Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Институт повышения квалификации и переподготовки

Кафедра «Профессиональная переподготовка»

Е. А. Кожевников

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

ПОСОБИЕ
для слушателей специальности 1-26 02 85 «Логистика»
заочной формы обучения

Гомель 2016

УДК 338.45(075.8)
ББК 65.050.030.1я73
К58

Рекомендовано кафедрой «Профессиональная переподготовка»
ИПКиП ГГТУ им. П. О. Сухого
(*протокол № 1 от 25.09.2015 г.*)

Рецензент: зав. каф. «Маркетинг» ГГТУ им. П. О. Сухого канд. экон. наук, доц. *О. В. Лапицкая*

Кожевников, Е. А.

К58 Экономико-математические методы и модели : пособие для слушателей специальности 1-26 02 85 «Логистика» заоч. формы обучения / Е. А. Кожевников. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2016. – 66 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: https://elib.gstu.by. – Загл. с титул. экрана.

Представлено описание основных типов экономико-математических методов и моделей, наиболее применимых в современной логистике.

Для слушателей, обучающихся по специальности 1-26 02 85 «Логистика».

УДК 338.45(075.8)
ББК 65.050.030.1я73

ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ.

Цель изучения курса

Научные основы логистики и ее практическое применение базируются на широком использовании экономико-математического аппарата. Поэтому курс «Экономико-математические методы и модели» является обязательным компонентом в изучении логистики.

Целью преподавания дисциплины является обучение слушателей экономико-математическим методам и приемам моделирования, применяемым во всех видах логистики.

Задачи изучения дисциплины

Основные задачи дисциплины:

- ознакомить с теоретическими основами экономико-математического моделирования логистических задач;
- изучить методы решения экономико-математических задач логистики складирования, запасов, производственной, закупочной логистики;
- изучить методики постановки и решения логистических экономико-математических задач в условиях наличия больших объемов информации и высокой степени неопределенности проблемных ситуаций;
- овладеть компьютерными технологиями в решении логистических экономико-математических задач.

Место дисциплины в учебном процессе.

Важное место дисциплины в учебном процессе обусловлено настоятельной необходимостью овладения знаниями экономико-математического моделирования и практическими навыками поиска оптимальных решений будущими специалистами в области логистики.

ПРОГРАММА КУРСА

УЧЕБНО-ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

№ п/п	Наименования разделов, дисциплин, тем и форм текущей аттестации	Количество учебных часов										Этапы
		Всего	Распределение по видам занятий									
			Аудиторные занятия								самостоятельная работа	
			лекции	практические занятия	семинарские	круглые столы тематические	лабораторные	деловые	тренинги	конференции		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	Введение.	4	2								2	
2	Экономико-математические методы и модели производственной логистики.	15	5	2			6				2	
3	Экономико-математические методы и модели в закупочной логистике и логистике складирования.	13	1	2			6				4	
4	Экономико-математические методы и модели в логистике запасов.	5	1								4	
5	Методы многоцелевой оптимизации в решении логистических задач.	6	2								4	
6	Методы теории массового обслуживания в решении логистических задач.	5	1								4	
	Форма текущей аттестации (экзамен)											
ВСЕГО		48	12	4			12				20	

СОДЕРЖАНИЕ ЛЕКЦИОННЫХ ЗАНЯТИЙ

Тема 1. Введение

Математические основы логистики, связь с научными дисциплинами. Этапы решения простейших логистических экономико-математических задач. Основные типы моделей и методов, применяемых в логистике.

Тема 2. Экономико-математические методы и модели производственной логистики

Экономико-математические задачи распределения в производственной логистике. Задача об оптимизации производственной программы (собственно распределения), о раскрое, о смесях, о назначении. Методы решения оптимизационных задач в логистике: линейное, нелинейное программирование.

Тема 3. Экономико-математические методы и модели в закупочной логистике и логистике складирования

Виды моделей и методов, применяемых в закупочной логистике и логистике складирования. Транспортная задача и методы ее решения. Задача выбора маршрута и метод динамического программирования для ее решения. Задача о коммивояжере.

Тема 4. Экономико-математические методы и модели в логистике запасов

Экономико-математические методы и модели управления запасами. Задача об экономичном размере партии без учета и с учетом убытков из-за неудовлетворенного спроса, при случайном спросе, с учетом затрат на хранение. Динамическое программирование в решении однопродуктовой задачи управления запасами.

Тема 5. Методы многоцелевой оптимизации в решении логистических задач

Многоцелевая оптимизация в производственной логистике и логистике складирования. Метод линейной свертки, простейший метод условной оптимизации, метод уступок, методы Парето.

Тема 6. Методы теории массового обслуживания в решении логистических задач

Теория массового обслуживания в распределительной логистике и логистике складирования. Система массового обслуживания с отказами, с ожиданием при неограниченном и ограниченном входящем потоке.

КУРС ЛЕКЦИЙ

Тема 1. ВВЕДЕНИЕ.

1.1. Математические основы логистики, связь с научными дисциплинами.

Курс «Экономико-математические методы и модели» («ЭММ и М») представляет собой обобщающее название комплекса экономических и математических научных дисциплин, направленных на изучение социально-экономических систем и процессов, а также на повышение эффективности их функционирования, в том числе в логистической сфере.

В числе научных дисциплин, в наибольшей степени связанных с курсом «ЭММ и М», отметим следующие:

1. Исследование операций – комплекс научных методов и моделей для решения задач эффективного управления организационными системами, в частности, экономическими (предприятие, отрасль, национальная экономика).

2. Системный анализ – наука, изучающая сложные динамические системы, в частности, слабо формализованные и неструктурированные.

3. Кибернетика – наука об управлении сложными динамическими системами.

4. Математическое программирование – раздел прикладной математики, изучающий задачи условной оптимизации.

5. Математическая статистика – наука, изучающая закономерности случайных массовых явлений.

6. Эконометрика – наука, исследующая количественные закономерности и взаимозависимости в экономике преимущественно методами математической статистики.

7. Теория принятия решений и др.

Математические модели и методы в экономической предметной области могут и должны находить широкое применение для организации, ведения, реформирования производственно-хозяйственной деятельности в республике, регионах и отдельных субъектах хозяйствования. Они должны широко использоваться в системах управления и при реализации отдельных функций менеджмента, в микро- и макроэкономическом регулировании, в экономическом анализе, планировании и прогнозировании.

Особенно важны экономико-математические методы и модели в такой современной научной дисциплине, как логистика.

Математические основы логистики заключаются в формировании этапов товародвижения (материальных потоков), расчете и оптимизации продолжительности операций и простоев, интервалов прибытия, количества транспортных средств и т.д. Можно даже утверждать, что в основе логистики, как науки, лежат именно экономико-математические методы и модели.

1.2. Этапы решения простейших логистических экономико-математических задач.

Применительно к простейшим логистическим задачам этапы решения могут быть адаптированы следующим образом:

1. Определение цели задачи и ограничений.
2. Построение математической модели (целевой функции и системы ограничений).
3. Нахождение логистического решения, в идеальном случае, оптимального.
4. Проверка результатов расчетов, в частности, сверка с «оригиналом» логистической операции.
5. Внедрение полученного решения в практику логистической деятельности организации, предприятия, фирмы.

Определение цели задачи и ограничений в литературе часто называют «постановкой». Постановка задачи – это, как правило, словесная ее формулировка, предполагающая тщательное исследование объекта, системы, явления, процесса. При этом выявляются основные цели его функционирования, а также факторы, влияющие на достижение этой цели. Этот этап, как и все последующие, носит итерационный характер. Т.е., часто возникает необходимость возврата к этому этапу после прохождения последующих для дополнительного уточнения отдельных деталей.

Построение математической модели или формализация задачи предполагает введение обозначений для известных величин (констант), неизвестных величин (переменных), индексов, математических знаков и т.д.

Нахождение логистического решения во многом определяется классом и типом моделей, получаемых на втором этапе. Это могут быть статистические методы, методы математического программирования и т.д.

Проверка наиболее сложных экономико-математических моделей и методов их реализации предполагает сравнение фактических значений показателей со значениями, полученными на основе этих моделей. Если отклонение не превышает заданной величины, то можно переходить к следующему этапу. Если отклонение превышает допустимое значение, то либо модель или метод реализованы неудачно, либо на этапе постановки упущены существенные элементы анализа.

Внедрение – это завершающий этап решения экономико-математических задач, предполагающий реализацию полученных результатов в практику управления, планирования, прогнозирования и т.д.

1.3. Основные типы моделей и методов, применяемых в логистике.

Универсальной, устоявшейся и общепринятой классификации экономико-математических моделей и методов моделирования к настоящему времени не создано. Для экономического анализа, планирования, прогнозирования, управления, логистики, исходя из частоты практического применения, можно предложить следующие основные обобщенные типы моделей и методов:

1. Факторные модели и методы.
2. Оптимизационные модели и методы.
3. Модели и методы финансовой математики.
4. Балансовые модели матричного типа.
5. Экспертные методы.

1. Факторные модели детерминированного и стохастического типа

Факторная модель – математически описанная зависимость между результативным (зависимым, являющимся объектом исследования) показателем и факторными показателями (показателем), влияющими на результативный.

Зависимости и, соответственно, модели могут быть

- детерминированными, т.е., основанными на функциональной зависимости между результативным и факторным показателями и математически представленными в виде формулы алгебраической суммы, произведения или частного от деления факторных показателей;

- стохастическими (вероятностными), т.е., основными на математико-статистических зависимостях, определяемых по значительному числу наблюдений (значений показателей).

Традиционно детерминированные методы и модели изучаются в рамках специальных курсов, например, анализа хозяйственной деятельности.

Стохастические факторные экономико-математические модели и методы их построения изучаются традиционно в таких дисциплинах, как математическая статистика и эконометрика. Прежде всего, используются корреляционный, регрессионный, дисперсионный, кластерный анализ и др.

Зависимость между двумя показателями описывается парной корреляционно-регрессионной моделью вида:

$Y = f(X)$, где

Y – зависимые переменные;

X – независимые переменные.

Если в качестве независимой переменной выступает время (t), то парная модель носит названия тренда или трендовой модели:

$Y = f(t)$.

Для определения вида функции первоначально можно использовать график, в котором по одной оси откладывают значение x, по другой – $Y(x)$. По расположению точек выбирают вид кривой.

Если по расположению точек подобрать вид кривой затруднительно, то строят несколько функций и сравнивают их по величине среднеквадратической ошибки. Для практического использования выбирают функцию с минимальной ошибкой

$$\min \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2$$

При этом следует выбирать более простые функции, так как сложные функции в виде полиномов высоких степеней трудно интерпретировать экономически. Такие функции могут отражать и случайные отклонения, а это противоречит смыслу тенденции, особенно если она используется в целях прогнозирования (экстраполяции).

Количественная зависимость финансово-экономического показателя от 2-х и более факторных показателей описывается многофакторной корреляционно-регрессионной моделью. Такая модель имеет общий вид:

$Y = f(X_1, X_2, ..., X_4)$, где

Y – зависимый показатель, например, балансовая прибыль;

X_1 – первый независимый факторный показатель (например, себестоимость)

X_2 – второй независимый факторный показатель и т.д.

Чаще всего применяют линейные многофакторные модели:

$Y = A_0 + A_1X_1 + A_2X_2 + ... + A_nX_n$.

Реже – нелинейные:

- параболическая

$$Y = A_0 + A_1X_1 + B_1X_1^2 + ... + A_nX_n + B_nX_n^2;$$

- гиперболическая $Y = A_0 + A_1 \cdot \frac{1}{X_1} + ... + A_n \cdot \frac{1}{X_n}$;
- степенная $Y = A_0 X_1^{A1} X_2^{A2} \cdot ... \cdot X_n^{An}$.

Методы построения и анализа корреляционно-регрессионных моделей изложены в литературе по курсам «Математическая статистика» и «Эконометрика».

2. Оптимизационные модели и методы.

В узком смысле слова принцип оптимизации наиболее строго трактуется математиками – в теории оптимальных процессов и математического программирования, в кибернетике, в исследовании операций.

Оптимизация предполагает наличие:

- Множества вариантов реализации системы.
- Группы ограничивающих характеристик, параметров, факторов. В экономических задачах эти ограничения имеют, как правило, ресурсный характер. Например, наличие финансовых, трудовых, материальных ресурсов и т.д.
- Одного или нескольких критериев, экстремум которых должен быть, по возможности, достигнут. Математически эти критерии описываются одной или несколькими функциями. Эти функции называют целевыми функциями, или функциями полезности, или критериями предпочтений, или функциями эффективности системы.

Наиболее общий вариант модели оптимизационных задач имеет следующий вид:

$$f(X) \to \max(\min)$$
$$G(X)\{\leq, =, \geq\}B \quad \text{, где}$$

f(X) – целевая функция;

G(X) – вектор ограничений.

В мире оптимизационные методы сейчас нашли самое широкое применение во всех областях человеческой деятельности: в промышленном производстве и здравоохранении, в просвещении и на транспорте, в организации досуга и обслуживании. При этом известно, что первой областью их практического применения стала военная (ПВО в Великобритании в 30-40-е г.г.). Теоретические основы оптимизации в экономике впервые предложены отечественными учеными Л.В. Канторовичем, Новожиловым и др., а также зарубежными исследователями Дж. Данцигом, Р.Беллманом и др.

Для оптимизации экономических задач наиболее часто применяются следующие методы математического программирования:

1. *Линейное программирование*, реализуемое для моделей вида

$$f(X_1, X_2, ..., X_n) \to \max(\min)$$
$$G_1(X_1, X_2, ..., X_n) \leq B_1$$
$$G_2(X_1, X_2, ..., X_n) = B_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$G_m(X_1, X_2, ..., X_n) \geq B_m$$

2. *Нелинейное программирование*, применяемое для моделей, схожих с предыдущим вариантом, если в целевой функции и/или ограничениях присутствуют переменные (неизвестные) во второй степени или выше. Отдельные виды нелинейных моделей имеют свои названия, например, квадратическое, геометрическое программирование и т.д.

3. *Динамическое программирование*, представляющее собой особые методы нахождения оптимальных решений многошаговых (многоэтапных) задач.

4. *Стохастическое программирование*, когда в целевой функции и/или ограничениях присутствуют случайные величины, характеризуемые определенной вероятностью.

5. *Дискретное программирование*, когда на переменные (неизвестные) накладывается дополнительное условие принадлежности к определенной дискретной области допустимых значений: $X \in D$.

Частным случаем дискретного программирования является целочисленное программирование. При этом значения переменных (неизвестных) могут быть целыми.

6. *Эвристическое программирование*. Это модели, оптимизация которых не имеет строгого математического доказательства. Но практическая реализация указанных методов дает достаточно хорошие результаты.

Более подробно эти модели и методы будут рассмотрены ниже.

3 . Модели и методы финансовой математики.

Модели и методы финансовой математики охватывают широкий набор экономико-математических задач, связанных с кредитно-финансовой, инвестиционной деятельностью субъектов хозяйствования, с анализом финансового рынка, в частности рынка ценных бумаг. Здесь рассматриваются модели и методы финансовых вычислений по простым и сложным процентам, вопросам дисконтирования, расчета рент и т.д.

Эти вопросы традиционно излагаются в курсах «Финансы», «Анализ хозяйственной деятельности», поэтому в курсе «ЭММ и М» рассматриваются только как элемент классификации.

4. Балансовые модели матричного типа.

Балансовые модели основаны на взаимном сопоставлении объемных показателей выпуска продукции с материальными, трудовыми, финансовыми ресурсными показателями, потребностями или их использованием. И статистические, и динамические балансовые модели могут строиться как на уровне предприятия и его структурных подразделений, так и на уровне отрасли, группы отраслей или отраслевых комплексов, региона, национальной экономики.

Балансовые модели матричного типа представляют собой зависимости, содержащие элементы в виде матриц и векторов.

5.Экспертные методы.

Экспертные индивидуальные или комплексные методы заключаются в использовании и обработке суждений одного или группы экспертов по исследуемой проблеме, системе, процессу и т.д.

Не останавливаясь на описании методики, организации и видах экспертных методов отметим, что в ходе экспертного анализа чаще всего применяют ранжированные и балльные оценки (например, по 5 и 10-балльной шкале).

Экспертные оценки не только широко применяемый инструмент решения экономических и управленческих задач, но нередко дополняют иные виды экономико-математического моделирования.

ТЕМА 2. ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ЛОГИСТИКИ.

2.1. Экономико-математические задачи распределения в производственной логистике.

Классификация оптимизационных экономико-математических задач.

Создать полную и универсальную классификацию оптимизационных задач, применяемых в производственной и иных видах логистики, достаточно сложно по ряду причин. Одни и те же задачи могут обладать признаками разных классов или могут по-разному моделироваться. Кроме того, непрерывно появляются новые экономико-математические задачи, модели и методы оптимизации.

Простейшая классификация оптимизационных задач включает:

1. Задачи распределения.

Это наиболее широко применяемый класс оптимизационных задач, характеризуемый следующими признаками:

– Существует определенный набор работ, операций, функций, которые необходимо выполнить.

– Некоторые работы, операции, функции можно выполнять различными способами (вариантами).

– Некоторые способы (варианты) выполнения работ, операций, функций лучше других, что оценивается соответствующим показателем (показателями).

– Ресурсов для выполнения работ, операций, функций наилучшим способом (вариантом) недостаточно.

Важнейшие подклассы задач распределения будут рассматриваться в следующем вопросе.

2. Задачи управления запасами.

Запасы – временно неиспользуемые ресурсы, которые в будущем поступят в производство, будут проданы и т.д. С запасами мы имеем дело в очень многих областях человеческой деятельности, и, конечно, в производстве, в экономике.

Экономический ущерб приносит как чрезмерный, так и недостаточный запас. В первом случае – возрастают расходы на содержание излишнего количества запасов. Во втором – возрастают расходы из-за задержек в производстве, перебоев в торговле и т.д.

Управление запасами – целый набор разнообразнейших задач по своему содержанию, методам решения, целям.

3. Задачи теории массового обслуживания.

Решение задач массового обслуживания связано с необходимостью повышения эффективности выполнения работ (услуг) над определенными объектами (обслуживаемыми единицами).

Задачи, эффективно решаемые методами теории массового обслуживания, встречаются

- при организации связи;
- в торговле, материально-техническом снабжении и сбыте;
- в обслуживании и ремонте оборудования и т.д.

Система массового обслуживания считается заданной, если определены следующие элементы:

1). Входящий поток требований (заявок). Имеется некоторый источник требований, при этом требования должны быть однородны, с отсутствием «последействия», а моменты времени возникновения требований должны быть случайными.

2). Система обслуживания, состоящая из накопителя и узла обслуживания.

Узел обслуживания – один или несколько обслуживающих приборов (аппаратов, устройств), каждый из которых обслуживает не более одного требования в единицу времени.

Задается время обслуживания требования каждым прибором.

Узел обслуживания может быть станком, аппаратом, рабочим, предприятием.

Если приборы заняты, требования находятся в накопителе или очереди требований. Их может быть и несколько.

3).Выходящий поток требований (заявок).

Графически это можно изобразить так:

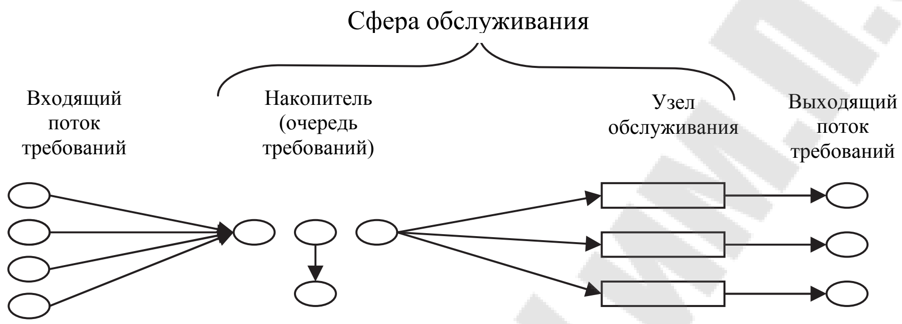


Рис. 1.

Пример. Группа станков обслуживается бригадой наладчиков. Входящий поток – отказы станков. Узел обслуживания – бригада наладчиков. Прибор – наладчик или группа из 2-3 человек, ремонтирующих станок. Выходящий поток – готовые к работе станки.

Для задания системы массового обслуживания необходимо еще определить так называемые

- дисциплину ожидания;
- дисциплину очередей;
- дисциплину обслуживания.

Дисциплина ожидания – совокупность правил формирования очереди. В частности, различают:

– Системы с отказами (потерями) или без ожидания – когда все приборы заняты, требование получает отказ и покидает систему.

– Системы с неограниченным временем ожидания – когда требование застает все приборы занятыми, оно становится в очередь и ждет до тех пор, пока один из приборов не освободится.

– Системы смешанного типа – когда требование застает все приборы занятыми, оно становится в очередь, в которой находится ограниченное время. В течение этого времени требование или обслуживается, или покидает систему.

Дисциплина очередей – совокупность правил, в соответствии с которыми отдается предпочтение той или иной очереди (для нескольких очередей).

Дисциплина обслуживания – совокупность правил, в соответствии с которыми требование выбирает прибор, который его будет обслуживать.

В простейшем случае требование обслуживается любым свободным прибором.

Задачи теории массового обслуживания могут решаться особыми методами, предлагаемыми этой теорией. В тоже время, задачи других классов нередко решаются методами теории массового обслуживания.

4. Задачи теории расписаний.

В теорию расписаний можно включить самый широкий набор экономико-математических моделей, оптимизирующих режим производства во времени. Это относится и к выпуску готовой продукции, к производству отдельных деталей, узлов, операций, режиму загрузки оборудования и рабочих, взаимодействию подразделений при выполнении конкретных видов работ и т.д. Результатом решения таких задач часто становится оптимальный оперативно-календарный план.

В теорию расписаний включают собственно задачи упорядочения, задачи на графах и сетях, в частности, сетевого планирования и управления и др.

5. Задачи выбора маршрута.

В общем виде задача выбора маршрута ставится так: необходимо найти маршрут проезда из пункта A в пункт B. Возможны несколько маршрутов (вариантов проезда) с разными промежуточными пунктами. Стоимость, или расстояние, или время в пути зависят от выбранного маршрута. Надо выделить наиболее экономичный маршрут по выбранному критерию оптимальности.

Методы решения: динамическое программирование, сетевое планирование и управление и др.

6. Задачи ремонта и замены оборудования.

Существует два типа задач ремонта и замены оборудования.

Первый тип связан с ухудшающимися в ходе использования или с течением времени характеристик элементов машин, станков, автоматических линий и иных видов оборудования. Эти элементы, как правило, крупные, дорогостоящие, например, генераторы, станки с ЧПУ и т.д.

С течением времени снижается эффективность работы такого оборудования, происходит его моральное старение, повышается себестоимость изготовления продукции, увеличиваются затраты на ремонт. Замена такого оборудования связана с дополнительными инвестициями (капитальными вложениями).

Сущность оптимизационной задачи ремонта и замены оборудования заключается в определении такого порядка и сроков замены элементов, при которых минимизируются общие эксплуатационные и инвестиционные затраты.

Для решения этого типа задач применяются методы динамического программирования и методы математического анализа.

Второй тип задач связан с такими элементами, которые имеют неухудшающиеся в процессе эксплуатации характеристики, сохраняют эффективность на протяжении всего срока службы и внезапно полностью выходят из строя. Эти элементы, как правило, невелики и сравнительно дешевы, например, элементная база компьютеров и электронного оборудования.

Сущность этого типа задач ремонта и замены оборудования заключается в определении целесообразности «индивидуальной» или «групповой» замены, их частоты, при которой минимизируются суммарные затраты, связанные со стоимостью заменяемых элементов, потерями от отказов и простоев, расходами на замену.

Для решения таких задач применяются специальные аналитические методы.

7. Задачи поиска.

Задачи поиска решаются на объектах (системах), состоящих из большого числа элементов (множества).

При решении любой задачи на таком объекте мы не можем подвергнуть учету или анализу все элементы системы (объекта), а должны ограничиться лишь частью элементов или выборкой (из-за ограниченности времени, средств и т.д.).

Ограниченность ресурсов приводит к тому, что мы не можем взять достаточно большое количество элементов для наблюдения (объем выборки), а также выбрать наиболее типичные элементы для наблюдения (структура выборки). Таким образом, в задаче обязательно присутствует ошибка выборки, характеризуемая определенной величиной вероятности.

Кроме того, с увеличением объема выборки при ограниченности ресурсов уменьшается точность учета необходимых характеристик элементов системы. Т.е., возрастает ошибка наблюдения, также характеризуемая определенной величиной вероятности.

Таким образом, задача ограниченного поиска формулируется так: выбрать объем и структуру выборки, минимизирующие ошибки выборки и наблюдений при ограниченных ресурсах (времени, денежных средств, участников поиска и т.д.).

Неограниченный вариант задачи поиска: какое количество ресурсов целесообразно использовать в процессе поиска (с увеличением объема ресурсов, снижаются потери от ошибок, где оптимум?).

Задачи поиска близки к задачам прогнозирования и в широком смысле включают их.

Задачи поиска чаще всего встречаются в системах контроля качества, в организации бухгалтерского контроля и аудита, при поиске научно-технической информации, полезных ископаемых и т.д.

8. Задачи теории игр.

Задачи теории игр – наиболее бурно развивающийся до настоящего времени класс экономико-математических задач, применение которых в условиях рыночной экономики особенно перспективно и целесообразно.

В игровых задачах обязательно присутствуют участники игры или «противники», действия которых с одной стороны, взаимозависимы, с другой – носят элемент неопределенности, случайности. Эти задачи позволяют, в частности, оптимизировать планово-экономические решения с использованием особых методов и алгоритмов теории игр.

9. Аналитические задачи.

Аналитические задачи – это задачи по выявлению скрытых закономерностей экономических процессов. Сюда включаются задачи по анализу качества выпускаемой продукции, выявлению причин брака и многие другие. Математический аппарат для реализации таких задач не носит универсального характера, а определяется характером и спецификой самой задачи. При этом чаще всего используется аппарат теории вероятностей, математической статистики, теории распознавания образов и т.д.

2.2. Задача об оптимизации производственной программы (собственно распределения), о раскрое, о смесях, о назначении.

1. Задача об оптимизации производственной программы (собственно задача распределения).

Приведем более сложный вариант такой задачи.

Пусть b_i – производственная программа (план производства) j-го вида продукции;

Q_i – наличие i-го вида сырья;

C_i – цена единицы сырья i-го вида.

Минимизировать стоимость сырья для выполнения производственной программы.

Указанная задача может ставиться в двух вариантах.

1 вариант.

Известна норма расхода i-го сырья на единицу j-го вида продукции (A_{ij}):

$$\sum_{i,j} C_i A_{ij} X_{ij} \to \min$$

$$\sum_{i} X_{ij} \ge B_i,\ j=1,\dots,n$$

$$\sum_{j} A_{ij} X_{ij} \le Q_i,\ i=1,\dots,m$$

$X_{ij} \ge 0$, где

X_{ij} – объем j-й продукции, изготавливаемой из i-го сырья.

2 вариант.

Известна норма выхода j-го вида продукции из единицы i-го вида сырья (A_{ij}):

$$\sum_{i,j} C_i X_{ij} \to \min$$

$$\sum_i A_{ij} X_{ij} \geq B_j,\ j=1,\dots,n$$

$$\sum_j X_{ij} \leq Q_i,\ i=1,\dots,m$$

$$X_{ij} \geq 0, \text{ где}$$

X_{ij} – объем *i*-го вида сырья, идущего на производство *j*-го вида продукции.

2. *Задача о раскрое материала (о комплексном использовании сырья).*

Это первые практические задачи, эффект от которых непосредственно проявляется в сфере технологии, в производстве.

Промышленные материалы поступают на предприятие в виде целых единиц стандартных размеров (листов, полос, рулонов и т.д.). Из них выкраиваются заготовки или детали определенной величины и формы. Часть идет в отходы. Цель – сократить отходы за счет рационального раскроя материала или увеличить выход готовой продукции.

В общем виде задача о раскрое формулируется следующим образом.

Из имеющегося числа заготовок необходимо выкроить детали *j*-вида в количестве m_j. Заготовка может раскраиваться *i* способами (вариантами). Известны нормы выхода деталей *j*-вида по *i*-му способу раскроя A_{ij}.

Минимизировать число заготовок для получения требуемого числа деталей m_j.

$$\min Z = \sum_i X_i$$

$$\sum_i A_{ij} X_i \geq m_j$$

$$X_i \geq 0, \text{ где}$$

X_i – число заготовок, раскраиваемых по *i*-му способу.

3. Задача о смесях (о диете).

Имеется j продуктов (компонентов) $j = \overline{1,n}$, при сочетании которых в различных пропорциях образуются различные смеси.

В состав каждого продукта входит i веществ, обозначаемых через A_i. Заданы величины C_j, характеризующие цену, вес, калорийность единицы j продукта и известные величины B_i, характеризующие минимально необходимое содержание i-го вещества в смеси.

Определить состав смеси X_j (сколько каждого продукта должно войти в смесь), для которого суммарная цена (вес, калорийность) будет наилучшей (минимальной или максимальной).

$$\min(\max) Z = \sum_{j} C_j X_j$$

$$\sum_{j} A_{ij} X_j \geq (\leq) B_i$$

$$X_j \geq 0$$

Возможны следующие дополнительные ограничения, усложняющие модель:

- присутствие ограничений по отдельным компонентам;
- наличие предельных норм включения компонентов в смесь;
- наличие пропорции в задании компонентов.

4. Задача о назначении.

Сущность задачи о назначении заключается в следующем.

Найти оптимальное распределение i работ между j исполнителями при заданной матрице эффективности $C = \left| C_{ij} \right|$ в условиях, когда

1). Каждому исполнителю можно выполнять только одну работу.

2). Каждая работа может выполняться только одним исполнителем.

В экономических задачах матрица эффективности отражает, обычно, объемы выпускаемой продукции, трудоемкость работ, время выполнения работниками отдельных функций и т.д.

Математическая модель задачи о назначении.

Неизвестная (переменная) X_{ij} – количество i работ, выполняемых j исполнителем.

$$Z = \sum_{i,j} C_{ij} X_{ij} \rightarrow \max(\min)$$

$$\sum_{i} X_{ij} = 1$$

$$\sum_{j} X_{ij} = 1$$

$X_{ij} = 0$, если i-я работа не выполняется j-м исполнителем;

$X_{ij} = 1$, если i-я работа выполняется j-м исполнителем.

Реализация задачи о назначении невозможна обычными методами решения распределительных задач. Для них требуются особые методы, например, Венгерский метод для решения задачи о назначении.

2.3. Методы решения оптимизационных задач в логистике: линейное, нелинейное программирование.

1.Общая постановка задач линейного программирования.

Основными универсальными методами решения задач распределения, а также целого набора других классов экономико-математических задач являются методы линейного программирования.

Эти методы предполагают наличие целевой функции, которую надо минимизировать или максимизировать (прибыль, расход ресурсов, выпуск продукции и т.д.) и системы ограничений (материальных, трудовых, финансовых ресурсов, времени и т.д.).

Методы линейного программирования ориентируются на следующую математическую модель:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j \to \max$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij} X_j \le B_i \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij} X_j = B_i \qquad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij} X_j \ge B_i \qquad (3)$$

Эту математическую модель можно представить в развернутой форме:

например, для целой функции и ограничения (1)

$$Z = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \dots + C_n X_n \to \max(\min)$$

при ограничениях:

$$A_{11} X_1 + A_{12} X_2 + \dots + A_{1n} X_n \le B_1$$

$$A_{21}X_1 + A_{22}X_2 + ... + A_{2n}X_n \le B_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mathrm{A}_{m1}\mathrm{X}_1 + \mathrm{A}_{m2}\mathrm{X}_2 + ... + \mathrm{A}_{mn}\mathrm{X}_n \le \mathrm{B}_m,$$

где C – вектор целевой функции;

A – матрица условий;

B – вектор ограничений, или правых частей, или свободных членов.

Как видим, и целевая функция, и каждое из ограничений имеют линейный вид, поэтому и математическая модель – линейная.

Универсальным методом решения таких моделей линейного программирования является симплекс-метод.

Впервые метод для решения задач линейного программирования предложил в 1939 г. Леонид Витальевич Канторович и назвал его методом разрешающих множителей. Но работа не была замечена, должным образом оценена и не получила широкого применения. Лишь значительно позже автор получил за эту разработку Ленинскую и Нобелевскую премии. 10 лет спустя выдающийся американский ученый Дж.Б. Данциг независимо от Канторовича предложил свой универсальный метод – симплекс-метод (название от геометрической фигуры, уравнение которой было использовано при доказательстве).

В 50-х годах, в основном, американцы создали много новых, эффективных методов решения задач линейного программирования, один из которых совпал с методом академика Канторовича.

2. Каноническая форма задачи линейного программирования.

Существующие методы линейного программирования требуют преобразования общей модели линейного программирования (см. выше) к каноническому или стандартному виду.

Канонический вид модели линейного программирования характеризуется следующими признаками:

1. Ограничения (1) – (3) заданы в виде равенств.
2. В ограничениях (1) – (3) выделен базис.
3. В целевой функции присутствуют все переменные задачи (возможно, с нулевыми коэффициентами).
4. В ряде случаев свободные члены ограничений тоже должны быть неотрицательными.

Базисом называется система переменных задачи, характеризующаяся следующими признаками:

1. Число базисных переменных равно числу ограничений задачи.
2. Каждая базисная переменная встречается в системе ограничений только в одном уравнении.
3. Коэффициенты при базисных переменных равны +1.

Базисное решение задачи линейного программирования – это частное решение, полученное приравниванием небазисных переменных к 0.

Рассмотрим способы преобразования моделей линейного программирования в канонический вид для каждого типа неравенств «≤» (1), «=» (2), «≥» (3).

I. Когда ограничения заданы неравенствами типа «≤»

$$\sum_j A_{ij} X_j \le B_i \quad , \qquad (1)$$

применяют метод дополнительных переменных (дополняются неравенства до равенств):

$$
\begin{array}{l}
A_{11}X_1 + A_{12}X_2 + \ldots + A_{1n}X_n + X_{n+1} = B_1 \\
A_{21}X_1 + A_{22}X_2 + \ldots + A_{2n}X_n + Xn+2 = B_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_{m1}X_1 + A_{m2}X_2 + \ldots + A_{mn}X_n + X_{n+m} = B_m
\end{array}
$$

В целевую функцию дополнительные переменные вводятся с нулевыми коэффициентами:

$$Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_nX_n + 0 \cdot X_{n+1} + 0 \cdot X_{n+2} + \ldots + 0 \cdot X_{n+m}$$

II. Когда ограничения заданы равенствами типа «=»

$$\sum_j A_{ij} X_j = B_i ,$$

применяют два метода:

1. Метод искусственных переменных.

Вводится в каждое уравнение системы ограничений искусственная переменная, величина которой близка 0, а значит, не нарушает равенств.

Система ограничений имеет вид, аналогичный предыдущему случаю.

При этом в целевую функцию дополнительные переменные вводятся с коэффициентом $\pm M$, где M – достаточно большое число, заведомо большее любого числа, которое встречается в задаче.

+M, если Z→ min;

–M, если Z→ max.

$$Z = C_1X_1 + C_2X_2 + ... + C_nX_n + MX_{n+1} + MX_{n+2} + ... + MxX_{n+m} \to \min$$

2. Метод элементарных алгебраических преобразований.

Добиваются, чтобы каждое уравнение содержало одну переменную, не встречающуюся в других уравнениях.

III. Когда ограничения заданы неравенствами типа «≥»

$$\sum_j A_{ij}X_j \ge B_i ,$$

преобразование в канонический вид проводится в 2 этапа:

1. Вводятся дополнительные переменные, дополняющие неравенства до равенств (но они не базисные, т.к. имеют коэффициент (-1).

2. Вводятся искусственные переменные, которые будут образовывать базис.

1-й этап	2-й этап
$A_{11}X_1 + A_{12}X_2 + ... + A_{1n}X_n - X_{n+1}$	$+ X_{n+m+1}$
$=B_1$	
$A_{21}X_1 + A_{22}X_2 + ... + A_{2n}X_n \quad - X_{n+2}$	$+ X_{n+m+2}$
$=B_2$	

…………………………………………………………………………

$A_{m1}X_1 + A_{m2}X_2 + ... + A_{mn}X_n \quad - X_{n+m}$

$+ X_{n+2m} = B_m$

Дополнительные и искусственные переменные вводятся и в целевую функцию:

$$Z = C_1X_1 + C_2X_2 + ... + C_nX_n - 0 \cdot X_{n+1} - 0 \cdot X_{n+2} - ... - 0 \cdot X_{n+m} \pm MX_{n+m+1} \pm MX_{n+m+2} \pm ...$$
$$... \pm MX_{n+2m}$$

(+M, если →min; –M, если →max).

Пример:

$$X_1 + X_2 + X_3 \to \min$$

$$X_2 + X_2 \le 5$$

$$X_1 + X_2 + X_3 = 15$$

$$X_1 + X_2 \ge 1$$

Канонический вид:

$$X_1 + X_2 + X_4 = 5$$

$$X_1 + X_2 + X_3 = 15$$

$$X_1 + X_2 - X_5 + X_6 = 1$$

$$Z = X_1 + X_2 + X_3 + 0 \cdot X_4 - 0 \cdot X_5 + MX_6 \to \min$$

3. Прямой алгоритм симплекс-метода линейного программирования.

Когда задача линейного программирования преобразована к каноническому виду, ее можно решать одним из методов линейного программирования. Наиболее простым, однако, не всегда наиболее эффективным методом решения, является прямой симплекс-метод. (В компьютерной реализации обычно применяется модифицированный симплекс-метод с мультипликативным представлением обратной матрицы.)

С алгоритмом прямого симплекс-метода ознакомимся на примере.

Пример. Имеется 3 вида оборудования (напр., станков) M_1, M_2, M_3. На нем выпускается 4 вида продукции (деталей). Известно, сколько времени каждая деталь обрабатывается на каждом станке и фонд времени работы станков (таблица 1). Известна также прибыль от реализации каждой детали.

Таблица 1.

Время обработки каждой детали на станке (часов).

Вид станка	Деталь 1 (Д$_1$)	Деталь 2 (Д$_2$)	Деталь 3 (Д$_3$)	Деталь 4 (Д$_4$)	Фонд времени работы станков
M_1	2	4	0	8	12
M_2	7	2	2	6	8
M_3	5	8	4	3	48
Прибыль от реализации детали (у.е.)	3	4	3	1	

Сколько деталей каждого вида выпустить, чтобы максимизировать прибыль?

Построим экономико-математическую модель в общем виде, введя следующие обозначения:

- матрица условий A_{ij} – время обработки j-й детали на i-м станке;
- вектор правых частей B_i – фонд времени работы i-го станка;
- вектор целевой функции C_j – прибыль от реализации j-й детали;
- неизвестная или переменная величина X_j – количество деталей j-го вида, которые необходимо выпустить, чтобы максимизировать суммарную прибыль.

Общий вид модели:

$$\sum_{j=1}^{4} C_j X_j \to \max$$

$$\sum_{j=1}^{4} A_{ij} X_j \le B_i\,,\ i = 1,\dots,m$$

$$X_j \ge 0\,,$$

или

$F = 3X_1 + 4X_2 + 3X_3 + 1X_4 \to \max$ при ограничениях

$$2X_1 + 4X_2 + 0 \cdot X_3 + 8X_1 \le 12$$

$$7X_1 + 2X_2 + 2X_3 + 6X_4 \le 8$$

$$5X_1 + 8X_2 + 4X_3 + 3X_4 \le 48$$

$$X_{ij} \ge 0$$

Преобразуем модель к каноническому виду, используя метод дополнительных переменных:

$$\begin{aligned}
&2X_1 + 4X_2 + 0X_3 + 8X_4 + X_5 &&= 12\\
&7X_1 + 2X_2 + 2X_3 + 6X_4 + X_6 &&= 8\\
&5X_1 + 8X_1 + 4X_3 + 3X_4 + X_7 &&= 48\\
&X_J \ge 0\\
&Z = 3X_1 + 4X_2 + 3X_3 + 1X_4 + 0X_5 + 0X_6 + 0X_7 \to \max
\end{aligned}$$

Базисными переменными в этой модели будут переменные X_5, X_6,, X_7 .

Алгоритм прямого симплекс-метода:

1-й шаг. Составим симплексную таблицу:

Базисная переменная	C_{n+i}	3	4	3	1	0	0	0	B_i
		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	
X_5	0	2	4	0	8	1	0	0	12
X_6	0	7	2	2	6	0	1	0	8
X_7	0	5	8	4	3	0	0	1	48
Z_j-C_j		-3	-4	-3	-1	0	0	0	0

1 столбец – базисные переменные;

2 столбец – коэффициенты целевой функции при базисных переменных C_{n+i};

следующие столбцы таблицы содержат все переменные задачи с соответствующими коэффициентами из канонической модели;

последний столбец – свободные члены ограничений;

верхняя строка над переменными – коэффициенты при переменных из целевой функции.

Z строка рассчитывается по формулам:

$$Z_j - C_j = \sum_i C_{n+i} A_{ij} - C_j$$

$$Z_0 = \sum_i C_{n+i} B_i$$

2-й шаг:

Если целевая функция $\rightarrow$ *max* и все элементы *Z*-строки положительны, то решение оптимально.

Если целевая функция $\rightarrow$ *min* и все элементы *Z*-строки отрицательны, то решение оптимально.

max Z = min (-Z)

Выбираем *max* по абсолютной величине (из отрицательных, если *max* или из положительных, если *min*) элемент *Z*-строки, получаем ключевой столбец.

Находим *min* отношение свободных членов к положительным элементам ключевого столбца:

$$\min\{\frac{B_i}{A_{ij}}\},$$

получаем ключевую строку, и на пересечении – ключевой элемент.

3-й шаг:

Вводим ключевой элемент в базис. Строим новую симплексную таблицу.

Базисная переменная	C_{n+i}	3	4	3	1	0	0	0	B_i
		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	
X_2	4	½	1	0	2	¼	0	0	3
X_6	0	6	0	2	2	-½	1	0	2
X_7	0	1	0	4	-13	-2	0	1	24
Z_j-C_j		-1	0	-3	7	1	0	0	12

Для расчета элементов новой симплексной таблицы можно использовать соответствующие формулы:

$$\frac{A_{r1}}{A_{rK}},\dots\frac{A_{rJ}}{A_{rK}},\dots\frac{B_r}{A_{rK}};$$

$$A'_{ij} = A_{ij} - A_{ik}\cdot\frac{A_{rj}}{A_{rk}}; \qquad i \neq r,\ A_{rk}>0$$

$$B'_i = B_i - A_{ik}\cdot\frac{B_r}{A_{rk}}$$

Z-строку рассчитываем по правилам, указанным выше.

Проще пользоваться следующими правилами:

1. В ключевом столбце на месте ключевого элемента 1, остальные – 0.
2. Элемент ключевой строки «новой» таблицы равен элементу ключевой строки «старой» таблицы, деленному на «старый» ключевой элемент.
3. Если в ключевом столбце (строке) «старой» таблицы 0, то соответствующая строка (столбец) переписываются без изменений.
4. Элемент «новой» строки равен элементу «старой» строки минус произведение соответствующего элемента «старого» ключевого столбца на соответствующий элемент «новой» ключевой строки.

Первая итерация закончена – далее аналогично.

4-й шаг.

Проводим вторую итерацию, получаем новую симплекс-таблицу:

Базисная переменная	C_{n+i}	3	4	3	1	0	0	0	B_i
		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	
X_2	4	½	1	0	2	¼	0	0	3
X_3	3	3	0	1	1	-¼	½	0	1
X_7	0	-11	0	0	-17	-1	-2	1	20
Z_j-C_j		8	0	0	10	¼	1½	0	15

Положительные элементы Z-строки данной таблицы свидетельствуют о получении оптимального решения.

Максимальная прибыль $Z = 15$ (у.е.)

$X_1=X_4 = 0$

$X_2 = 3$

$X_3 = 1$ (Т.е., нужно выпустить 3 детали $Д_2$ и одну деталь $Д_3$)

Предложенный алгоритм пригоден для решения задачи линейного программирования, каноническая форма которой получены любым способом, т.е., для ограничений любого вида. Например, для неравенств типа «≥» элементы симплекс-таблицы будут содержать величину M, но алгоритм расчета сохранится неизменным.

Анализ оптимального варианта решения по симплексной таблице.

1. Оценка столбцов (по Z-строке), переменных, вошедших в оптимальное решение, равна нулю.

Пример. X_2 и X_3 – входят в оптимальный план.

2. Оценка столбцов основных переменных, не вошедших в оптимальное решение, характеризует, насколько ухудшится (в нашей задаче – уменьшится) значение функционала, если в производственную программу включить одно изделие данного вида, при соответствующем изменении выпуска других изделий.

Пример. Включение еще одного изделия $Д_1$ в производственную программу, приведет к изменению выпуска других изделий и уменьшит прибыль на 8 у.е. (аналогично $Д_4$ – на 10 у.е.).

3. Оценки при дополнительных или фиктивных переменных указывают, что если увеличить соответствующий ресурс на 1, то значение функционала улучшится (у нас – увеличится) на величину оценки.

Пример. У нас фиктивной переменной X_5 соответствует первый вид ресурса – фонд времени работы станка M_1, X_6 – фонд работы M_2, X_7 – M_3.

Таким образом, увеличение фонда времени работы станка M_1 на 1 час приведет к увеличению прибыли на ¼ у.е., M_2 – 1,5 у.е.; увеличение фонда времени работы третьего станка не изменит прибыль.

4. Значение элемента вектора правых частей для фиктивной переменной указывает, какой объем соответствующего вида ресурса не используется в оптимальном решении.

Пример. X_7 соответствует фонду времени станка M_3. Значит, 20 часов времени работы станка M_3 не используется, по остальным видам оборудования – полное использование.

Проверим выполнение ограничений подстановкой найденных значений неизвестных:

$$2 \cdot 0 + 4 \cdot 3 + 8 \cdot 0 = 12 (= 12)$$

$$7 \cdot 0 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 6 \cdot 0 = 8 (= 8)$$

$$5 \cdot 0 + 8 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 28 (48 - 28 = 20)$$

5. Сумма произведений оценок дополнительных (фиктивных) неизвестных на показатели объемов соответствующих ресурсов в условиях задачи равна оптимальному значению функционала.

Пример. Значение функционала:

$$\tfrac{1}{4} \cdot 12 + 1\tfrac{1}{2} \cdot 8 + 0 \cdot 48 = 15.$$

4. Нелинейное программирование

В экономических и логистических задачах часто встречаются более сложные зависимости нелинейного вида. Например, зависимость себестоимости или некоторых элементов затрат зависят от объема производства нелинейно. Затраты на единицу продукции часто сначала снижаются с ростом производства, а затем начинают расти из-за сложностей управления объектом, транспортных издержек и т.д.

Поэтому возникает необходимость решать оптимизационные задачи, ограничения или целевая функция которых нелинейны.

Задачи нелинейного программирования в экономико-математическом моделировании – это экстремальные задачи, в которых целевые функции и ограничения характеризуются нелинейной формой зависимости.

В общем виде задача нелинейного программирования формулируется так:

$$\max(\min) f(X)$$

при ограничениях

$$g_1(X)(\le, =, \ge) b_1$$

$$g_2(X)(\le, =, \ge) b_2$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$g_m(X)(\le, =, \ge) b_m$$

В частном случае, когда все соотношения имеют линейный вид, мы получим задачу линейного программирования.

Таким образом, нелинейное программирование расширяет возможность постановки экономических задач.

Для нелинейного программирования нет общего метода решения. Однако разработано достаточно много методов для решения частных случаев задач нелинейного программирования. Например, существуют методы решения задач квадратичного программирования – когда при линейных ограничениях минимизируется или максимизируется квадратичная функция n переменных. Эти методы реализуют или оригинальные вычислительные алгоритмы, или используют симплекс-метод линейного программирования с некоторыми видоизменениями (как, например, метод Вулфа).

Решение оптимизационных задач экономики и логистики нелинейного вида в настоящее время осуществляется на основе использования современных информационных технологий. Практические навыки решения таких задач будут даны в рамках лабораторных работ по данному курсу.

ТЕМА 3. ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ В ЗАКУПОЧНОЙ ЛОГИСТИКЕ И ЛОГИСТИКЕ СКЛАДИРОВАНИЯ.

3.1. Виды моделей и методов, применяемых в закупочной логистике и логистике складирования.

В закупочной логистике и логистике складирования применяются:

– оптимизационные задачи, рассмотренные выше (об оптимизации производственной программы, о раскрое, о смесях);

– математико-статистические и эконометрические модели и методы (кратко рассмотрены выше);

– методы, использующие теорию графов и сетей;

– методы теории массового обслуживания;

– методы многоцелевой (векторной оптимизации) и др.

Классической и наиболее широко применимой задачей в этих видах логистики является транспортная задача.

3.2. Транспортная задача и методы ее решения.

1. Модель транспортной задачи и обзор методов ее решения.

Эти задачи чаще всего возникают в сфере транспорта, в материально-техническом снабжении и сбыте, в производственно-технологической сфере. Общий вид модели транспортной задачи:

$$\min Z = \sum_{ij} C_{ij} X_{ij}$$

$$\sum_{i} X_{ij} = B_j, \; j=1,\ldots,n$$

$$\sum_{j} X_{ij} = A_i, \; i=1,\ldots,m$$

$$X_{ij} \geq 0, \text{ где}$$

X_{ij} - количество продукции, перевозимой от i-го поставщика к j-му потребителю ;

B_j – потребность в продукции j-го потребителя;

A_i – наличие продукции у i-го поставщика;

C_{ij} – стоимость перевозки единицы продукции от i-го поставщика к j-му потребителю.

Минимизировать транспортные расходы по перевозке всей продукции от поставщиков к потребителям.

Транспортные задачи, помимо общих методов решения задач линейного программирования, имеют свои простые и эффективные методы решения:

- Метод потенциалов или модифицированный распределительный метод. Предложен Л.В. Канторовичем (1940 г.), Дж. Данцигом (1951 г.).
- Метод разрешающих слагаемых Лурье.
- Алгоритм дифференциальных рент Брудно.
- Венгерский метод (идея венгерских математиков Кенига (1916 г.) и Эгевари (1931 г.), развил ее в 50-х г.г. американец Кун).

В качестве примера расссмотрим перевозку продукции от поставщиков (три предприятия-изготовителя) к потребителям. Известно колличество единиц продукции у каждого i-го поствавщика и потребность в этой продукции у каждого j-го потребителя. Затраты по перевозке единицы продукции от каждого i-го постащика к каждому j-му потребителю представлены в таблице.

Таблица 2.

№ п.п.	Наличие продукции у поставщиков (шт.)	Потребность в продукции у потребителей (шт.)			
		1 потребитель	2 потребитель	3 потребитель	4 потребитель
		200	200	100	300
		Затраты по перевозке единицы продукции, у.е.			
1	300	5	3	2	4
2	400	2	1	3	1
3	100	4	2	1	5

В данной транспортной задаче закрытого типа требуется составить оптимальный план перевозок продукции от всех поставщиков ко всем потребителям, при котором суммарные затраты по перевозкам будут наименьшими, т.е.

$$F = \sum_i \sum_j C_{ij} X_{ij} \to \min$$

$$\sum_{j=1} X_{ij} = A_i,\ i = 1,...,m$$

$$\sum_{i=1} X_{ij} = B_j,\ j = 1,...,n$$

$$\sum_{i=1} A_i = \sum_{j=1} B_j \text{ или } \sum_{j=1} X_{ij} = \sum_{i=1} X_{ij}$$

$X_{ij} \geq 0$, где

C_{ij} – затраты по перевозке единицы продукции j-му потребителю от i-го поставщика;

X_{ij} – количество перевозимой продукции j-му потребителю от i-го поставщика, минимизирующая суммарные затраты по перевозкам.

2. Методы формирования базисного плана в транспортной задаче линейного программирования.

Любая транспортная задача линейного типа имеет множество допустимых поставок, т.е., поставок, удовлетворяющих ограничениям. Среди всех допустимых планов необходимо найти такой (такие), который минимизировал бы расходы на перевозку, т.е., оптимальный план.

Для решения задач методом потенциалов необходимо сначала определить первоначальное допустимое решение (или базисный, или опорный план), а затем проверить его на оптимальность.

Базисный план должен быть не только допустимым, но и невырожденным. Условие невырожденности плана – число поставок должно равняться m+n-1.

Если их меньше, то имеет место вырожденное решение. Эта ситуация может возникать, когда поставщик сразу удовлетворяет потребность потребителя и полностью исчерпывает свои возможности.

Для преодоления вырожденности вводят нулевые поставки в недостающее число клеток так, чтобы не образовывалась замкнутая цепь.

Рассмотрим 4 метода формирования базисного плана.

1. Метод северо-западного угла.

Суть его – формирование поставок (заполнение клеток) осуществляется по формальным правилам – начиная с верхнего левого угла и заканчивая нижним правым углом.

Достоинства: прост и легко формализуем.

Недостаток: базисный план, как правило, далек от оптимального.

2. Метод минимального элемента по строке или по столбцу.

В строке (столбце) выбирается клетка с min затратами по поставке ($\min C_{ij}$) и туда заносится поставка. Затем, если потребность полностью не удовлетворена, ищется следующий min элемент строки (столбца) и т.д. (При равенстве величин затрат – берется любой).

Достоинства: получаемый базисный план ближе к оптимальному, чем у метода северо-западного угла.

3. Метод минимального элемента (в матрице).

Поставка выполняется в клетку с минимальным значением затрат C_{ij}, потом берется следующий минимальный элемент в матрице и т.д.

Достоинство: базисный план наиболее близок к оптимальному в сравнении с другими методами.

4. Метод Фогеля (для задач большой размерности). Суть: определяются разности между двумя минимальными элементами по строкам и столбцам матрицы.

Среди всех строк и столбцов выбирается строка или столбец с наибольшей разностью. В эту строку или столбец на место минимального элемента производится поставка.

Исключаем из рассмотрения данную строку или столбец и далее поступаем аналогично.

Достоинство: для задач большой размерности базисный план наиболее близок к оптимальному.

Замечания:

1). Если встретились одинаковые первые разности в строке и столбце, могут быть две ситуации:

2). Минимальный элемент в строке является минимальным и в столбце. Поставки – в эту клетку.

3). Если они не совпадают – рассчитывают вторые разности (берется не самый ближний к минимальному элемент, а следующий за ним).

Существуют и другие методы расчета базисного плана, например, метод Лебедева-Тихомирова и др.

3. Определение оптимального плана методом потенциалов.

После формирования первоначально допустимого решения (опорного или базисного плана) можно для решения задачи использовать, например, метод потенциалов.

Поставим в соответствие каждому поставщику величину α_i, каждому потребителю – величину β_j и свяжем эти величины следующим образом:

$$\alpha_{ij} + C_{ij} = \beta_j \qquad (1)$$

Величины α_i и β_j называются потенциалами. Их можно интерпретировать как стоимость единицы продукции у поставщика и потребителя соответственно.

Базисное решение транспортных задач линейного типа оптимально, если для всех свободных клеток таблицы перевозок выполняются неравенства:

$$\alpha_i + C_{ij} \geq \beta_j \qquad (2)$$

Алгоритм расчета.

1). Составляем для базисных (заполненных) клеток уравнения типа (1):

$$\alpha_i + C_{ij} = \beta_j$$

2). Принимаем любой один потенциал нулевым, например, $\alpha_1 = 0$ и найдем остальные потенциалы, опираясь на базисные заполненные клетки.

Запишем их в таблицу.

3). Проверяем оптимальность первоначального допустимого решения, используя неравенство (2) для всех свободных клеток.

$\alpha_i + C_{ij} \geq \beta_j$

4). Перераспределяем поставки, переходя к новому базисному решению. Для этого:

- Выбирается клетка, в которой неравенство (2) не выполняется больше всего.

- Ходом шахматной ладьи (двигаясь строго вертикально или строго горизонтально) обходят базисные клетки таким образом, чтобы последним ходом вернуться в исходную. При этом поочередно базисные клетки помечаются «-» и «+». В каждой строке или столбце не должно быть более двух таких отметок.

- Среди клеток, помеченных знаком «-» находится клетка с минимальной поставкой.

Эта поставка прибавляется в клетки, отмеченные «+» и вычитается из клеток, помеченных «-».

Примечания:

Следить за тем, чтобы число базисных клеток было $m+n-1$.

Если минимальная поставка, помеченная знаком «-», равна 0, действуем по общим правилам (значения поставок не меняются, но меняются потенциалы).

Таким образом, получаем новое допустимое решение, более близкое к оптимальному.

5). Проверяем оптимальность, согласно пункту (3) и повторяем пункты (3), (4) и (5) до получения оптимального решения.

Признаком оптимальности решения является величина функционала, и только она.

Если минимум функционала достигается при многих вариантах плана, то все они признаются оптимальными.

Сделаем еще несколько существенных замечаний.

1. Оптимальное значение функционала можно найти, используя значение потенциалов:

$$Z = \sum_i \sum_j C_{ij} X_{ij} = \sum_i \sum_j (\beta_j - \alpha_i) X_{ij} = \sum_j \beta_j X_{ij} - \sum_i \alpha_i X_{ij}$$

2. Если в оптимальном плане имеется хотя бы одна нулевая поставка, то задача имеет бесконечное число оптимальных планов.

4. Решение открытых, многоэтапных, многопродуктовых транспортных задач.

Мы отмечали, что если возможности поставщиков и потребителей не совпадают, т.е.

$$\sum_{i=1} A_{ij} \neq \sum_{j=1} B_{ij} \ ,$$

то имеет место открытая транспортная задача.

Решение открытой транспортной задачи заключается в приведении ее к закрытому виду. Для этого вводят фиктивных поставщиков или потребителей, принимая затраты на перевозку равными нулю. После этого задача решается обычным способом.

Рассмотренная каноническая транспортная задача линейного программирования является однопродуктовой и одноэтапной, однако, на практике встречаются и более сложные варианты транспортных задач.

В частности, встречаются многопродуктовые задачи, в которых либо перевозятся разные виды продукции, либо перевозки требуют учета нескольких видов затрат (издержек). При этом продукция может быть взаимозаменяемая, невзаимозаменяемая, либо частично взаимозаменяемая.

Реализация этих задач затруднена, а для некоторых типов алгоритмы решений еще не созданы. В отдельных случаях удается построить поиск оптимального варианта перевозок по методам, рассмотренным выше.

Многоэтапная транспортная задача линейного программирования – это задача, в которой между поставщиками и потребителями есть промежуточные пункты, например, оптовая торговля или склады.

Двухэтапная задача – для поставок в пункт назначения используется одна промежуточная станция, трехэтапная – две и т.д. Для таких задач –могут использоваться либо обычные методы, либо требуются особые алгоритмы.

Рассмотрим решение двухэтапной транспортной задачи.

Если суммарные возможности поставщиков (A_i) равны сумарным потребностям потребителей (B_j) и равны суммарным емкостям складов (D_k), т.е.

$$\sum_i A_i = \sum_j B_j = \sum_k D_k \ ,$$

то задача решается обычными методами по частям: отдельно оптимизируются перевозки от поставщиков на склады, отдельно – от складов к потребителям. Оптимум обеспечивает сумма соответствующих затрат.

Если емкости складов больше возможностей поставщиков и/или потребностей потребителей

$\sum_k D_k > \sum_i A_i$ и/или

$\sum_k D_k > \sum_j B_j$,

то требуются особые методы решения, например, метод Ордена-Маша (способ фиктивной диагонали).

Согласно этому методу, особым образом (в четыре квадранта) записывается таблица перевозок. Например:

	D_1	D_2	D_3	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1				M	M	M	M
A_2				M	M	M	M
D_1	0	M	M				
D_2	M	0	M				
D_2	M	M	0				

Сначала поставки распределяются в одном из квадрантов (I или IV), затем заполняется фиктивная диагональ (II квадрант), а затем распределяются поставки в другом квадранте (IV или I).

Затраты по поставкам единицы продукции от склада к самому себе равны нулю, хотя, в принципе, такие перевозки лишены смысла. Поставки сюда означают размер неиспользованной мощности соответствующего склада.

Базисный план лучше формировать по методу минимального элемента.

На практике встречаются задачи смешанного типа, где на условие транспортной задачи накладываются оптимизационные модели других типов, что иногда значительно осложняет их решение.

3.3. Задача выбора маршрута и метод динамического программирования для ее решения.

Рассмотрим решение простейшей задачи выбора маршрута, представленной на рисунке, с помощью принципов динамического программирования. Цель задачи – выбрать кратчайший маршрут проезда из 1-го пункта в 10-ый, если известны расстояния между пунктами (они представлены на графе цифрами).

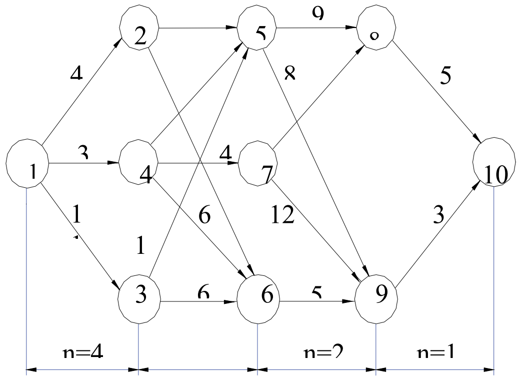


Рис. 2.

Разобьем все множество вершин на подмножества. Решение задачи разбивается на 4 этапа.

Обозначим

f_n (S) – минимальные затраты на перевозку груза от города *S* до конечного города;

j_n (S) – номер города, в который нужно ехать из города *S*, чтобы достичь *f_n (S)*.

C_{Sj} – стоимость перевозки из города *S* в город *j*.

Первый этап решения, $n = 0$. Груз доставлен в город 10.

$f_n(S) = f_0(10) = 0$ (из города 10 груз везти не надо).

Второй этап, $n = 1$. Груз может быть доставлен из города 9 или 8:

$S = 8$; $f_1(8) = C_{8,10} + f_0(10) = 5 + 0 = 5$; $j_1(8) = 10$.

$S = 9$; $f_1(9) = C_{9,10} + f_0(10) = 3 + 0 = 3$; $j_1(9) = 10$.

Третий этап, $n = 2$. Груз может находиться в городе 5, 6, 7.

$S = 5$; $f_2(5) = \min\limits_{j=8,9}\{C_{5,8} + f_1(8); C_{5,9} + f_1(9)\} = \min(9 + 5; 8 + 3) = 11$;

$j_2(S) = 9$.

$S = 6$; $f_2(6) = C_{6,9} + f_1(9) = 5 + 3 = 8$; $j_2(S) = 9$.

$S = 7$; $f_2(7) = \min\limits_{j=8,9}\{C_{7,8} + f_1(9)\} = \min(7 + 5; 12 + 3) = 12$; $j_2(S) = 8$.

Четвертый этап, $n = 3$. Груз может находиться в городе 2, 4, 3.

$S = 2$; $f_3(2) = \min\limits_{j=5,6}\{C_{2,5} + f_2(5); C_{2,6} + f_2(6)\} = \min(3 + 11; 4 + 8) = 12$;

$j_3(S) = 6$.

$S = 3$; $f_3(3) = \min\limits_{j=5,6}\{C_{3,5} + f_2(5); C_{3,6} + f_2(6)\} = \min(1 + 11; 6 + 8) = 12$;

$j_3(S) = 5$.

$S = 4$;

$f_3(4) = \min_{j=5,6,7}\{C_{4,5} + f_2(5); C_{4,6} + f_2(6); C_{4,7} + f_2(7)\} = (4+11; 6+8; 4+12) = 14$;

$j_3(S) = 6$.

Пятый этап, $n = 4$. Груз находится в исходном пункте, в первом городе.

$S = 1$;

$f_4(1) = \min_{j=2,3,4}\{C_{12} + f_3(2); C_{1,3} + f_3(3); C_{1,4} + f_3(4)\} = (4+12; 11+12; 3+14) = 16$;

$j_4(S) = 2$.

Таким образом, минимальные затраты на проезд из начального пункта в конечный составляют 16 единиц, а оптимальный маршрут движения характеризуется следующей последовательностью: $1 \to 2 \to 6 \to 9 \to 10$.

Методы динамического программирования позволяют реализовать задачи, не решаемые другими методами или решаемые с более высокой трудоемкостью.

3.4. Задача о коммивояжере.

Задача о коммивояжере является особым вариантом задачи выбора маршрута, где в условии принят ряд дополнительных ограничений:

- запрещается возврат к уже пройденному пункту;
- накладывается необходимость обойти все пункты;
- в одном пункте можно побывать только один раз.

В таком виде мы имеем задачу о коммивояжере.

К этому типу задач сводятся и некоторые производственные задачи.

Например, имеется возможность выпуска продукции на одной сборочной линии. Переход с выпуска одного вида продукции на другой сопровождается конкретным объемом затрат. Определить последовательность выпуска этих видов продукции, которая минимизировала бы затраты.

Для решения задачи о коммивояжере может использоваться один из вариантов метода ветвей и границ.

ТЕМА 4. ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ В ЛОГИСТИКЕ ЗАПАСОВ.

4.1. Экономико-математические методы и модели управления запасами.

В общем виде задача управления запасами может быть поставлена так:

Какой объем запасов необходимо создать и в какое время использовать их в производстве (торговле), чтобы минимизировать суммарные расходы (издержки).

Суммарные расходы могут включать:

1). Расходы на выполнение (организацию) заказа.

2). Расходы по использованию запасов. Например, накладные расходы на подготовку запасов к реализации, не зависящие от объема заказа.

3). Расходы на хранение запасов, включая расходы на ликвидацию порчи, по страхованию, расходы на зарплату кладовщика, амортизацию здания и т.д.

4). Расходы, возникающие от истощения запасов в производстве, торговле и т.д., связанные с перебоями, экстренной закупкой и др.

Методы решения задач управления запасами: динамическое программирование, нелинейное программирование, специальные аналитические методы, методы теории массового обслуживания.

4.2. Задача об экономичном размере партии без учета и с учетом убытков из-за неудовлетворенного спроса, при случайном спросе, с учетом затрат на хранение.

1. Задача об экономичном размере партии.

Предприятие должно поставить заказчику R единиц изделий в течение интервала времени T.

Поставка должна быть регулярной, т.к. возможностей для хранения изделий у заказчика нет.

Срыв поставок наказывается бесконечно большим штрафом.

Затраты включают:

1) C_1 – стоимость хранения единицы изделия;
2) C_2 – стоимость организации заказа (одной партии изделий);

3) $C_3 = \infty$ - убытки от срыва поставок.

Определить:

1) – оптимальный размер партии изделий q^*:

$$q^* = \sqrt{\frac{2C_2R}{C_1T}}$$

2) – интервал между запусками партий в производство (между поставками):

$$\tau^* = \frac{T \cdot q^*}{R} = \sqrt{\frac{2C_2T}{C_1R}};$$

3) – оптимальное количество партий $n^* = \left[\frac{R}{q^*}\right]$ или n^*+1, где $[\ ]$ - целая часть числа;

4) – общие затраты на реализацию поставок (выпуск всей продукции): $C^* = \sqrt{2C_1C_2RT}$

Графически условие задачи может быть представлено так:

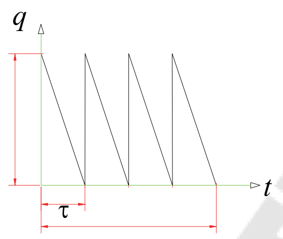


Рис. 3.

2. Задача об экономичном размере партии с учетом убытков из-за неудовлетворенного спроса.

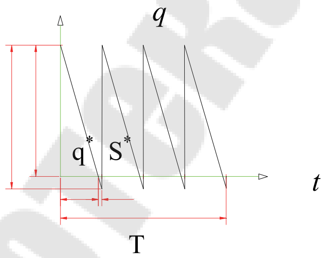


Рис. 4.

В предыдущей задаче мы предполагали, что срыв поставок недопустим (штраф (убытки) за недопоставку $C_3 = \infty$). Пусть возникновение дефицита допустимо, а убытки от неудовлетворенного спроса $C_3 \neq \infty$.

τ_1 - интервал времени, когда уровень запаса достаточен для удовлетворения спроса;

τ_2 - интервал времени, когда запас отсутствует.

Запишем аналитические формулы для расчета оптимального размера партии в этих условиях:

1. Оптимальный размер партии изделий:

$$q^* = \sqrt{\frac{2C_2R}{C_1T}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mu}}, \text{ где } \mu = \frac{C_3}{C_1 + C_3}$$

2. Оптимальный уровень запаса:

$$S^* = \sqrt{\frac{2C_2R}{C_1T}} \cdot \sqrt{\mu}$$

3. Интервал между запусками партий (между поставками):

$$\tau^* = \tau_1^* + \tau_2^* = \sqrt{\frac{2C_2T}{C_1R}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mu}}$$

4. Общие затраты на реализацию поставок:

$$C^* = \sqrt{2C_1C_2RT} \cdot \sqrt{\mu}$$

Общие расходы меньше, чем в первой задаче, что понятно.

3. Задача управления запасами при случайном спросе (с вероятностным спросом).

Задача с пренебрежительно малыми затратами на хранение.

Пусть спрос D за интервал времени T является случайным и известна его функция распределения вероятностей $P(D)$.

Если спрос D ниже уровня запаса – продажа с убытками C_1 на изделие.

Если спрос D выше уровня запаса S, то необходимы дополнительные расходы C_2 на изделие, связанные с необходимостью срочного пополнения запаса.

Пример. Покупка оборудования (машин) вместе с запчастями. Избыток запчастей связан с убыточной их распродажей, недостаток – с экстренной покупкой и переплатой.

Итак, возможны два случая:

1) Запас больше или равен спросу $S \geq D$

Тогда $(S - D)$ изделий продается с убытком C_1 на изделие.

2) Запас меньше спроса $S < D$.

Тогда $(D - S)$ изделий приобретаются с дополнительными расходами C_2 на изделие.

Поскольку известно распределение вероятностей спроса D за время T P(D), то математическое ожидание расходов по запасу

$$M(S) = C_1 \sum_{D=0}^{S} (S - D) P(D) + C_2 \sum_{D=S+1}^{\infty} (D - S) P(D)$$

Таким образом, можно подсчитать математическое ожидание расходов при различных уровнях запасов и из них выбрать наименьшее *K* (может быть и два).

Оптимальный уровень запасов может быть получен аналитически из формулы:

$$P(D \le S - 1) < K < P(D \le S), \text{ где } K = \frac{C_2}{C_1 + C_2};$$

$$P(D \le S) = P(0) + P(1) + \ldots + P(S).$$

4. Задача управления запасами с учетом затрат на хранение.

Пусть, как и в предыдущей задаче, спрос D за интервал времени T является случайным и известна его функция распределения вероятностей P(D).

Если запас $S \ge$ спроса D, то затраты на хранение одного изделия в единицу времени равны C_1.

Если запас S< спроса D, то убытки от нехватки запаса в единицу времени равны C_2. Математическое ожидание расходов по запасу в этом случае составит:

$$M(S) = C_1 \sum_{D=0}^{S} (S - \frac{D}{2}) P(D) + C_1 \sum_{D+S+1}^{\infty} \frac{S^2}{2D} P(D) + C_2 \sum_{D=S+1}^{\infty} \frac{(D - S)^2}{2D} P(D)$$

Оптимальный уровень запасов, минимизирующий ожидаемые расходы, может быть получен из аналитической формулы:

$$L(S - 1) < K < L(S), \text{ где } K = \frac{C_2}{C_1 + C_2};$$

$$L(S) = P(D \le S) + (S + 0{,}5) \sum_{D=S+!}^{\infty} \frac{P(D)}{D};$$

$$P(D \le S) = P(0) + P(1) + \ldots + P(S)$$

4.3. Динамическое программирование в решении однопродуктовой задачи управления запасами.

Задачи управления запасами могут решаться методами динамического программирования. В качестве примера рассмотрим однопродуктовую *N*-этапную динамическую модель.

Задача. Для планового выпуска продукции предприятию необходимо иметь определенное количество комплектующих узлов.

Величина спроса, затраты на оформление заказа на партию узлов и затраты на хранение каждого узла (у.е.) представлены в таблице.

Таблица 3

Период	Спрос S_i	Затраты на оформление *К*	Затраты на хранение *h*
1	3	3	1
2	2	7	3
3	4	6	2

Исходный запас (на начало 1-го месяца) – 1 узел ($x_1 = 1$). Максимальный запас, очевидно, $3 + 2 + 4 = 9$.

Предельные затраты на приобретение узлов составляют 10 у.е. за каждую единицу для первых трех единиц и 20 за каждую дополнительную единицу, т.е.

$$C_i(Z_i) = \begin{Bmatrix} 10Z, Z \le 3 \\ 20Z, Z \le 4 \end{Bmatrix}$$

Определить объем заказа *Z* для каждого периода.

Шаг 1. $S_1 = 3$ (спрос равен 3 на первом этапе)

$3 - 1 \le Z_1 \le 9 - 1$ (Минимальный заказ за один месяц возможен (3-1)

Максимальный заказ за 1 месяц возможен (9-1)

$2 \le Z_1 \le 8$

$0 \le X_2 \le 6$ (Исходное задание на начало 2 месяца может быть $0 \div 6$).

X$_2$	$Z_1 = 2$	$Z_1 = 3$	$Z_1 = 4$	$Z_1 = 5$	$Z_1 = 6$	$Z_1 = 7$	$Z_1 = 8$	З опт.	Оптим. вариант $Z*$
0	20+3+0							23	2
1		30+3+1						34	3
2			50+3+2					55	4
3				70+3+3				76	5
4					93+4			97	6
5						113+5		118	7
6							133+6	139	8

Шаг 2. $S_2 = 2$, $0 \le Z_2 \le 6$, $0 \le X_3 \le 4$

X$_3$	$Z_2 = 2$	$Z_2 = 3$	$Z_2 = 4$	$Z_2 = 5$	$Z_2 = 6$	$Z_2 = 7$	$Z_2 = 8$	З опт.	Оптим. вариант $Z*$
0	0+0+55	17+0+34	27+0+23					50	2
1	0+3+76	17+3+55	27+3+34	37+3+23				63	3
2	0+6+97	17+6+76	27+6+55	37+6+34	57+6+23			77	3
3	0+9+118	17+9+97	27+9+76	37+9+55	57+9+34	77+9+23		100	4
4	0+12+139	17+12+118	27+12+97	37+12+76	57+12+55	77+12+34	97+12+23	123	5

Шаг 3. $S_3 = 4$, $0 \le Z_3 \le 4$

X$_4$	$Z_3 = 0$	$Z_3 = 1$	$Z_3 = 2$	$Z_3 = 3$	$Z_3 = 4$	З опт.	Оптим. вариант $Z*$
0	0+123	16+100	26+77	36+63	56+50	99	3

Оптимальный вариант: затраты равны 99 у.е.

	1 этап	2 этап	3 этап
Заказ:	2 шт.	3 шт.	3 шт.

ТЕМА 5. МЕТОДЫ МНОГОЦЕЛЕВОЙ ОПТИМИЗАЦИИ В РЕШЕНИИ ЛОГИСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ.

5.1. Многоцелевая оптимизация в производственной логистике и логистике складирования.

Решение большинства практических проблем, в частности в логистике, требует учета множества критериев, а сведение их к одному часто является недопустимым упрощением. Такие задачи называются многокритериальными (или задачами многоцелевой, или векторной оптимизации).

К настоящему времени создано множество методов решения многокритериальных задач – от элементарно простых, до более тонких и сложных. Выбор метода диктуется, конечно, не только (и не столько) трудоемкостью способа, но в большей степени спецификой решаемой задачи.

При многокритериальной оптимизации возникают три основные проблемы:

1. Наиболее важная – выбрать сам принцип оптимальности, что считать оптимальным решением и в каком смысле это оптимальное решение превосходит все остальные?

Пример. Допустим, считаем данный вариант оптимальным по прибыли и фондоотдаче. Но есть вариант с меньшей прибылью и большей фондоотдачей. Может быть он лучше?

2. Частные (локальные) критерии оптимальности, являющиеся компонентами общего, глобального критерия, который мы пытаемся найти, часто имеют различные единицы и масштабы измерения, что делает невозможным их непосредственное сравнение. (Заметим, что часто и сопоставимость единиц измерения не дает возможности непосредственного сравнения). Таким образом, проблема связана с нормализацией пространства локальных критериев, т.е. приведением их к единому масштабу измерения.

3. Третья проблема связана с необходимостью учета во многих случаях степени важности (приоритета) локальных критериев. Это требует в некоторых случаях введения в модель вектора распределения важности критерия $C\ (C_1, C_2,, \ldots, C_i, \ldots, C_n)$.

5.2. Метод линейной свертки, простейший метод условной оптимизации, метод уступок, методы Парето.

1. Метод линейной свертки.

Первая группа способов решения многокритериальных задач имеет своей сутью сведение многокритериальной задачи к однокритериальной, т.е. введение суперкритерия. Важность критериев сопоставима, главный выделить сложно.

Скажем, если в производственном объекте выделены два критерия – *max* прибыли $f(X) \to \max$ и min затрат $F(X) \to \min$ или $-F(X) \to \max$, то суперкритерий $J = f(X) - F(X)$.

А как сформулировать цель, если критериев много? $f_1(X) \to \max$, $f_2(X) \to \max, \ldots, f_n(X) \to \max$. Наиболее часто для решения этой проблемы применяют следующие способы.

Линейная свертка.

Вместо n частных критериев $f_i(X)$, рассматривается один критерий вида

$$F(X) = \sum_{i=1}^{n} C_i f_i(X),$$

где C_i – некоторые положительные числа, тем или иным способом нормированные (например, $\sum_{i=1}^{n} C_i = 1$).

Коэффициенты C_i, попросту говоря, отражают вклад частных критериев в суперкритерий.

Корректнее можно сказать, что величина C_i показывает, насколько изменяется целевая функция $F(X)$ (суперкритерий) при изменении частного критерия $f_i(X)$ на единицу:

$C_i = \dfrac{\partial F}{\partial f_i}$ (выражено через производную).

Как оценить величины C_i? Для этого можно применять экспертные методы, в частности, балльные системы оценки вариантов.

Вторая группа методов решения многокритериальных задач основана на возможности выделения основного, главного критерия, по которому находят оптимум. При условии, что дополнительные, сопутствующие критерии остаются на заданных им уровнях, в виде, например, ограничений. Это условная оптимизация.

2. Простейший метод условной оптимизации.

Введем систему контрольных показателей (нормативов) $f_1^*, f_2^*, ..., f_n^*$ (можно экспертными методами).

Например, максимизируя прибыль (главный критерий), иметь max фондоотдачу, не ниже норматива f^*. То есть, должны выполняться условия:

$f_i(X) \geq f_i^*$

Тогда задача может быть сведена к однокритериальной:

$f_1(X) \to \max$

при ограничениях $f_i(X) \geq f_i^*$, $i = 1, ..., n$.

При линейной целевой функции и ограничениях имеем задачу линейного программирования, что очень удобно.

В инженерной практике это самый широко применяемый метод.

3. Метод уступок.

Метод уступок предполагает, что частные критерии упорядочены в порядке убывания их важности.

Суть метода – берется первый, самый важный критерий и находится наилучшая по этому критерию альтернатива.

Затем делается «уступка», то есть уменьшается достигнутое значение самого важного критерия (ΔК), для того, чтобы за его счет увеличить, насколько возможно, значение следующего по важности критерия и т.д. до получения окончательного значения целевой функции.

Пример. K_2 и K_1 – два критерия, самый важный из которых – K_2. Область допустимых значений – на рисунке (задача на max).

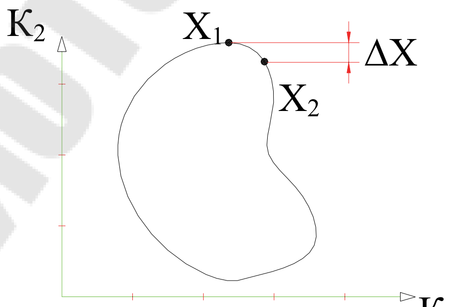


Рис. 5.

По критерию K_2 оптимальной точкой является X_1. Делаем уступку ΔX, ухудшая значение критерия K_2, но увеличивая значение критерия K_1. X_2 – точка оптимума.

Математиками разработаны простые (и не очень) методики реализации этого и других методов. Для пользования ими не нужно, как правило, особых теоретических знаний.

Рассмотрим один из алгоритмов метода уступок.

1. Располагаем критерии по их значимости (наиболее важный считается первым).

2. Экспертными или иными методами оцениваем, на сколько возможно отклонение («ухудшение») от экстремального значения по каждому критерию, за исключением наименее важного. Т.е. определяем размер уступки.

Удобнее всего задавать в процентах.

3. Решаем задачу по первому критерию, т.е. отыскиваем экстремальное значение Y_1^* (достигается при $X_1^*, X_2^*, ..., X_n^*$).

4. Делаем уступку по первому критерию. Если первый критерий максимизируется, то уменьшается его величина до значения $Y_1 = K_1 Y_1^*$, где $0 < K < 1$.

5. Вводим в задачу дополнительное ограничение $Y_1 \geq K_1 Y_1^*$.

6. Решаем задачу по второму критерию с учетом первого дополнительного ограничения. Т.е. находим экстремальное значение второй целевой функции Y_2^*.

7. Переходим к шагу 4 алгоритма. Делаем уступку по второму критерию.

$Y_2 = K Y_2^*$, $0 < K < 1$.

8. Переходим к шагу 5 алгоритма, т.е. вводим в задачу еще одно дополнительное ограничение. $Y_2 \geq K_2 Y_2^*$, $0 < K < 1$.

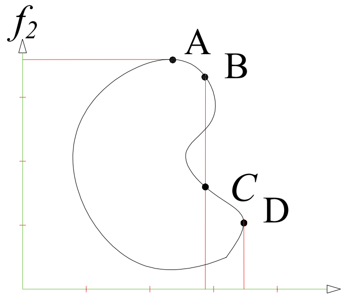
9. Новую задачу с двумя дополнительными ограничениями решаем по 3-му критерию и т.д.

Таким образом, получаем компромиссное или субоптимальное решение.

Т.е. находим экстремальное значение наименее важного критерия при условии гарантированных значений более важных критериев.

4. Методы, использующие принцип Паретто.

Третья группа методов решения многокритериальных задач основана ни на сведении многокритериальных задач к однокритериальным, ни на выделении главного критерия. Здесь используются компромиссы Паретто. Предложены в 1904 г. итальянским экономистом



В. Паретто.

Рис. 6.

Основы подхода заключаются в отказе от выделения единственной «наилучшей» альтернативы и в использовании следующего соглашения.

Предпочтение одной альтернативе перед другой можно отдать только тогда, когда первая по всем критериям не хуже, а хотя бы по одному – лучше второй.

Отбрасывание или исключение альтернатив после попарного их сравнения дает возможность в конечном итоге получить множество Паретто, состоящее из несравнимых (недоминируемых) альтернатив.

Пример 1. Имеется 2 целевые функции: $f_1(X) \to \max$ и $f_2(X) \to \max$. Тогда каждому допустимому значению переменной X отвечает одна точка на плоскости.

Допустим, кривая, образованная этими точками имеет следующий вид:

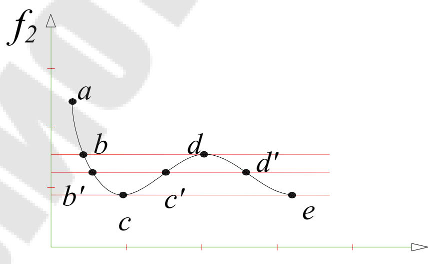


Рис.7.

Какие точки принадлежат множеству Паретто?

Участок *cd* исключается. Почему? Возьмем точки c' и d'. d' лучше c' по критерию f_1 и не хуже по критерию f_2. Таким образом, могут быть отброшены все точки отрезка *cd* без точки *d*.

Участок *bc* отбрасывается. Почему? Возьмем точку b' и c'. Значение целевой функции f_2 в этих точках совпадают, а f_1 выше в точке c'. Так будет для всех точек отрезка *bc*, что очевидно. (Включая и точку *b*). Остается отрезок *ab* (без точки *b*). Улучшение по одному критерию на этом отрезке приводит к ухудшению по другому (можно взять любые две точки). Они несравнимы.

По той же причине остается отрезок *de*. Значит, Паретговское множество образуют отрезки *ab* (без точки *b*) и *de*.

Пример 2. Точки образуют следующую область:

Если f_1 и f_2 стремятся к максимуму, то область Паретто: отрезки AB, *CD* (без точки *C*).

Оптимальность по Паретто: допустимое состояние X^* является оптимальным по Парето, если не существует другого допустимого состояния, которое было бы для всех участников не хуже и хотя бы для одного – лучше, нежели X^*.

Нахождение множества Паретто не дает ответа на вопрос, какую же альтернативу надо выбрать, т.е. какая является оптимальной. Множество Паретто лишь значительно сокращает множество исходных, возможных альтернатив, исключая заведомо не лучшие. А значит и облегчает дальнейший поиск. В этом и заключается суть принципа Паретто: выбор решений (альтернатив) следует проводить на основе вектора, принадлежащего множеству Паретто. Вектор этот носит название вектора Паретто или неулучшаемого вектора результатов.

Для последующего выбора единственной альтернативы на основе множества (вектора) Паретто могут использоваться следующие методы:

1) метод введения новых, добавочных критериев и ограничений;

2) метод, основанный на попытках оценки вероятностей альтернатив из множества Паретто;

3) экспертные методы оценки альтернатив из множества Паретто.

В настоящее время продолжается разработка новых методов решения многокритериальных экономико-математических задач.

ТЕМА 6. МЕТОДЫ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ В РЕШЕНИИ ЛОГИСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ.

6.1. Теория массового обслуживания в распределительной логистике и логистике складирования.

Целью решения задач массового обслуживания в рапределительной логистике и логистике складирования является оценка эффективности и качества функционирования логистической системы. На этой основе ведется поиск более оптимальных вариантов.

К показателям эффективности обслуживающих систем относят:

1. Вероятность потери требования. Она равна вероятности того, что все приборы заняты обслуживанием (для систем с отказами). P_n или $P_{отк}$.

2. Вероятность того, что обслуживанием заняты k приборов – P_k (или в системе k требований), а также вероятность того, что все приборы свободны. P_o.

3. Среднее число занятых приборов (степень загрузки системы) $N_0 = \sum_{k=1}^{n} kP_k$.

4. Среднее число свободных от обслуживания приборов $N_0 = \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)P_k$.

5. Коэффициент простоя приборов $K_0 = \frac{N_0}{n}$.

6. Коэффициент загрузки приборов $K_3 = \frac{N_3}{n}$.

7. Среднее время ожидания требований $t_{ож}$.

8. Средняя величина очереди

$$M_{ож} = \sum_{k-n}^{\infty} (k-n)P_k \ , \ k \geq n .$$

9. Среднее число требований в сфере обслуживания

$$M = \sum_{k=1}^{n} kP_k = M_{ож} + N_3 .$$

10. Вероятность того, что число требований в очереди больше некоторого числа m.

$$P = \sum_{k=m+1}^{\infty} P_k .$$

При расчете стоимостных показателей оценки эффективности систем массового обслуживания используют:

1. Стоимость потери (убытия) требования $q_{уб}$.

2. Стоимость потерь, связанных с ожиданием в единицу времени $q_{ож}$.

3. Стоимость эксплуатации прибора в единицу времени q_k (или стоимость обслуживания требования).

4. Стоимость единицы времени простоя $q_{пр}$.

Для оптимизации используются следующие функции стоимости потерь:

- для систем с отказами:

$$C_n = (q_{пр} N_o + q_{уб} P_n \lambda) T + q_k N_3 \cdot T ,$$

где Т – интервал времени;

λ - суммарная интенсивность входящего потока (для систем с отказами);

$q_{уб}$ - стоимость убытков от ухода (потери) требований из системы.

- для систем с ожиданиями:

$$C_n = (q_{ож} M_{ож} + q_{пр} N_o) T .$$

- для смешанных систем:

$$C_n = (q_{пр} N_o + q_{ож} M_{ож} + q_{уб} P_n \lambda) T .$$

Поступление требований в систему является случайным. Поток требований за промежуток времени (0, *t*), очевидно, является функцией от *t*.

Следует отметить, что в теории массового обслуживания рассматривается простейший или пуассоновский поток, который обладает свойствами стационарности, отсутствия последействия и ординарности.

Поток стационарен, если вероятность поступления определенного количества требований в течение определенного промежутка времени не зависит от начала отсчета времени, а зависит от длины промежутка (т.е. характеристики потока не меняются).

Поток с отсутствием последействия – если число поступающих в данный промежуток времени требований не зависит от того, сколько их поступило в предшествующие моменты времени.

Поток ординарен, если в любой момент времени поступает лишь одно требование.

Для описания простейшего потока достаточно определить среднее число требований, поступивших в единицу времени (λ) и закон распределения поступивших требований за время t.

Для Пуассоновского потока этот закон описывается формулой:

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \ell^{-\lambda t}; \; k = 0,1,2....; \lambda > 0; \; k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot k,$$

где $P_k(t)$ - вероятность поступления k требований за время t.

Время обслуживания требования одним аппаратом описывается показательным законом.

Пусть

n – число аппаратов обслуживания;

k – число загруженных аппаратов;

λ - среднее число требований поступающих в единицу времени;

$\mu = \frac{1}{T}$ - величина, обратная среднему времени обслуживания;

$\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$.

Для различных типов систем массового обслуживания получены формулы, характеризующие эффективность систем массового обслуживания.

Важнейшие из них, необходимые при практическом анализе систем массового обслуживания и решении логистических задач рассмотрим ниже.

6.2. Система массового обслуживания с отказами, с ожиданием при неограниченном и ограниченном входящем потоке.

1. Система массового обслуживания с отказами.

Здесь возможны следующие состояния системы:

S_0 – все приборы (аппараты) свободны;

S_1 – один прибор занят, остальные свободны;

…………………………………………………

S_n – все приборы заняты, требований на обслуживание нет;

S_{n+1} – все приборы заняты, поступило одно требование, получившее отказ;

…………………………………………………

S_{n+l} – все приборы заняты, поступило l требований, получивших отказ.

Вероятности состояний таких систем массового обслуживания описываются так называемыми формулами Эрланга.

1). Вероятность того, что все приборы свободны:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!}},$$

где n – число аппаратов.

2). Вероятность того, что загружено k аппаратов:

$$P_k = \frac{\alpha^k}{k!} P_0.$$

Среди производных показателей таких систем массового обслуживания с отказами отметим следующие:

- среднее число занятых приборов: $N_3 = \sum_{k=1}^{n} kP_k$;

- среднее число простаивающих приборов: $N_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)P_k$;

- вероятность потери требования $P_{отк} = P_n$.

2. Система массового обслуживания с ожиданием (при неограниченном входящем потоке).

Здесь возможны следующие состояния системы:

S_0 – все приборы свободны;

S_1 – один прибор занят, остальные свободны;

…………………………………………………

S_n – все приборы заняты, в очереди требований нет;

S_{n+1} – все приборы заняты *(n)*, в очереди одно требование;

…………………………………………………

S_{n+m} – все приборы заняты *(n)*, в очереди m требований.

Вероятность состояний описывается следующими формулами:

1). Вероятность того, что все приборы свободны:

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{(n-1)!(n-\alpha)} \right]^{-1}.$$ При этом $\frac{\alpha}{n} < 1$.

2). Вероятность того, что загружено k аппаратов и в очереди нет требований $(k \leq n)$:

$$P_k = \frac{\alpha^k}{k!} P_0 \text{ при } 0 \leq k \leq n \text{ (соответствует формуле Эрланга),}$$

где n – число приборов;

k – требования.

3). Вероятность того, что все приборы заняты и в очереди есть требования $k - n$ (т.е. число требований k превосходит число аппаратов n):

$$P_k = \frac{\alpha^k}{n! n^{k-n}} \cdot P_0 \text{ при } k > n.$$

Среди производных показателей таких СМО с ожиданием:

- среднее число занятых приборов: $N_3 = \sum_{k=1}^{n} k P_k$;

- среднее число простаивающих приборов: $N_0 = \sum_{k=1}^{n} (n-k) P_k$;

- средняя величина очереди: $M_{ож} = \sum_{k=n}^{\infty} (k-n) P_k = \frac{\alpha}{n(1-\frac{\alpha}{n})^2} \cdot P_n$.

3. Система массового обслуживания с ожиданием (при ограниченном входящем потоке) или замкнутая СМО.

Это системы массового обслуживания с ожиданием, в которых интенсивность потока требований зависит от состояния системы.

Здесь возможны следующие состояния системы:

S_0 – все приборы свободны;

S_1 – один прибор занят, остальные свободны;

…………………………………………………

S_n – все приборы заняты, в очереди нет требований;

S_{n+1} – все приборы заняты *(n)*, в очереди одно требование;

…………………………………………………

S_m – все приборы заняты, в очереди *(m-n)* требований.

Вероятность состояний таких систем:

1). Вероятность того, что все приборы свободны:

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{m! \alpha^k}{k!(m-k)!} + \sum_{k=n+1}^{m} \frac{m! \alpha^k}{n!(m-k)! n^{k-n}} \right]^{-1}$$

2). Вероятность того, что в системе находится k требований при условии, что их число не превосходит числа приборов $(k \le n)$:

$$P_k = \frac{\alpha^k m!}{k!(m-k)!} P_0, \; 0 < k \le n.$$

3). Вероятность того, что в системе находится k требований в случае, если их число не меньше числа приборов: $n \le k \le m$.

$$P_k = \frac{\alpha^k m!}{k!(m-k)!n^{k-n}} \cdot P_0, \; n \le k \le m.$$

Среди производных показателей:

- среднее число занятых приборов:

$$N_з = \sum_{k=1}^{n} kP_k ;$$

- среднее число простаивающих приборов:

$$N_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)P_k ;$$

- средняя величина очереди:

$$M_{ож} = \sum_{k=n+1}^{m} (k-n)P_k ;$$

- среднее число требований в обслуживающей системе:

$$M = M_{ож} + M_{об} = \sum_{r=1}^{m} kP_k .$$

Мы рассмотрели лишь отдельные виды систем массового обслуживания и аналитические методы их решения. В настоящее время созданы самые различные системы массового обслуживания. С внедрением компьютеров открылись новые возможности их решения. Причем, поиск решения систем массового обслуживания ведется не только с применением аналитических формул, но и с применением имитационных методов (методов статистического моделирования).

Оптимизация систем массового обслуживания проводится путем варьирования таких показателей, как число аппаратов обслуживания, длина очереди и др.

При этом подбирается такая дисциплина очереди, обслуживания или даже тип систем массового обслуживания, чтобы при учете реальных условий объекта минимизировать функцию стоимости потерь.

МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ТЕКУЩЕЙ И ИТОГОВОЙ АТТЕСТАЦИИ

Форма итоговой аттестации – экзамен

Вопросы к экзамену

1. Математические основы логистики, связь с научными дисциплинами.
2. Этапы решения простейших логистических экономико-математических задач.
3. Основные типы моделей и методов, применяемых в логистике.
4. Экономико-математические задачи распределения в производственной логистике.
5. Задача об оптимизации производственной программы (собственно распределения).
6. Задача о раскрое в производственной логистике.
7. Задача о смесях в производственной логистике.
8. Задача о назначении в производственной логистике.
9. Методы решения оптимизационных задач в логистике: линейное программирование
10. Методы решения оптимизационных задач в логистике: нелинейное программирование.
11. Виды моделей и методов, применяемых в закупочной логистике.
12. Виды моделей и методов, применяемых в логистике складирования.
13. Транспортная задача и методы ее решения.
14. Задача выбора маршрута и метод динамического программирования для ее решения.
15. Задача о коммивояжере.
16. Экономико-математические методы и модели управления запасами.
17. Задача об экономичном размере партии без учета убытков из-за неудовлетворенного спроса.
18. Задача об экономичном размере партии с учетом убытков из-за неудовлетворенного спроса.
19. Задача об экономичном размере партии при случайном спросе.

20. Задача об экономичном размере партии с учетом затрат на хранение.

21. Динамическое программирование в решении однопродуктовой задачи управления запасами.

22. Многоцелевая оптимизация в производственной логистике и логистике складирования.

23. Метод линейной свертки.

24. Простейший метод условной оптимизации.

25. Метод уступок.

26. Методы Парето.

27. Теория массового обслуживания в распределительной логистике и логистике складирования.

28. Система массового обслуживания с отказами.

29. Система массового обслуживания с ожиданием при неограниченном входящем потоке.

30. Система массового обслуживания при ограниченном входящем потоке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гетманчук А.В., Ермилов М.М. Экономические методы и модели: учеб. пособие. – М.: Дашков и К°, 2013. – 188 с.

2. Гармаш А.Н., Орлова И.В. Математические методы в управлении: учеб. пособие. – М.: Вузовский учебник. – ИНФРА-М, 2012. 272 с.

3. Математическое программирование: учебник / под ред. К.В. Балдина. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Дашков и К°, 2012. – 220 с.

4. Экономико-математические методы и модели: учеб. пособие / под ред. С.И. Макарова. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: КНОРУС, 2009. – 240 с.

5. Экономико-математические методы и прикладные модели: учеб. пособие / под ред. В.В. Федосеева. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2012. – 304 с.

6. Экономико-математические методы и модели. Задачник: учебно-практическое пособие/ кол. авторов; под ред. С.И. Макарова и С.А. Севастьяновой. – М.: КНОРУС, 2009. – 208 с.

7. Гетманчук А.В., Ермилов М.М. Экономико-математические методы и модели: учеб. пособие. – М.: Дашков и К°, 2013. – С. 40.

8. Математическое программирование: учебник / под ред. К.В. Балдина. – 2-е изд. – М.: Дашков и К°, 2012. – С. 75.

9. М/ук 3212. Е.А. Кожевников. Экономико-математические методы и модели: курс лекций для студентов экономических специальностей дневной и заочной форм обучения.- Гомель: ГГТУ им. П.О. Сухого, 2006.-178 с.

10. Кремер Н.Ш., Б.А.Путко. Эконометрика: учебник для студентов вузов / под ред.Н.Ш.Кремера.-2-е изд.-М.:ЮНИТИ-ДАНА, 2008.-311 с.

11. Монахов А.В. Математические методы анализа экономики. – СПб: Питер, 2002. – 176с.

12. Юферов О.Д. Экономико-математические методы и прикладные модели: Сборник задач. -Мн.:БГЭУ, 2002.

13. Гринберг А. С. Экономико-математические методы и модели : курс лекций / А. С. Гринберг, О. Б. Плющ, В. К. Шешолко. - 2-е изд., стер. - Минск : Акад. упр. при Президенте Респ. Беларусь, 2005. - 222с.

14. М/ук 3188. Кожевников Е.А., Шутова А.Н. Экономико-математические методы и модели: практическое руководство по выполнению контрольной работы по одноименному курсу для студентов экономических специальностей дневной и заочной форм обучения.- Гомель: ГГТУ им. П.О. Сухого, 2005.-48 с.

15. М/ук 2442. Кожевников Е.А., Дорошев Д.В., Пархоменко Н.В. Корреляционно-регрессионное моделирование с использованием ПЭВМ: практическое пособие к лаб. работам по курсу «ЭММ и М в экономике», Гомель, 1999.

16. М/ук 2604. Кожевников Е.А., Пархоменко Н.В., Фильчук Т.Г. Голубцов Р.Б. Практическое пособие к лабораторным работам по теме «Оптимизационное моделирование линейного вида с использованием ПЭВМ курса «ЭММ и М в экономике» для студентов экономических специальностей, Гомель, 2001.

17. М/ук 2800. Кожевников Е.А., Голубцов Р.Б.Оптимизационное моделирование нелинейного вида с использованием компьютерных технологий». Практическое пособие к лабораторным работам по курсу «Экономико-математические методы и модели в экономике» для студентов экономических специальностей, Гомель, 2003.

18. М/ук 2660. Нарышев Г.А.Практическое пособие по курсу «Экономико-математические методы и модели» для студ. экономических спец. (переиздание), Гомель, 2002.

19. М/ук 3056.Кожевников Е.А, Шутова А.Н. Экономико-математические методы и модели. Практическое руководство к курсовой работе по одноименному курсу для студентов экономических специальностей дневного и заочного отделений.- Гомель: ГГТУ им. П.О. Сухого, 2005.-22 с.

20. М/ук 3789. Кожевников Е.А., Винник О.Г. Экономико-математические методы и модели. Лабораторный практикум для студентов специализации 1-25 01 07 15 «Экономика и управление на предприятии АПК» дневной формы обучения, Гомель:ГГТУ им.П.О.Сухого, 2009.-21 с.

21. Бородич С.А. Эконометрика: Учеб.пособие / С.А.Бородич. - 2-е изд, испр.-Мн.:Новое знание, 2004. – 416 с.

22. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике: Учебник.-М.:МГУ им. М.В.Ломоносова, Издательство «ДИС», 1998.-368 с.

23. Минюк С.А. Математические методы и модели в экономике. Учеб.пособие / Минюк С.А., Ровба Е.А., Кузьмич К.К. – Мн.:ТетраСистемс, 2002.-432 с.

24. Федосеев В.В. Экономико-математические методы и прикладные модели: Учеб.пособие для вузов / В.В.Федосеев, А.Н.Гармаш, Д.М.Дайитбегов и др.; Под ред.В.В.Федосеева.-М.:ЮНИТИ, 2001.-391 с.

25. Кожевников Е.А. Экономико-математические методы и модели. Учебно-методический комплекс.- Мн.: ГИУСТ БГУ, 2004. - 148 с.

26.

СОДЕРЖАНИЕ

Кожевников Евгений Александрович

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

Пособие
для слушателей специальности 1-26 02 85 «Логистика» заочной формы обучения

Подписано к размещению в электронную библиотеку
ГГТУ им. П. О. Сухого в качестве электронного
учебно-методического документа 06.05.16.

Рег. № 77Е.
http://www.gstu.by