

УДК 532.516

**ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ И ТЕПЛОВЫЕ АСПЕКТЫ
КЛАСТЕРНОЙ МОДЕЛИ СТРУКТУРЫ РАСПЛАВА****ЧАСТЬ 1. ВОЗДЕЙСТВИЕ ВНЕШНЕЙ СИЛЫ
СОПРОТИВЛЕНИЯ НА ЗАВИХРЕННОСТЬ
ВЯЗКОУПРУГОГО ТЕЧЕНИЯ****О. Н. ШАБЛОВСКИЙ, Д. Г. КРОЛЬ, И. А. КОНЦЕВОЙ***Учреждение образования «Гомельский государственный
технический университет имени П. О. Сухого»,
Республика Беларусь***Введение**

Сущность кластерной модели структуры расплавов состоит в следующем [1]. Имеются экспериментальные факты, которые подтверждают существование эффектов структурной самоорганизации в полупроводниковых расплавах в условиях слабой конвекции. Основным пунктом модели является допущение, что промежуточная (между жидкой и твердой фазами) область расплава заполнена кластерами, т. е. совокупностями атомов (молекул), объединившихся в твердые структуры. Скорость теплового движения кластеров существенно меньше, чем тепловая скорость отдельных атомов расплава, потому что они имеют значительно большие размеры. Модельные молекулярно-динамические расчеты подтверждают данное предположение. Это значит, что можно пренебречь скоростью движения многоатомных кластеров, ввести в рассмотрение внешнюю силу трения Рэлея $F = F^R = -\zeta \mathbf{v}$, которая учитывает наличие кластерных образований, вызывающих сопротивление течению. При таком подходе коэффициент сопротивления ζ является эмпирическим параметром, зависящим от формы и среднего размера кластеров, т. е. от соотношения «поверхность – объем» частиц твердой фазы, оказывающих сопротивление потоку. Ясно также, что принципиальное значение имеет характер зависимости коэффициента сопротивления от скорости расплава \mathbf{v} . Гидродинамические аспекты кластерной модели кристаллизации изучены мало.

Вместе с тем нужно отметить, что сила трения Рэлея дает возможность моделировать широкий круг термогидродинамических явлений, представляющих практический интерес: периодические течения в тонких слоях жидкости [2], вихревые структуры в задачах промышленной экологии и прикладной геофизики [3]. В работах [1], [3] применялся линейный вариант силы трения: $\zeta = \text{const}$. В рамках приближения $\zeta \sim |\mathbf{v}|$ в [2] построены гидродинамические системы, описывающие каскадный процесс преобразования энергии в турбулентном потоке.

Хорошо известно, что в классической гидродинамике важным примером сдвигового течения служит течение Куэтта. Здесь мы рассматриваем обобщение этой задачи, учитывая нелинейность внешнего сопротивления в неизотермических условиях. Далее полагаем, что коэффициент сопротивления зависит от температуры T , монотонно растет при увеличении $|\mathbf{v}|$ и является четной функцией скорости:

$$\zeta = \zeta(v^2, T), \quad \partial\zeta/\partial(v^2) > 0.$$

Данная работа продолжает исследования [4], [5] и имеет следующие цели: 1) изучить количественные характеристики воздействия нелинейной силы сопротивления на завихренность вязкоупругой жидкости; 2) проанализировать тепловые свойства системы «жидкость – объемный источник энергии» для двух типов сопротивления, различающихся температурными свойствами.

Постановка задачи

Плоское двухмерное стационарное течение несжимаемой сплошной среды определяется уравнениями [6]:

$$\rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} + \rho F_i, \quad \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0; \quad (1)$$

$$\rho c_p v_k \frac{\partial T}{\partial x_k} = -\frac{\partial q_k}{\partial x_k} + \Phi + q_v, \quad q_i = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}; \quad (2)$$

$$\Phi = \tau_{11} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \tau_{22} \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \tau_{12} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right);$$

$$v = \mu / \rho, \quad i, k = 1, 2; \quad \rho, c_p, \lambda, \mu - \text{const.}$$

Реологическое уравнение состояния вязкоупругой жидкости Максвелла [7] возьмем в следующей форме:

$$\tau_{ij} + \gamma \left[v_k \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} + m(\tau_{ik} \omega_{kj} - \omega_{ik} \tau_{kj}) \right] = 2\mu e_{ij}, \quad (3)$$

$$2e_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}, \quad 2\omega_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}.$$

Здесь $x_1 = x$, $x_2 = y$ – декартовы прямоугольные координаты; \mathbf{v} (v_1, v_2) – вектор скорости; ρ – плотность; p – давление; \mathbf{F} (F_1, F_2) – вектор массовой силы; T – температура; \mathbf{q} (q_1, q_2) – вектор удельного теплового потока; c_p – удельная теплоемкость; λ – коэффициент теплопроводности; q_v – объемная мощность внутренних источников энергии; τ_{ij} – компоненты девиатора тензора напряжений; e_{ij} – компоненты тензора скоростей деформации; μ – коэффициент динамической вязкости; γ – время релаксации вязких напряжений; Φ – диссипативная функция. Дважды повторяющийся индекс k означает суммирование. Дифференциальный оператор в (3) при $m = 1$ есть конвективная производная Яуманна, при $m = 0$ – обычная субстанциональная производная. При $\gamma = 0$ формула (3) описывает свойства вязкой ньютоновской жидкости.

Производство энтропии подсчитываем по формулам [6], [8]:

$$\sigma = \sigma_e + \sigma_i, \quad \sigma_e = q_v / T, \quad \sigma_i = \mathbf{q}^2 / (\lambda T^2),$$

где σ_e – производство энтропии за счет энергообмена с внешней средой; σ_i – производство энтропии за счет внутренних необратимых процессов.

Аналитическое решение, которое изучается в данной работе, получено при $\mu \equiv \text{const}$, $\partial\zeta/\partial T \neq 0$. Поэтому естественно считать, что температурная зависимость коэффициента сопротивления коррелирует с термовязкими свойствами жидкости. Вариант $\partial\zeta/\partial T < 0$ соответствует вязкости *l*-типа, $\partial\mu/\partial T < 0$. Вариант $\partial\zeta/\partial T > 0$ соответствует вязкости *g*-типа, $\partial\mu/\partial T > 0$. Эти термины и обозначения (*g* – *gas*, *l* – *liquid*) применяются в теории тепловой конвекции [9]. Далее, при обсуждении знака производной $\partial\zeta/\partial T$ будем говорить о *g*- и *l*-типах сопротивления. Объемный источник энергии $q_v(\mathbf{v}^2, T)$ моделирует воздействие внутренних источников тепла и теплообмен жидкости с внешней средой. Для представленной здесь задачи вид функции источника детерминирован структурой применяемого аналитического решения. Для диссипативной функции Φ принимаем оценку $\Phi \ll |q_v|$, т. е. рассматриваем процессы, для которых можно пренебречь выделением тепла за счет вязкой диссипации энергии.

Будем изучать течение вида

$$v_1 \equiv u = u(y), \quad v_2 \equiv 0, \quad p = p(y), \quad T = T(y). \quad (4)$$

Вихрь скорости $\omega = (1/2) \text{rot } \mathbf{v}$ имеет одну нетривиальную составляющую $\omega_z \equiv \omega = (-1/2)(du/dy)$, направленную перпендикулярно плоскости (x, y) . Обозначим $\tau = (c_1/u_1)(T - T_0)$, $T_0 \equiv \text{const}$. Здесь T_0 – отсчетное значение температуры; c_1 – произвольная положительная постоянная, имеющая размерность удельной теплоемкости, Дж/(кг · град); y_1, u_1 – положительные константы, имеющие размерности длины и скорости, соответственно; линейный масштаб релаксации равен $L_1 = \gamma u_1$. Безразмерные величины будем отмечать чертой сверху. Для коэффициента сопротивления и для объемного источника энергии возьмем следующие физически содержательные зависимости:

$$\bar{\zeta} \equiv \zeta y_1^2 / \nu = D_1 D_2; \quad (5)$$

$$D_1 = (1 - 4\Gamma)/(1 + 4\Gamma)^2, \quad \Gamma = (\bar{\gamma} m \bar{\omega})^2; \quad (6)$$

$$D_2 = 2(1 - 3\bar{\tau}^2 + \bar{u}^2); \quad (7)$$

$$\bar{q}_v \equiv q_v c_1 y_1^2 / (\lambda u_1^2) = 2\bar{\tau}(\bar{\tau}^2 - 3\bar{u}^2 - 1) = 4\bar{\tau}(-3\bar{\tau}_1 \bar{\tau} + 2\bar{\tau}^2 + 1); \quad (8)$$

$$\bar{\gamma} = \gamma u_1 / y_1, \quad \bar{\omega} = \omega y_1 / u_1, \quad d\bar{u} / d\bar{y} = -2\bar{\omega}.$$

Функция $\Gamma(\bar{y})$ характеризует неравновесные свойства вихревого поля. В классе движений (4)–(8) имеют, согласно [5], [10], точное решение:

$$\bar{u} \equiv u / u_1 = 2\varepsilon[\sin(2\bar{y})] / \delta, \quad \bar{\tau} \equiv \tau / u_1 = (1 - \varepsilon^2) / \delta; \quad (9)$$

$$\delta = 1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cos(2\bar{y}), \quad \bar{y} = y / y_1, \quad y_1 > 0, \quad u_1 > 0.$$

Ясно, что $\delta > 0$ при $\varepsilon^2 \neq 1$; ε – параметр решения. Если $\varepsilon^2 < 1$, то $\tau > 0$, течение происходит в «горячей» области, $T > T_0$. Если $\varepsilon^2 > 1$, то $\tau < 0$, имеем «холодную» область, $0 < T < T_0$. Сначала обсудим изотермический процесс $\varepsilon^2 = 1$, $\tau \equiv 0$.

Изотермическое течение. При $\varepsilon^2 = 1$ по формулам (5)–(7) и (9) вычисляем скорость движения жидкости и коэффициент сопротивления:

$$\bar{u} \equiv \frac{u}{u_1} = \frac{\sin(2\bar{y})}{1 + \cos(2\bar{y})}, \quad \bar{y} = \frac{y}{y_1}, \quad y \in [0, y_2]; \quad (10)$$

$$\bar{\zeta} \equiv \zeta y_1^2 / \nu = 2(1 + \bar{u}^2) \frac{[1 - \bar{\gamma}^2 m^2 (d\bar{u} / d\bar{y})^2]}{[1 + \bar{\gamma}^2 m^2 (d\bar{u} / d\bar{y})^2]^2}; \quad (11)$$

$$0 < \bar{\gamma} m \leq 1/(2\sqrt{3}), \quad 1 + \cos(2y_2/y_1) \geq 2\bar{\gamma} m \sqrt{3}.$$

Отметим, что данное решение допускает как монотонный, так и немонотонный варианты зависимости $\zeta = \zeta(u^2)$. Ясно, что $d\bar{u} / d\bar{y} = 1 + \bar{u}^2$, поэтому коэффициент внешнего сопротивления (11) есть четная функция скорости. Форма записи

$$\zeta = 4\bar{\omega}(4\Gamma - 1)/(4\Gamma + 1)^2, \quad \Gamma = (\bar{\gamma} m \bar{\omega})^2$$

демонстрирует то обстоятельство, что сила внешнего трения проявляет себя на фоне релаксирующей завихренности. Решение (10) представляет течение Куэтта:

$$y = 0, \quad u = 0; \quad y = y_2, \quad u = u(y_2),$$

где y_2 – расстояние между параллельными плоскими непроницаемыми стенками; одна стенка неподвижна, а другая перемещается в своей плоскости с конечной скоростью $u_2 = u(y_2) > 0$.

Давление жидкости вычисляется по формуле

$$\frac{p_0 - p}{\rho u_1^2} \equiv \bar{p}_1 = \frac{\bar{\nu} \bar{\gamma} m (d\bar{u} / d\bar{y})^2}{1 + \bar{\gamma}^2 m^2 (d\bar{u} / d\bar{y})^2}, \quad \bar{\nu} = \nu / (\rho u_1 y_1).$$

Перепад давления $p_0 - p$ положителен во всей области решения; константу p_0 выбираем так, чтобы обеспечить условие $p(y) > 0$.

Приведем некоторые результаты численных расчетов. На рис. 1 показаны зависимости безразмерных скорости, давления, вязкого касательного напряжения и коэффициента сопротивления от поперечной координаты \bar{y} . На рис. 2 представлены функциональные связи «коэффициент сопротивления – завихренность», «скорость – давление», «касательное напряжение – завихренность» и «завихренность – динамический напор». Детальный анализ показал, что по мере роста времени релаксации $\bar{\gamma}$ происходит изменение профилей гидродинамических величин и функциональных связей между ними (рис. 3). Эти изменения имеют количественный характер.

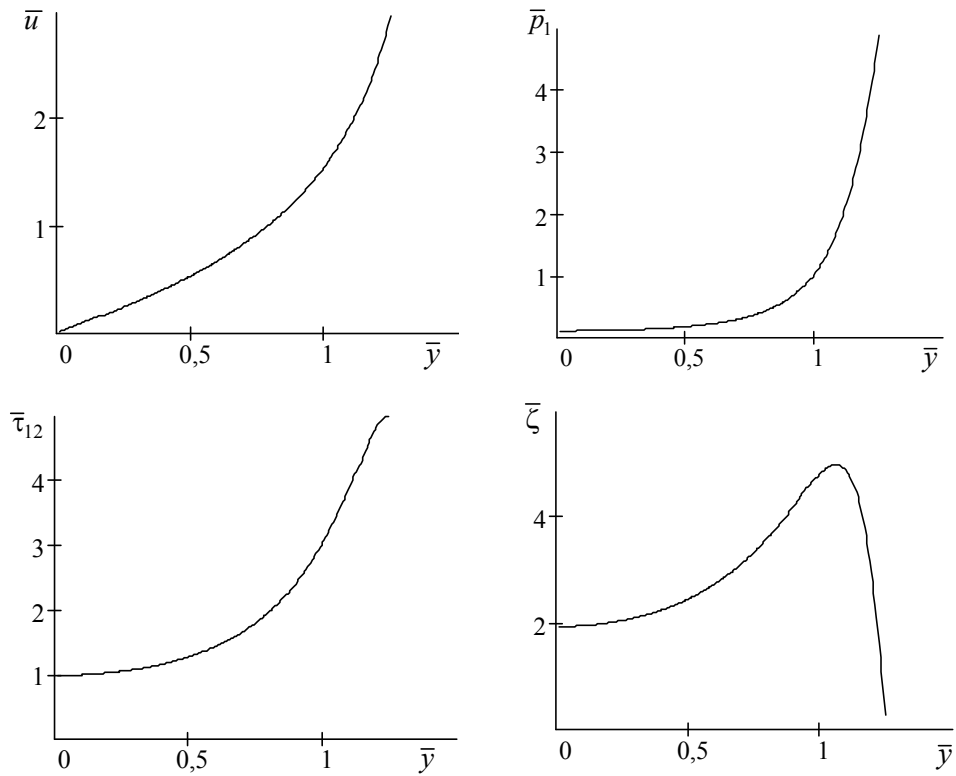


Рис. 1. Зависимость безразмерных параметров течения от безразмерной поперечной координаты при $\bar{\gamma} = 0,1$

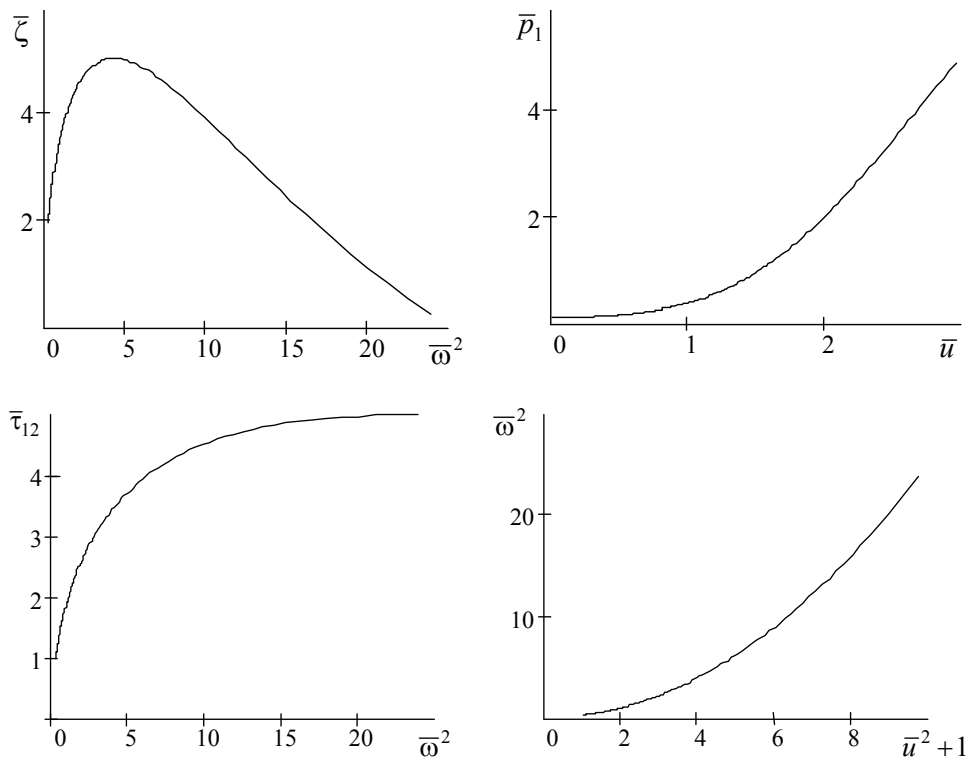


Рис. 2. Функциональные связи между безразмерными параметрами течения при $\bar{\gamma} = 0,1$

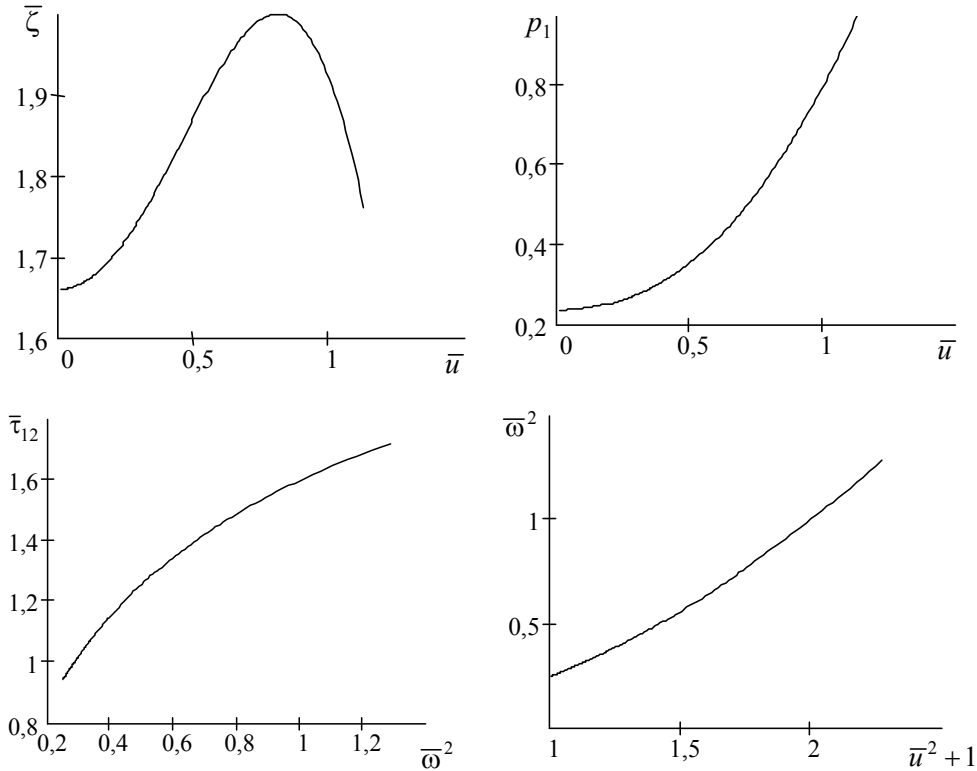


Рис. 3. Функциональные связи между безразмерными параметрами течения при $\bar{\gamma} = 0,25$

Во всех рассмотренных вариантах прослеживается существенное влияние вязкого касательного напряжения на завихренность потока. Отметим еще значительный рост завихренности при возрастании динамического напора: см. корреляцию $\bar{\omega}^2 \leftrightarrow (\bar{u}^2 + 1)$. На неподвижной и подвижной границах безразмерный градиент скорости равен:

$$y = 0, \quad d\bar{u} / d\bar{y} = 1; \quad y = y_2, \quad d\bar{u} / d\bar{y} = U > 1, \quad U = 1 + (u_2^2 / u_1^2).$$

Значит, параметр U характеризует градиент скорости, обусловленный величиной u_2 скорости подвижной стенки. Другими словами, величина $U^2 = \omega^2(y = y_2) / \omega^2(y = 0)$ определяет степень неоднородности завихренности потока. Некоторые градиентные свойства завихренности двумерного течения вязкой релаксирующей жидкости изучены в [11]. Примем обозначения: $\zeta_1 = \zeta(y = 0)$, $\zeta_2 = \zeta(y = y_2)$, $\delta_\gamma^2 = \bar{\gamma}^2 m^2 U^2$, $U_* = 1/U$, где $\cos(2y_2 / y_1) = 2U_* - 1$. Градиентные свойства коэффициента сопротивления можно проследить, применяя формулу

$$\frac{\zeta_2}{\zeta_1} = \frac{(1 + \bar{\gamma}^2 m^2)^2}{(1 - \bar{\gamma}^2 m^2)^2} \cdot \frac{U(1 - \bar{\gamma}^2 m^2 U^2)}{(1 + \bar{\gamma}^2 m^2 U^2)}.$$

Условие $\zeta_2 / \zeta_1 > 0$ дает два варианта: 1) $\bar{\gamma}^2 m^2 U^2 < 1$, $\bar{\gamma}^2 m^2 < 1$ – в этом случае значение U принадлежит правой окрестности единицы; 2) $\bar{\gamma}^2 m^2 U^2 > 1$, $\bar{\gamma}^2 m^2 > 1$ – для этого процесса при $\bar{\gamma} > 1$ подходящим является любое значение $U > 1$. Соответствующие этим двум вариантам закономерности поведения функции $\zeta_2 / \zeta_1 = A(\bar{\gamma}, U)$

представлены на рис. 4, 5. Хорошо видно, что по мере роста $\bar{\gamma}$, т. е. при усилении роли релаксации вязких напряжений, величина ζ_2/ζ_1 убывает, и это происходит в довольно широком интервале значений U . Вместе с тем при фиксированном $\bar{\gamma}$ существуют примеры течений, для которых зависимость ζ_2/ζ_1 от градиентного параметра U является немонотонной. При $\bar{\gamma} = 0,5$, $U \in [1,2]$ и при $\bar{\gamma} = 5,0$, $U \in [1,4]$ зависимости ζ_2/ζ_1 от U – монотонно убывающие.

Неизотермическое течение. На основе (9) конечную связь между скоростью и температурой (первый интеграл) можно представить в следующей форме:

$$(\bar{\tau} - \bar{\tau}_1)^2 + \bar{u}^2 = R_\varepsilon^2(\varepsilon^2) \equiv 4\varepsilon^2/(1 - \varepsilon^2)^2, \quad \bar{\tau}_1 = (1 + \varepsilon^2)/(1 - \varepsilon^2), \quad \bar{\tau}_1^2 - R_\varepsilon^2 = 1. \quad (12)$$

На плоскости $(\bar{\tau}, \bar{u})$ имеем окружность радиуса R_ε с центром в точке $(\bar{\tau}_1, 0)$ (рис. 6). В «горячей» области $\bar{\tau}_1 > 0$, $d(R_\varepsilon^2)/d(\varepsilon^2) > 0$; в «холодной» области $\bar{\tau}_1 < 0$, $d(R_\varepsilon^2)/d(\varepsilon^2) < 0$. Первый интеграл (12) позволяет записать следующие температурные зависимости: $d\bar{u}/d\bar{y} = 2\bar{\tau}(\bar{\tau}_1 - \bar{\tau})$, $D_2 = 4\bar{\tau}(\bar{\tau}_1 - 2\bar{\tau})$. Таким образом, для вихря скорости верна формула $\bar{\omega} = \bar{\tau}(\bar{\tau} - \bar{\tau}_1)$. В «холодной» области $\partial(\bar{\omega}^2)/\partial\bar{\tau} < 0$, в «горячей» области $\partial(\bar{\omega}^2)/\partial\bar{\tau} > 0$. В обоих случаях $\bar{\omega} < 0$, а модуль завихренности – монотонно возрастающая функция температуры: $\partial(\bar{\omega}^2)/\partial T > 0$.

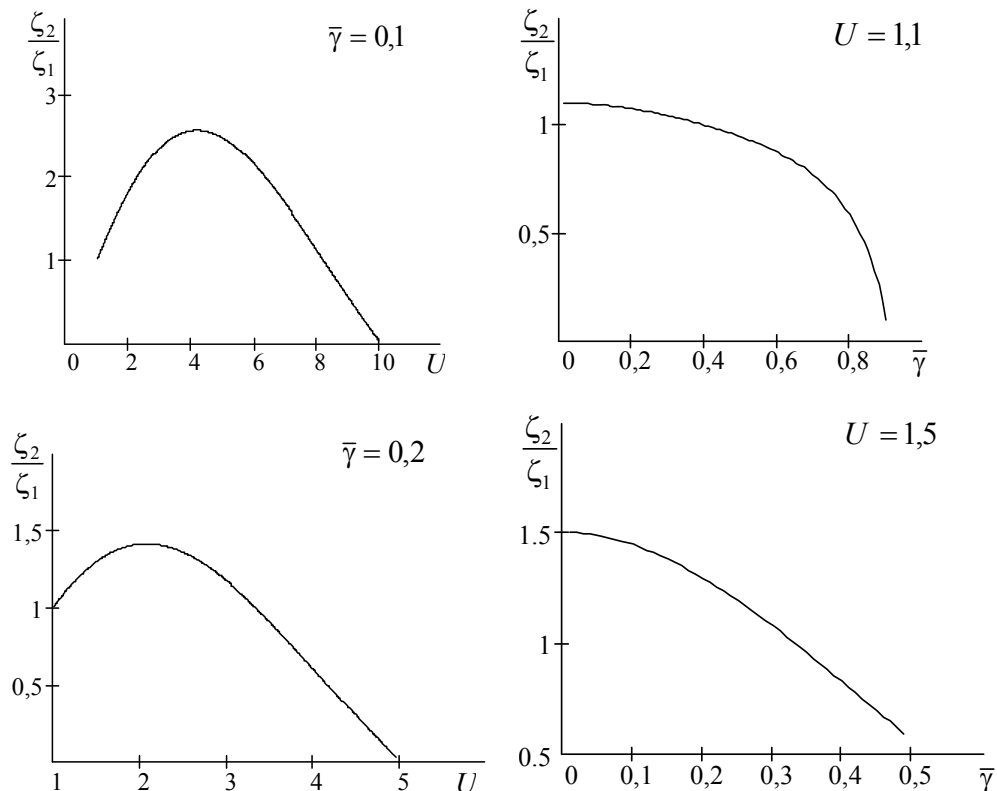


Рис. 4. Градиентные свойства коэффициента сопротивления кластерных образований: режим $\bar{\gamma}^2 m^2 U^2 < 1$, $\bar{\gamma}^2 m^2 < 1$

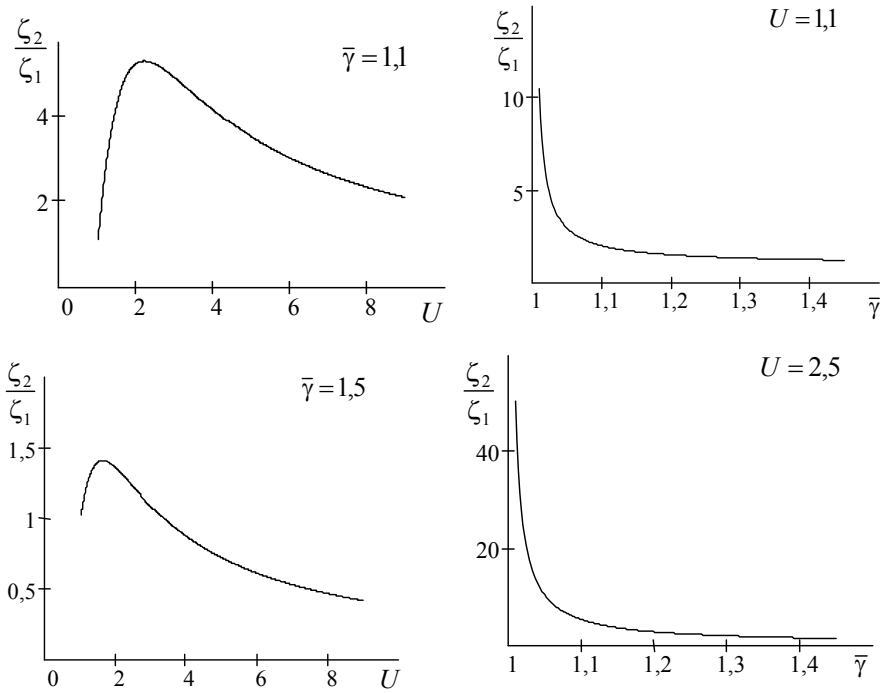


Рис. 5. Градиентные свойства коэффициента сопротивления кластерных образований: режим $\bar{\gamma}^2 m^2 U^2 > 1$, $\bar{\gamma}^2 m^2 > 1$

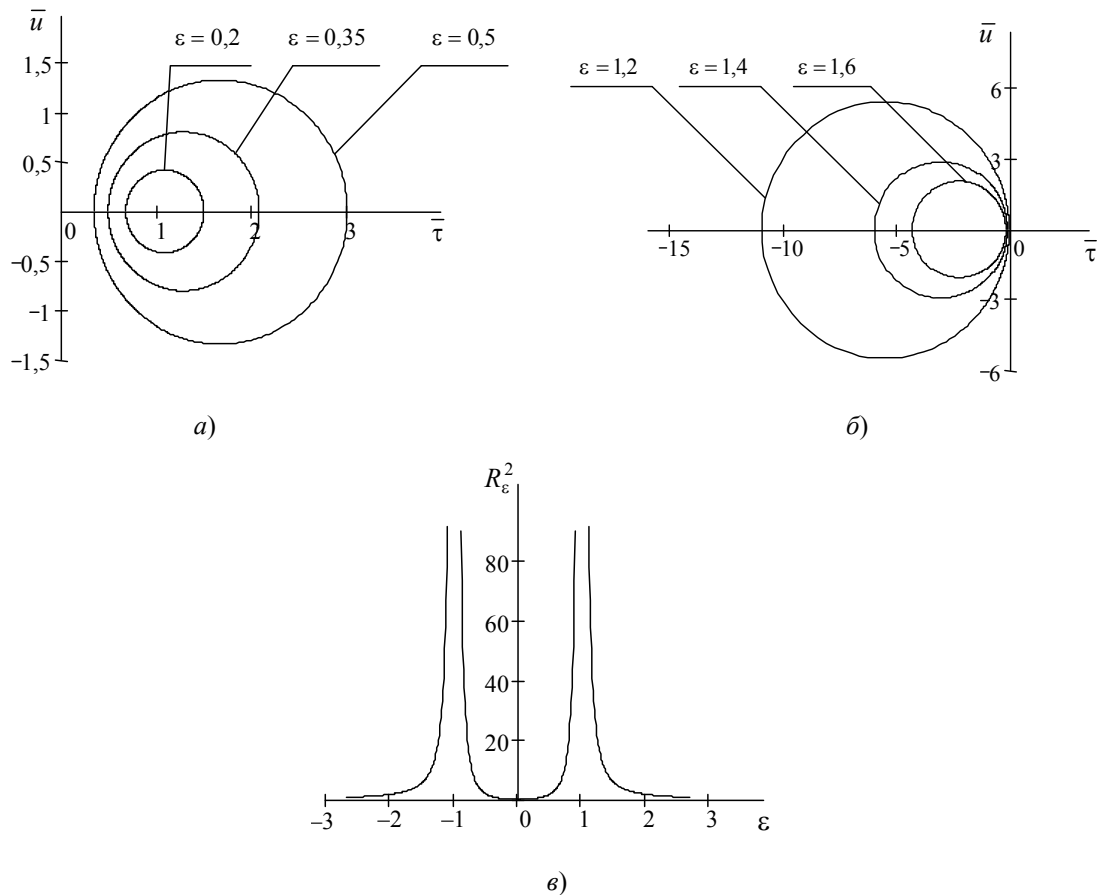


Рис. 6. Первый интеграл (12), определяющий корреляцию «скорость – температура»: а – «горячая область»; б – «холодная область»; в – зависимость квадрата радиуса окружности, R_ϵ^2 , от параметра ϵ

Заключение

В первой части статьи изложены результаты численно-аналитического исследования течения Куэтта для вязкоупругой жидкости Максвелла, испытывающей воздействие внешней силы трения Рэлея. Такая сила служит моделью сопротивления, которое оказывают многоатомные кластеры течению расплава. Представлены результаты расчета гидродинамических параметров при изотермическом режиме течения. Изучен случай, когда сила внешнего трения действует на фоне релаксирующей завихренности. Во всех рассмотренных вариантах наблюдается монотонный рост модуля вихря скорости при возрастании вязкого касательного напряжения на стенке, а также при увеличении динамического напора. Обнаружены нетривиальные градиентные свойства коэффициента сопротивления, проявляющиеся как при «малых» ($\bar{\gamma}^2 m^2 < 1$), так и при «больших» ($\bar{\gamma}^2 m^2 > 1$) временах релаксации вязкого напряжения. Неизотермический режим изучен в «холодной» и «горячей» областях, различающихся значениями температур по отношению к отсчетной температуре T_0 . Построена корреляция «скорость – температура». Определены тепловые свойства вихря скорости. Далее, во второй части статьи мы рассмотрим неизотермические свойства решения (9), определяющие такие процессы: 1) взаимодействие объемного источника / стока энергии q_v с подводом / отводом тепла через подвижную стенку; 2) конкуренция источника и стока импульса; 3) перемежаемость g - l типов сопротивления, различающихся температурными свойствами.

Литература

1. Кластерная модель структуры расплавов в погранслое и ее гидродинамическое описание при моделировании процессов кристаллизации полупроводников в космосе / А. В. Картавых [и др.] // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. – 2004. – № 6. – С. 91–98.
2. Гледзер, Е. Б. Системы гидродинамического типа и их применение / Е. Б. Гледзер, Ф. В. Должанский, А. М. Обухов. – М. : Наука, 1981. – 368 с.
3. Должанский, Ф. В. О механических прообразах фундаментальных гидродинамических инвариантов и медленных многообразий / Ф. В. Должанский // Успехи физ. наук. – 2005. – Т. 175, № 12. – С. 1257–1288.
4. Шабловский, О. Н. Тригонометрический профиль скорости сдвигового течения вязкой жидкости / О. Н. Шабловский // Вестн. Юж.-Ур. гос. ун-та. Сер. «Математика. Механика. Физика». – 2011. – Вып. 5, № 32 (249). – С. 77–82.
5. Шабловский, О. Н. Вихрь скорости и производство энтропии в релаксирующем потоке вязкой жидкости с внутренними источниками / О. Н. Шабловский // Энергетика. Изв. высш. учеб. заведений и энергооб-ний СНГ. – 2011. – № 5. – С. 55–65.
6. Седов, Л. И. Механика сплошной среды / Л. И. Седов. – М. : Наука, 1973. – Т. 1. – 536 с.
7. Астарита, Дж. Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей / Дж Астарита, Дж. Марруччи. – М. : Мир, 1978. – 309 с.
8. Жоу, Д. Расширенная необратимая термодинамика / Д. Жоу, Х. Касас-Баскес, Дж. Лебон. – М. ; Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2006. – 528 с.
9. Гетлинг, А. В. Конвекция Рэлея–Бенара / А. В. Гетлинг. – М. : Эдиториал УРСС, 1999. – 248 с.

10. Шабловский, О. Н. Нелинейные волновые уравнения и конкуренция источников энергии в двухкомпонентных системах / О. Н. Шабловский // *Фундамент. физ.-мат. проблемы и моделирование техн.-технолог. систем.* – М. : Янус-К. – 2010. – Вып. 13. – С. 78–89.
11. Шабловский, О. Н. Динамика вихрей и теплоперенос в потоке вязкой жидкости / О. Н. Шабловский. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2001. – 142 с.

Получено 20.01.2016 г.