответствует числу бракованных деталей в выборке. Построить ряд, многоугольник и функцию распределения этой с.в.

Решение. Пусть $P(\xi = m)$ обозначает вероятность того, что в выборке окажется ровно m бракованных деталей ($m = 0, 1, \ldots, 5$). Эта вероятность вычисляется следующим образом:

$$P(\xi = m) = \frac{C_{10}^m C_{90}^{5-m}}{C_{100}^5}.$$

Используя эту формулу, получаем ряд распределения случайной величины ξ (табл. 3.1).

Соответствующие многоугольник и функция распределения $F(x)$ приведены на рис. 3.1 и 3.2. ▲

Таблица 3.1

Ряд распределения случайной величины ξ в примере 3.1

Значения ξ	0	1	2	3	4	5
Вероятности p_k	0,584	0,339	0,070	0,006	$2{,}51\cdot10^{-4}$	$3{,}35\cdot10^{-6}$

Пример 3.2. В ящике лежат 8 шаров, их которых 5 белых, а остальные – черные. Вынимают наудачу 3 шара. Установить закон распределения числа белых шаров в выборке.

Решение. Случайная величина ξ – число белых шаров в выборке. Возможны следующие ее значения: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ и $x_4 = 3$. Для соответствующих вероятностей находим

$$p_1 = \frac{C_5^0 C_3^3}{C_8^3} = \frac{1}{56}, \quad p_2 = \frac{C_5^1 C_2^3}{C_8^3} = \frac{15}{56}, \quad p_3 = \frac{30}{56}, \quad p_4 = \frac{10}{56}.$$

Нетрудно убедиться, что $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$. Закон распределения запишем в виде табл. 3.2. ▲

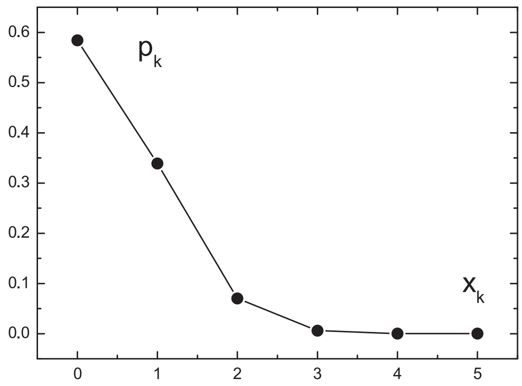

Рис. 3.1. Многоугольник распределения с.в. в примере 3.1

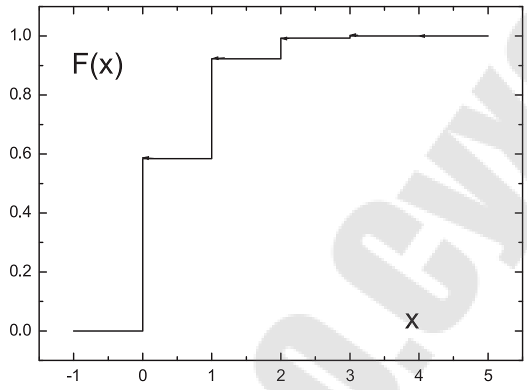

Рис. 3.2. Функция распределения с.в. в примере 3.1

Таблица 3.2

Ряд распределения случайной величины ξ в примере 3.2

Значения ξ	0	1	2	3
Вероятности p_k	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{10}{56}$

3.3. Непрерывные случайные величины

Для непрерывных случайных величин (н.с.в.), то есть величин, которые могут принимать числовые значения из некоторого промежутка, специальной формой закона распределения является плотность распределения.

☞ *Плотностью распределения н.с.в.* ξ называется неотрицательная кусочно-непрерывная функция $f_\xi(x)$ такая, что для любых x выполняется

$$\boxed{F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,dt.} \tag{3.8}$$

Пусть $a < b$, тогда для вероятности $P(a \leqslant \xi < b)$ находим

$$P(a \leqslant \xi < b) = F_\xi(b) - F_\xi(a) = \int\limits_{-\infty}^{b} f_\xi(x)\,dx - \int\limits_{-\infty}^{a} f_\xi(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{a}^{b} f_\xi(x)\,dx. \tag{3.9}$$

Таким образом, вероятность попадания н.с.в. ξ в полуинтервал $a \leqslant \xi < b$ численно равна площади криволинейной трапеции с основанием $[a, b]$ и ограниченной сверху кривой $y = f_{\xi}(x)$ (рис. 3.3).

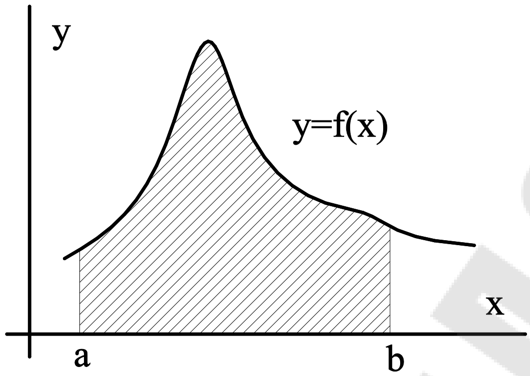

Рис. 3.3. Графическая иллюстрация равенства (3.9)

Так как $F_{\xi}(+\infty) = 1$, то плотность распределения нормирована на единицу:

$$\boxed{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\xi}(x)\, dx = 1.} \tag{3.10}$$

Дифференцируя соотношение (3.8), получаем

$$F'_{\xi}(x) = f_{\xi}(x). \tag{3.11}$$

Если функция распределения $F_{\xi}(x)$ есть интегральная характеристика распределения вероятностей н.с.в. ξ, то плотность распределения $f_{\xi}(x)$ есть характеристика локальная. Из (3.9) непосредственно следует, что вероятность попадания н.с.в. в точку равна нулю: $P(\xi = \text{a}) = 0$. Поэтому для н.с.в. имеет смысл говорить только о вероятности ее попадания в некоторый интервал. При этом справедливы равенства

$$P(a \leqslant \xi < b) = P(a < \xi \leqslant b) = P(a \leqslant \xi \leqslant b) = P(a < \xi < b). \tag{3.12}$$

Пример 3.3. Плотность распределения н.с.в. ξ имеет вид

$$f_{\xi}(x) = N \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < 0; \\ (2 - x^2), & \text{если} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ 0, & \text{если} \quad x > 0. \end{cases}$$

Определить нормировочный множитель N и вычислить вероятность того, что случайная величина ξ примет значение, удовлетворяющее неравенству $-3 \leqslant \xi \leqslant 1/2$.

Решение. Множитель N определяется из условия нормировки (3.10). Поскольку заданная функция распределения равна нулю вне отрезка $[0, 1]$, то в качестве пределов интегрирования следует взять 0 и 1. Таким образом, получаем

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = N\int_0^1 (2 - x^2)\,dx = N\left(2 - \frac{1}{3}\right) = N\,\frac{5}{3}.$$

Откуда находим

$$N = \frac{3}{5}.$$

Для вероятности $P(-3 \leqslant \xi \leqslant 1/2)$ получаем

$$P(-3 \leqslant \xi \leqslant 1/2) = \frac{3}{5}\int_{-3}^{1/2} (2 - x^2)dx = \frac{3}{5}\int_0^{1/2} (2 - x^2)\,dx = \frac{23}{40} \approx 0,575.$$

▲

Отметим, что понятие плотности вероятности может быть введено и для д.с.в.

$$f_{\xi}(x) = \sum_k p_k\ \delta(x - x_k), \tag{3.13}$$

где x_k – возможные значения с.в., p_k – соответствующие им вероятности, а δ-функция Дирака, определенная интегральным свойством

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,\delta(x - a)dx = \varphi(a). \tag{3.14}$$

3.4. Непрерывные распределения

Рассмотрим часто встречающиеся распределения непрерывных случайных величин.

3.4.1. Равномерное распределение

Пусть шкала некоторого прибора соответствует отрезку $[a, b]$. Указатель прибора соответствует отметке ξ, которая может принимать любые значения из $[a, b]$, то есть вероятность

$$P(a \leqslant \xi \leqslant b) = 1\,. \tag{3.15}$$

Допустим, что при измерении вероятность попадания указателя в некоторый отрезок шкалы пропорциональна длине этого отрезка и не зависит от положения этого отрезка на шкале, следовательно, для точек на шкале x_1 и x_2 таких, что $x_1 < x_2$ справедливо соотношение

$$P(x_1 \leqslant \xi \leqslant x_2) = k(x_2 - x_1),$$

где k – коэффициент пропорциональности. Полагая $x_2 = b$, $x_1 = a$ и используя (3.15), для этого коэффициента находим $k = 1/(b-a)$. Таким образом,

$$P(x_1 \leqslant \xi \leqslant x_2) = \frac{x_2 - x_1}{b - a}. \tag{3.16}$$

Построим для этого случая функцию распределения $F_\xi(x)$, которая определена согласно (3.8). Поскольку ξ не принимает значений, меньших a, то $P(\xi < a) = 0$. При $a < \xi \leqslant b$

$$P(\xi < x) = \frac{x - a}{b - a}.$$

При $x > b$ функция распределения $F(x) = 1$. Таким образом, получаем

$$\boxed{F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \leqslant a; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{если} \quad a < x \leqslant b; \\ 1, & \text{если} \quad x > b. \end{cases}} \tag{3.17}$$

Эта функция изображена на рис. 3.4.

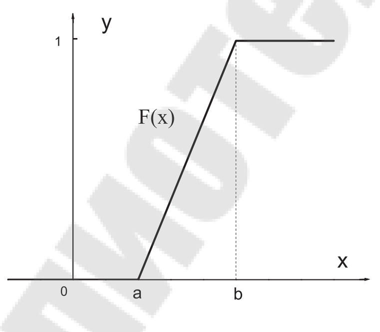

Рис. 3.4. График функции распределения $F_\xi(x)$ (3.17)

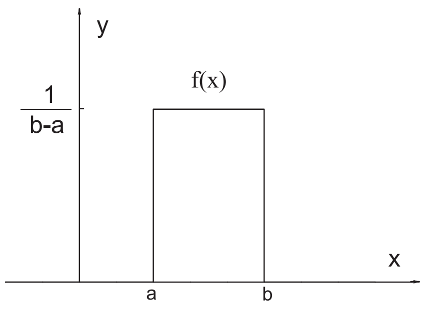

Рис. 3.5. График плотности распределения $f_\xi(x)$ (3.18)

Дифференцируя это выражение в соответствии с (3.11), для плотности равномерно распределенной с.в. находим

$$\boxed{f_\xi(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x<a;\\ \dfrac{1}{b-a}, & \text{если} \quad a<x<b;\\ 0, & \text{если} \quad x>b.\end{cases}} \tag{3.18}$$

График функции (3.18) представлен на рис. 3.5.

3.4.2. Нормальное распределение

Важную роль в теории вероятностей играет нормальный закон распределения.

☞ Непрерывная случайная величина ξ имеет *нормальный закон распределения* $N(m, \sigma)$ или *закон Гаусса с параметрами* m *и* σ, если ее плотность распределения имеет вид

$$\boxed{f_\xi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right],} \tag{3.19}$$

где $\sigma>0$ и m – любое действительное число.

Исключительная роль нормального закона в теории вероятностей обусловлена тем, что при определенных условиях он является предельным законом для других законов распределения.

График функции (3.19) симметричен относительно прямой $x = m$. Максимум функции (3.19) достигается при $x=m$ и равен $f_{\max} = 1/(\sqrt{2\pi}\,\sigma)$. При $x\to\pm\infty$ кривая (3.19) асимптотически приближается к оси OX, а точки $m\pm\sigma$ являются точками перегиба.

На рис. 3.6 изображены две кривые, соответствующие нормальному закону распределения (3.19) для $m=1$, $\sigma=0,5$ и $\sigma=1,0$.

Нетрудно проверить, что функция (3.19) удовлетворяет условию нормировки (3.10).

Функция распределения F_ξ нормального закона $N(0,1)$ имеет вид

$$\boxed{F_\xi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-x^2/2}\,dx.} \tag{3.20}$$

Однако для вычислений различного рода вероятностей, как правило, используется функция Лапласа (2.29), поскольку она обладает более простыми свойствами симметрии. В частности, функция Лапласа $\Phi(x)$ нечетна, и ее график приведен на рис. 3.7.

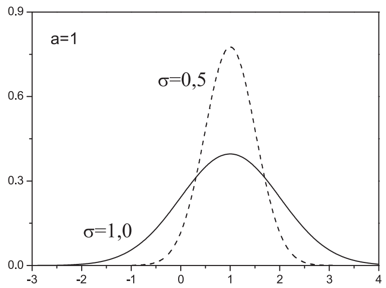

Рис. 3.6. График плотности распределения для нормального закона (3.19). Изображенные кривые соответствуют $m = 1$, $\sigma = 0,5$ и $\sigma = 1,0$

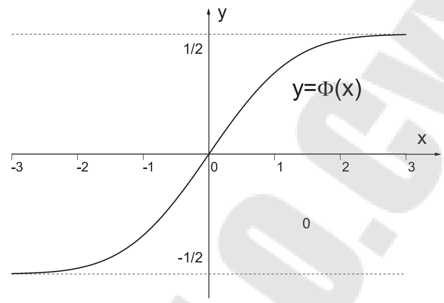

Рис. 3.7. График интеграла вероятности (3.20)

Для функций нормального распределения имеем

$$N(0,1): \qquad F_{\xi}(x) = \frac{1}{2} + \Phi(x); \tag{3.21}$$

$$N(m,\, \sigma): \qquad F_{\xi}(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right). \tag{3.22}$$

Вероятность попадания в интервал $P(x_1 < \xi < x_2)$ для с.в. ξ, распределенной по нормальному закону $N(m,\, \sigma)$, вычисляется по формуле

$$P(x_1 < \xi < x_2) = \Phi\left(\frac{x_2 - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - m}{\sigma}\right). \tag{3.23}$$

Пример 3.4. Завод изготавливает шарики для подшипников, номинальный диаметр которых равен 10 мм, а фактический диаметр случаен и распределен по нормальному закону с $m = 10$ мм и $\sigma = 0,4$ мм. При контроле бракуются все шарики, не проходящие через круглое отверстие $d_1 = 10,7$ мм и все, проходящие через круглое отверстие с диаметром $d_2 = 9,3$ мм. Найти процент шариков, которые будут браковаться.

Решение. Случайная величина X – диаметр шариков зависит от многих условий. Поэтому ее распределение будет близко к нормальному. Так как $m = 10$ мм, то шарики будут браковаться, если $|x - m| > 0,7$.

Тогда требуется вычислить следующую вероятность

$$P\left(|x-m| > 0,7\right) = 1 - \mathrm{P}\left(|x-m| < 0,7\right).$$

Используя соотношение (3.23) и нечетность функции Лапласа $\Phi(x)$, находим

$$\mathrm{P}\left(|x-m| < 0,7\right) = \mathrm{P}\left(m - 0,7 < x < m + 0,7\right) = 2\Phi\left(\frac{0,7}{0,4}\right) \approx 2 \cdot 0,459 = 0,918.$$

Поэтому $P(|x-m|>0,7)=1-0,918=0,082$. ▲

Если случайная величина распределена по нормальному закону, то с вероятностью 0,9973 случайная величина находится в интервале $(m-3\sigma, m+3\sigma)$. Таким образом, с довольно большой вероятностью значения нормально распределенной с.в. концентрируются в 3σ-окрестности точки m. Этот результат называется *правилом трех сигм*.

3.4.3. Показательное распределение

☞ Непрерывная случайная величина ξ имеет *показательный закон распределения* с параметром $\alpha>0$, если ее плотность вероятности имеет вид

$$\boxed{f_\xi(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, & \text{если } x>0;\\ 0, & \text{если } x\leqslant 0.\end{cases}} \tag{3.24}$$

Показательный закон распределения имеет, например, время между двумя соседними событиями в пуассоновском потоке.

3.4.4. Гистограммы

Для того чтобы судить о распределении некоторой непрерывной с.в. ξ, на практике поступают следующим образом. Весь диапазон ее возможных значений разбивают на интервалы. В серии испытаний отмечаются числа n_x, которые равны количеству попаданий результатов испытаний в каждый интервал. При большом числе испытаний n частоты попадания в интервал n_x/n должны быть близки к вероятностям попадания в эти интервалы. Зависимость частот n_x/n от расположения интервалов по оси X определяет *эмпирическое* (или экспериментальное) распределение н.с.в.

Для удобства обычно весь интервал возможных значений разбивают на интервалы равной длины. Откладывая по оси ординат частоты n_x/n (или просто числа n_x) строят *гистограмму*, как на рис. 3.8. Этот ступенчатый график дает представление о законе распределения с.в. Для лучшей точности аппроксимации кривой необходимо обеспечить как небольшую длину интервалов разбиения, так и возможность того, чтобы в каждый интервал попадало достаточно большое число экспериментальных точек.

Рис. 3.8. Гистограмма

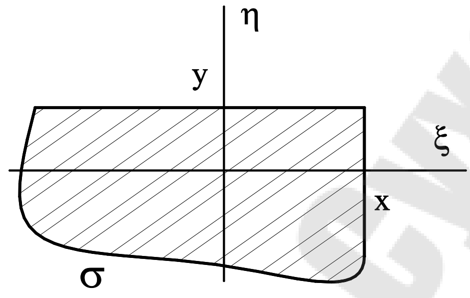

Рис. 3.9. Область σ

3.5. Понятие о многомерных случайных величинах

В более общем случае процесс может описываться не одной, а несколькими случайными величинами $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, которые можно рассматривать как координаты точки в некотором многомерном пространстве. Рассмотрим более подробно случай двух случайных величин (ξ, η).

Пусть определена вероятность $P(\xi < x, \eta < y)$ совместного выполнения неравенств

$$\xi < x, \eta < y.$$

Будем говорить в этом случае о *двумерной* случайной величине. Функция распределения такой величины, определенная для любых x и y, имеет вид

$$\boxed{F(x, y) = P(\xi < x, \eta < y).} \tag{3.25}$$

Будем рассматривать ξ и η как декартовы координаты точки на плоскости. Тогда функция распределения (3.25) даст вероятность того, что случайная точка $M(\xi, \eta)$ попадает в область σ, показанную на рис. 3.9.

Для непрерывной двумерной с.в. существует такая неотрицательная функция $f(x, y)$, что вероятность попадания случайной точки $M(\xi, \eta)$ в область σ равна следующему двойному интегралу:

$$P\left(M(\xi, \eta) \in \sigma\right) = \iint\limits_{\sigma} f_M(x, y)\, dxdy\,. \tag{3.26}$$

Функция $f(x, y)$ называется плотностью распределения вероятностей двумерной с.в. Эта функция нормирована условием

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_M(x, y)\, dxdy = 1. \tag{3.27}$$

Если область σ имеет вид, изображенный на рис. 3.9, то функция распределения запишется в виде

$$F_M(x,y) = P\left(M(\xi,\,\eta) \in \sigma\right) = \int\limits_{-\infty}^{x} dx \int\limits_{-\infty}^{y} f_M(x,y). \tag{3.28}$$

Непрерывные случайные величины ξ и η называются независимыми, если

$$f_M(x,y) = f_{\xi}(x) f_{\eta}(y),$$

то есть если плотность распределения $f(x,y)$ факторизуется по переменным x и y. В этом случае для функции распределения получаем

$$F_M(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_{\xi}(x)\,dx \int\limits_{-\infty}^{y} f_{\eta}(y)\,dy = F_{\xi}(x)\,F_{\eta}(y), \tag{3.29}$$

где $F_{\xi}(x)$ и $F_{\eta}(y)$ – функции распределения величин ξ и η соответственно.

Функция $F_M(x,y)$ позволяет найти как функции распределения, так и плотности распределения каждой из случайных величин ξ и η. Действительно, для величины ξ функция распределения определяется через вероятность следующим образом: $F_{\xi}(x) = P(\xi < x)$. При этом значение второй с.в. η может быть произвольным. Следовательно,

$$F_{\xi}(x) = P(\xi < x,\, -\infty < \eta < \infty) = \int\limits_{-\infty}^{x} dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_M(x,y)\,dy. \tag{3.30}$$

Отсюда, в случае непрерывной плотности распределения, находим

$$f_{\xi}(x) = F'_{\xi}(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_M(x,y)\,dy. \tag{3.31}$$

Аналогичные выражения возникают для F_{η} и f_{η}:

$$F_{\eta}(y) = P(-\infty < \xi < \infty,\ \eta < y) = \int\limits_{-\infty}^{y} dy \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_M(x,y)\,dx,$$

$$f_{\eta}(y) = F'_{\eta}(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_M(x,y)\,dx.$$

Итак, для того чтобы получить плотность распределения одной из составляющий двумерной с.в., следует проинтегрировать совместную плотность распределения $f_M(x,y)$ по переменной, отвечающей второй величине в пределах от $-\infty$ до $+\infty$.

Пример 3.5. Плотность распределения двумерной с.в. (ξ, η) имеет вид

$$f_M(x, y) = \frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}.$$

Найти:
1) вероятность попадания с.в. в квадрат с вершинами $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(1, 0)$;
2) функцию распределения $F_M(x, y)$;
3) плотности распределения каждой величины ξ и η.

Решение. 1. Вероятность попадания случайной точки $M(\xi, \eta)$ в квадрат определяется интегралом

$$p = \iint\limits_{\sigma} f_M(x, y)\, dxdy = \frac{1}{\pi^2} \int\limits_0^1 \frac{dy}{1+y^2} \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} =$$
$$= \frac{1}{\pi^2} (\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0)(\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0) = \frac{1}{\pi^2} \frac{\pi}{4} \frac{\pi}{4} = \frac{1}{16}.$$

2. Используя (3.28), находим

$$F_M(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{x} dx \int\limits_{-\infty}^{y} f_M(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{dx}{1+x^2} \int\limits_{-\infty}^{y} \frac{dy}{1+y^2} =$$
$$= \frac{1}{\pi^2} (\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg}(-\infty))(\operatorname{arctg} y - \operatorname{arctg}(-\infty)) =$$
$$= \frac{1}{\pi^2} \left(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2}\right) \left(\operatorname{arctg} 1 + \frac{\pi}{2}\right).$$

3. Плотность распределения с.в. ξ находим в соответствии с (3.31):

$$f_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_M(x, y)\, dy = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Аналогично для с.в. η:

$$f_\eta(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_M(x, y)\, dx = \frac{1}{\pi(1+y^2)}.$$

▲

3.6. Вопросы и задачи для самоконтроля

Вопросы

1. Определить понятия:
   - дискретной случайной величины;
   - непрерывной случайной величины;

- функции распределения вероятностей;
- плотности распределения;
- многоугольника распределения;
- ряда распределения.

2. Записать распределения дискретной случайной величины:
   - биномиальное;
   - Пуассона;
   - геометрическое;
   - гипергеометрическое.
3. Записать распределения непрерывной случайной величины:
   - равномерное;
   - нормальное;
   - показательное.
4. Какими свойствами обладает функция распределения?
5. Как связаны между собой функция и плотность распределения?
6. Выписать условие нормировки плотности распределения.
7. Как определяется функция Лапласа и каковы ее основные свойства?
8. Что такое гистограмма?
9. Как определяются двумерные случайные величины?

Задачи

3.1. Случайная величина ξ – число очков, выпадающих при однократном бросании игральной кости. Построить ряд распределения ξ.

3.2. Построить ряд и многоугольник распределения случайной величины ξ – количества выпадений герба при четырехкратном бросании монеты.

3.3. Определить нормировочный множитель N, если плотность распределения непрерывной случайной величины ξ имеет вид

$$\varphi(x) = N \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0; \\ 4x - x^2, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 4; \\ 0, & \text{если } x > 4\,. \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$. Построить графики функций $\varphi(x)$ и $F(x)$. Вычислить вероятность попадания ξ на отрезок $[-2, 3]$.

Глава 4.

Числовые характеристики случайных величин

Математическое ожидание случайной величины. Дисперсия случайной величины. Математическое ожидание и дисперсия для основных распределений. Закон больших чисел.

Случайная величина полностью определяется своей функцией распределения. Однако в ряде случаев достаточно знать о с.в. менее подробную информацию, которая содержится в так называемых числовых характеристиках с.в. К числу основных таких характеристик относятся математическое ожидание и дисперсия с.в. В этой главе мы рассмотрим эти понятия и их свойства.

4.1. Математическое ожидание случайной величины

Пусть p_k – вероятность того, что случайная величина примет значение x_k.

☞ ***Математическим ожиданием*** *дискретной случайной величины* ξ *называется число, вычисляемое по формуле*

$$\boxed{M[\,\xi] \equiv m_{\,\xi} = \sum_k x_k\, p_k.} \qquad (4.1)$$

Поясним смысл понятия математического ожидания. Пусть случайная величина ξ может принимать n значений x_1, $x_2, \ldots, x_n$ с вероятностями p_1, $p_2, \ldots, p_n$, соответственно. Рассмотрим серию из N испытаний, в которой значение x_1 случайной величины ξ наблюдалось m_1 раз,

$x_2 - m_2$ раз и т.д. Понятно, что $m_1+m_2+\cdots+m_n = N$. Среднее значение величины ξ в этой серии, очевидно, определяется следующим образом:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_N}{N} = \\ &= \omega_1x_1 + \omega_2x_2 + \cdots + \omega_nx_n. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Частоты $\omega_k = m_k/N$ соответствуют вероятностям p_k. В этом смысле понятие математического ожидания соответствует *среднему значению* с.в.[1].

Определение математического ожидания для случая дискретной случайной величины (4.1) очевидным образом переносится на случай непрерывной величины.

☞ ***Математическим ожиданием*** *непрерывной случайной величины* ξ с плотностью распределения $f_\xi(x)$ называется число, равное

$$\boxed{M[\,\xi] \equiv m_\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx\,.} \tag{4.3}$$

При этом предполагается существование несобственного интеграла в (4.3).

Непосредственно из определений (4.1) и (4.3) вытекают следующие *свойства* математического ожидания.

① Математическое ожидание константы равно самой константе

$$M[c] = c.$$

② Константа c может быть вынесена за знак математического ожидания

$$M[c\,\xi] = c\,M[\,\xi].$$

③ Для любых случайных величин ξ справедливо неравенство

$$|M[\,\xi]| \leqslant M[|\,\xi|].$$

④ Для любых случайных величин ξ_1 и ξ_2 математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий

$$M[\,\xi_1 + \xi_2] = M[\,\xi_1] + M[\,\xi_2].$$

[1]Иногда математическое ожидание так и называют средним значением с.в., в некоторых книгах применяется также термин «центр распределения случайной величины».

⑤ Для независимых случайных величин ξ_1 и ξ_2 математическое ожидание произведения равно произведению математических ожиданий

$$M[\xi_1 \xi_2] = M[\xi_1]M[\xi_2].$$

4.2. Дисперсия случайной величины

Помимо математического ожидания важно знать насколько велики отклонения с.в. от математического ожидания. Для этой цели вводится понятие дисперсии.

☞ ***Дисперсией*** *случайной величины* ξ называется число, равное

$$\boxed{D[\xi] \equiv D_\xi = M[(\xi - m_\xi)^2].} \tag{4.4}$$

Таким образом, дисперсия есть математическое ожидание квадрата отклонения с.в. от ее математического ожидания. Дисперсия характеризует меру рассеяния значений с.в. вокруг ее математического ожидания.

Корень из дисперсии

$$\sigma_\xi = \sqrt{D[\xi]} \tag{4.5}$$

называется *средним квадратическим отклонением.*

Дисперсия имеет квадрат размерности с.в. ξ, а размерность среднего квадратичного отклонения совпадает с размерностью ξ.

Используя свойства математического ожидания, находим

$$\begin{aligned} D[\xi] &= M[(\xi - M[\xi])^2] = M[\xi^2 - 2\xi M[\xi] + M^2[\xi]] = \\ &= M[\xi^2] - 2M[\xi]M[\xi] + M^2[\xi] = M[\xi^2] - M^2[\xi]. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Таким образом, для дисперсии д.с.в. и н.с.в. получаем следующие расчетные формулы:

$$\boxed{D[\xi] = M[\xi^2] - M^2[\xi] = \begin{cases} \sum\limits_k x_k^2 p_k - \left(\sum\limits_k x_k p_k\right)^2, \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_\xi(x)\mathrm{d}x - \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)\mathrm{d}x\right)^2. \end{cases}} \tag{4.7}$$

Дисперсия обладает следующими *свойствами*.

① Дисперсия любой с.в. ξ неотрицательна

$$D(\xi) \geqslant 0.$$

② Дисперсия константы c равна нулю

$$D[c] = 0.$$

③ Для константа c выносится за знак дисперсии в квадрате

$$D[c\,\xi)] = c^2 D[\xi].$$

④ Для независимых случайных величин ξ_1 и ξ_2 дисперсия суммы равна сумме дисперсий

$$D[\xi_1 + \xi_2] = D[\xi_1] + D[\xi_2].$$

Свойства 1, 2 и 3 непосредственно следуют из определения дисперсии и свойств математического ожидания. Докажем свойство 4. По определению дисперсии (4.4) находим

$$\begin{aligned}
&D[\xi_1 + \xi_2] = M[((\xi_1 + \xi_2) - M[\xi_1 + \xi_2])^2] = \\
&= M[((\xi_1 - M[\xi_1]) + (\xi_2 - M[\xi_2]))^2] = \\
&= M[(\xi_1 - M[\xi_1])^2 + 2(\xi_1 - M[\xi_1])(\xi_2 - M[\xi_2]) + (\xi_2 - M[\xi_2])^2] = \\
&= M[(\xi_1 - m_{\xi_1})^2] + 2M[(\xi_1 - m_{\xi_1})(\xi_2 - m_{\xi_2})] + M[(\xi_2 - m_{\xi_2})^2].
\end{aligned}$$

Случайные величины ξ_1 и ξ_2 являются независимыми, следовательно, $\xi_1 - m_{\xi_1}$ и $\xi_2 - m_{\xi_2}$ также независимы. В соответствии со свойством 5 математического ожидания получаем

$$\begin{aligned}
M[(\xi_1 - m_{\xi_1})(\xi_2 - m_{\xi_2})] &= M[\xi_1 - m_{\xi_1}] \cdot M[\xi_2 - m_{\xi_2}] = \\
&= (m_{\xi_1} - m_{\xi_1})\,(m_{\xi_2} - m_{\xi_2}) = 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, выражение для дисперсии суммы переписывается в виде

$$D[\xi_1 + \xi_2] = M[(\xi_1 - m_{\xi_1})^2] + M[(\xi_2 - m_{\xi_2})^2] = D[\xi_1] + D[\xi_2].$$

Пример 4.1. Случайная величина есть число очков, выпадающих при однократном бросании игральной кости. Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение этой величины.

Решение. Применяя выражения (4.1), (4.7) и (4.5), получаем

$$M[\xi] = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 5\cdot\frac{1}{6} + 6\cdot\frac{1}{6} = 3,5;$$

$$D[\xi] = (1-3,5)^2\cdot\frac{1}{6} + (2-3,5)^2\cdot\frac{1}{6} + (3-3,5)^2\cdot\frac{1}{6} + \\ + (4-3,5)^2\cdot\frac{1}{6} + (5-3,5)^2\cdot\frac{1}{6} + (6-3,5)^2\cdot\frac{1}{6} = 2,92;$$

$$\sigma_\xi = \sqrt{D[\xi]} \approx 1,71.$$

▲

Пример 4.2. Партия изделий содержит 10 % нестандартных. Пусть случайная величина – число стандартных изделий среди 5 случайным образом отобранных изделий. Найти функцию распределения с.в. и вероятность $P(X > 1)$.

Решение. Случайная величина может принимать значения $x_k = 1, 2, 3, 4, 5$. Найдем их вероятности по формуле Бернулли $p_k = C_n^k p^k q^{n-k}$, где $n = 5$, $p = 0,9$, $q = 0,1$. Вычислив вероятности, получим

$$p_0 = 0,00001, \quad p_1 = 0,00045, \quad p_2 = 0,00810,$$
$$p_3 = 0,07290, \quad p_4 = 0,32085, \quad p_5 = 0,59049.$$

Используя определение функции распределения

$$F(x) = p(X < x) = \sum_{x_k < X} p_k,$$

получаем

при $x \le 0$, $F(x) = 0$,
при $0 < x \le 1$, $F(x) = p_0 = 0,00001$,
при $1 < x \le 2$, $F(x) = p_0 + p_1 = 0,00046$,
при $2 < x \le 3$, $F(x) = p_0 + p_1 + p_2 = 0,00856$,
при $3 < x \le 4$, $F(x) = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 0,08146$,
при $4 < x \le 5$, $F(x) = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0,40951$,
при $x > 5$, $F(x) = 1$.

Искомая вероятность равна:

$$P(x > 1) = 1 - P[(X = 0) + (X = 1)] = 1 - 0,00046 = 0,99954.$$

▲

Пример 4.3. Плотность вероятности случайной величины задана выражением:

$$f(x) = \begin{cases} a\cos x, & x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right], \\ 0, & x < 0,\ x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти параметр a, функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию.

Решение. Воспользовавшись условием нормировки $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, находим

$$\int\limits_0^{\pi/2} a\cos x\, dx = a\sin x\Big|_0^{\pi/2} = a = 1.$$

Функцию распределения

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

найдем следующим образом. Разобьем промежуток $(-\infty, x)$ на три части, получим

$$1)\ x < 0 \qquad \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = 0,$$

$$2)\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \qquad \int\limits_0^{x} \cos t dt = \sin x,$$

$$3)\ x > \frac{\pi}{2} \qquad \int\limits_{-\infty}^{0} 0dx + \int\limits_0^{\pi/2} \cos x dx + \int\limits_{\pi/2}^{+\infty} 0dx = 1.$$

Таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \sin x, & x \in [0,\ \pi/2], \\ 1, & x > \pi/2. \end{cases}$$

Математическое ожидание

$$M[X] = \int\limits_0^{\pi/2} x\cos x dx = \left[\begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = \cos x dx & v = \sin x \end{array}\right] = x\sin x\Big|_0^{\pi/2} + \cos x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Для дисперсии получаем

$$D[X] = M\left[x^2\right] - m_x^2 = \int\limits_0^{\pi/2} x^2\cos x dx - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)^2 =$$

$$= \left\{ \int\limits_0^{\pi/2} x^2\cos x dx = \left[\begin{array}{ll} u = x^2 & du = 2x dx \\ dv = \cos x dx & v = \sin x \end{array}\right] = x^2\sin x\Big|_0^{\pi/2} - \right.$$

$$\left. -2\int\limits_0^{\pi/2} x\sin x dx = \frac{\pi^2}{4} - 2\cdot 1 = \frac{\pi^2}{4} - 2 \right\} = \frac{\pi^2}{4} - 2 - \frac{\pi^2}{4} + \pi - 1 = \pi - 3.$$

▲

4.3. Расчет математических ожиданий и дисперсий

Получим математические ожидания и дисперсии для рассмотренных ранее основных распределений. Начнем с распределений дискретных случайных величин.

4.3.1. Биномиальное распределение

Биномиальный закон распределения (см. с. 45) имеет вид

$$p_k = C_n^k \, p^k \, q^{n-k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \, p^k \, q^{n-k}, \tag{4.8}$$

где $q = 1 - p\,;\ k = 0, 1, \ldots, n$. Случайной величиной ξ здесь является число «успехов» k.

Математическое ожидание величины ξ согласно (4.1) вычисляется по формуле

$$M[\,\xi] = \sum_{k=0}^{n} k\, p_k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, k\, p^k \, q^{n-k}. \tag{4.9}$$

Сумму в правой части этого выражения проще всего вычислить с помощью операции дифференцирования формулы бинома Ньютона (см. Приложение 1.):

$$(p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, p^k \, q^{n-k}. \tag{4.10}$$

Математическое ожидание (4.9) получается в результате следующей операции с (4.10):

$$\begin{aligned} M[\,\xi] &= \left(p\frac{\partial}{\partial p}\right) \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, p^k \, q^{n-k} = \\ &= \left(p\frac{\partial}{\partial p}\right) (p+q)^n = np(p+q)^{n-1} = np. \end{aligned} \tag{4.11}$$

В последнем преобразовании было учтено, что для биномиального распределения $p + q = 1$.

Для вычисления дисперсии воспользуемся выражением (4.6). В рассматриваемом случае оно дает

$$D[\,\xi] = \sum_{k=0}^{n} k^2 \, p_k - (np)^2.$$

Для вычисления суммы в этом выражении воспользуемся тем же приемом, что и при вычислении математического ожидания:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} k^2 \, p_k &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, k^2 \, p^k \, q^{n-k} = \\ &= \left(p\frac{\partial}{\partial p}\right)\left(p\frac{\partial}{\partial p}\right) \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, p^k \, q^{n-k} = \left(p\frac{\partial}{\partial p}\right)\left(p\frac{\partial}{\partial p}\right) (p+q)^n. \end{aligned}$$

Выполняя необходимые дифференцирования с учетом равенства $p + q = 1$, получим

$$\sum_{k=0}^{n} k^2\, p_k = np + n(n-1)p^2.$$

Вычитая отсюда $(np)^2$, окончательно находим

$$D[\,\xi] = np(1-p) = npq. \tag{4.12}$$

4.3.2. Распределение Пуассона

Закон распределения Пуассона был получен как предельный случай биномиального распределения при $n \to \infty$ (см. с. 37). Этот закон имеет вид

$$p_k = \frac{a^k}{k!}\, e^{-a}. \tag{4.13}$$

Здесь k принимает целые значения от нуля до бесконечности, поэтому

$$m_{\,\xi} \equiv M[\,\xi] = \sum_{k=0}^{\infty} k\, p_k = e^{-a} \sum_{k=0}^{\infty} k\, \frac{a^k}{k!}. \tag{4.14}$$

Для вычисления суммы в (4.14) воспользуемся тем же способом, что и в случае биномиального распределения. Эта сумма может быть найдена в результате дифференцирования известного ряда

$$e^a = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}. \tag{4.15}$$

Искомая сумма вычисляется следующим образом:

$$\sum_{k=0}^{\infty} k\, \frac{a^k}{k!} = \left(a\frac{\partial}{\partial a}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} = \left(a\frac{\partial}{\partial a}\right) e^a = a\, e^a.$$

Подставляя это выражение в (4.14), получаем

$$m_{\,\xi} = a. \tag{4.16}$$

Для вычисления дисперсии воспользуемся формулой (4.7):

$$D[\,\xi] = M[\,\xi^2] - m_{\xi}^2 = e^{-a} \sum_{k=0}^{\infty} k^2\, \frac{a^k}{k!} - a^2. \tag{4.17}$$

Сумма в этом выражении вычисляется как и ранее

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2\, \frac{a^k}{k!} = \left(a\frac{\partial}{\partial a}\right)\left(a\frac{\partial}{\partial a}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} = \left(a\frac{\partial}{\partial a}\right)\left(a\frac{\partial}{\partial a}\right) e^a = a\, e^a + a^2\, e^a.$$

Подставляя это выражение в (4.17), получаем

$$D[\,\xi] = a. \tag{4.18}$$

4.3.3. Равномерное распределение

Плотность равномерного распределения $f(x)$ определена в (3.18). Эта функция отлична от нуля лишь на интервале (a, b), где она равна постоянной $1/(b-a)$. Для математического ожидания получаем

$$M[\,\xi] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx = \frac{1}{b-a}\int\limits_{a}^{b} x\, dx = \frac{a+b}{2}. \tag{4.19}$$

Аналогичные вычисления для дисперсии дают

$$D[\,\xi] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 f(x)\, dx = \frac{1}{b-a}\int\limits_{a}^{b} \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx = \\ = \frac{(b-a)^2}{12}. \tag{4.20}$$

4.3.4. Нормальное распределение

Согласно формуле (3.19) нормальный закон распределения имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\;\sigma} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\,\sigma^2}\right]. \tag{4.21}$$

Математическое ожидание определяется следующим образом:

$$M[\,\xi] = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\;\sigma}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\, \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\,\sigma^2}\right] dx.$$

Замена переменной интегрирования $y = (x-m)/\,\sigma$ дает

$$M[\,\xi] = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} (\,\sigma\, y + m)\, e^{-y^2/2}\, dy = \\ = \frac{\sigma}{\sqrt{2\,\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} y\, e^{-y^2/2}\, dy + \frac{m}{\sqrt{2\,\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}\, dy.$$

Первый интеграл в правой части этого выражения равен нулю, так как интегрирование выполняется в симметричных относительно начала координат пределах, а подынтегральная функция является нечетной. Второй интеграл представляет собой интеграл Пуассона

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\,\alpha\, x^2}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \tag{4.22}$$

который был вычислен при изучении двойных интегралов. В рассматриваемом случае $\alpha = 1/2$, поэтому интеграл равен $\sqrt{2\,\pi}$, и, следовательно,

$$M[\,\xi] = m. \tag{4.23}$$

Выражение для дисперсии имеет вид

$$D[\,\xi] = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\;\sigma} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\,\sigma^2}\right] dx.$$

Та же замена переменной интегрирования $y = (x-m)/\,\sigma$ дает

$$D[\,\xi] = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\,\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} y^2\, e^{-y^2/2}\, dy =$$

$$= -\,\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\,\pi}} \frac{\partial}{\partial\,\alpha} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\,\alpha\, y^2}\, dy\bigg|_{\alpha=1/2} = -\,\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\,\pi}} \frac{\partial}{\partial\,\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,\bigg|_{\alpha=1/2} = \sigma^2.$$

Здесь было использовано значение интеграла Пуассона (4.22).

Таким образом, дисперсия для нормально распределенной случайной величины равна

$$D[\,\xi] = \sigma^2. \tag{4.24}$$

Итак, параметры m и σ, фигурирующие в законе нормального распределения (4.21), имеют простую вероятностную интерпретацию: m – это математическое ожидание, а σ – среднее квадратичное отклонение нормально распределенной случайной величины.

4.3.5. Показательное распределение

Для показательного распределения [формула (3.24)] получаем

$$M[\,\xi] = \int\limits_{0}^{\infty} x\;\alpha e^{-\,\alpha\, x}\, dx = \frac{1}{\alpha}; \tag{4.25}$$

$$D[\,\xi] = \int\limits_{0}^{\infty} \left(x - \frac{1}{\alpha}\right)^2\; \alpha e^{-\,\alpha\, x}\, dx = \frac{1}{\alpha^2}. \tag{4.26}$$

Сводка полученных результатов приведена в таблице 4.1.

4.3.6. Двумерное нормальное распределение

Из многомерных с.в. на практике чаще всего встречается нормальный закон распределения двумерной с.в. Для двумерной с.в. $(\,\xi,\ \eta)$, распределенной по нормальному закону с параметрами $m_{\,\xi}$, $m_{\,\eta}$, $\sigma_{\,\xi}$, $\sigma_{\,\eta}$ и

Таблица 4.1

Основные распределения и их числовые характеристики

Наименование распределения	Вид распределения	Математическое ожидание	Дисперсия
Биномиальное	$C_n^k\, p^k\, q^{n-k}$	np	npq
Пуассона	$\dfrac{a^k e^{-a}}{k!}$	a	a
Равномерное	$\dfrac{1}{b-a}, \quad a < x < b$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
Нормальное	$\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\exp\left[-\dfrac{(x-m)^2}{2\,\sigma^2}\right]$	m	σ^2
Показательное	$\alpha e^{-\,\alpha x}$	$\dfrac{1}{\alpha}$	$\dfrac{1}{\alpha^2}$

$r_{\xi\eta} \equiv r$, плотность распределения $f_M(x,y)$ имеет вид

$$f_M(x,y) = \frac{1}{2\,\pi\,\sigma_\xi\,\sigma_\eta\sqrt{1-r^2}}\times \tag{4.27}$$

$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-m_\xi)^2}{\sigma_\xi^2} - 2r\frac{(x-m_\xi)(x-m_\eta)}{\sigma_\xi\,\sigma_\eta} + \frac{(x-m_\eta)^2}{\sigma_\eta^2}\right]\right\}.$$

Плотность (4.27) нормирована обычным образом [см. (3.27)]:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_M(x,y)\,dxdy = 1.$$

Параметры m_ξ и m_η имеют смысл математических ожиданий с.в. ξ и η, σ_ξ и σ_η – их средних квадратических отклонений, $r_{\xi\eta}$ – коэффициента корреляции, который отражает меру взаимозависимости с.в. ξ и η. Коэффициент корреляции определяется следующим выражением (см. в связи с этим раздел 6.3.):

$$r_{\xi\eta} \equiv R(\xi,\,\eta) = \frac{M(\xi\cdot\eta) - M(\xi)M(\eta)}{\sigma_\xi\,\sigma_\eta}.$$

Коэффициент корреляции является дополнительной числовой характеристикой многомерного распределения. Если коэффициент корреляции $r=0$, то $f_M(x,y) = f_\xi(x)\cdot f_\eta(y)$, где $f_\xi(x)$ и $f_\eta(y)$ – плотности нормально распределенных одномерных величин, и с.в. ξ и η являются независимыми. Можно показать, что верно также и обратное утверждение: если с.в. ξ и η являются независимыми, то коэффициент корреляции $r_{\xi\eta} = 0$.

4.4. Закон больших чисел

При большом числе испытаний среднее арифметическое измеряемых значений с.в. оказывается близким к ее математическому ожиданию. Эта закономерность связана с частичной компенсацией отклонений от центрального значения при сложении большого количества случайных величин. Ряд утверждений, которые относятся к подобным ситуациям, получили общее название *закона больших чисел*. Ранее некоторые вопросы такого сорта уже были рассмотрены. Ниже мы обсудим другие важные аспекты закона больших чисел.

4.4.1. Закон больших чисел Чебышева

В этом пункте мы приведем некоторые результаты, касающиеся закона больших чисел.

Лемма 1 (лемма Чебышева[1]). *Для случайной величины ξ, принимающей неотрицательные значения, справедливо*

$$P(\xi \geqslant 1) \leqslant M[\xi]. \tag{4.28}$$

Доказательство

Докажем лемму для случая дискретной случайной величины ξ, которая может принимать неотрицательные значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$, где $x_k \geqslant 0$. Для вероятности, фигурирующей в условии, имеем

$$P(\xi \geqslant 1) = \sum_{x_k \geqslant 1} P(\xi = x_k).$$

Для $x_k \geqslant 1$, очевидно, выполняется $P(\xi = x_k) \leqslant x_k P(\xi = x_k)$. Следовательно,

$$P(\xi \geqslant 1) \leqslant \sum_{x_k \geqslant 1} x_k \, P(\xi = x_k).$$

[1]П. Л. Чебышев (1821–1894) – выдающийся российский математик.

Дополним сумму в правой части, добавив неотрицательное выражение,

$$\sum_{x_k<1} x_k\, P(\xi = x_k).$$

Тем самым мы распространили суммирование по всем возможным k, не изменив при этом знака неравенства. Таким образом,

$$\sum_{x_k \geqslant 1} x_k\, P(\xi = x_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} x_k\, P(\xi = x_k) = M[\xi].$$

Сопоставив все эти выражения, получим неравенство (4.28). ■

Замечание. Не представляет труда обобщить неравенство (4.28) на случай, когда вместо единицы в (4.28) фигурирует произвольное положительное ε:

$$P(\xi \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{M[\xi]}{\varepsilon}. \tag{4.29}$$

Лемма 2 (неравенство Чебышева). *Вероятность того, что модуль отклонения значения случайной величины от ее математического ожидания превысит некоторое положительное* ε *не превосходит отношения* $D[\xi]/\varepsilon^2$:

$$P(|\xi - M(\xi)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{D[\xi]}{\varepsilon^2}. \tag{4.30}$$

Доказательство

Рассмотрим неотрицательную случайную величину $\eta = (\xi - M[\xi])^2$. Воспользуемся для нее неравенством (4.29), учитывая, что $M(\eta) = D[\xi]$, получаем

$$P(|\xi - M[\xi]| \geqslant \varepsilon) = P(\eta \geqslant \varepsilon^2) \leqslant \frac{M[\eta]}{\varepsilon^2} = \frac{D[\xi]}{\varepsilon^2}.$$

■

Замечание. Неравенство Чебышева (4.30) равносильно следующему неравенству:

$$P(|\xi - M(\xi)| < \varepsilon) \geqslant 1 - \frac{D(\xi)}{\varepsilon^2}. \tag{4.31}$$

Неравенство Чебышева позволяет оценить вероятность отклонения значения с.в. от ее математического ожидания при проведении экспериментов. Продемонстрируем это на следующем примере. Рассмотрим эксперимент, в котором производится n независимых измерений некоторой величины ξ. Обозначим результаты измерений через $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а соответствующие погрешности измерений через $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$. Предположим, что систематические погрешности отсутствуют, то есть $M[\Delta_k] = 0$ для всех $k = 1, 2, \ldots, n$. Пусть дисперсия всех погрешностей $D[\Delta_k] = \sigma^2$. За значение с.в. принимают среднее арифметическое

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n).$$

Погрешность в определении этой величины равна

$$\bar{\Delta}_n = \frac{1}{n}(\Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_n).$$

Математическое ожидание и дисперсия этой величины определяются следующим образом:

$$M[\bar{\Delta}_n] = 0, \qquad D[\bar{\Delta}_n] = \frac{1}{n^2}[D[\Delta_1] + D[\Delta_2] + \cdots + D[\Delta_n]] = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Предположим, что необходимо добиться, чтобы в результате эксперимента погрешность $\bar{\Delta}_n$ по абсолютной величине не превзошла заданное значение δ с некоторой достаточно большой вероятностью

$$P(|\bar{\Delta}_n| < \delta) > 0,99.$$

Это неравенство равносильно следующему неравенству:

$$P(|\bar{\Delta}_n| \geqslant \delta) \leqslant 0,01.$$

В соответствии с (4.30) находим

$$P(|\bar{\Delta}_n| \geqslant \delta) \leqslant \frac{D[\bar{\Delta}_n]}{\delta^2} = \frac{\sigma^2}{n\ \delta^2}.$$

Эта вероятность не превзойдет 0,01, если $\sigma^2/(n\ \delta^2) \leqslant 0,01$. Таким образом, получена оценка количества измерений n, которое необходимо провести для достижения заданной точности – оно должно быть не меньше, чем $100\ \sigma^2/\ \delta^2$.

На самом деле эта оценка завышена и она может быть улучшена. Можно показать, что при больших n случайная величина $\bar{\Delta}_n$ распределена по закону, который близок к нормальному. Использование этой дополнительной информации позволяет улучшить оценку. Однако, следует отметить, что, если о с.в. ничего более не известно, кроме ее математического ожидания и дисперсии, оценка, даваемая неравенством Чебышева, не может быть улучшена.

Теорема (закон больших чисел Чебышева). *Пусть случайные величины* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ *попарно независимы и*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} D[\xi_k] = 0, \tag{4.32}$$

тогда для любого положительного ε *выполняется*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \xi_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} M[\xi_k]\right| < \varepsilon\right) = 1. \tag{4.33}$$

Доказательство

Введем величину

$$\bar{\xi}_n = \frac{1}{n}(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n),$$

тогда доказательство теоремы сводится к доказательству того, что

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|\bar{\xi}_n - M[\bar{\xi}_n]| \geqslant \varepsilon\right) = 0.$$

Так как случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ попарно независимы, то, используя свойство дисперсии (см. с. 62), можем записать

$$D[\bar{\xi}_n] = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} D[\xi_k].$$

Далее, используя неравенство Чебышева, находим

$$P\left(|\bar{\xi}_n - M[\bar{\xi}_n]| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{D[\bar{\xi}_n]}{\varepsilon^2} = \frac{1}{n^2\,\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{n} D[\xi_k].$$

Откуда, переходя к пределу $n \to \infty$ и учитывая (4.32), получаем утверждение теоремы (4.33). ■

Следствие 1. Утверждение теоремы (4.33) останется справедливым, если все дисперсии ограничены одним и тем же числом C:

$$D[\xi_k] \leqslant C$$

для всех $k = 1, 2, \ldots$

Следствие 2. Если попарно независимые случайные величины

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$$

имеют одно и то же распределение и $M[\xi_k] = a$, то

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n}{n} - a\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Пример 4.4. Пусть вероятность производства нестандартной детали в некоторых технологических условиях равна 0,1. Почему нельзя применить неравенство Чебышева для оценки вероятности того, что из 10000 деталей число нестандартных окажется заключенным в границах от 950 до 1030 включительно? Какой должна быть правая граница, чтобы применение неравенства Чебышева стало возможным? Решить задачу при соответствующем изменении правой границы.

Решение. Число нестандартных деталей в данных условиях является случайной величиной X, распределенной по биномиальному закону. В соответствии с формулами для $M[X]$ и $D[X]$ биномиального распределения находим:

$$M[X] = np = 10000 \cdot 0,1 = 1000,$$
$$D[X] = npq = 10000 \cdot 0,1 \cdot 0,9 = 900.$$

Применить неравенство Чебышева для оценки вероятности указанного в условии события нельзя, так как границы допустимых значений с.в. несимметричны относительно математического отношения (левая меньше его на $1000 - 950 = 50$, а правая больше на $1030 - 1000 = 30$). Чтобы применение неравенства Чебышева стало возможным, правая граница должна быть больше $[X]$ на 50, то есть должна быть равной 1050. Учитывая, что

$$950 \leq X \leq 1050 \Rightarrow |X - 1000| \leq 50,$$

применяем неравенство Чебышева при $q = 50$ и $D[X] = 900$:

$$\mathrm{P}\left(|X - 1000| \leq 50\right) \geq 1 - \frac{900}{50^2} = 0,64.$$

Таким образом, вероятность того, что из 10000 деталей нестандартных окажется в пределах от 950 до 1050, не меньше, чем 0,64. ▲

4.4.2. Закон больших чисел Бернулли

Схема Бернулли была рассмотрена в разделе 2.3.

Теорема (закон больших чисел Бернулли). *Пусть в схеме Бернулли из n испытаний μ – число успехов, а p – вероятность успеха в отдельном испытании. Тогда для любого положительного ε*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\mu}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1. \tag{4.34}$$

Доказательство

Согласно разделу 4.3. для числа успехов μ математическое ожидание и дисперсия равны $M[\mu] = np$ и $D[\mu] = npq$, соответственно. Тогда для с.в. $\xi = \mu/n$ находим

$$M[\,\xi] = M\left[\frac{\mu}{n}\right] = \frac{1}{n}\,M[\,\mu] = \frac{np}{n} = p\,,$$
$$D[\,\xi] = D\left[\frac{\mu}{n}\right] = \frac{1}{n^2}\,D[\,\mu] = \frac{npq}{n^2} = \frac{pq}{n}\,.$$

Применяя к этой величине неравенство (4.31), получаем

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geqslant 1 - \frac{D[\,\mu/n]}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{pq}{n\,\varepsilon^2}.$$

Переходя к пределу $n \to \infty$ и учитывая тот факт, что вероятность не может превысить единицу, получим утверждение теоремы (4.34). ■

Иными словами, теорема утверждает, что при неограниченном возрастании числа испытаний частота успехов m/n стремится к значению вероятности p.

4.5. Вопросы и задачи для самоконтроля

Вопросы

1. Определить понятия:
   - математического ожидания случайной величины;
   - дисперсии случайной величины;
   - среднего квадратичного отклонения.
2. Каковы свойства
   - математического ожидания случайной величины;
   - дисперсии случайной величины?
3. Получить выражения для математического ожидания и дисперсии для следующих распределений:
   - биномиального;
   - Пуассона;
   - равномерного;
   - нормального;
   - показательного.
4. Сформулировать и доказать
   - лемму Чебышева;
   - неравенство Чебышева;
   - теорему Чебышева;
   - закон больших чисел Бернулли.

Задачи

4.1. Производятся независимые испытания однотипных приборов. Испытания проводятся до тех пор, пока какой-то прибор не выйдет из строя. Вероятность для каждого прибора пройти испытание равна p. Случайная величина ξ – количество выполненных испытаний. Найти математическое ожидание и дисперсию этой величины.

4.2. Номинальное значение диаметра втулки равно 5 мм, а дисперсия, вследствие погрешностей изготовления, не превосходит 0,01. Оценить вероятность того, что размер втулки будет отличаться от номинала не более чем на 0,5 мм.

4.3. Сколько следует провести независимых испытаний, чтобы вероятность выполнения неравенства $|m/n - p| \leqslant 0,05$ превысила 0,75, если вероятность появления данного события в отдельном испытании $p = 0,8$?

Глава 5.

Основы математической статистики

Задачи математической статистики. Генеральная совокупность. Понятие выборки. Вариационный ряд. Статистический и группированный статистический ряд. Выборочное распределение. Выборочное среднее. Выборочная дисперсия. Точечные оценки. Состоятельные оценки. Несмещенные оценки. Эффективные оценки. Метод аналогий. Метод моментов. Метод наибольшего правдоподобия. Интервальные оценки.

5.1. Основные задачи математической статистики

☞ ***Математическая статистика*** – раздел математики, в котором рассматриваются методы анализа и обработки экспериментальных данных, полученных на основе наблюдений массовых случайных процессов.

Пусть необходимо измерить некоторую величину a, характеризующую признак $\mathcal{G}$, изучаемого объекта или процесса, например, длину, массу, время ожидания и т.п. Поскольку каждое измерение есть случайный опыт, то измеряемой величине можно сопоставить соответствующую случайную величину ξ. Далее пусть $F_\xi(x)$ есть ее гипотетическая функция распределения. Термин «гипотетическая» означает, что заранее до опыта функция распределения $F_\xi(x)$ частично или полностью неизвестна. При проведении серии из n измерений регистрируются значения $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Набор зарегистрированных значений является частью (подмножеством) множества значений с.в. ξ.

☞ Множество значений с.в. ξ называется *генеральной совокупностью*; распределение случайной величины ξ называется *распределением генеральной совокупности*, а функция $F_\xi(x)$ *функцией распределения генеральной совокупности.*

☞ Совокупность зарегистрированных данных $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, полученных в результате измерений с.в. ξ или наблюдений за ней, называется *выборкой из генеральной совокупности* (или просто *выборкой*) объема n.

В случае если измерения проводятся независимо друг от друга, то конкретной выборке можно поставить в соответствие д.с.в. ξ^*, которая принимает выборочные значения $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ с равными вероятностями $p_i = 1/n, i = \overline{1, n}$.

☞ *Выборочной функцией распределения* $F_n^*(x)$ называется функция распределения д.с.в. ξ^*.

Основная задача математической статистики формулируется следующим образом: по имеющемуся набору данных сделать выводы относительно распределения генеральной совокупности (распределения с.в. ξ) и оценить измеряемую величину a для изучаемого признака $\mathcal{G}$.

Процесс статистического исследования состоит из трех этапов.

1. *Сбор данных*. На этом этапе решаются такие задачи:

   - выбор признаков $\mathcal{G}_k$, которые наиболее существенны для описания изучаемого явления, или наиболее характерны для исследуемого объекта;
   - выбор величин a_k, которые связаны с признаками $\mathcal{G}_k$ и которые должны быть измерены;
   - определение условий регистрации данных;
   - определение методов сбора данных.

2. *Статистический анализ зарегистрированных данных (выборки)*. Здесь выполняются:

   - обработка и упорядочение выборки;

- вычисление выборочных числовых характеристик;
- определение выборочного распределения, в частности, вычисление выборочной функции распределения $F_n^*(x)$.

3. *Статистические выводы*. На заключительном этапе проводится:

- оценка значений измеряемых величин a_k (точечное оценивание);
- оценка параметров распределения генеральной совокупности (параметрическое оценивание);
- оценка ошибок измерений (интервальное оценивание);
- проверка на соответствие гипотетического распределения $F_\xi(x)$ генеральной совокупности данным эксперимента (проверка гипотез, состоятельность);
- оценка степени зависимости изучаемых признаков (корреляционный анализ).

Задачи первого этапа, по-существу, составляют содержание экспериментальных разделов специальных наук (физики, химии, биологии, экономики и др.) и не являются предметом математической статистики. Собственным предметом математической статистики являются задачи последних двух этапов.

5.2. Выборочное распределение

Пусть имеется выборка $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ объема n. Выборочные данные x_i, полученные в порядке регистрации, неудобны для анализа, поэтому требуют предварительной систематизации и упорядочения.

☞ ***Вариационным рядом*** $\{x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(n)}\}$ называется совокупность выборочных данных, расположенных в порядке возрастания

$$x_{(1)} \leqslant x_{(2)} \leqslant \cdots \leqslant x_{(n)}.$$

Разность между наибольшим и наименьшим значениями определяет размах выборки $w = x_{(n)} - x_{(1)}$.

В том случае, если в выборке есть совпадающие значения $x_{i_1} = x_{i_2} = \dots = x_{i_m} \equiv x_i$, введем для них частоту m_i, равную числу совпадающих значений, и далее относительную частоту $m_i^* = m_i/n$.

☞ ***Статистическим рядом*** называется таблица, в первой строке которой расположены в порядке возрастания *различные* выборочные данные (варианты), а во второй соответствующие им относительные частоты:

$x_{(1)}$	$x_{(2)}$	$\dots$	$x_{(l)}$
m_1^*	m_2^*	$\dots$	m_l^*

Очевидно, что сумма всех частот равна объему выборки n, а сумма всех относительных частот равна единице:

$$\sum_{i=1}^{l} m_i = n, \qquad \sum_{i=1}^{l} m_i^* = 1.$$

При большом объеме выборка разбивается на группы. В простейшем варианте разбиение проводится на равные интервалы. Пусть w размах выборки. Тогда при разбиении выборки на k равных интервалов $[\tilde{x}_{j-1}, \tilde{x}_j)$ их границы $\tilde{x}_j$ определятся как

$$\tilde{x}_j = x_{(1)} + \Delta \cdot j, \quad j = \overline{0, k}, \tag{5.1}$$

где $\Delta = w/k$ – длина интервалов разбиения. Обозначим через z_j середины интервалов, а через n_j интервальные частоты, то есть число элементов выборки, попадающих в j-й интервал (элемент, совпадающий с верхней границей интервала, относится к последующему интервалу). Введем интервальные относительные частоты $p_j^* = n_j/n$.

☞ ***Группированным статистическим рядом*** называется таблица, в первой строке которой расположены в порядке возрастания середины интервалов группировки z_j, а во второй соответствующие им относительные частоты:

z_1	z_2	$\dots$	z_k
p_1^*	p_2^*	$\dots$	p_k^*

Статистический ряд непосредственно представляет собой ряд распределения д.с.в. ξ^*, соответствующей данной выборке. Другой формой закона распределения ξ^* является выборочная функция распределения $F_n^*(x)$. Ее значения согласно определению (см. раздел 3.2.) вычисляются как

$$F_n^*(x) = P(\xi^* < x) = \sum_{x_{(i)}<x} m_i^*. \tag{5.2}$$

Здесь сумма берется по всем относительным частотам m_i^*, для которых $x_{(i)} < x$. На практике в силу кусочно-постоянного поведения функции распределения для д.с.в. достаточно найти значения функции $F_n^*(x)$ в граничных точках интервалов разбиения, определяя

$$\begin{aligned}
F_n^*(x_{(1)}) &= P(\xi^* < x_{(1)}) = 0\,,\\
F_n^*(x_{(2)}) &= P(\xi^* < x_{(2)}) = m_1^*\,,\\
F_n^*(x_{(3)}) &= P(\xi^* < x_{(3)}) = m_1^* + m_2^*\,,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
F_n^*(x_{(l)}) &= P(\xi^* < x_{(l)}) = m_1^* + m_2^* + \dots + m_l^* = 1\,.
\end{aligned}$$

На полуинтервале $(x_{(i)}, x_{(i+1)}]$ функция $F_n^*(x)$ принимает значение $F_n^*(x_{(i+1)})$, причем $F_n^*(x) = 0$ при $x \leqslant x_{(1)} \equiv x_{\min}$ и $F_n^*(x) = 1$ при $x \geqslant x_{(l)} \equiv x_{\max}$. Соединяя на плоскости (x, y) точки с координатами $(x_{(i)}, F_n^*(x_{(i)}))$ отрезками, получим полигон относительных частот для ξ^*, который аппроксимирует (приближенно описывает) график функции распределения генеральной совокупности ξ.

Аналогичным образом может быть построена выборочная функция распределения $\tilde{F}_n^*(x)$ и для случая группированной выборки по группированному статистическому ряду:

$$\tilde{F}_n^*(x) = \sum_{z_j<x} p_j^*. \tag{5.3}$$

Однако при этом следует отметить, что в общем случае группированный статистический ряд не является рядом распределения д.с.в. ξ^*, так как середины интервалов z_j могут не принадлежать данной выборке. Поэтому функция $\tilde{F}_n^*(x)$ является приближением для выборочной функции распределения $F_n^*(x)$.

Другой наглядной формой представления закона распределения группированной выборки является гистограмма, которая есть кусочно-постоянная (ступенчатая) функция $g(x)$, определенная на интервалах группировки и принимающая на j-м интервале значение, равное (см. также раздел 3.4.4.):

$$g(z_j) \equiv g_j = \frac{p_j^*}{\Delta} = \frac{n_j}{n\,\Delta} = \frac{n_j}{w}\cdot\frac{k}{n}. \tag{5.4}$$

Здесь Δ – длина интервала (при разбиении на интервалы равной длины), w – размах выборки, k – число интервалов группировки, n – объем выборки, n_j и p_j^* – интервальные частоты и относительные частоты, соответственно. Гистограмму, как правило, изображают в виде совокупности примыкающих друг к другу прямоугольников. Площадь каждого прямоугольника равна относительной частоте интервала p_j^*, а суммарная площадь равна 1. Гистограмма аппроксимирует плотность распределения $f_\xi(x)$ *непрерывно распределенной* генеральной совокупности.

Основными числовыми характеристиками выборочного распределения являются выборочное математическое ожидание (оно же *выборочное среднее*) и *выборочная дисперсия*:

$$M[\,\xi^*] \equiv \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{l} x_{(i)}\, m_i^*; \tag{5.5}$$

$$D[\,\xi^*] \equiv s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{l}(x_{(i)}-\bar{x})^2\, m_i^*. \tag{5.6}$$

Формула (5.6) имеет главным образом теоретическое значение. На практике для расчета выборочной дисперсии удобнее пользоваться формулой

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2 = \sum_{i=1}^{l} x_{(i)}^2\, m_i^* - \bar{x}^2, \tag{5.7}$$

которая является следствием (5.6).

В случае группированной выборки выборочное среднее $\tilde{\bar{x}}$ и выборочная дисперсия $\tilde{s}^2$ вычисляются аналогично:

$$\tilde{\bar{x}} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} z_j n_j = \sum_{j=1}^{k} z_j p_j^*; \tag{5.8}$$

$$\tilde{s}^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}(z_j-\bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} z_j^2 n_j - \bar{x}^2 = \sum_{j=1}^{k} z_j^2 p_j^* - \bar{x}^2. \tag{5.9}$$

Величины $\tilde{\bar{x}}$ и $\tilde{s}^2$ являются приближением для выборочных характеристик $\bar{x}$ и s^2 по той же причине, что и $\tilde{F}_n^*(x)$ для $F_n^*(x)$. Точность приближения зависит от числа интервалов группировки.

Рассмотрим процесс измерения как последовательность случайных опытов. В каждом опыте измеряемой величине a сопоставляется случайная величина X_i, где i – номер опыта. Будем предполагать, что опыты (измерения) проводятся при одинаковых условиях и являются независимыми. Тогда серии из n измерений сопоставляется n – мерный случайный вектор $\vec{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$, компоненты которого X_i $(i=\overline{1,n})$

есть независимые одинаково распределенные случайные величины. Распределения компонент X_i совпадают с распределением генеральной совокупности ξ. Конкретная выборка $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ является элементом множества значений случайного вектора $\bar{X}$. Отсюда моментально следует, что все выборочные характеристики являются случайными величинами. При проведении другой серии измерений мы получим другую выборку, а значит, и другие значения выборочных характеристик.

Рассмотрим *вероятностные* свойства случайных величин, связанных с основными выборочными характеристиками и функциями.

5.3. Свойства выборочного среднего

Свойство 1. Математическое ожидание с.в. выборочного среднего $\bar{X}$ равно математическому ожиданию генеральной совокупности

$$\boxed{M[\bar{X}] = m_{\xi}.} \tag{5.10}$$

Доказательство

Для случайной величины

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\,(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \tag{5.11}$$

где X_i $(i = \overline{1, n})$ – набор независимых с.в., распределение которых совпадает с распределением генеральной совокупности, последовательно находим

$$M[\bar{X}] = M\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M[X_i] = \frac{1}{n}\cdot n \cdot m_{\xi} = m_{\xi}.$$

■

Свойство 2. Дисперсия с.в. выборочного среднего $\bar{X}$ равна

$$\boxed{D[\bar{X}] = \frac{D_{\xi}}{n}.} \tag{5.12}$$

Доказательство

Так как дисперсия суммы независимых с.в. равна сумме дисперсий, то имеем

$$D[\bar{X}] = D\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D[X_i] = \frac{1}{n^2}\cdot n \cdot D_{\xi} = \frac{D_{\xi}}{n}.$$

■

Свойство 3. При достаточно больших n с.в. $\bar{X}$ имеет закон распределения близкий к нормальному вида

$$\bar{X} \quad \Rightarrow \quad N\left[m_{\xi}, \frac{\sigma_{\xi}}{\sqrt{n}}\right] + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \tag{5.13}$$

где $o(1/\sqrt{n})$ – бесконечно малая функция порядка малости выше, чем $1/\sqrt{n}$, то есть

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \cdot o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 0.$$

Доказательство

Данный результат является следствием центральной предельной теоремы (ЦПТ) для независимых одинаково распределенных случайных величин с конечными математическими ожиданиями и дисперсиями. ■

Свойство 4. Если генеральная совокупность имеет нормальный закон распределения $N[m, \sigma]$, то тогда с.в. $\bar{X}$ также будет распределена по нормальному закону с параметрами m и $\sigma/\sqrt{n}$, то есть $N[m, \sigma/\sqrt{n}]$, при этом плотность функции распределения равна

$$f_{\bar{X}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma(\bar{X})} \exp\left[-\frac{(x - M(\bar{X}))^2}{2\,\sigma(\bar{X})^2}\right] = \\ = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left[-\frac{(x-m)^2\, n}{2\,\sigma^2}\right]. \tag{5.14}$$

Доказательство

Пусть ξ распределена по закону $N[m, \sigma]$, тогда $m_{\xi} = m$, а $D_{\xi} = \sigma^2$. Далее воспользуемся следующими двумя свойствами нормального распределения:

1) если с.в. X распределена по нормальному закону $N[m, \sigma]$, то с.в. X/n также будет распределена по нормальному закону вида $N[m/n, \sigma/n]$;

2) если независимые с.в. X_1 и X_2 распределены по нормальным законам $N[m_1, \sigma_1]$ и $N[m_2, \sigma_2]$, соответственно, то тогда их сумма $X_1 + X_2$ также будет распределена по нормальному закону вида $N[m_1+m_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}]$ (устойчивость по суммированию).

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} X_i \quad &\Rightarrow \quad N[m,\, \sigma] \qquad (i=\overline{1,n}); \\ \frac{X_i}{n} \quad &\Rightarrow \quad N\left[\frac{m}{n}, \frac{\sigma}{n}\right] \quad (i=\overline{1,n}); \\ \bar{X} = \frac{X_1}{n} + \frac{X_2}{n} + \dots + \frac{X_n}{n} \quad &\Rightarrow \quad N\left[\frac{m}{n}\cdot n, \sqrt{\frac{\sigma^2}{n^2}\cdot n}\right] = N\left[m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]. \end{aligned}$$

■

Свойство 5. Случайная величина $\bar{X}$ сходится по вероятности к математическому ожиданию генеральной совокупности $\bar{X} \xrightarrow{p} m_{\xi}$, то есть справедливо предельное соотношение

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} P(\left|\bar{X} - m_{\xi}\right| < \varepsilon) = 1.} \tag{5.15}$$

Доказательство

Свойство повторяет следствие 2 закона больших чисел Чебышева.

■

Данные свойства позволяют сделать вывод, что с.в. $\bar{X}$, связанная с выборочным средним, обладает свойством устойчивости. Другими словами, с увеличением объема выборки значения выборочных средних становятся все менее случайными и могут служить оценкой для измеряемой величины a.

Пример 5.1. Найти вероятность того, что выборочное среднее отклонится от математического ожидания генеральной совокупности m_{ξ} не более чем на ε, если известно, что генеральная совокупность имеет нормальный закон распределения с параметрами m и σ.

Решение. При условии задачи, во-первых, математическое ожидание генеральной совокупности m_{ξ} равно m, а во-вторых, согласно Свойству 4 с.в. выборочного среднего $\bar{X}$ имеет нормальное распределение с параметрами m и $\sigma/\sqrt{n}$. Поэтому искомая вероятность находится как

$$P(\bar{X} - \varepsilon < m < \bar{X} + \varepsilon) = P(|\bar{X} - m| < \varepsilon) = 2\,\Phi\left(\varepsilon\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right). \tag{5.16}$$

▲

5.4. Свойства выборочной дисперсии

Свойство 1. Математическое ожидание с.в. выборочной дисперсии S^2 равно

$$\boxed{M[S^2] = \frac{n-1}{n}\,D_{\,\xi}.} \tag{5.17}$$

Доказательство

Для математического ожидания с.в. выборочной дисперсии S^2, которую можно записать как

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}^2 \equiv \bar{X^2} - \bar{X}^2 \tag{5.18}$$

с учетом свойств с.в. выборочного среднего $\bar{X}$ последовательно находим

$$\begin{aligned} M[S^2] &= M\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}^2\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M[X_i^2] - M[\bar{X}^2] = \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(D[X_i] + M^2[X_i]) - (D[\bar{X}] + M^2[\bar{X}]) = \\ &= \frac{1}{n}\cdot n\cdot(D_{\,\xi} + m_{\xi}^2) - \left(\frac{D_{\,\xi}}{n} + m_{\xi}^2\right) = \\ &= D_{\,\xi} + m_{\xi}^2 - \frac{D_{\,\xi}}{n} - m_{\xi}^2 = \frac{n-1}{n}\,D_{\,\xi}. \end{aligned} \tag{5.19}$$

■

Свойство 2. Дисперсия с.в. выборочной дисперсии S^2 вычисляется по формуле

$$\boxed{D[S^2] = \frac{(n-1)^2 e_{\,\xi} + 2n(n-1)}{n^3}\,D_{\xi}^2,} \tag{5.20}$$

где $e_{\,\xi} = \mu_4/\,\mu_2^2 - 3$ – эксцесс генеральной совокупности ξ, μ_4 – центральный момент четвертого порядка, а $\mu_2 \equiv D_{\,\xi}$. ■

Свойство 3. Если генеральная совокупность имеет нормальный закон распределения $N[m,\,\sigma]$, то математическое ожидание и дисперсия с.в. выборочной дисперсии S^2 находятся по формулам:

$$M[S^2] = \frac{n-1}{n}\,\sigma^2; \tag{5.21}$$

$$D[S^2] = \frac{2(n-1)}{n^2}\,\sigma^4. \tag{5.22}$$

Доказательство

Для нормально распределенной генеральной совокупности $\mu_2 = D_{\,\xi} = \sigma^2$, а $\mu_4 = 3\,\sigma^4$, поэтому

$$e_{\,\xi} = \frac{\mu_4}{\mu_2} - 3 = \frac{3\,\sigma^4}{\sigma^4} - 3 = 3 - 3 = 0.$$

Подставляя эти значения для D_ξ и e_ξ в соотношения (5.17) и (5.20), получаем формулы (5.21) и (5.22). ■

Свойство 4. Случайная величина S^2 сходится по вероятности к дисперсии генеральной совокупности $S^2 \xrightarrow{p} D_\xi$, то есть справедливо предельное соотношение

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} P\left(\left|S^2 - D_\xi\right| < \varepsilon\right) = 1.} \tag{5.23}$$

Доказательство

Используя следствие 2 закона больших чисел Чебышева, получаем

$$S^2 = \bar{X^2} - \bar{X}^2 \xrightarrow{p} M[\,\xi^2] - M^2[\bar{X}] = D_\xi + m_\xi^2 - m_\xi^2 = D_\xi.$$

■

Свойство 5. При достаточно больших n с.в. S^2 имеет закон распределения близкий к нормальному вида

$$S^2 \quad \Rightarrow \quad N\left[D_\xi, \frac{\sqrt{e_\xi + 2}\ \sigma_\xi}{\sqrt{n}}\right] + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{5.24}$$

Отмеченные свойства указывают на то, что выборочное среднее s^2, вычисленное по заданной выборке, *в принципе* можно взять в качестве оценки для дисперсии генеральной совокупности D_ξ, так как соответствующая с.в. S^2 обладает устойчивостью при больших n и асимптотически приближается к D_ξ. Однако при небольшом объеме выборки эта оценка будет, как правило, заниженной, так как $M[S^2] - D_\xi = -D_\xi/n < 0$, что непосредственно следует из формулы (5.17). Этой особенностью не обладает *исправленная выборочная дисперсия*, определенная как

$$s_0^2 = \frac{n}{n-1}\,s^2. \tag{5.25}$$

Используя свойства математического ожидания и дисперсии, для соответствующей с.в. S_0^2 из (5.17) и (5.20) находим

$$M[S_0^2] = D_\xi, \qquad D[S_0^2] = \left(\frac{e_\xi}{n} + \frac{2}{n-1}\right) D_\xi^2. \tag{5.26}$$

В случае нормально распределенной по закону $N[m,\,\sigma]$ генеральной совокупности получаем

$$M[S_0^2] = \sigma^2, \qquad D[S_0^2] = \frac{2}{n-1}\,\sigma^4. \tag{5.27}$$

Все асимптотические свойства исправленной выборочной дисперсии совпадают с соответствующими свойствами обычной выборочной дисперсии, так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n-1}=1.$$

5.5. Свойства выборочной функции распределения

Свойство 1. Математическое ожидание случайной функции распределения $\mathcal{F}_n^*(x)$, соответствующей выборочной функции распределения $F_n^*(x)$, для каждого фиксированного $x\in\mathbf{R}$ равно значению функции распределения генеральной совокупности:

$$\boxed{M[\mathcal{F}_n^*(x)]=F_\xi(x).} \tag{5.28}$$

Доказательство

Для выборочного случайного вектора $\vec{X}=(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ введем следующую систему случайных функций ($i=\overline{1,n}$):

$$I_i(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x_i\geqslant x,\\ 1, & \text{если } x_i<x.\end{cases} \tag{5.29}$$

Тогда случайную функцию распределения $\mathcal{F}_n^*(x)$ можно представить в виде суммы

$$\mathcal{F}_n^*(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}I_i(x). \tag{5.30}$$

Далее отметим, что для любого действительного x

$$M[I_i(x)]=0\cdot P\{X_i\geqslant x\}+1\cdot P\{X_i<x\}=P\{X_i<x\}=F_\xi(x), \tag{5.31}$$

так как все компоненты выборочного случайного вектора имеют распределение, совпадающее с распределением генеральной совокупности. Тогда для математического ожидания $\mathcal{F}_n^*(x)$ получаем

$$M[\mathcal{F}_n^*(x)]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M[I_i(x)]=\frac{1}{n}\cdot n\cdot F_\xi(x)=F_\xi(x).$$

■

Свойство 2. Дисперсия случайной функции распределения $\mathcal{F}_n^*(x)$ для каждого фиксированного x равна

$$\boxed{D[\mathcal{F}_n^*(x)] = \frac{F_\xi(x)(1 - F_\xi(x))}{n}.} \tag{5.32}$$

Доказательство

Для системы функций $I_i(x)$ (5.29), соответствующей выборочному случайному вектору $\vec{X}$, дисперсии совпадают (все компоненты X_i, $i = \overline{1, n}$ одинаково распределены) и равны

$$\begin{aligned} D[I_i(x)] &= 0^2 \cdot P\{X_i \geqslant x\} + 1^2 \cdot P\{X_i < x\} - M^2[I_i(x)] = \\ &= P\{X_i < x\} - F_\xi^2(x) = F_\xi(x) - F_\xi^2(x) = F_\xi(x)(1 - F_\xi(x)). \end{aligned} \tag{5.33}$$

Поэтому, учитывая совокупную независимость $I_i(x)$ для каждого x (в силу совокупной независимости X_i, так как измерения проводятся независимо друг от друга), с учетом свойств дисперсии из соотношения (5.30) находим

$$D[\mathcal{F}_n^*(x)] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} D[I_i(x)] = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot F_\xi(x)(1 - F_\xi(x)) = \frac{F_\xi(x)(1 - F_\xi(x))}{n}.$$

■

Свойство 3. При достаточно больших n случайная функция распределения $\mathcal{F}_n^*(x)$ при каждом x имеет закон распределения близкий к нормальному вида

$$\mathcal{F}_n^*(x) \quad \Rightarrow \quad N\left[F_\xi(x), \frac{\sqrt{F_\xi(x)(1 - F_\xi(x))}}{\sqrt{n}}\right] + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{5.34}$$

Доказательство

Данный результат является следствием центральной предельной теоремы (ЦПТ) для независимых одинаково распределенных случайных величин $I_i(x)/n$ с конечными математическими ожиданиями и дисперсиями, равными $F_\xi(x)/n$ и $F_\xi(x)(1 - F_\xi(x))/n^2$, соответственно. ■

Свойство 4. Случайная функция распределения $\mathcal{F}_n^*(x)$ для каждого $x \in \mathbf{R}$ сходится по вероятности к функции распределения генеральной совокупности $\mathcal{F}_n^*(x) \xrightarrow{p} F_\xi(x)$, то есть справедливо предельное соотношение

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} P(\left|\mathcal{F}_n^*(x) - F_\xi(x)\right| < \varepsilon(x)) = 1.} \tag{5.35}$$

Доказательство

В силу равенств (5.30) и (5.31) данное свойство повторяет следствие 2 закона больших чисел Чебышева при фиксированном x. ■

Свойство 5 (теорема Гливенко). Максимум отклонения выборочной функции распределения $F_n^*(x)$ от функции распределения генеральной совокупности $F_\xi(x)$ стремится по вероятности к нулю

$$\max|F_n^*(x) - F_\xi(x)| \xrightarrow{p} 0,$$

то есть справедливо предельное соотношение

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} P(\max\left|\mathcal{F}_n^*(x) - F_\xi(x)\right| < \varepsilon) = 1.} \tag{5.36}$$

Свойство 6 (теорема Колмогорова). Если функция распределения генеральной совокупности $F_\xi(x)$ непрерывна, то тогда распределение случайной величины

$$\boxed{Y = \sqrt{n}\max\left|\mathcal{F}_n^*(x) - F_\xi(x)\right|} \tag{5.37}$$

при $n \to \infty$ стремится к распределению Колмогорова с непрерывной функцией распределения $\mathrm{K}(y)$, равной

$$\boxed{\mathrm{K}(y) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} (-1)^i e^{-2i^2y^2}, \quad \text{где} \quad y \geqslant 0.} \tag{5.38}$$

Отмеченные выше свойства показывают, что выборочная функция распределения $F_n^*(x)$ может служить оценкой для функции распределения генеральной совокупности $F_\xi(x)$. При этом имеет место не только поточечная сходимость $F_n^*(x)$ к $F_\xi(x)$ (Свойства 3 и 4), но и сходимость в целом (равномерная сходимость) (Свойства 5 и 6).

5.6. Свойства выборочной гистограммы

Свойство 1. Пусть число интервалов группировки k не зависит от объема выборки n. Тогда площадь j-го прямоугольника выборочной гистограммы S_j $(j = \overline{1,k})$ при $n \to \infty$ стремится по вероятности к вероятности попадания с.в. ξ в полуинтервал $(x_j, x_{j+1}]$:

$$S_j \xrightarrow{p} P(x_j < \xi \leqslant x_{j+1}). \tag{5.39}$$

Доказательство

Площадь j-го прямоугольника S_j выборочной гистограммы согласно ее определению (5.4) равна $S_j = g_j \cdot \Delta_j = p_j^*$. Здесь p_j^* – относительная частота j-го интервала группировки, которая может быть выражена через выборочную функцию распределения как разность

$$p_j^* = F_n^*(x_{j+1}) - F_n^*(x_j).$$

Далее на основании Свойства 4 выборочной функции распределения в пределе $n \to \infty$ получаем

$$p_j^* = F_n^*(x_{j+1}) - F_n^*(x_j) \xrightarrow{p} F_\xi(x_{j+1}) - F_\xi(x_j) = P(x_j < \xi \leqslant x_{j+1}).$$

В случае, если генеральная совокупность имеет непрерывное распределение с плотностью распределения $f_\xi(x)$, данное свойство утверждает, что в пределе $n \to \infty$ площадь каждого прямоугольника гистограммы стремится к площади под кривой плотности распределения $f_\xi(x)$ на соответствующем интервале группировки. В этом смысле гистограмма аппроксимирует плотность распределения генеральной совокупности. Часто для более наглядного представления о форме кривой распределения $f_\xi(x)$ проводят плавную кривую, проходящую через середины верхних оснований прямоугольников выборочной гистограммы.

5.7. Элементы теории оценок

5.7.1. Точечные оценки параметров распределений

В разделе 5.3. было установлено, что выборочное среднее $\bar{x}$ может быть выбрано в качестве оценки измеряемой величины a. Однако проблема заключается в том, что в качестве оценки a можно было бы взять и другие выборочные характеристики, например, выборочную медиану, выборочное геометрическое среднее, выборочное гармоническое среднее и т.п. Естественно возникает вопрос: какая из оценок «лучше»? Чтобы ответить на этот вопрос необходимо:

1) дать точное определение понятия оценки;

2) четко сформулировать систему критериев, определяющих меру соответствия той или иной оценки измеряемой величине;

3) указать методы получения наилучших с точки зрения установленных критериев оценок.

☞ ***Точечной оценкой*** $\tilde{a}$ измеряемой величины a называется ее приближенное значение, полученное по выборке.

☞ ***Статистикой*** называется любая функция, зависящая от выборочных значений.

Таким образом, любая формула $\tilde{a}_n = \theta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, по которой производится точечная оценка измеряемой величины, является статистикой. При проведении другой серии измерений значение статистики изменится. Следовательно, статистика есть случайная величина, имеющая некоторое распределение, в принципе зависящее от измеряемого параметра. Особое значение в теории оценок имеют статистики, распределения которых от измеряемого параметра не зависят.

Рассмотрим основные типы точечных оценок.

☞ Точечная оценка $\tilde{a}_n = \theta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется ***состоятельной оценкой*** измеряемой величины или параметра a, если статистика $\tilde{a}_n$ сходится по вероятности к a при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} P(|\tilde{a}_n - a| < \varepsilon) = 1\,. \tag{5.40}$$

Состоятельность оценки $\tilde{a}_n$ во многих случаях может быть установлена с помощью следующего критерия.

Критерий состоятельности оценки. При выполнении предельных соотношений:

$$\lim_{n\to\infty} M[\tilde{a}_n] = a; \tag{5.41}$$

$$\lim_{n\to\infty} D[\tilde{a}_n] = 0 \tag{5.42}$$

оценка $\tilde{a}_n$ является состоятельной оценкой для измеряемой величины (параметра) a.

Доказательство

Выполняя предельный переход в неравенстве Чебышева (4.31) для случайной величины $\xi \equiv \tilde{a}_n$ с учетом (5.41) и (5.42), получаем

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ P\left(|\tilde{a}_n - M[\tilde{a}_n]| < \varepsilon\right) \geqslant 1 - \frac{D[\tilde{a}_n]}{\varepsilon^2} \right\} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} P(|\tilde{a}_n - a| < \varepsilon) = 1.$$

■

☞ ***Несмещенной оценкой*** называется точечная оценка $\tilde{a}_n$, математическое ожидание которой равно оцениваемой величине (параметру) a:

$$M[\tilde{a}_n] = a. \tag{5.43}$$

☞ ***Смещением*** оценки $\tilde{a}_n$ называется разность

$$b_n(a) = M[\tilde{a}_n] - a. \tag{5.44}$$

Вообще говоря, само по себе смещение для состоятельных оценок не является отрицательной характеристикой. Несмещенность есть, в некотором смысле, форма удобства. Если смещение известно, то всегда можно перейти от смещенной оценки к несмещенной с помощью поправочного коэффициента. Для несмещенных оценок систематическая ошибка равна нулю.

Суть состоятельности заключается в том, что с увеличением объема выборки оценка $\tilde{a}_n$ приближается к истинной величине a. Здесь следует отметить, что разные состоятельные оценки имеют и разную скорость приближения. Поэтому к состоятельным оценкам предъявляются дополнительные требования.

☞ ***Эффективной оценкой*** называется несмещенная оценка $\tilde{a}_n$, дисперсия которой минимальна в классе несмещенных оценок.

Здесь важно отметить, что оценки с минимальной дисперсией в классе всех точечных оценок не существует. Критерий качества оценки в форме минимальности дисперсии можно установить только в классе оценок с одинаковым смещением, в частности, в классе несмещенных оценок.

Рассмотрим задачу параметрического оценивания. Предположим, что распределение генеральной совокупности непрерывно и принадлежит некоторому однопараметрическому семейству распределений $f_\xi(x;\, \alpha)$. Требуется по выборке оценить параметр распределения α.

Пусть плотность распределения $f_\xi(x;\, \alpha)$ при всех возможных значениях параметра α обладает свойствами:

(I) функция $\ln f_{\xi}(x;\, \alpha)$ непрерывно дифференцируема по параметру α;

(II) существует и непрерывно по параметру α следующее математическое ожидание:

$$I(\alpha) = M\left[\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln f_{\xi}(x;\, \alpha)\right)^2\right]. \tag{5.45}$$

Тогда для дисперсии оценки параметра $D[\tilde{\alpha}_n]$ можно установить нижнюю границу.

Неравенство Рао-Крамера. Пусть параметрическое семейство непрерывных распределений генеральной совокупности удовлетворяет условиям (I) и (II). Тогда для любой *несмещенной* оценки параметра $\tilde{\alpha}_n$ справедливо *неравенство Рао-Крамера*

$$\boxed{D[\tilde{\alpha}_n] = M\left[(\tilde{\alpha}_n - \alpha)^2\right] \geqslant \frac{1}{nI(\alpha)}.} \tag{5.46}$$

Функция $I_n(\alpha) = nI(\alpha)$ называется *функцией информации Фишера*. Аналогичное неравенство можно записать и для дискретного распределения генеральной совокупности с заменой в формуле (5.45) плотности распределения $f_{\xi}(x;\, \alpha)$ на вероятность $p_{\xi}(x;\, \alpha)$.

Точечная оценка $\tilde{\alpha}_n$ будет эффективной оценкой параметра α в случае, когда неравенство (5.46) превращается в равенство.

Пример 5.2. Определить тип оценки математического ожидания, совпадающей с выборочным средним, то есть $\tilde{m} = \bar{x}$, в предположении, что генеральная совокупность ξ имеет нормальный закон распределения.

Решение. Для математического ожидания и дисперсии оценки $\tilde{m} = \bar{x}$ согласно свойствам 1 и 2 выборочного среднего имеем

$$M[\tilde{m}] = M[\bar{x}] = m; \qquad D[\tilde{x}] = D[\bar{x}] = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Следовательно, $\tilde{m} = \bar{x}$ есть несмещенная оценка. Так как

$$\lim_{n\to\infty} M[\tilde{m}] = \lim_{n\to\infty} M[\bar{x}] = m; \qquad \lim_{n\to\infty} D[\tilde{x}] = \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma^2}{n} = 0,$$

то согласно критерию состоятельности оценка $\tilde{m} = \bar{x}$ является состоятельной. Далее для плотности нормального распределения последовательно находим

$$f_{\xi}(x;m)\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma}\,e^{-\frac{(x-m)^2}{2\,\sigma^2}} \quad \Rightarrow \quad \ln\, f_{\xi}(x;m) = -\ln\,\sqrt{2\,\pi} - \ln\;\sigma - \frac{(x-m)^2}{2\,\sigma^2};$$

$$\frac{\partial}{\partial m}\Big(\ln\, f_{\xi}(x;m)\Big) = \frac{x-m}{\sigma^2};$$

$$I(m) = M\left[\left(\frac{\partial}{\partial m}\Big(\ln\, f_{\xi}(x;m)\Big)\right)^2\right] = M\left[\frac{(x-m)^2}{\sigma^4}\right] = \frac{\sigma^2}{\sigma^4} = \frac{1}{\sigma^2}.$$

Очевидно, что $\ln\, f_{\xi}(x;m)$ и $I(m)$ непрерывны по m. Тогда справедливо неравенство Рао-Крамера:

$$D[\tilde{m}] \geqslant \frac{1}{nI(m)} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sigma^2}{n} \geqslant \frac{1}{n\cdot\frac{1}{\sigma^2}} = \frac{\sigma^2}{n} \quad \Rightarrow \quad D[\tilde{m}] = \frac{1}{nI(m)}.$$

В силу полученного равенства делаем вывод, что оценка $\tilde{m} = \bar{x}$ имеет наименьшую дисперсию. Таким образом, $\tilde{m} = \bar{x}$ для параметра m нормально распределенной генеральной совокупности является состоятельной, несмещенной и эффективной. ▲

5.7.2. Методы получения точечных оценок

Рассмотрим некоторые методы нахождения точечных оценок параметров распределения.

I. Метод аналогий

Согласно методу аналогий в качестве оценок параметров распределения генеральной совокупности выбираются аналогичные параметры выборочного распределения. В частности, для математического ожидания m и дисперсии σ^2 имеем

$$\tilde{m} = \bar{x} \qquad \text{(состоятельная, несмещенная);}$$
$$\tilde{\sigma}^2 = s^2 \qquad \text{(состоятельная, смещенная).}$$

II. Метод моментов

Начальным моментом k-го порядка дискретной с.в. X величины называется величина

$$\boxed{M[X^k] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k.} \tag{5.47}$$

Для непрерывной с.в.

$$\boxed{M[X^k] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\, x^k\, f(x).} \tag{5.48}$$

Метод моментов нахождения точечных оценок параметров заданного распределения состоит в приравнивании теоретических и экспериментальных (эмпирических) моментов и в последующем определении неизвестных параметров распределения из полученных уравнений.

Для однопараметрических семейств распределений параметр определяется из уравнения $M(X) = \bar{x}$, где $\bar{x}$ – выборочное среднее. Для двухпараметрических, как, например, нормальное распределение $N(m, \sigma)$, к этому уравнению необходимо добавить уравнение для второго начального момента или (что чаще бывает удобнее) для дисперсии.

Пусть н.с.в. X распределена по нормальному закону с неизвестными параметрами $\theta_1 = m$ и $\theta_2 = \sigma$ и требуется определить эти параметры по выборке $\{x_i\}$. Вычислим эмпирические моменты (вместо второго момента удобнее вычислять дисперсию), а именно выборочное среднее $\bar{x}$ и выборочную дисперсию s^2:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2.$$

Приравнивая далее $M[X] = \bar{x}$ и $D[X] = s^2$, находим $\theta_1 = \bar{x}$ и $\theta_2 = \sqrt{s^2}$.

Метод моментов является наиболее простым способом оценки параметров распределения. Обычно эти оценки состоятельны, но не всегда достаточно эффективны.

III. Метод наибольшего правдоподобия (МП)

Одним из основных методов точечного оценивания в современной математической статистике является метод, основанный на анализе специальной функции, которая содержит в себе информацию как о типе распределения генеральной совокупности, так и о полученной в результате наблюдений выборке.

Пусть генеральная совокупность имеет непрерывное распределение с плотностью $f_\xi(x;\, \theta)$, зависящей от параметра θ, а $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ – некоторая выборка. Тогда функция

$$\boxed{L(x_1, x_2, \ldots, x_n;\, \theta) = f_\xi(x_1;\, \theta) f_\xi(x_2;\, \theta) \cdots f_\xi(x_n;\, \theta)} \qquad (5.49)$$

называется *функцией правдоподобия.*

Для выборки, полученной из генеральной совокупности с дискретным распределением $p_{x_k}(\theta) = P(X = x_k)$, функция правдоподобия определяется следующим образом:

$$\boxed{L(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ \theta) = p_{x_1}(\theta) p_{x_2}(\theta) \cdots p_{x_k}(\theta).} \tag{5.50}$$

Метод наибольшего правдоподобия (МП) состоит в том, что за оценку $\tilde{\theta}$ параметра θ принимается его значение, при котором функция L (при фиксированных x_k) достигает максимума. Для широкого класса распределений МП-оценки являются состоятельными и асимптотически эффективными. Более того, в случае существования эффективных оценок именно МП-оценки являются эффективными. В этом смысле метод наибольшего правдоподобия представляет собой способ получения оптимальных оценок.

Условие максимума функции правдоподобия – равенство нулю ее частной производной по параметру θ, здесь удобно записать в виде

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = 0. \tag{5.51}$$

В том случае, если имеется более одного параметра, что эти параметры удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_k} = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, s. \tag{5.52}$$

Пример 5.3. Найти МП-оценки для генеральной совокупности, распределенной по нормальному закону.

Решение. Неизвестными параметрами распределения, которые следует определить в случае нормального закона, являются математическое ожидание

$$a = M[\xi]$$

и дисперсия

$$b = \sigma^2 = D[\xi].$$

Плотность распределения для нормального закона имеет вид (см. с. 52):

$$f_\xi(x; a, b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2b}\right].$$

Функция правдоподобия согласно (5.49) запишется как

$$L = L(x_1, x_2, \ldots, x_n; a, b) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi b}}\right)^n \exp\left[-\sum_{k=1}^{n} \frac{(x_k - a)^2}{2b}\right].$$

Откуда находим
$$\ln L = -\frac{n}{2}\ln(2\,\pi\, b) - \frac{1}{2b}\sum_{k=1}^{n}(x_k - a)^2.$$

Система уравнений для определения оценок $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$, полученная с условием наибольшего правдоподобия (5.52), запишется следующим образом:
$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L}{\partial a} = \dfrac{1}{\tilde{b}}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x_k - \tilde{a}), \\ \dfrac{\partial \ln L}{\partial b} = -\dfrac{n}{2\tilde{b}} + \dfrac{1}{2(\tilde{b})^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x_k - a)^2. \end{cases}$$

Первое уравнение сразу дает
$$\tilde{a} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = \bar{x}.$$

Подстановка этого выражения во второе уравнение системы приводит к оценке дисперсии
$$\tilde{b} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2.$$

Как следует из примера (5.2), МП-оценка математического ожидания $\tilde{a} = \bar{x}$ является состоятельной, несмещенной и эффективной. МП-оценка дисперсии $\tilde{b} = s^2$ является состоятельной, смещенной, но только асимптотически эффективной. ▲

IV. Метод наименьших квадратов

Другим распространенным методом получения точечных оценок неизвестных параметров распределения является метод наименьших квадратов.

Определение неизвестных параметров $\bar{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n\}$ по *методу наименьших квадратов* осуществляется в результате минимизации целевой функции $g(\bar{\theta})$, которая в простейшем варианте составляется в виде суммы квадратов отклонений «теоретической кривой» $y(x;\bar{\theta})$ от экспериментальных (выборочных) данных y_i $(i = \overline{1,k})$:
$$\boxed{g(\bar{\theta}) = \sum_i \left(y(x_i;\bar{\theta}) - y_i\right)^2.} \tag{5.53}$$

5.7.3. Интервальные оценки

Всякое измерение будет неполным, если не указаны ошибки измерения. Если в качестве приближенного значения измеряемой величины a берется ее точечная оценка $\tilde{a}$, то учитывая, что точечная оценка, вычисленная по выборке, есть некоторое значение соответствующей случайной величины A, то естественно связать меру погрешности измерения величины a с числовым параметром распределения с.в. A, характеризующим разброс относительно $\tilde{a}$. Простейшей такой числовой характеристикой является среднее квадратичное отклонение σ. Поэтому часто ее оценка, например, выборочное среднее квадратичное отклонение $\tilde{\sigma} = \sqrt{s^2}$, и принимается за ошибку измерения Δa. При этом результат измерения записывается в виде интервала

$$a = \tilde{a} \pm \Delta a. \tag{5.54}$$

Тем не менее определение погрешности измерений Δa в единицах σ ($1\,\sigma$ отклонение, $2\,\sigma$ отклонение и т.п.) оправдано и имеет простой наглядный смысл только для симметричных распределений, таких например, как нормальное распределение. Для скошенных распределений (биномиальное распределение, распределение Пуассона и др.) представление результатов измерений в виде $a = \tilde{a} \pm k\ \sigma$, то есть в виде симметричного интервала, теряет свой смысл и становится не оправданным.

В тридцатых годах XX века американским математиком Нейманом был предложен другой подход к определению ошибок измерений, основанный на понятии доверительного интервала.

☞ ***Доверительным интервалом*** измеряемой величины a называется интервал (a_1, a_2), покрывающий ее истинное значение с доверительной вероятностью β. При этом $\alpha = 1 - \beta$ называется уровнем значимости.

В качестве стандартной доверительной вероятности β обычно используются значения 0,9, 0,95 и 0,99.

Следует отметить, что одно лишь требование покрытия a с вероятностью β не позволяет однозначно по имеющейся выборке определить границы интервала, и необходимо задать дополнительные условия. Так, для двухсторонних интервалов наиболее употребительным является выбор границ a_1 и a_2 из условия равновероятности, а именно

$$P(A < a_1) = P(A > a_2) = \frac{1-\beta}{2} = \frac{\alpha}{2}. \tag{5.55}$$

При этом для симметричных распределений этот выбор автоматически приводит к интервалам наименьшей длины.

В случае, когда одна из границ достоверно известна, в статистическом анализе обоснованным является использование и односторонних доверительных интервалов. Например, верхняя граница интервала $(0, a_2)$, допустимого статистически на уровне значимости α, для положительно определенной величины a находится как решение равенства

$$P(A > a_2) = 1 - \beta = \alpha. \tag{5.56}$$

Для разрешения соотношений (5.55) и (5.56) необходимо знать распределение статистики A, которая используется для получения интервальных оценок. Наиболее простые решения соотношений этого типа получаются при следующих предположениях.

Пусть имеется некоторая статистика $A(\tilde{a}, a)$, удовлетворяющая условиям:

1) $A(\tilde{a}, a)$ монотонно зависит от оцениваемой величины a;

2) распределение статистики A от a не зависит.

Обозначим через w_p квантиль распределения A порядка p, которая определяется как

$$P(A < w_p) = p. \tag{5.57}$$

Тогда из (5.55) получаем

$$a_1 = w_{\frac{\alpha}{2}},\ a_2 = w_{1-\frac{\alpha}{2}} \qquad \Rightarrow \qquad w_{\frac{\alpha}{2}} < A(\tilde{a}, a) < w_{1-\frac{\alpha}{2}}. \tag{5.58}$$

Аналогично из (5.56) находим

$$a_2 = w_{1-\alpha} \qquad \Rightarrow \qquad 0 < A(\tilde{a}, a) < w_{1-\alpha}. \tag{5.59}$$

Квантили w_p от a не зависят, так как по предположению распределение статистики A не зависит от a, а значит, границы неравенств (5.58) и (5.59) являются числами. В свою очередь монотонность зависимости A от a гарантирует, что после разрешения неравенств (5.58) и (5.59) относительно a доверительные области будут представлять собой односвязные интервалы.

Наиболее важной с точки зрения многочисленных приложений является задача оценки параметров m и σ нормально распределенной генеральной совокупности ξ. При этом в качестве статистики, удовлетворяющей указанным выше условиям, выбирается статистика, имеющая распределение $N(0,1)$ или связанные с ней распределения – распределение Стьюдента и распределение χ^2. Дадим определения этих распределений.

Пусть ξ, ξ_1, $\xi_2, \ldots,$ ξ_n – независимые случайные величины с нормальным законом распределения $N(0,1)$.

☞ Распределение с.в.

$$\chi_n^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2$$

называется χ^2-*распределением с* n *степенями свободы.*

☞ Распределение с.в.

$$\tau_n = \frac{\xi}{\sqrt{\chi_n^2/n}}$$

называется *распределением Стьюдента с* n *степенями свободы.*

Перейдем к построению доверительных интервалов для параметров нормального распределения $N(m, \sigma)$. Здесь возможны четыре случая в зависимости от того известен один из параметров или нет.

I. Доверительный интервал для m при заданном σ

Выберем в качестве оценки m выборочное среднее $\tilde{m} = \bar{x}$. Согласно свойству 4 (см. раздел 5.3.) $\bar{x}$ имеет нормальное распределение $N[m, \sigma/\sqrt{n}]$. Тогда статистика

$$U = \frac{\bar{X} - m}{\sigma/\sqrt{n}} \tag{5.60}$$

будет иметь распределение $N(0,1)$, которое не зависит от оцениваемого параметра m. Обозначим через u_p квантиль распределения $N(0,1)$. Тогда неравенство (5.58) примет вид

$$u_{\frac{\alpha}{2}} < U(\tilde{m}, m) < u_{1-\frac{\alpha}{2}} \qquad \Rightarrow \qquad u_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{x} - m}{\sigma/\sqrt{n}} < u_{1-\frac{\alpha}{2}}.$$

Решая его относительно m находим

$$\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\, u_{1-\frac{\alpha}{2}} < m < \bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\, u_{\frac{\alpha}{2}}.$$

Заметим, что распределение $N(0,1)$ симметрично, поэтому его квантили удовлетворяют соотношению $u_p = -u_{1-p}$. Таким образом, окончательно получаем

$$\boxed{\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\, u_{1-\frac{\alpha}{2}} < m < \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\, u_{1-\frac{\alpha}{2}}.} \tag{5.61}$$

II. Доверительный интервал для m при неизвестном σ

В случае, когда параметр σ неизвестен, мы можем в знаменатель правой части (5.60) подставить вместо σ какую-нибудь ее точечную оценку. Однако теперь U будет зависеть от двух случайных величин, а именно от статистики выборочного среднего $\bar{X}$ и оценки σ, поэтому возникает проблема с определением распределения U. Справедливо следующее утверждение.

Если в качестве оценки σ взять $\tilde{\sigma} = \sqrt{s_0^2}$, где s_0^2 – исправленная выборочная дисперсия (5.25), тогда статистика

$$\tau_{n-1} = \frac{\bar{X} - m}{\tilde{\sigma}/\sqrt{n}} \tag{5.62}$$

имеет распределение Стьюдента с $n-1$ степенью свободы, где n – объем выборки.

Распределение Стьюдента имеет точно такие же свойства симметрии, что и нормальное распределение $N(0,1)$. Поэтому доверительный интервал для m запишется аналогично (5.61), то есть как

$$\boxed{\bar{x} - \frac{\tilde{\sigma}}{\sqrt{n}}\, t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) < m < \bar{x} + \frac{\tilde{\sigma}}{\sqrt{n}}\, t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1).} \tag{5.63}$$

Здесь $t_p(n-1)$ – квантиль порядка p распределения Стьюдента с $n-1$ степенью свободы, $\tilde{\sigma} = \sqrt{s_0^2}$, а s_0^2 вычисляется по формуле

$$s_0^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{n}{n-1}\bar{x}^2\,. \tag{5.64}$$

III. Доверительный интервал для σ при известном m

Заметим, что в случае известного математического ожидания m статистики

$$\xi_i = \frac{X_i - m}{\sigma} \tag{5.65}$$

имеют нормальное распределение $N(0,1)$. А значит статистика

$$\chi_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - m}{\sigma}\right)^2 = n\,\frac{S^2}{\sigma^2}, \tag{5.66}$$

где

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2,$$

имеет распределение χ^2 с n степенями свободы. Так как распределение статистики χ_n^2 от σ не зависит, то согласно неравенству (5.58) мы можем записать

$$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n) < \frac{n\ s^2}{\sigma^2} < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n).$$

Здесь через $\chi_p^2(n)$ обозначены квантили порядка p распределения χ^2 с n степенями свободы. Разрешая это неравенство относительно σ^2 с учетом положительности всех входящих в неравенство величин, получаем искомый доверительный интервал в виде

$$\boxed{\sqrt{\frac{n\ s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}} < \sigma < \sqrt{\frac{n\ s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}},} \tag{5.67}$$

где s^2 вычисляется по формуле

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - m^2. \tag{5.68}$$

IV. Доверительный интервал для σ при неизвестном m

При неизвестном m мы должны заменить этот параметр его некоторой оценкой $\tilde{m}$. При этом статистики ξ_i (5.65) уже не будут иметь распределение $N(0,1)$, а значит статистика χ_n^2 (5.66) не будет иметь распределение χ^2 с n степенями свободы. Справедливо следующее утверждение.

Если в качестве оценки m взять выборочное среднее $\tilde{m} = \bar{x}$, то тогда статистика

$$\chi^2_{n-1} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma}\right)^2 = (n-1)\ \frac{S_0^2}{\sigma^2}, \tag{5.69}$$

где

$$S_0^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2,$$

имеет распределение χ^2 с $n-1$ степенью свободы (n – объем выборки).

На основании этого результата записываем доверительный интервал, который аналогично (5.67) имеет вид

$$\boxed{\sqrt{\frac{(n-1)\ s_0^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}} < \sigma < \sqrt{\frac{(n-1)\ s_0^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}},} \tag{5.70}$$

где s_0^2 вычисляется по формуле (5.64).

Квантили распределений $N(0,1)$, χ^2 и распределения Стьюдента затабулированы и могут быть найдены в учебных пособиях, указанных в списке литературы, а также в Приложении.

5.8. Вопросы и задачи для самоконтроля

Вопросы

1. Сформулировать основные задачи математической статистики.
2. Дать понятия:
   - генеральной совокупности;
   - выборки:
   - вариационного ряда;
   - статистического ряда;
   - выборочного распределения, выборочного среднего и выборочной дисперсии.
3. Точечные оценки параметров распределения.
4. Методы получения точечных оценок:
   - метод аналогий;
   - метод моментов;
   - метод наибольшего правдоподобия.
5. Интервальные оценки и доверительный интервал.

Задачи

5.1. По выборке признака X, заданной таблицей, найти выборочное среднее, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

x_i	45	50	55	60	65	70	75
m_i	4	6	10	40	20	12	8

5.2. Найти доверительный интервал для оценки с надежностью $\gamma = 0,99$ неизвестного математического ожидания m_x нормально распределенного признака X генеральной совокупности, если объем выборки $n = 25$, $\bar{x} = 16,8$ и среднее квадратичное отклонение генеральной совокупности $\sigma = 5$.

Глава 6.

Проверка статистических гипотез. Регрессия

Статистические гипотезы. Критерий значимости. Принятие статистических решений. Критерий согласия. Критерий Пирсона. Регрессия. Регрессионный анализ.

6.1. Основные принципы проверки статистических гипотез

Никакая математическая теория не изучает непосредственно физические объекты, с которыми мы реально сталкиваемся на практике. Математическая теория всецело оперирует с чисто абстрактными объектами, и изучает, по существу, только отношения между ними. Однако ценность математических построений зависит от того, насколько верно модели отражают определяющие, наиболее характерные отношения между элементами реального мира. Другими словами, если некоторое математическое соотношение имеет свой аналог в реальном мире, то естественно требовать, чтобы эмпирические наблюдения подтверждали наличие этого соотношения. Если такая согласованность теории и практики обнаруживается при повторных проверках, то теорию можно использовать для практических приложений.

Все вышеизложенное справедливо и для теории вероятностей. Реальным аналогом математического *понятия вероятности* является наблюдаемая *относительная частота* появления некоторого события. Поэтому если теоретические выводы приводят к определенному *численному значению для вероятности* некоторого наблюдаемого события, то необходимо, чтобы наблюдения подтверждали бы истинность соответствующей *частотной интерпретации.*

Таким образом мы приходим к задаче проверки согласованности теоретических вероятностных утверждений с имеющимися статистическими опытными данными. Этот раздел математической статистики называется *теорией проверки статистических гипотез.*

Предсказания теории вероятностей могут иметь форму не только в виде указания определенных значений вероятностей конкретного события. Часто интерес представляет тип распределения некоторой с.в. X, а в случае если тип заранее известен, то параметры распределения. Здесь проверка статистических гипотез пересекается с теорией оценок, что лишний раз подчеркивает единство задач математической статистики и в некотором смысле искусственность разделения ее на части.

Утверждения теории вероятностей в математической статистике принято называть *гипотезами.* Гипотеза, которая проверяется, называется *нулевой*, а конкурирующая ей *альтернативной.* Основную идею проверки согласованности гипотез с реальными наблюдениями рассмотрим на следующем примере.

Пусть нулевая гипотеза H_0 заключается в том, что с.в. X имеет определенное распределение $F(x)$. Тогда выборочная функция распределения $F_n^*(x)$ при достаточно большом объеме выборки n должна служить приближением $F(x)$. Определим некоторую неотрицательную величину Δ, которая служила бы мерой отклонения $F(x)$ и $F_n^*(x)$. Естественно, что мера Δ будет зависеть от выборки, а значит, являться случайной величиной. Допустим, что известен закон распределения с.в. Δ. Тогда можно вычислить вероятность p события $(\Delta > \Delta_0)$, заключающегося в том, что мера Δ превысит некоторое число Δ_0, то есть

$$P(\Delta > \Delta_0) = p. \tag{6.1}$$

Для согласия теоретического распределения $F(x)$ с имеющимися опытными данными естественно считать такое событие маловероятным, поэтому вероятность p должна быть достаточно малой. Теперь разрешаем это соотношение относительно Δ_0, например, с использованием квантилей распределения $F_\Delta(x)$. Далее по фактической выборке вычисляем величину Δ_n^*, соответствующую Δ в выборочном распределении, и сравниваем число Δ_n^* с числом Δ_0. Если окажется, что $\Delta_n^* > \Delta_0$, то тогда наблюдения статистически противоречат нашей гипотезе, так как событие $(\Delta > \Delta_0)$ изначально считалось маловероятным. Если же $(\Delta < \Delta_0)$, то гипотеза принимается.

Таким образом, событие $(\Delta > \Delta_0)$ является по-настоящему значимым для отклонения гипотезы. В связи с этим принято называть вероятность p *уровнем значимости*, а соответствующий критерий, в частности, критерий типа (6.1), *критерием значимости*. В простых ситуациях, аналогичных рассмотренной выше, когда проверяется только утверждение о непротиворечивости конкретного теоретического распределения $F(x)$ и реальных наблюдений, часто вместо термина «критерий значимости» используется термин «критерий согласия».

Следует отметить, что имеется определенный произвол в выборе меры Δ, что приводит к формулировке различных критериев значимости. При этом возникает важная задача поиска оптимальных критериев.

Любое статистическое решение, в частности, отклонение или принятие гипотез, связано с риском, то есть ошибкой. При проверке гипотез выделяются два типа ошибок. *Ошибкой первого рода* называется отклонение правильной гипотезы, а *ошибкой второго рода* – принятие неверной гипотезы.

Если принятие неверной гипотезы с практической точки зрения нежелательно (вспомним «ложку дегтя в бочке меда»), то выбираются критерии, которые минимизируют ошибку второго рода. В общем случае для уменьшения риска принятия неверного решения гипотеза проверяется с использованием критериев различного типа.

6.2. Критерий согласия Пирсона

Пусть требуется проверить согласие выборочных данных с предположением о том, что генеральная совокупность ξ имеет некоторое однозначно определенное распределение. В общем случае разобьем выборку объема n на k групп и обозначим через m_i частоты попадания выборочных данных в группу с номером i. Безусловно, сумма всех частот m_i должна равняться объему выборки n:

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n. \tag{6.2}$$

Данное разбиение в свою очередь будет индуцировать разбиение множества всех элементарных исходов Ω, соответствующего отдельному случайному наблюдению или опыту, на попарно непересекающиеся подмножества B_i, $(i = \overline{1,k})$, которые в совокупности будут составлять полную группу событий $\{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$. Обозначим ожидаемые вероятности событий B_i через p_i, то есть

$$P(B_i) = p_i, \quad i = \overline{1, k}; \qquad (6.3)$$
$$p_1 + p_2 + \cdots + p_k = 1.$$

В качестве меры расхождения гипотетических вероятностей p_i и реально наблюдаемых относительных частот $\frac{m_i}{n}$ выберем сумму квадратичных отклонений:

$$\Delta_k = \sum_{i=1}^{k} c_i \left(\frac{m_i}{n} - p_i\right)^2. \qquad (6.4)$$

В принципе положительные константы c_i, которые имеют смысл весов слагаемых, входящих в сумму, можно зафиксировать произвольно. Однако, как было установлено Пирсоном, наиболее простые свойства статистика Δ_k имеет при специальном выборе коэффициентов c_i.

Теорема Пирсона. *Пусть $c_i = n/p_i$, $i = \overline{1, k}$. Тогда распределение статистики*

$$\Delta_k \equiv H_{k-1} = \sum_{i=1}^{k} \frac{n}{p_i} \left(\frac{m_i}{n} - p_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i} \qquad (6.5)$$

при $n \to \infty$ стремится по вероятности к распределению χ^2 с $k-1$ степенями свободы.

Таким образом мы приходим к следующему алгоритму проверки согласия выборочных данных с гипотетическим однозначно определенным распределением генеральной совокупности ξ по *критерию Пирсона*, который во многих приложениях известен также как *критерий согласия хи-квадрат* (критерий χ^2).

Критерий согласия Пирсона (критерий χ^2)
для однозначно определенных распределений:

1. Получить упорядоченную выборку.
2. Разбить выборку на k групп (для непрерывных распределений-интервалов).
3. Подсчитать частоты m_i попадания выборочных данных в каждую группу.
4. Найти гипотетические вероятности p_i (6.3).

5. Вычислить выборочное значение статистики H_{k-1}^* (6.5).

6. Назначить уровень значимости α и найти квантиль $\chi^2_\alpha(k-1)$ порядка α распределения χ^2 с $k-1$ степенями свободы.

7. Сравнить значения величин H_{k-1}^* и $\chi^2_\alpha(k-1)$. При этом в случае выполнения неравенства

$$H_{k-1}^* < \chi^2_\alpha(k-1)$$

гипотеза о согласии выборочных данных с гипотетическим распределением на уровне значимости α принимается, в противном случае отклоняется.

Для примера рассмотрим применение этого критерия к результатам опытов с подбрасываем монеты, выполненных Бюффоном.

Пример 6.1. Бюффон при подбрасывании монеты 4040 раз наблюдал выпадение герба и решки 2048 и 1992 раз, соответственно. Совместимы ли эти результаты с гипотезой о равновероятности выпаданий герба и решки?

Решение. В качестве случайной величины ξ в опытах с двумя исходами удобно выбрать индикатор событий U. Положим $U = 0$, если выпал герб, и $U = 1$, если выпала решка. Тогда согласно условию имеем выборку объема $n = 4040$, значения которой разбиваются на две группы, а именно $A_1 = \{0\}$ с частотой $m = 2048$ и $A_2 = \{1\}$ с частотой $n - m = 1992$. Если обозначить вероятности событий $B_1 = \{\text{выпал герб}\}$ и $B_2 = \{\text{ выпала решка}\}$, соответствующих группам A_1 и A_2, как p и $q = 1 - p$, то тогда, по существу, требуется проверить согласие полученных Бюффоном данных с гипотезой H_0, заключающейся в том, что с.в. U имеет равномерное дискретное распределение, так как по предположению $p = q = 1/2$.

Из (6.5) для статистики Δ_2 находим явное выражение:

$$\Delta_2 \equiv H_1 = \frac{(m-np)^2}{np} + \frac{(n-m-nq)^2}{nq} = \frac{(m-np)^2}{np} + \frac{(m-np)^2}{nq} =$$
$$= (m-np)^2 \cdot \frac{q+p}{npq} = \frac{(m-np)^2}{npq}.$$

Согласно теореме Пирсона при достаточно большом числе подбрасываний n статистика H_1 имеет распределение близкое к распределению χ^2 с одной $(2-1=1)$ степенью свободы. Отсюда, в частности, следует, что распределение с.в. $X = \sqrt{H_1} = = (m-np)/\sqrt{npq}$ при больших n стремится к нормальному распределению $N(0,1)$. Данный факт, конечно, непосредственно согласуется с приближением Муавра–Лапласа в схеме Бернулли.

Далее назначим уровень значимости $\alpha = 0,05$. По таблице квантилей распределения χ^2 с одной степенью свободы находим $\chi^2_{0,05}(1) = 3,84$. Подставляя в формулу для H_1 $k = 2048$, $n = 4040$ и $p = q = \frac{1}{2}$, вычисляем выборочное значение статистики

$H_1^* = 0,776$. Так как $H_1^* = 0,776 < \chi^2_{0,05}(1) = 3,84$, то делаем вывод, что результаты, полученные Бюффоном, согласуются с гипотезой о равновероятности выпадания герба и решки на уровне значимости 5 %.

Отметим, что $P(H_1 \geqslant 0,776) \approx 0,38$. Это означает, что если провести несколько серий из $n = 4040$ подбрасываний одной и той же монеты, то приблизительно в 38 % случаев выборочные значения статистики H_1 будут превышать уровень 0,776. Таким образом, расхождение результатов Бюффона от ожидаемых по выбранному критерию не являются редкими, что и подтверждает справедливость нашего статистического вывода. ▲

Пусть требуется проверить согласие выборочного распределения с распределением генеральной совокупности, принадлежащем некоторому параметрическому семейству распределений, например, нормальному, пуассоновскому, биномиальному и т.п. Введем вектор параметров $\bar{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l\}$. Поскольку в этом случае распределение генеральной совокупности известно лишь частично (известен тип распределения, но неизвестны его параметры), то теорема Пирсона непосредственно неприменима. Действительно, возникает проблема, связанная с вычислением теоретических вероятностей $p_i(\bar{\alpha})$ в формуле

$$\Delta_k(\bar{\alpha}) = \sum_{i=1}^{k} \frac{(m_i - np_i(\bar{\alpha}))^2}{np_i(\bar{\alpha})}. \tag{6.6}$$

Для их вычисления мы, безусловно, можем использовать какие-нибудь оценки неизвестных параметров, вычисленных по выборке. Но теперь уже нельзя утверждать, что распределение статистики Δ_k (6.6) есть распределение χ^2 с $n-1$ степенью свободы. В общем случае вид распределения будет зависеть от выбора статистик $\hat{\bar{\alpha}}$, использованных в качестве оценок параметров. Тем не менее, как было обнаружено английским математиком Фишером, для достаточно широкого класса оценок распределение статистики $\Delta_k(\hat{\bar{\alpha}})$ (6.6) может быть вполне определено.

Теорема Фишера. *Пусть распределение генеральной совокупности принадлежит некоторому l параметрическому семейству распределений. Тогда, если для расчета вероятностей p_i в качестве оценок параметров распределения $\bar{\alpha}$ выбрать оценки, полученные по методу наименьших квадратов с целевой функцией $\Delta_k(\hat{\bar{\alpha}})$ (6.6), то статистика*

$$\Delta_k \equiv H_{k-1-l} = \sum_{i=1}^{k} \frac{n}{p_i(\hat{\bar{\alpha}})} \left(\frac{m_i}{n} - p_i(\hat{\bar{\alpha}})\right)^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(m_i - np_i(\hat{\bar{\alpha}}))^2}{np_i(\hat{\bar{\alpha}})} \tag{6.7}$$

при $n \to \infty$ стремится по вероятности к распределению χ^2 с $k-1-l$ степенями свободы.

К сожалению, из-за сложной функциональной зависимости целевой функции (6.6) от параметров распределения вычисление оценок по методу наименьших квадратов в большинстве интересных с точки зрения практики случаев возможно только численно. Однако оказывается, что аналогичная теорема справедлива и для любых асимптотически нормальных и эффективных оценок. В частности, для оценок параметров нормального распределения можно использовать выборочное среднее $\bar{x}$ и выборочную дисперсию s^2. При этом алгоритм проверки согласия выборочного распределения с гипотезой о нормальном распределении генеральной совокупности полностью совпадает с описанным выше алгоритмом Пирсона, если вместо квантилей распределения χ^2 с $k-1$ степенями свободы использовать квантили распределения χ^2 с $k-1-2=k-3$ степенями свободы.

Следует отметить, что результаты теорем Пирсона и Фишера носят асимптотический характер. При использовании выборок ограниченного объема с простым разбиением на части равной ширины вполне возможны случаи, когда распределение величин Δ_k сильно отличается от асимптотических распределений χ^2. Это произойдет тогда, когда ожидаемое число событий np_i в каком-нибудь из интервалов разбиения будет недостаточным, чтобы величина $(\nu - np_i)/\sqrt{np_i}$ имела распределение близкое к нормальному распределению $N(0,1)$. С целью исключения статистически бедных интервалов интервалы с числом ожидаемых событий меньше 5 должны быть объединены с соседними.

6.3. Корреляция и регрессия

Рассмотрим систему случайных величин (X, Y), где X и Y – одномерные компоненты.

Условным математическим ожиданием одномерной из компонент системы с.в. (X, Y) называется ее математическое ожидание при условии, что другая с.в. приняла определенное значение (попала в определенный интервал). Для условных математических ожиданий будем использовать обозначения $M(X|y)$ и $M(Y|x)$.

Условное математическое ожидание с.в. Y при заданном $X = x$ определяет функцию $\varphi(x) = M(Y|x)$, которая называется *функцией ре-*

грессии, или регрессией Y по (или «на») x. Аналогично определяется функция регрессии $\varphi(y) = M(X|y)$. Графики этих функций называются линиями (кривыми) регрессии. *Корреляционной зависимостью* между двумя с.в. называется функциональная зависимость между значениями одной из них и условным математическим ожиданием другой.

Если обе функции регрессии линейны, то корреляционную связь X и Y называют *линейной*. Можно показать, что линейная корреляционная зависимость между X и Y имеет место, если двумерная с.в. (X, Y) распределена по нормальному закону.

Мерой оценки корреляционной связи переменных X и Y служит *выборочный коэффициент корреляции*

$$r = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{S_x S_y}. \tag{6.8}$$

Величина

$$\eta_{yx} = \frac{S_{xy}}{S_y} \tag{6.9}$$

называется *эмпирическим корреляционным отношением*, а величина $\bar{d} = \eta_{yx}^2$ называется *эмпирическим коэффициентом детерминации* и показывает, какая часть общей вариации Y обусловлена вариацией X. Здесь фигурируют общая дисперсия переменной Y:

$$S_y^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{m} y_j^2 n_j - \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{m} y_j n_j \right)^2, \tag{6.10}$$

и межгрупповая дисперсия

$$S_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} (\bar{y}_i - \bar{y})^2 n_i, \tag{6.11}$$

а групповые средние определены следующим образом:

$$\bar{y}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{m} y_i \, n_{ij}. \tag{6.12}$$

Обычно линейное уравнение регрессии Y на Xзаписывают в следующей форме:

$$y_x - \bar{y} = r \, \frac{S_y}{S_x} (x - \bar{x}). \tag{6.13}$$

Аналогично, уравнение регрессии X на Y имеет вид

$$x_y - \bar{x} = r \, \frac{S_x}{S_y} (y - \bar{y}). \tag{6.14}$$

Пример 6.2. Дана таблица распределения 100 автомашин в соответствии с затратами на перевозки X и с протяженностью маршрутов перевозок Y.

Известно, что между X и Y существует линейная корреляционная зависимость. Требуется:

а) найти уравнение прямой регрессии y на X;

б) построить уравнение эмпирической линии регрессии и случайные точки выборки (X, Y).

$Y \diagdown X$	4,5	6,0	7,5	9,0	10,5	12,0	13,5	15,0	m_x
60	2	4	3	10	4	–	–	–	23
90	–	–	6	14	5	–	–	–	25
120	–	–	–	–	17	5	4	–	26
150	–	–	–	–	–	8	3	2	13
180	–	–	–	–	–	4	3	1	8
210	–	–	–	–	–	2	1	2	5
m_y	2	4	9	24	26	19	11	5	100

Решение. Вычисляем числовые характеристики: выборочные средние $\bar{x}$ и $\bar{y}$, выборочные средние квадратичные отклонения S_x и S_y и выборочный корреляционный момент S_{xy}:

$$\sum_{i=1}^{6} m_{xi} = \sum_{j=1}^{8} m_{yi} = n = 100, \quad \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{8} m_{ij}x_i = \sum_{i=1}^{6} m_{xi}x_i = 11190,$$

$$\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{8} m_{ij}y_j = \sum_{j=1}^{6} m_{yi}y_i = 1042, \quad \sum_{i=1}^{6}(x_i\sum_{j=1}^{8} m_{ij}y_j) = \sum_{j=1}^{8}(y_j\sum_{i=1}^{6} m_{ij}x_i) = 124245.$$

Вычисляем выборочные средние $\bar{x}$ и $\bar{y}$:

$$\bar{x} = \frac{\sum m_{xi}x_i}{n} = \frac{11190}{100} = 111,9;$$

$$\bar{y} = \frac{\sum m_{yi}y_i}{n} = \frac{1041}{100} = 10,41.$$

Выборочные дисперсии находим по формулам:

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum m_{xi}x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum m_{xi}x_i\right)^2\right) = \frac{1}{99}\left(1431900 - \frac{1}{100}(11190)^2\right) = 13118,58.$$

$$S_y^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum m_{yi}y_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum m_{yi}y_i\right)^2\right) = \frac{1}{99}\left(11367 - \frac{1}{100}(1041)^2\right) = 5,35.$$

Корреляционный момент вычисляем по формуле

$$S_{xy} = \tfrac{1}{n-1}\left(\sum\sum m_{ij}x_iy_i - \tfrac{1}{n}\left(\sum m_{xi}x_i\right)\left(\sum m_{yj}y_j\right)\right) =$$
$$= \tfrac{1}{99}\left(124245 - \tfrac{1}{100}(11190 \cdot 1041)\right) = 78,35.$$

Оценкой теоретической линии регрессии является эмпирическая линия регрессии, уравнение которой имеет вид

$$y = \bar{y} + r_{xy}\frac{S_y}{S_x}(x - \bar{x}),$$

где $S_x = \sqrt{13118,58} \approx 114,53$, $S_y = \sqrt{5,35} \approx 2,31$;

$$r_{xy}\frac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y} = \frac{78,35}{114,53 \cdot 2,31} = \frac{78,35}{264,56} \approx 0,296.$$

Составляем уравнение эмпирической линии регрессии y на X:

$$y = 10,41 + 0,296 \cdot \frac{2,31}{114,53}(x - 111,9) = 0,006x + 9,74.$$ ▲

6.4. Вопросы и задачи для самоконтроля

Вопросы

1. Нулевая и альтернативные гипотезы.
2. Каков принцип проверки статистических гипотез?
3. Уровень значимости, критерий значимости, критерий согласия.
4. Ошибка первого рода, ошибка второго рода.
5. Критерий согласия Пирсона.
6. Критерий согласия для параметрических распределений.
7. Что делать, если ожидаемое число событий для некоторого интервала группированной выборки меньше 5?
8. Корреляция и регрессия.

Литература

1. Гнеденко, Б. В. Курс теории вероятностей / Б. В. Гнеденко. – Москва : Наука, 1988. – 447 с.
2. Письменный, Д. Т. Кокспект лекций по теории вероятностей и математической статистке / Д. Т. Письменный. – 4-е изд., испр. и доп. – Москва : Айрис пресс, 2008. – 288 с.
3. Карасев, А. И. Курс высшей математики для экономических вузов : учеб. пособие для студентов экон. специальностей вузов /А. И. Карасев, З. М. Аксютина. – Москва : Высш. шк., 1982. – Ч. 2. Теория вероятностей и математическая статистика. – 320 с.
4. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – Москва : Наука, 2000. – 480 с.
5. Вентцель, Е. С. Прикладные задачи теории вероятностей / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – Москва : Радио и связь, 1983. – 416 с.
6. Чистяков, В. П. Курс теории вероятностей : учеб. для втузов / В. П. Чистяков. – Москва : Наука, 1987. – 240 с.
7. Бородин, А. Н. Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики/ А. Н. Бородин. – 3-е изд., испр. и доп. – Санкт-Петербург : Лань, 2002. – 256 с.
8. Жевняк, Р. М. Высшая математика : учеб. пособие для втузов / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Выш. шк., 1988. – Ч. V. – 253 с.
9. Гмурман, В. В. Теория вероятностей и математическая статистика / В. В. Гмурман. – Москва : Высш. шк., 1977. – 245 с.

10. Микулик, И. А. Решение технических задач по теории вероятностей и математической статистике / И. А. Микулик, Г. И. Рейзина. – Минск : Выш. шк., 1991. – 164 с.
11. Гмурман, В. И. Руководство к решению задач по теории вероятностей : учеб. пособие для вузов / В. И. Гмурман. – Москва : Высш. шк., 2004. – 404 с.
12. Гурский, Е. И. Сборник задач по теории вероятностей / Е. И. Гурский. – Минск : Выш. шк., 1984. – 224 с.
13. Сборник индивидуальных заданий по теории вероятностей и математической статистике : учеб. пособие / А. П. Рябушко [и др.] / под общ. ред. А. П. Рябушко. – Минск : Выш. шк., 1992. – 191 с.
14. Сборник задач по математике для втузов : учеб. пособие для втузов / под ред. А. В. Ефимова. – Москва : Наука, 1990. – Ч. 3. Теория вероятностей и математическая статистика. – 428 с.

Приложения

1. Комбинаторные формулы

Во многих случаях задачи теории вероятностей, в которых фигурируют конечное число равновероятных исходов, сводятся к решению комбинаторных задач. Ниже мы приведем наиболее употребительные комбинаторные формулы.

Факториал. В формулах комбинаторики часто используется понятие факториала числа, который обозначается $n!$ («n-факториал»), что означает произведение всех целых чисел до n включительно

$$\boxed{n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n.} \tag{П.1.1}$$

По соглашению $0! = 1$.

Вводятся также следующие определения:

$$(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) \tag{П.1.2}$$

и

$$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n. \tag{П.1.3}$$

Для вычисления факториала при больших n можно использовать приближенную формулу Стиргинга

$$\boxed{n! \approx \sqrt{2\,\pi n}\, n^n\, e^{-n}.} \tag{П.1.4}$$

Перестановки. Перестановкой элементов множества $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называется упорядоченное множество, составленное из тех же элементов.

Например, для множества, образованного тремя элементами A, B и C, различные перестановки запишутся в виде

$$\begin{array}{ccc} ABC & BCA & CAB \\ ACB & CBA & BAC \end{array}$$

Число перестановок из n элементов

$$\boxed{P_n = n!} \qquad (\text{П.1.5})$$

Комбинации элементов из различных групп. Рассмотрим p групп элементов. Первая группа содержит n_1 элементов

$$a_{11},\ a_{12}, \ldots, a_{1n_1}.$$

Вторая – n_2 элементов

$$a_{21},\ a_{22}, \ldots, a_{2n_2}.$$

Последняя группа содержит n_p элементов

$$a_{p1},\ a_{p2}, \ldots, a_{pn_p}.$$

Составляются комбинации из p элементов таким образом, что в каждую комбинацию входят лишь по одному элементу из каждой группы:

$$a_{1k_1},\ a_{2k_2}, \ldots, a_{pk_p}.$$

Число всех таких комбинаций есть

$$\boxed{N = n_1 n_2 \cdots n_p.} \qquad (\text{П.1.6})$$

Выбор с возвращением. Размещением с повторениями из n элементов по m называется всякая последовательность, составленная из m этих элементов. Число всевозможных размещений с повторениями n элементов m равно n^m.

Например, всевозможные размещения с повторениями из трех элементов A, B и C по два записываются в виде

$$\begin{array}{ccc} AA & AB & AC \\ BA & BB & BC \\ CA & CB & CC \end{array}$$

Рассмотрим совокупность n элементов

$$a_1, a_2, \ldots, a_n\,.$$

Из этой совокупности производится выбор, при котором последовательно выбирается один из элементов a_i, возвращаемый затем обратно в о общую совокупность. Таким образом за m шагов регистрируется выборка

$$a_{i_1},\, a_{i_2}, \ldots, a_{i_m}.$$

Число всевозможных комбинаций этого вида, в которых элемент a_{i_k} выбирается из соответствующей группы на k-м шаге равно

$$\boxed{N = n^m.} \tag{П.1.7}$$

Число размещений. Выбор без возвращения. Размещением из n элементов по m называется всякая упорядоченная часть множества $a_1, a_2, \ldots, a_n$, содержащая m элементов.

Два размещения из данных n элементов по m будут различны, если различен состав входящих в них элементов, или, при одном и том же составе элементов, различен порядок их расположения.

Для трех элементов A, B и C всевозможные размещения по два элемента имеют вид

$$\begin{matrix} AA & AC & BC \\ BA & CA & CB \end{matrix}$$

Рассмотрим n элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Составим всевозможные комбинации по m элементов (с учетом порядка следования элементов) вида

$$a_{i_1},\, a_{i_2}, \ldots, a_{i_m}.$$

Другими словами, m из n элементов размещаются по m местам. Число всех таких размещений

$$\boxed{N = \frac{n!}{(n-m)!}.} \tag{П.1.8}$$

Число сочетаний. Сочетанием из n элементов по m называется всякая часть совокупности элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$, содержащая m элементов.

Два различных сочетания из n элементов по m отличаются друг от друга составом входящих в них элементов. Другими словами, если два сочетания различны, то в одном из них содержится хотя бы один элемент, который отсутствует во втором сочетании.

Рассмотрим, например, множество четырех элементов A, B, C и D. Всевозможные сочетания из четырех элементов по три имеют вид

$$ABC \qquad ABD \qquad ACD \qquad BCD$$

Число сочетаний из n элементов по m равно

$$\boxed{C_n^m \equiv \binom{n}{k} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}.} \tag{П.1.9}$$

Очевидным является следующее свойство $C_n^m = C_{n-m}^m$.

Справедлива формула возведения бинома в степень (бином Ньютона)

$$\boxed{(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, x^k\, y^{n-k}.} \tag{П.1.10}$$

Размещение по ячейкам. Пусть n различных элементов размещаются по m ячейкам. Каждое размещение соответствует комбинации $i_1, i_2, \ldots, i_n$, где i_k обозначает номер ячейки, в которую попадает k-й элемент. Число всевозможных таких размещений

$$\boxed{N = m^n.} \tag{П.1.11}$$

Если размещения удовлетворяют требованию, что в ячейку с номером i попадают ровно n_i элементов $(n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n)$, то число всех таких размещений составляет

$$\boxed{N = \frac{n!}{n_1!\, n_2!\, \cdots\, n_m!}.} \tag{П.1.12}$$

В том случае, когда по ячейкам размещаются *неразличимые* между собой предметы, то число таких размещений есть

$$\boxed{N = \frac{(n+m-1)!}{n!\,(m-1)!} = C_{n+m-1}^{m-1}.} \tag{П.1.13}$$

2. Основные соотношения теории вероятностей

Вероятность любого события A неотрицательна и не превосходит единицы

$$0 \leq P(A) \leq 1. \tag{П.2.1}$$

Для любых событий A и B имеет место соотношение

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB). \tag{П.2.2}$$

Вероятность произведения событий

$$P(AB) = P(A)\,P(B|A). \tag{П.2.3}$$

Условная вероятность

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}. \tag{П.2.4}$$

Формула полной вероятности

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A|H_k)\,P(H_k), \tag{П.2.5}$$

где событие A принадлежит сумме попарно несовместных событий H_k.

Формула Байеса

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k)\,P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|H_i)\,P(H_i)}. \tag{П.2.6}$$

Формула Бернулли

$$P_n(m) = C_n^m\,p^m\,q^{n-m} = C_n^m\,p^m\,(1-p)^{n-m}. \tag{П.2.7}$$

Таблица П.2.1

Основные распределения и их числовые характеристики

Наименование распределения	Вид распределения	Математическое ожидание	Дисперсия
Биномиальное	$C_n^k\, p^k\, q^{n-k}$	np	npq
Пуассона	$\dfrac{\lambda^k \exp(-\lambda)}{k!}$	λ	λ
Гипергеометрическое	$\dfrac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$	$\dfrac{nM}{N}$	$\frac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}$
Равномерное	$\dfrac{1}{b-a}, \quad a < x < b$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
Нормальное $N(m,\ \sigma)$	$\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma}\exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\,\sigma^2}\right]$	m	σ^2
$U = N(0,1)$	$\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\exp\left[-\dfrac{x^2}{2}\right]$	0	1
Показательное	$\lambda \exp(-\lambda x)$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$
Хи-квадрат $\chi^2(n)$	$U_1^2 + U_2^2 + \cdots + U_n^2$	n	$2n$
Стьюдента $t(n)$	$U/\sqrt{\dfrac{\chi^2(n)}{n}}$	$0 \quad (n > 1)$	$\dfrac{n}{n-2} \quad (n > 2)$

3. Значения «малой»функции Лапласа

«Малая» функция Лапласа:

$$\boxed{\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).}$$

Таблица П.3.1

Сотые доли x										
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0941	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
Десятые доли x										
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0,0540	0,0440	0,0355	0,0283	0,0224	0,0175	0,0136	0,0104	0,0079	0,0060
3	0,0044	0,0033	0,0024	0,0017	0,0012	0,0009	0,0006	0,0004	0,0003	0,0002

4. Значения функции Лапласа

Функция Лапласа:

$$\boxed{\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \int\limits_0^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\,dt.}$$

Таблица П.4.1

Сотые доли x										
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0112	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0754
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2258	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2518	0,2549
0,7	0,2580	0,2612	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2996	0,3023	0,3051	0,3079	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3553	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4430	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4485	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4700	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4762	0,4767
Десятые доли x										
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0,4773	0,4821	0,4861	0,4893	0,4918	0,4938	0,4953	0,4965	0,4974	0,4961
3	0,4987	0,4990	0,4993	0,4995	0,4997	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,5000

5. Таблица значений квантилей $\chi^2_{\alpha,\,\nu}$

Таблица П.5.1

ν	$\alpha = 0,20$	$\alpha = 0,10$	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,02$	$\alpha = 0,01$	$\alpha = 0,001$
1	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635	10,827
2	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210	13,815
3	4,642	6,251	7,815	9,837	11,345	16,266
4	5,989	7,779	9,488	11.668	13,277	18,467
5	7,289	9,236	11,070	13.388	15,086	20,515
6	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812	22,457
7	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475	24,322
8	11,030	13.362	15,507	18,168	20,090	26,125
9	12,242	14.684	16.919	19,679	21,666	27,877
10	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209	29,588
11	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725	31,264
12	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217	32,909
13	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688	34,528
14	18,151	21,064	23.685	26.783	29,141	36,123
15	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578	37,697
16	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000	39,252
17	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409	40.790
18	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805	42,312
19	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191	43,820
20	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566	45,315
21	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932	46,797
22	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289	48,268
23	28,429	32,007	35,172	38,968	1,638	49,728
24	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980	51,179
25	30,675	34,382	37,652	41,566	44,314	52,620
26	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642	54,052
27	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963	55,476
28	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278	56,893
29	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588	58,302
30	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892	59,703

6. Таблица значений коэффициентов Стьюдента

Таблица П.6.1

$k = n-1$	$\alpha = 0,900$	$\alpha = 0,950$	$\alpha = 0,990$	$\alpha = 0,999$
1	6,314	12,706	63,657	636,622
2	2,920	4,303	9,925	31,598
3	2,353	3,182	5,841	12,941
4	2,132	2,776	4,604	8,610
5	2,015	2,571	4,032	6,849
6	1,943	2,447	3,707	5,959
7	1,895	2,365	3,449	5,405
8	1,860	2,306	3,355	5,041
9	1,833	2,262	3,250	4,781
10	1,812	2,228	3,169	4,587
11	1,796	2,201	3,106	4,437
12	1,782	2,179	3,055	4,318
13	1,771	2,160	3,012	4,221
14	1,761	2,145	2,977	4,140
15	1,753	2,131	2,947	4,073
16	1,746	2,120	2,921	4,015
17	1,740	2,110	2,878	3,965
18	1,734	2,101	2,878	3,922
19	1,729	2,093	2,861	3,883
20	1,725	2,086	2,845	3,850
21	1,721	2,080	2,831	3,819
22	1,717	2,074	2,819	3,792
23	1,714	2,069	2,807	3,767
24	1,711	2,064	2,797	3,745
25	1.708	2,060	2,787	3,725
26	1,706	2,056	2,779	3,707
27	1,703	2,052	2,771	3,690
28	1,701	2,048	2,763	3,674
29	1,699	2,045	2,756	3,659
30	1,697	2,042	2,750	3,646
40	1,684	2,021	2,704	3,551
60	1,671	2,000	2,660	3,460
100	1,658	1,980	2,617	3,373
∞	1,645	1,960	2,576	3,291

7. Вопросы к экзамену и зачету

1. Предмет теории вероятности. Случайные события. Типы случайных событий. Множество элементарных исходов.

2. Алгебра событий. Диаграммы Венна. Операции над событиями. Противоположные события. Полная группа событий.

3. Понятие вероятности. Аксиоматическое определение вероятности. Вероятностное пространство.

4. Свойства вероятности. Теорема о вероятности суммы произвольных событий.

5. Классическая вероятностная схема. Элементы комбинаторики.

6. Классификация схем выбора, их вероятности.

7. Условная вероятность, ее свойства.

8. Независимые события. Теорема умножения вероятностей.

9. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

10. Геометрическая вероятность. Парадокс Бертрана.

11. Понятие случайной величины. Типы случайных величин. Понятие закона распределения случайной величины.

12. Законы распределения С.В. Ряд распределения Д.С.В. Многоугольник распределения Д.С.В.

13. Функция распределения С.В., ее свойства.

14. Теорема о вероятности попадания С.В. в область, ее следствия.

15. Функция распределения Д.С.В. Индикатор события.

16. Плотность распределения Н.С.В., ее свойства. Условие нормировки.

17. Числовые характеристики С.В., их классификация. Мода. Медиана.

18. Математическое ожидание, его свойства.

19. Дисперсия, ее свойства. Среднее квадратичное отклонение.

20. Дискретное равномерное распределение (условия возникновения, основные числовые характеристики). Случайное число.

21. Геометрическое распределение (условия возникновения, основные числовые характеристики).

22. Гипергеометрическое распределение (условия возникновения, основные числовые характеристики).

23. Биномиальное распределение (условия возникновения, основные числовые характеристики).

24. Распределение Пуассона (условия возникновения, основные числовые характеристики).

25. Равномерное непрерывное распределение (условия возникновения, основные числовые характеристики).

26. Показательное распределение (условия возникновения, основные числовые характеристики).

27. Нормальное распределение (условия возникновения, основные числовые характеристики). Функция распределения $N(0,1)$. Функция Лапласа (интеграл вероятностей).

28. Последовательность испытаний. Схема Маркова.

29. Последовательность независимых испытаний и ее типы. Схема Бернулли.

30. Предельные теоремы в схеме Бернулли. Теоремы Муавра–Лапласа.

31. Предельные теоремы в схеме Бернулли. Теорема Пуассона.

32. Лемма Чебышева. Первое и второе неравенства Чебышева. Правило $3\,\sigma$.

33. Сходимость по вероятности. Первая теорема Чебышева (закон больших чисел). Вторая теорема Чебышева.

34. Теорема Бернулли о частоте событий в последовательности однородных опытов. Теорема Пуассона о частоте событий в последовательности неоднородных опытов.

35. Центральная предельная теорема. Условие Ляпунова.

36. Системы случайных величин, законы их распределения. Формула для вероятности попадания в прямоугольную область.

37. Числовые характеристики системы случайных величин. Ковариация, ее свойства. Коэффициент корреляции.

38. Задачи математической статистики. Выборка. Распределение генеральной совокупности.

39. Вариационный ряд. Статистический и группированный статистические ряды.

40. Выборочная функция распределения. Гистограмма частот. Полигон частот.

41. Числовые характеристики выборочного распределения. Понятие точечной оценки и ее критерии (состоятельность, несмещенность, эффективность).

42. Оценка математического ожидания и дисперсии по методу аналогий.

43. Распределение χ^2 и его свойства.

44. Распределение Стьюдента.

45. Метод моментов для точечных оценок.

46. Метод функции наибольшего правдоподобия для точечных оценок.

47. Интервальные оценки. Понятие доверительного интервала. Общий метод построение доверительных интервалов.

48. Доверительный интервал для математического ожидания нормального распределения при известной дисперсии.

49. Доверительный интервал для математического ожидания нормального распределения при неизвестной дисперсии.

50. Доверительный интервал для дисперсии нормального распределения при известном математическом ожидании.

51. Доверительный интервал для дисперсии нормального распределения при неизвестном математическом ожидании.

52. Статистическая проверка гипотез. Типы гипотез.

53. Проверка параметрической статистической гипотезы. Критерий согласия Пирсона.

54. Корреляция. Коэффициент корреляции. Регрессия.

Ответы и указания к решениям

ГЛАВА 1

1.2. а) $B + AC$; б) AB.

1.3. а) $A\overline{BC}$; б) ABC; в) $AB\overline{C}$; г) $A + B + C$; д) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

1.4. $P = P(\text{зел.}) + P(\text{красн.}) + P(\text{син.}) = 2/24 + 7/24 + 5/24 = 7/12 \approx 0,583$.

1.5. 499/1998.

1.6. а) $P(ABC) = P(A)P(B)P(C) = 0,75 \cdot 0,80 \cdot 0,90 = 0,54$;
б) вероятность промаха всех стрелков $P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C}) = 0,25 \cdot 0,2 \cdot 0,1 = 0,005$. Следовательно, $P = 1 - 0,005 = 0,995$.

1.7. $0,7$.

ГЛАВА 2

2.1. 7/64.

2.2. $1 - (1 - \ell/L)^2$.

2.3. $12!/12^{12}$.

2.4. C_{90}^{10}/C_{100}^{10}.

2.5. 1/2.

2.6. Обозначим через A событие, состоящее в том, что взятая деталь окажется нестандартной. Пусть гипотезы H_1, H_2 и H_3 состоят в том, что эта бракованная деталь произведена первым, вторым или третьим предприятием. В соответствии с условием задачи вероятности этих гипотез составляют $P(H_1) = 350/1000 = 0,35$, $P(H_2) = 440/1000 = 0,44$, $P(H_3) = 210/1000 = 0,21$. Кроме того, условные вероятности события A составляют $P(A|H_1) = 0,03$, $P(A|H_2) = 0,02$, $P(A|H_3) = 0,01$. По формуле Байеса (П.2.6) получаем $P(H_1|A) = P(H_1)P(A|H_1)/[P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) + P(A|H_3)P(H_3)]$=$0,35 \cdot 0,03/(0,03 \cdot 0,35 + 0,02 \cdot 0,44 + 0,01 \cdot 0,21) \approx 0,491$.

2.7. Вероятность того, что герб ни разу не появится за n бросаний составляет $(1/2)^n$. Следовательно, вероятность выпадения герба хотя бы один

раз равна $1-(1/2)^n$. Из неравенства $1-(1/2)^n > 0,9$ находим $2^n > 10$ или (для целого n) $n \geqslant 4$.
2.8. 1/9.

ГЛАВА 3
3.1. С.в. ξ может принимать значения 1, 2, 3, 4, 5, 6. Все эти значения равновероятны и соответствующие вероятности равны 1/6.
3.2. Возможные значения ξ – 0, 1, 2, 3, 4. Соответствующие вероятности равны

$$P(\xi=0)=C_4^0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16},$$
$$P(\xi=1)=C_4^1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{4}{16},$$
$$P(\xi=2)=\frac{6}{16},\qquad P(\xi=3)=\frac{4}{16},\qquad P(\xi=4)=\frac{1}{16}.$$

3.3. Нормировочный множитель N определяется из условия (3.10), которое в данном случае переписывается в виде

$$N=\int_0^4 (4x-x^2)\,dx=1.$$

Вычисляя интеграл, находим $N=3/32$.

Вероятность попадания с.в. на отрезок $[-2,3]$ вычисляется следующим образом:

$$P(-2\leqslant \xi\leqslant 3)=\int_{-2}^{3}\varphi(x)\,dx=\int_{-2}^{0}0\,dx+\frac{3}{32}\int_0^3(4x-x^2)\,dx=\frac{27}{32}.$$

Для функции распределения $F(x)$, используя

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)\,dt,$$

находим

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\leqslant 0,\\ \dfrac{1}{32}(6x^2-x^3), & \text{если } 0<x\leqslant 4,\\ 1, & \text{если } x>4\,.\end{cases}$$

ГЛАВА 4

4.1. Обозначим через p_k вероятность того, что испытания закончатся на k-м приборе. Это означает, что предыдущие $k-1$ приборов пройдут испытания, то есть $p_k = p^{k-1}q$, где $q = 1-p$.

Математическое ожидание находится следующим образом:

$$m_{\xi} = \sum_{k=1}^{\infty} k\, p_k = q \sum_{k=1}^{\infty} k\, p^{k-1} = q \frac{d}{dp} \sum_{k=1}^{\infty} k\, p^k = q \frac{d}{dp} \frac{1}{1-p} = q \frac{1}{(1-p)^2} = \frac{1}{q}.$$

Здесь было использовано выражение для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Аналогичным образом вычисляется дисперсия

$$D_{\xi} = M(\xi^2) - m_{\xi} = \frac{p}{q^2}.$$

4.2. Согласно неравенству Чебышева находим

$$P(|X-a| \leqslant \varepsilon) \geqslant 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{0,01}{0,5} = 0,98.$$

4.3. Согласно закона больших чисел Бернулли получаем

$$P\left(\left|\tfrac{m}{n} - p\right| \leqslant 0,08\right) > 1 - \tfrac{0,8\cdot 0,2}{n\cdot 0,0064} > 0,75 \;\Rightarrow$$
$$0,25 > \tfrac{0,16}{0,0064} \;\Rightarrow n > 100.$$

ГЛАВА 5

5.1. Объем выборки $n = \sum\limits_{i=1}^{7} m_i = 100$. Выборочное среднее

$$\overline{x} = \frac{45\cdot 4 + 50\cdot 6 + 55\cdot 10 + 60\cdot 40 + 65\cdot 20 + 70\cdot 12 + 75\cdot 8}{100} = 61,7.$$

Для вычисления дисперсии составляем таблицу квадратов значений с.в.

x_i^2	2025	2500	3025	3600	4225	4900	5625
m_i	4	6	10	40	20	12	8

Имеем: $S_0^2 = \frac{1}{99}\sum\limits_{i=1}^{7} x_i^2 m_i - \frac{100}{99}(61,7)^2 = 50,11$. Откуда $S_0 = \sqrt{50,11} \approx$ $\approx 7,08$. Получили несмещенные оценки для дисперсии и среднего квадратичного отклонения.

5.2. Доверительный интервал определяется соответствующими неравенствами. Находим t из уравнения $\Phi(t) = \gamma/2 = 0,495$, пользуясь таблицей $t = 2,58$. Тогда $16,8 - 2,58\cdot 5/5 < m_x < 16,8 + 2,58\cdot 5/5$, $14,22 < m_x < 19,38$, $m_x \in (14,22;\ 19,38)$ с вероятностью $\gamma = 0,99$.

Предметный указатель

Учебное электронное издание комбинированного распространения

Учебное издание

Бабич Александр Антонович
Соловцов Игорь Леонидович

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Пособие по одноименному курсу для студентов всех специальностей дневной и заочной форм обучения

Электронный аналог печатного издания

Редактор *Н. Г. Мансурова*
Компьютерная верстка *М. В. Аникеенко*

Подписано в печать 11.
Формат 60x84/$_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Ризография. Усл. печ. л. 7,90. Уч.-изд. л. 7,56.
Изд. № 36.
E-mail: ic@gstu.by
http://www.gstu.by

Издатель и полиграфическое исполнение:
Издательский центр учреждения образования
«Гомельский государственный технический университет
имени П. О. Сухого».
ЛИ № 02330/0549424 от 08.04.2009 г.
246746, г. Гомель, пр. Октября, 48.