

**Министерство образования Республики Беларусь**

**Учреждение образования  
«Гомельский государственный технический  
университет имени П. О. Сухого»**

**Кафедра «Инженерная графика»**

# **НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ**

## **ПРАКТИКУМ**

**по одноименному курсу для студентов  
машиностроительных специальностей  
дневной формы обучения**

**Электронный аналог печатного издания**

**Гомель 2016**

УДК 774(075.8)  
ББК 30.11я73  
НЗ6

*Рекомендовано к изданию научно-методическим советом  
машиностроительного факультета ГГТУ им. П. О. Сухого  
(протокол № 8 от 13.04.2015 г.)*

Составители: *О. М. Остриков, В. В. Влашевич*  
Рецензент: канд. техн. наук, доц. *И. Б. Одарченко*

НЗ6 **Начертательная геометрия** : практикум по одноим. курсу для студентов машиностр. специальностей днев. формы обучения / сост.: О. М. Остриков, В. В. Влашевич. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2016. – 48 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: <https://elib.gstu.by>. – Загл. с титул. экрана.

ISBN 978-985-535-298-4.

Содержит домашние задания и методические указания по теме «Пересечение поверхностей и развертки» курса «Начертательная геометрия», а также примеры задач для самостоятельного ознакомления с целью оказания помощи в процессе их выполнения.

Для студентов машиностроительных специальностей дневной формы обучения.

УДК 774(075.8)  
ББК 30.11я73

ISBN 978-985-535-298-4

© Остриков О. М., Влашевич В. В., 2016  
© Учреждение образования «Гомельский  
государственный технический университет  
имени П. О. Сухого», 2016

## ВВЕДЕНИЕ

Начертательная геометрия является одной из фундаментальных наук, составляющих основу инженерно-технического образования. Она изучает методы изображений пространственных геометрических фигур на плоскости и способы решения по этим изображениям метрических и позиционных задач в пространстве.

Начертательная геометрия – это теоретическая база для построения чертежей и решения по имеющемуся изображению прикладных задач. Изучение курса «Начертательная геометрия» приносит большую пользу для развития пространственного представления, логического мышления у студентов и закладывает основу для дальнейшего изучения курса «Инженерная графика».

Освоение курса «Начертательная геометрия» преследует следующие цели:

- изучение методов создания изображений пространственных тел на плоскости;
- изучение способов решения позиционных и метрических задач, связанных с этими телами, по их изображениям на плоскости;
- развитие навыков мысленного представления пространственных форм машин, узлов, деталей и т. п., изображенных на чертежах (чтение чертежей);
- изучение основных правил и норм оформления и выполнения чертежей и других конструкторских документов, установленных стандартами Единой системы конструкторской документации (ЕСКД);
- освоение техники выполнения чертежей.

В высшем техническом учебном заведении основной задачей курса «Начертательной геометрии» является изложение совокупности геометрических сведений, составляющих геометрическую основу конструкторской подготовки молодых специалистов, и привитие им твердых навыков выполнения геометрических построений в соответствии с действующими стандартами с помощью как традиционных методов (вручную), так и автоматизированных.

Практикум не заменяет учебник, а предназначен для помощи учащимся в выполнении домашних графических заданий.

# 1. ЦЕЛЬ И СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ

**Цель задания** – изучить способы построения линий пересечения поверхностей и разверток, уметь применять их при выполнении чертежей технических форм.

**Содержание задания:**

**Задача 1.** Пересечение поверхности с плоскостью.

Построить проекции линии пересечения поверхности плоскостью, истинный вид фигуры сечения и развертку усеченной части тела.

**Задача 2.** Взаимное пересечение поверхностей.

Построить линию пересечения двух тел способами вспомогательных секущих плоскостей и секущих сфер.

## 2. ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ ЗАДАНИЯ, ПОРЯДОК КОНСУЛЬТАЦИИ И ПРИЕМА ЗАДАНИЯ

Каждая задача выполняется на отдельном листе чертежной бумаги формата А3 в масштабе 1 : 1. Рамку и основную надпись выполняют согласно требованиям ЕСКД. Все построения нужно выполнять карандашом с применением чертежных инструментов.

При обводке чертежа необходимо соблюдать требования ГОСТ 2.307–68 «Линии».

Видимые части проекций заданных фигур вычерчивают сплошными толстыми линиями, а линии невидимого контура – штриховыми; оси проекций, линии связи, вспомогательные линии построения – сплошными тонкими, с указанием на них стрелок, поясняющих последовательность решения задачи. Все линии построения сохраняют. Полученный результат (проекции построенной графической фигуры) обводят красным цветом.

Обозначения проекций фигур и символические записи следует применять только те, которые приняты на кафедре в настоящее время. Все надписи и обозначения наносят чертежным шрифтом размера 5–7 в соответствии с ГОСТ 2.304–81 «Шрифты чертежные». Условия и образцы выполнения задач помещены на стендах кафедры.

Студенты получают задание (задачи) согласно графику выдачи, сдачи и защиты заданий. Объем теоретических знаний и практических навыков регламентирован в разделе «Примерные

контрольные вопросы» (приведенном в разделах 7 и 8 данных методических указаний).

Консультации и прием задания проводятся в индивидуальном порядке преподавателем, ведущим практические занятия. Для этого еженедельно назначаются консультации и выделяются часы для самостоятельной работы в аудитории.

При оценке задания учитывают: самостоятельность выполнения работы, срок сдачи и защиты, качество графической части, уровень теоретических знаний и практических навыков, соблюдение ГОСТов.

### **3. МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ**

Решение задач рекомендуется проводить в такой последовательности:

1. Анализ условия.
2. Составление алгоритма (плана) решения.
3. Осуществление намеченного плана на чертеже.
4. Доказательство правильности решения.

Цель анализа – выяснить, какими свойствами обладают данные и искомые геометрические фигуры, а также установить связь между ними. Для этого следует прочесть чертеж, т. е. уяснить по имеющимся на чертеже проекциям геометрических фигур, какие фигуры заданы, как они расположены в пространстве (относительно плоскостей проекций) и друг относительно друга.

Далее составляют алгоритм решения задачи, определяющий порядок и содержание операций, необходимых для решения задачи.

В соответствии с принятым алгоритмом решения на основе теоретических положений начертательной геометрии производят построения на чертеже.

Правильность полученного результата зависит как от выбора рационального пути решения, так и от точности выполнения графических построений. Суть доказательства правильности решения заключается в том, что найденная линия (поверхность) удовлетворяет всем условиям задачи и что все проделанные операции при решении опираются на инвариантные свойства параллельного проецирования, теоремы, определения, правила.

Ниже даны указания к решению задач, разобраны в качестве примеров задачи, подобные задачам индивидуального задания, и приведены примерные вопросы для самопроверки, а также типичные

ошибки. При этом предлагаются студентам только те поверхности, которые наиболее широко распространены в общем машиностроении.

Образцы выполнения задания представлены в разделах 7 и 8.

## 4. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ

Поверхности делятся на две группы: гранные и кривые.

**Задача 1** представляет собой сечение плоскостью гранной или кривой поверхности.

В **задаче 2** все пересекающиеся поверхности могут быть в следующих сочетаниях:

- пересечение двух гранных поверхностей;
- пересечение кривой и гранной поверхностей;
- пересечение двух кривых поверхностей.

В **задаче 2** заданы сочетания трех поверхностей с целью проработки способов секущих плоскостей и сфер.

Опыт показывает, что в большинстве случаев неумение студентов решать отдельные позиционные и метрические задачи объясняется их незнанием геометрических образов, неумением опознавать их по каким-либо признакам на чертеже. Особенно это относится к кривым поверхностям. Как правило, незнание образования этих поверхностей влечет за собой все остальные трудности при построении линии пересечения поверхности с плоскостью и поверхностей.

Студенты должны опознать данные геометрические образы по каким-либо признакам и самостоятельно использовать закон их образования для решения поставленных задач. Исходя из этого рассмотрим теоретические основы образования кривых поверхностей.

Поверхность можно рассматривать как совокупность последовательных положений линии, перемещающейся в пространстве по определенному закону.

Подвижная линия называется образующей; неподвижные линии, задающие закон перемещения образующей, называются направляющими.

Поверхности вращения получаются путем вращения образующей вокруг неподвижной оси (рис. 1).

При этом каждая точка образующей  $M$  описывает окружность с центром на оси поверхности. Плоскости, перпендикулярные к оси поверхности, пересекают поверхность вращения по окружностям,

называемым параллелями. Линия пересечения поверхности плоскостью, проходящей через ось вращения, называется меридианом. На рис. 1 меридианом является образующая кривая.

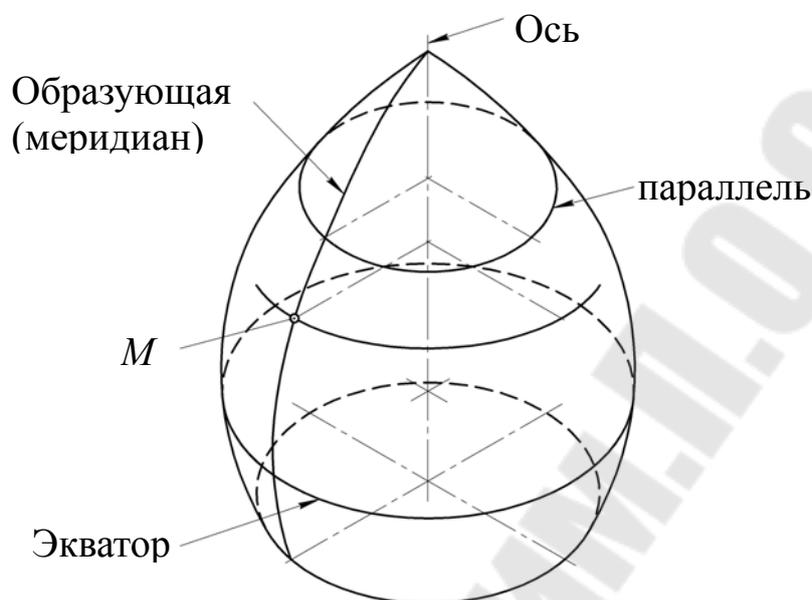


Рис. 1. Вращение образующей вокруг неподвижной оси

Образующая может быть и прямой линией, и кривой, плоской и пространственной.

К линейчатым поверхностям относятся поверхности, которые могут быть образованы движением прямой линии. Все остальные поверхности – не линейчатые.

Одна и та же поверхность может быть образована различными способами. Описанный способ образования поверхности называется кинематическим.

Другим способом образования поверхности и ее изображения на чертеже является задание поверхности множеством принадлежащих ей точек или линий. При этом точки или линии выбирают так, чтобы они давали возможность с достаточной степенью точности определять форму поверхности и решать на ней различные метрические и позиционные задачи.

Множество точек или линий, определяющих поверхность, называется ее каркасом.

Определителем поверхности называется совокупность независимых условий, однозначно задающих поверхность.

## 5. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПЛОСКОСТЬЮ (Задача 1)

Для выполнения задания необходимо проработать темы «Пересечение поверхности плоскостью (построение сечений)» и «Развертки поверхностей», а также вспомнить разделы курса, касающиеся поверхностей, принадлежности точки и линий поверхности, пересечения плоскостей, способов преобразования ортогональных проекций.

Вспомните решение следующих элементарных задач:

– построение точки встречи прямой с плоскостью (частного и общего положения);

– построение прямой линии пересечения плоскостей (частного и общего положения);

– преобразование чертежа плоскости общего положения в плоскость проецирующую и плоскость уровня.

### **Контрольные вопросы:**

1. Как определить натуральную величину отрезка прямой общего положения?

2. Как определить натуральную величину плоской фигуры (треугольника, четырехугольника и т. д.)?

3. Изложите общий принцип построения алгоритма для решения задачи по определению линии пересечения поверхности плоскостью.

4. Сформулируйте возможные варианты решения задачи по определению линии пересечения поверхности многогранника плоскостью.

5. В чем заключается решение задачи по определению сечения поверхности плоскостью с помощью способа граней и способа ребер?

6. Как строится линия пересечения цилиндра вращения, конуса вращения плоскостью?

7. Какие точки линии пересечения называются характерными (опорными)?

8. Какие линии получаются при пересечении цилиндра вращения, конуса вращения плоскостью?

9. Что называется разверткой поверхности?

10. Как строятся развертки боковых поверхностей призмы, пирамиды?

11. Как построить развертки боковых поверхностей цилиндра вращения, конуса вращения?

12. В каком случае эти развертки будут полными?

13. Как строятся развертки усеченной части поверхностей призмы, пирамиды, цилиндра вращения, конуса вращения?

**Сечением** называется плоская замкнутая фигура, полученная в результате пересечения заданной плоскости с поверхностями, ограничивающими данное тело в месте сечения.

В зависимости от формы тела фигура сечения может представлять собой или многоугольник, или плавную замкнутую кривую (окружность, эллипс и другие кривые), или их совокупность.

Задача построения сечения тела плоскостью сводится к нахождению линий пересечения плоскости с поверхностями, ограничивающими тело.

При решении задачи очень желательно определить вначале характер искомой линии пересечения. Зная это, в ряде случаев можно использовать геометрические свойства этих линий, что упрощает построение на чертеже и позволяет получить более точные результаты. В равной степени это относится к плоским сечениям гранных и кривых поверхностей. В отдельных случаях линию пересечения находят без преобразования эпюра, а в ряде случаев – для более простого решения задачи – необходимо преобразование эпюра.

Истинная величина фигуры сечения может быть определена одним из следующих способов:

- заменой плоскостей проекций;
- плоскопараллельным перемещением;
- вращением вокруг горизонтали или фронтали;
- совмещением.

**Разверткой** поверхности какого-либо тела называется фигура, полученная путем совмещения поверхности этого тела с плоскостью чертежа.

Построение разверток поверхностей является технической задачей и представляет большой интерес, особенно при конструировании из листового материала различных сооружений, форм для металлических отливок, сосудов, трубопроводов, резервуаров, кожухов, в самолетостроении, кораблестроении и др. При этом иногда развертки выполняются на бумаге в натуральную величину и служат как бы выкройкой для изготовления детали в металле.

С той или иной степенью точности можно построить развертку практически любой поверхности.

Точную развертку можно получить только для гранных тел и для так называемых развертываемых поверхностей. К последним относятся те кривые линейчатые поверхности, у которых сменные прямолинейные образующие параллельны или пересекаются в одной

точке. Остальные поверхности называются неразвертываемыми. Для них строят приближенную развертку.

Поверхность и ее развертку можно рассматривать как две геометрические фигуры, между точками которых установлено взаимно-однозначное соответствие. Поэтому можно сформулировать следующие свойства развертки поверхностей:

1. Длины двух соответствующих линий поверхности и ее развертки равны между собой.

2. Угол между линиями на поверхности равен углу между соответствующими линиями на развертке.

3. Прямой на поверхности соответствует такая же прямая на развертке.

4. Параллельным прямым на поверхности соответствуют параллельные прямые на развертке.

Следствием первого свойства является то, что замкнутая линия на поверхности и соответствующая линия на развертке ограничивают одинаковую площадь.

Построение разверток поверхностей таких тел, как прямая призма, прямой круговой цилиндр, правильная пирамида, прямой круговой конус (а именно такие поверхности предложены в задании), выполняется весьма просто, без применения каких-либо специальных приемов.

В общем случае задания поверхности развертки строятся одним из следующих способов: триангуляции, нормального сечения, раскатки. Для построения разверток кривых неразвертываемых поверхностей применяются и другие способы, например, способ конусов, способ цилиндров.

В задании требуется построить полную развертку усеченной части тела, поэтому к построенной развертке боковой поверхности надо пристроить основание и истинную величину фигуры сечения.

Ниже рассмотрим ряд примеров построения разверток некоторых поверхностей.

### **5.1. Пересечение многогранников плоскостью и построение разверток**

В сечении многогранника плоскостью получается плоская фигура – многоугольник (рис. 2), число вершин которого соответствует числу ребер многогранника, пересекаемых секущей плос-

костью. Очевидно, что стороны фигуры сечения – линии пересечения граней многогранника с секущей плоскостью, а вершины – точки встречи с нею ребер многогранника. Поэтому задача на построение проекций фигуры сечения многогранника плоскостью сводится к построению линии пересечения граней многогранника с секущей плоскостью – **способ граней** (задача на нахождение прямых линий пересечения плоскостей) или к нахождению точек встречи ребер многогранника с секущей плоскостью – **способ ребер** (задача на нахождение точек встречи прямых с плоскостью). Второй способ более прост и на практике применяется чаще первого. Выбор способа зависит от положения секущей плоскости, ребер и граней многогранника относительно плоскости проекции.

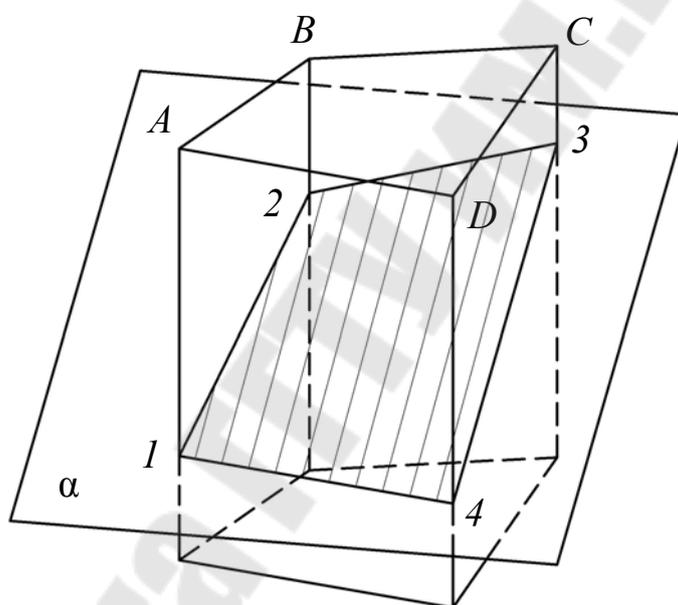


Рис. 2. Сечение многогранника плоскостью

Рассмотренные далее примеры построения сечений предоставляют также возможность выбора того или иного способа при решении конкретной задачи, данной в задании.

Развертка многогранника представляет собой плоскую фигуру, полученную последовательным совмещением всех граней с плоскостью чертежа таким образом, чтобы грани примыкали друг к другу по линиям сгиба.

Для построения развертки многогранника необходимо иметь натуральные величины всех его граней (ребер).

**Пример 1.** На рис. 3 представлена пятигранная призма, которую пересекает плоскость общего положения  $\alpha$  ( $\alpha_V, \alpha_H$ ).

Фигура сечения зависит от того, пересекает ли плоскость все боковые ребра призмы или некоторые из них не встречаются с плоскостью  $\alpha$ :

– в первом случае она будет составлена только из отрезков прямых пересечения боковых граней с плоскостью  $\alpha$  и представлять собой многоугольник с числом сторон, соответствующим числу боковых граней призмы;

– во втором случае одна или две стороны многоугольника сечения будут являться отрезками прямых пересечения плоскости  $\alpha$  с плоскостями оснований. В этом случае число сторон многоугольника сечения не определяется числом боковых граней призмы.

Заданный эпюр (рис. 3) не показывает в явной форме, пересекает ли плоскость  $\alpha$  основание призмы. Для выяснения этого вопроса необходимо провести построение линии пересечения плоскости  $\alpha$  с плоскостью верхнего и нижнего основания.

Плоскость верхнего основания ( $\beta \parallel H$ ) пересекается с плоскостью  $\alpha$  по горизонтали  $h$  ( $h_V, h_H$ ); горизонтальная проекция  $h_H$  не пересекает горизонтальную проекцию верхнего основания, следовательно, плоскость  $\alpha$  не пересекает верхнее основание призмы.

Нижнее основание – пятиугольник  $A, B, C, D, E$ , лежащий на плоскости  $H$ .

Так как след  $h_H$  не пересекает горизонтальную проекцию нижнего основания ( $A_H, B_H, C_H, D_H, E_H$ ), то плоскость  $\alpha$  не пересекает и нижнее основание призмы.

Для определения многоугольника сечения находим точки пересечения ребер призмы с секущей плоскостью (способ ребер). Здесь горизонтальные проекции ( $1_H, 2_H, 3_H, 4_H, 5_H$ ) искомых точек совпадают с горизонтальными проекциями ребер (почему?). Зная это, находим фронтальные проекции ( $1_V, 2_V, 3_V, 4_V, 5_V$ ) точек, пользуясь условием, что сами точки ( $1, 2, 3, 4, 5$ ) лежат и на секущей плоскости  $\alpha$ . Это сделано с помощью фронтали плоскости  $\alpha$  для точек 4 и 5 и горизонталей плоскости  $\alpha$  для точек 1, 2 и 3. Ход построений ясен из рис. 3.

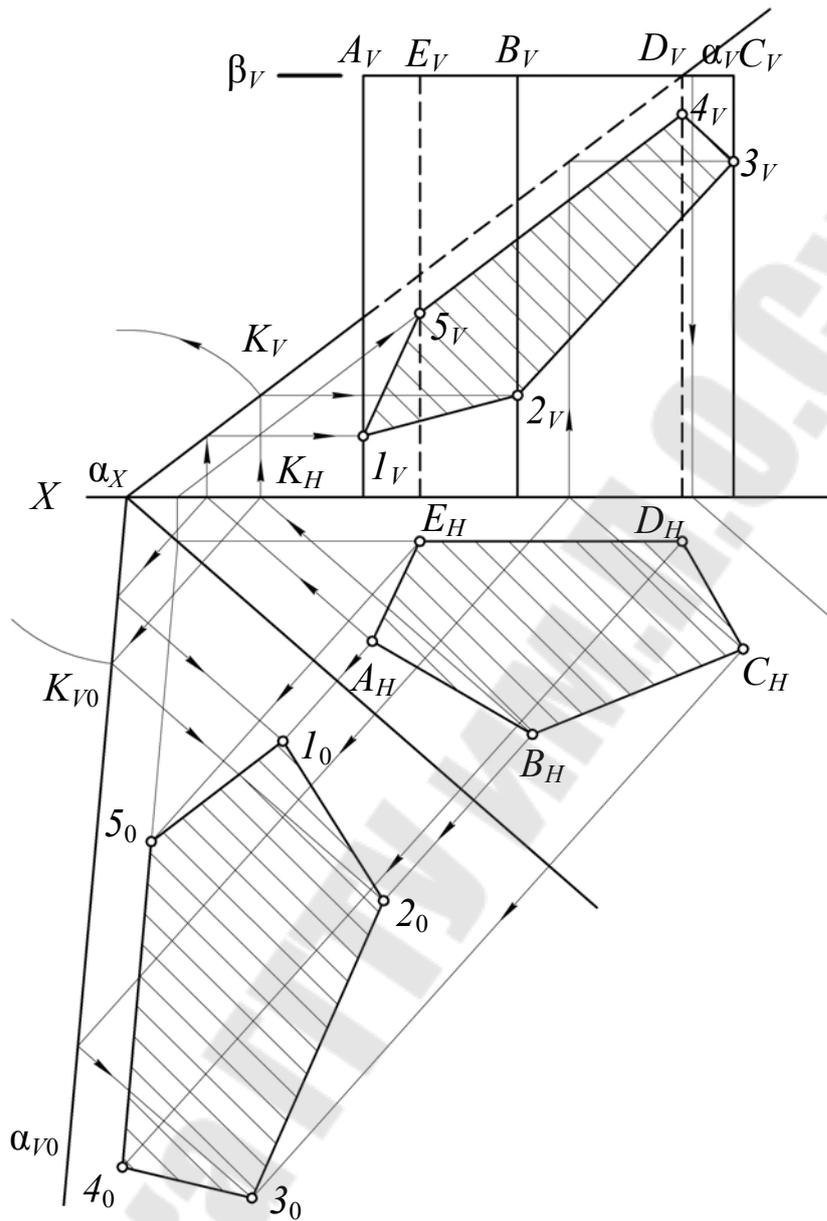


Рис. 3. Пятигранная призма, которую пересекает плоскость общего положения  $\alpha$  ( $\alpha_V, \alpha_H$ )

Соединив последовательно найденные точки, получаем проекции искомой линии пересечения.

Для построения полной развертки усеченной части призмы (нижней, рис. 4) необходимо иметь натуральные величины боковых граней усеченной призмы, нижнего основания и пятиугольника сечения.

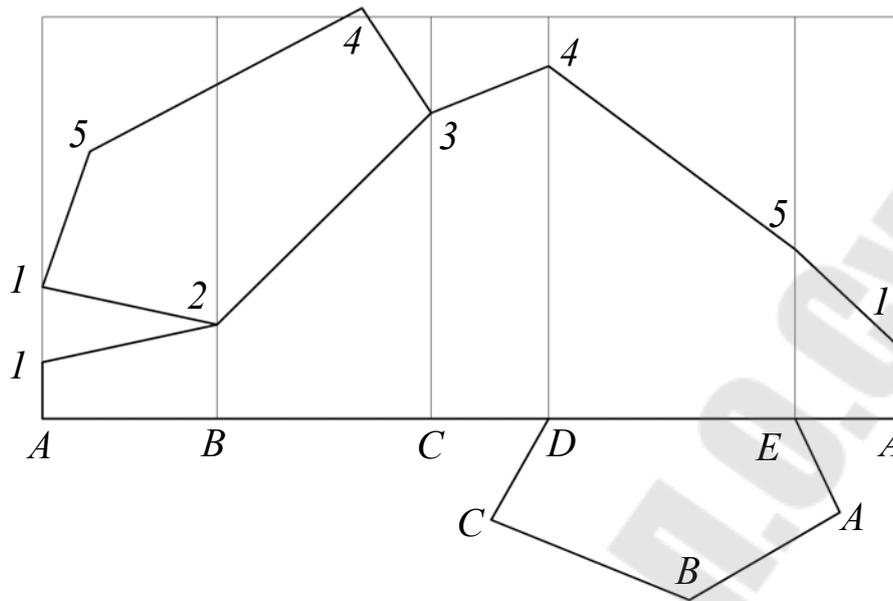


Рис. 4. Развертка усеченной части призмы

Натуральные величины боковых граней можно легко построить, воспользовавшись тем, что все ребра на одну из плоскостей проекций проецируются в натуральную величину. Истинная величина фигуры сечения построена способом совмещения. Совмещение плоскости  $\alpha$  с плоскостью проекций  $H$  произведено вращением вокруг ее следа  $\alpha_H$ . Точка  $K$ , принадлежащая следу  $\alpha_V$ , движется по дуге окружности радиуса  $KO$ , расположенной в плоскости, перпендикулярной к оси вращения  $\alpha_H$ , а горизонтальная проекция  $K_H$  точки  $K$  движется по прямой  $KK_0 \perp H$ . Так как отрезок  $[\alpha_X K_{V0}]$  совмещенного следа  $\alpha_{V0}$  равен  $[\alpha_X K_V]$ , то положение  $K_0$  точки  $K$  на следе  $\alpha_{V0}$  определится в точке пересечения прямой  $K_H K_{V0}$  с дугой окружности радиуса  $\alpha_X K_V$ , проведенной из центра  $\alpha_X$ . Соединив прямой точки  $K_{V0}$  и  $\alpha_X$ , получим направление совмещенного следа  $\alpha_{V0}$ . Построение вершин  $1_0, 2_0, 3_0$  и  $4_0$  фигуры сечения производим с помощью горизонталей и фронтали плоскости  $\alpha$ .

Для построения развертки проводим горизонтальную прямую и на ней от произвольной точки  $A$  откладываем последовательно отрезки, соответственно, конгруэнтные  $[A_H B_H]$ ;  $[B_H C_H]$ ;  $[C_H D_H]$ ;  $[D_H E_H]$ ;  $[E_H A_H]$ . Из полученных точек восстанавливаем перпендикуляры и на них откладываем величины, равные соответствующим отрезкам, взятым на фронтальной проекции для усеченной призмы. Соединив точки  $1, 2, 3, 4, 5$ , получим развертку боковой поверхности усеченной части призмы. Для получения полной развертки пристраиваем нижнее основание (например, к стороне  $DE$ ) и сечение.

Чтобы убедиться в правильности построения, необходимо проверить равенство отрезков  $[1-2]$ ,  $[2-3]$ ,  $[3-4]$ ,  $[4-5]$ ,  $[5-1]$  ломаной линии на развертке, соответственно, отрезкам  $[1_0-2_0]$ ,  $[2_0-3_0]$ ,  $[3_0-4_0]$ ,  $[4_0-5_0]$ ,  $[5_0-1_0]$  – сторонам истинной величины сечения.

**Пример 2.** На рис. 5 представлен случай, когда секущая плоскость пересекает верхнее и нижнее основания. Фигура сечения имеет форму шестиугольника, вершины и стороны которого построены способом вспомогательных секущих плоскостей.

Сторона  $3-4$  строится как линия пересечения верхнего основания призмы с плоскостью  $\alpha$ . Для этого грань его основания  $ABCD$  заключили в плоскость  $\beta$ . Линия пересечения плоскости  $\beta$  с плоскостью  $\alpha$  – горизонталь  $h$  ( $h_V$ ). Строим горизонтальную проекцию этой горизонтали  $h_H$ .

Отрезок  $[3-4]$  найденной горизонтали является одной из сторон фигуры сечения.

Сторона  $4-6$  строится как линия пересечения грани  $CC_1DD_1$  с плоскостью  $\alpha$  (используем способ граней). Грань  $CC_1DD_1$  заключена в горизонтально-проецирующую плоскость  $\gamma$ , которая пересекает плоскость  $\alpha$  по прямой  $MN$ . Отрезок  $[4-6]$  этой прямой – искомая линия.

Сторона  $1-2$  является линией пересечения нижнего основания призмы плоскостью  $\alpha$ . Линия  $1-2$  совпадает со следом  $\alpha_H$ .

Вершина 5 фигуры сечения строится как точка пересечения ребра  $BB_1$  и плоскости  $\alpha$  с помощью вспомогательных плоскости  $\omega$ . Линия пересечения плоскостей  $\omega$  и  $\alpha$  – фронталь  $f$  ( $f_H$ ,  $f_V$ ).

Стороны  $2-6$ ,  $1-5$  и  $5-3$  получены путем соединения найденных вершин с помощью прямых линий.

Построение развертки призмы в данном случае мало отличается от предыдущего. Нужно лишь на развертке найти точки 1, 2, 3, 4. Эти точки находятся легко, так как известны натуральные величины отрезков  $1A$ ,  $2A$  и  $3C$ ,  $4C$ , которые проецируются в натуральную величину на плоскости проекций  $H$ .

Истинная величина фигуры сечения построена способом совмещения. Построение вершин  $4_0$  и  $6_0$ ,  $3_0$  и  $4_0$ ,  $5_0$  фигуры сечения производим с помощью прямой  $MN$ , горизонтали  $h$  и фронтали  $f$  плоскости  $\alpha$ .

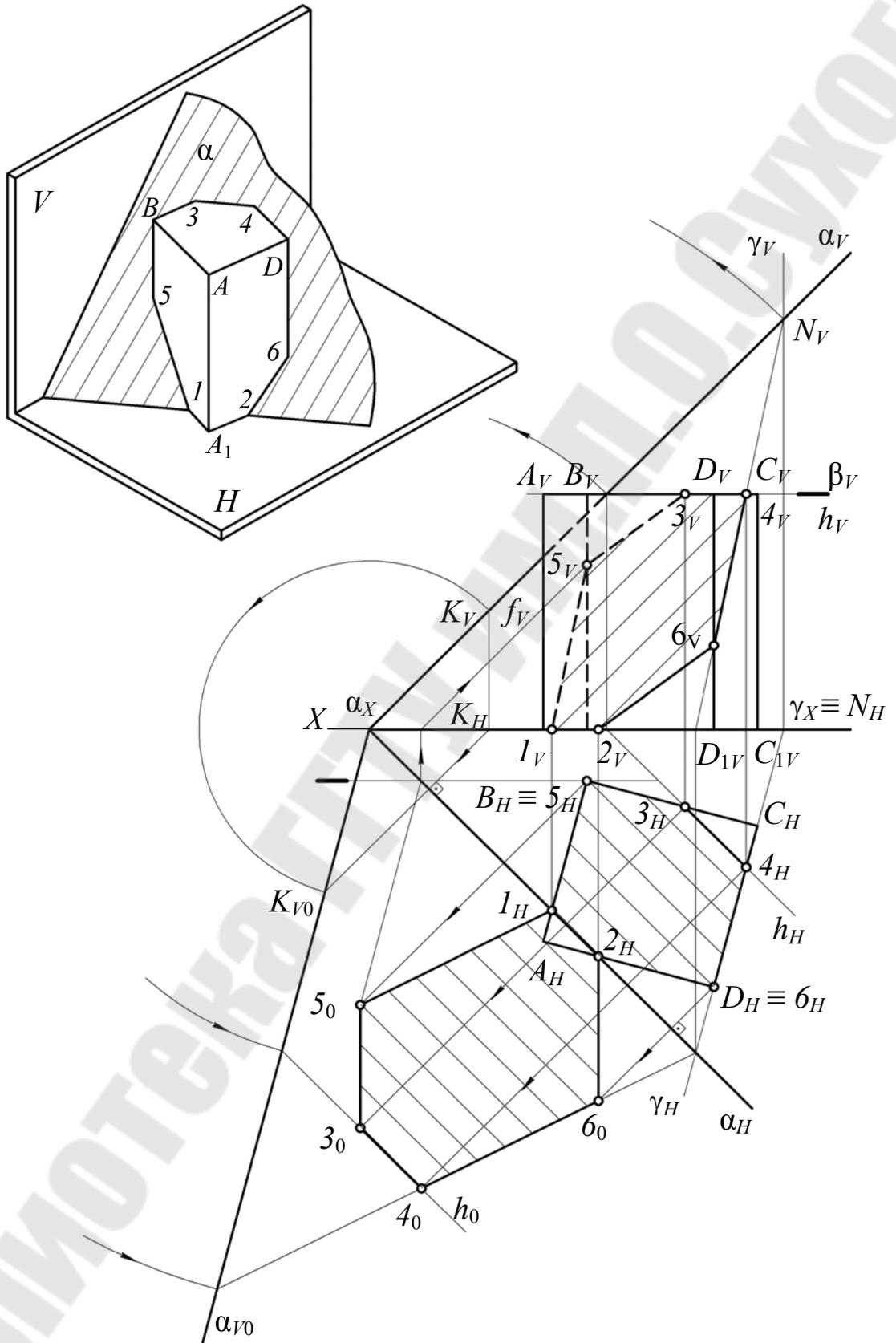


Рис. 5. Секущая плоскость пересекает верхнее и нижнее основания шестиугольника

**Пример 3.** Призма пересекается плоскостью общего положения, заданной четырехугольником (рис. 6).

Для построения сечения используем способ граней.

Проведем горизонтально-проецирующую плоскость  $\gamma$  через грань  $AA_1DD_1$  (след  $\gamma_H$  проходит через  $A_HD_H$ ). По горизонтальной проекции  $M_HN_H$  линии пересечения плоскостей  $\gamma$  и четырехугольника  $abcd$  найдем фронтальную проекцию –  $M_VN_V$ . На  $M_VN_V$  выделяем отрезок  $[1_V-2_V]$ , лежащий на грани  $A_VA_1VD_1D_1V$ , который и будет фронтальной проекцией стороны многоугольника сечения. Горизонтальная проекция  $1_H-2_H$  стороны многоугольника сечения совпадает с горизонтальной проекцией грани призмы. Для определения всего сечения достаточно найти еще одну сторону многоугольника, лежащую на грани  $BB_1CC_1$ .

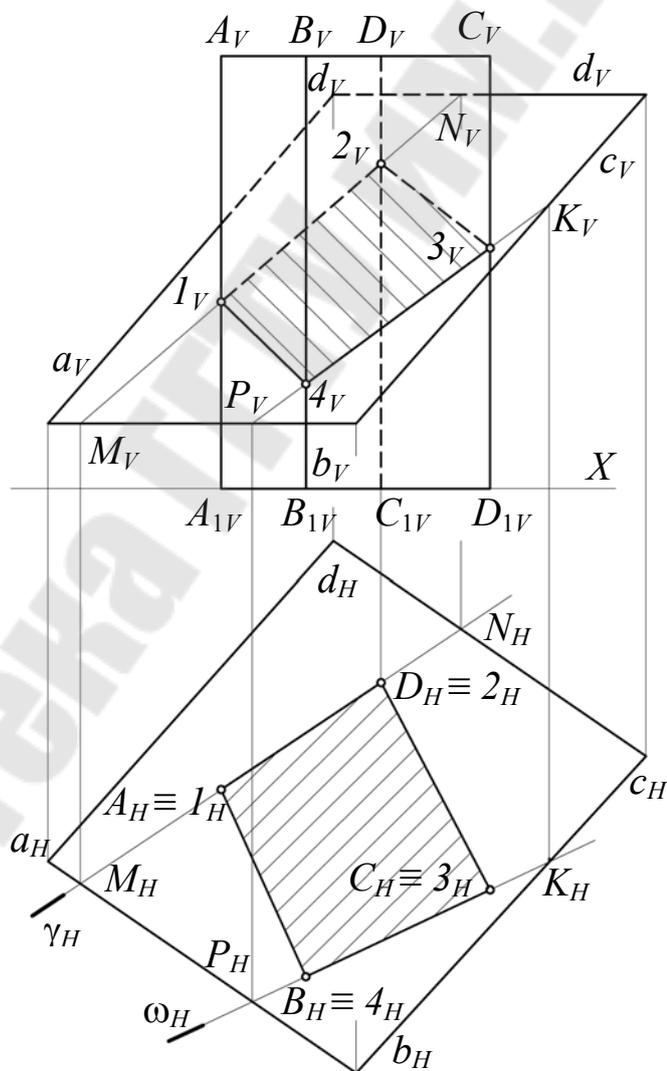


Рис. 6. Призма пересекается плоскостью общего положения

Для этого проводим через нее плоскость  $\omega \perp H$ . Все построения аналогичны предыдущим. Имея две стороны многоугольника сечения 1–2 и 3–4, легко найти остальные, так как вершины сечения будут общими, и остается только соединить их последовательно.

Истинный вид сечения можно определить одним из способов преобразования эпюра – вращением вокруг горизонтали или переменной плоскостей проекции.

Построение развертки осуществляется так же, как в предыдущих примерах.

Если секущая плоскость задана треугольником, двумя пересекающимися прямыми и т. п., то план решения остается прежним.

**Пример 4.** Рассмотрим особенности построения проекций плоского сечения пирамиды. На рис. 7 секущая плоскость  $\alpha$  ( $\alpha_V, \alpha_H$ ) общего положения задана следами. Как в случае призмы, проекции сечения определяются или последовательным построением точек встречи ребер с секущей плоскостью, или построением прямых, по которым грани пирамиды пересекаются секущей плоскостью.

Для построения многоугольника сечение пирамиды, боковые грани которой являются плоскостями общего положения, удобнее применить способ ребер. Вспомогательные плоскости могут быть фронтально- или горизонтально-проецирующими.

Точки 2 ( $2_H, 2_V$ ) и 3 ( $3_H, 3_V$ ) на ребрах пирамиды  $SB$  и  $SC$  находим при помощи фронтально проецирующих плоскостей  $\beta$  и  $\gamma$ . Точку 1 ( $1_H, 1_V$ ) можно найти таким же способом, но если учесть, что сторона  $AB$  основания пирамиды является горизонтальным следом  $\omega_H$  плоскости грани  $SAB$ , то, продолжив горизонтальную проекцию стороны основания  $AB$  до пересечения с горизонтальным следом  $\alpha_H$  секущей плоскости, мы получим горизонтальную проекцию  $M_H$  общей точки плоскостей  $\alpha$  и  $\omega$  ( $\Delta ABS$ ). Второй общей точкой тех же плоскостей является уже найденная точка 3 ( $3_H, 3_V$ ). Соединив точки  $M$  ( $M_H, M_V$ ) и 2 ( $2_H, 2_V$ ), получим линию пересечения плоскостей  $\alpha$  и  $\omega$  ( $\Delta ABC$ ). Отрезок [1–2] этой линии в пределах грани  $SAB$  является одной из сторон сечения. Треугольник 1–2–3 – искомое сечение.

В отдельных случаях для нахождения точек пересечения ребер пирамиды с секущей плоскостью удобно применять в качестве вспомогательных профильно-проецирующие плоскости.

Такой способ позволяет находить обе проекции каждой точки, не пользуясь линией связи, что в некоторых случаях дает более точные результаты, в частности, когда угол наклона проекции ребра к оси  $OX$  близок к  $90^\circ$ .

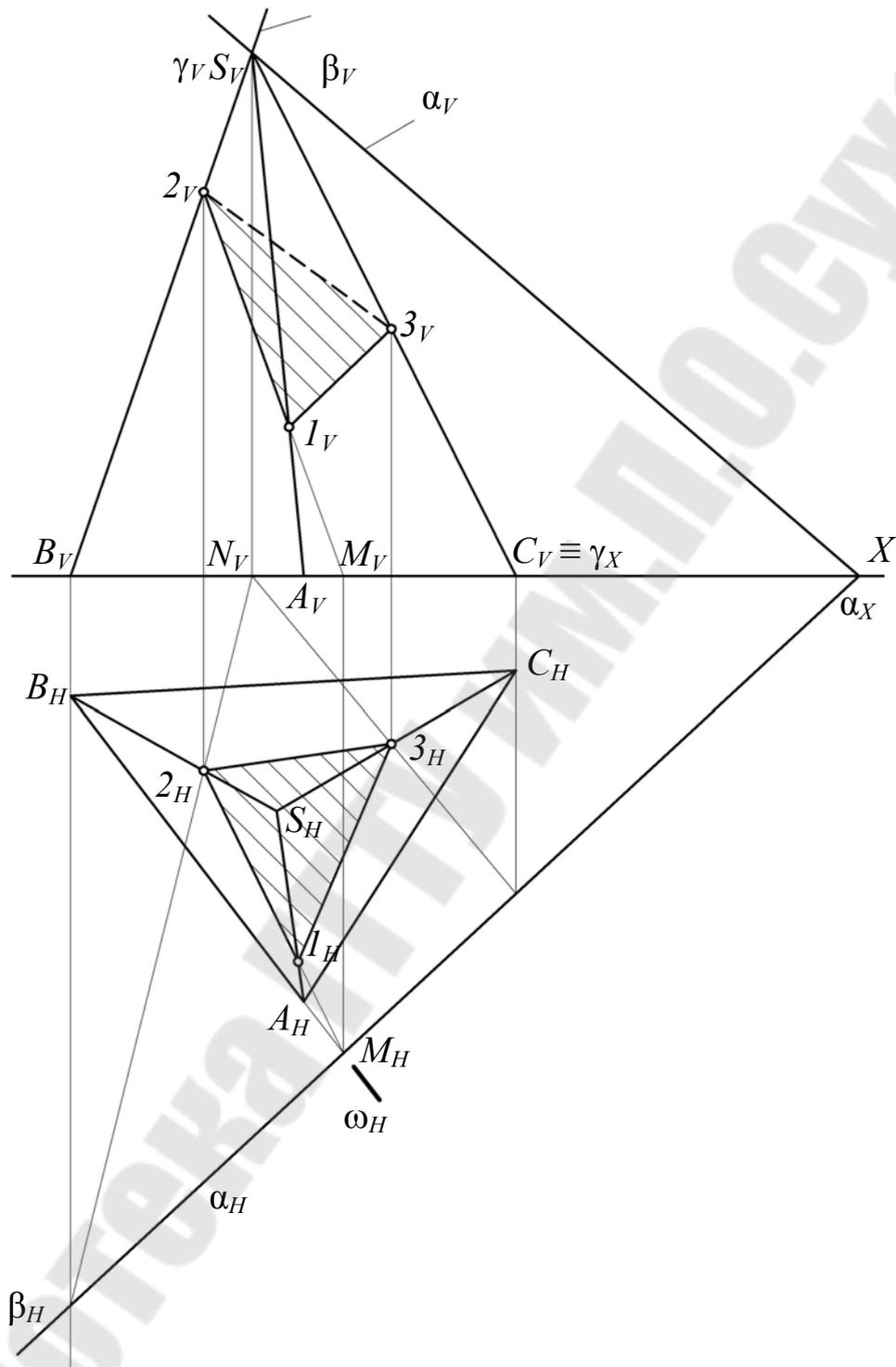


Рис. 7. Построение проекции плоского сечения пирамиды

**Пример 5.** На рис. 8 представлена пирамида на  $SABC$ , пересекаемая плоскостью  $\alpha$  ( $\alpha_V, \alpha_H$ ). Плоскость  $\alpha$  является плоскостью общего положения. Боковые ребра и боковые грани пирамиды – соответственно, прямые и плоскости общего положения.

Многоугольник сечения можно определить путем нахождения точек пересечения ребер пирамиды с секущей плоскостью. Решение этой задачи значительно упрощается, если секущая плоскость  $\alpha$  будет проецирующей.

Для решения нашего примера использован способ перемены плоскости проекции. Заменяем плоскость проекции  $V$  на новую  $V_1$  так, чтобы плоскость  $\alpha$  была фронтально-проецирующей, и решаем задачу в системе плоскости  $V_1/H$ .

На преобразованном эюре видно, что секущая плоскость не пересекает основание.

Проекцией на плоскости  $V_1$  точек пересечения боковых ребер пирамиды с секущей плоскостью  $\alpha$  находятся на пересечении проекции этих ребер на плоскости  $V_1$  со следом  $\alpha_{V_1}$  (проекции  $1_{V_1}, 2_{V_1}, 3_{V_1}$ ).

По найденным проекциям на новую фронтальную плоскость  $V_1$  вершин треугольника сечения строим их горизонтальные проекции и далее фронтальные проекции на плоскость  $V$ . Соединяя вершины между собой, получаем проекции всего треугольника сечения  $1-2-3$ .

Для построения развертки усеченной части пирамиды необходимо иметь сначала натуральные величины усеченных боковых граней, для построения которых достаточно определить натуральные величины ребер  $SA, SB, SC$ .

Для определения натуральной величины ребра с помощью прямоугольного треугольника возьмем за один из катетов горизонтальную проекцию. Тогда разность координат концов отрезка для любого бокового ребра будет равна высоте пирамиды  $SO$ .

Пользуясь этими соображениями, проводим следующие построения. Откладываем отрезок  $SO$  в стороне от фронтальной проекции пирамиды. От точки  $O$  под прямым углом откладываем величины горизонтальных проекций ребер ( $S_H A_H, S_H B_H, S_H C_H$ ). Полученные гипотенузы и представляют собой натуральную величину соответствующих ребер пирамиды. На соответствующих ребрах находим точки  $1, 2, 3$ .

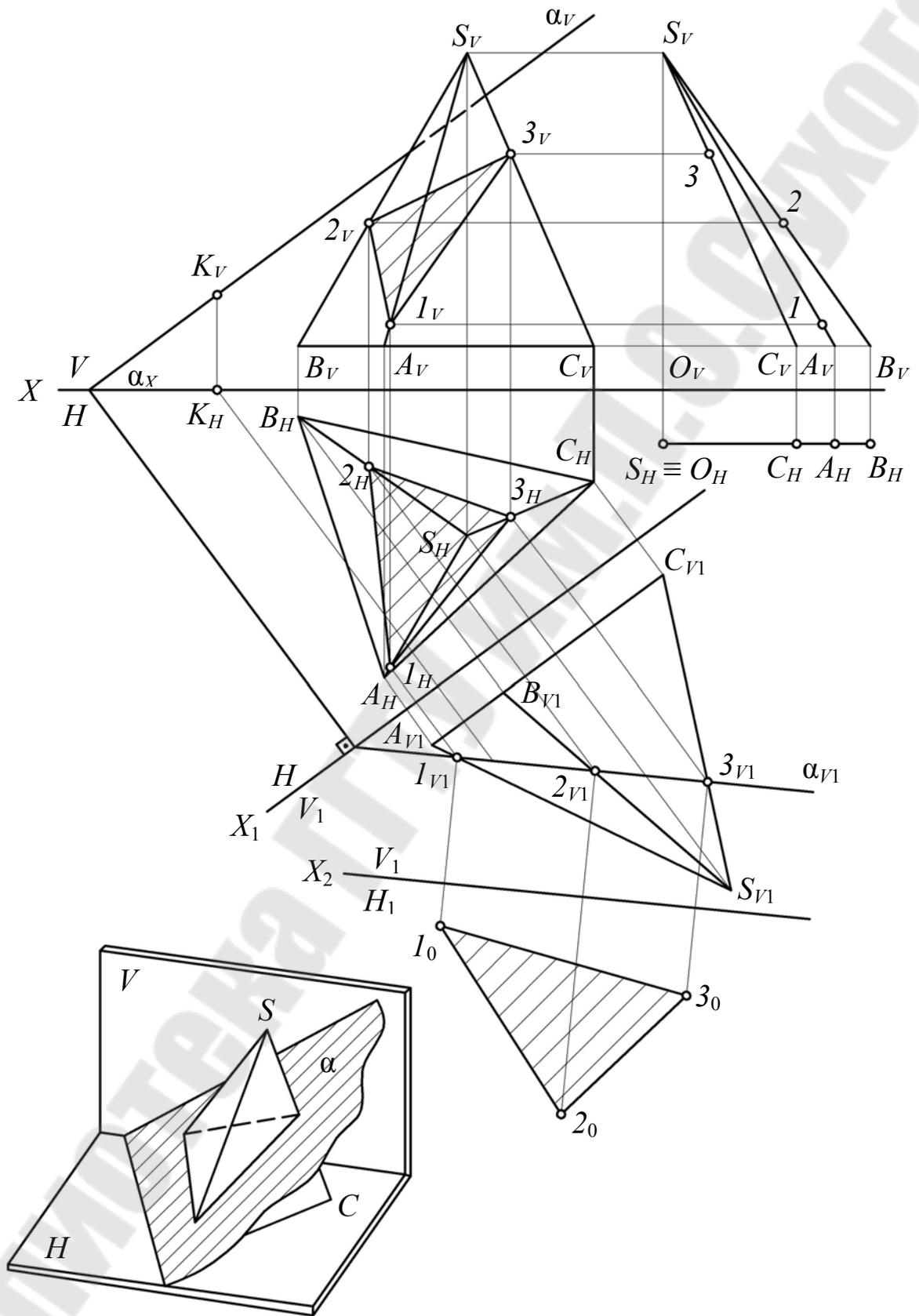


Рис. 8. Пирамида, пересекаемая плоскостью  $\alpha$  ( $\alpha_v, \alpha_h$ )

Для определения натуральной величины ребер можно использовать и метод вращения (плоско-параллельного перемещения), например, вокруг оси  $SO$ , перпендикулярной плоскости проекции  $H$  и проходящей через вершину пирамиды.

Для определения истинной величины треугольника сечения пользуемся способом перемены плоскости проекций. Выбираем новую плоскость проекции  $H_1$  так, чтобы треугольник  $1-2-3$  был параллелен ей. Тогда проекция  $1_0-2_0-3_0$  будет истинной величиной.

Для нахождения истинной величины можно использовать способ совмещения плоскости  $\alpha$  с одной из плоскостей проекций.

Для построения развертки (рис. 9) задаем произвольную точку  $S$  и строим последовательно грани, зная три стороны их. Затем на каждой из сторон  $SA, SB, SC$  находим точки  $1, 2, 3$ . Соединяем их ломаной линией  $1-2-3-1$ . После этого необходимо проверить, равны ли по величине отрезки  $[1-2], [2-3], [3-1]$  на развертке, соответственно,  $[1_0-2_0], [2_0-3_0], [3_0-1_0]$ , истинной величине сечения. Пристраиваем основание  $ABC$  к какой-нибудь стороне и треугольник сечения  $1-2-3$  – к стороне  $1-2$ .

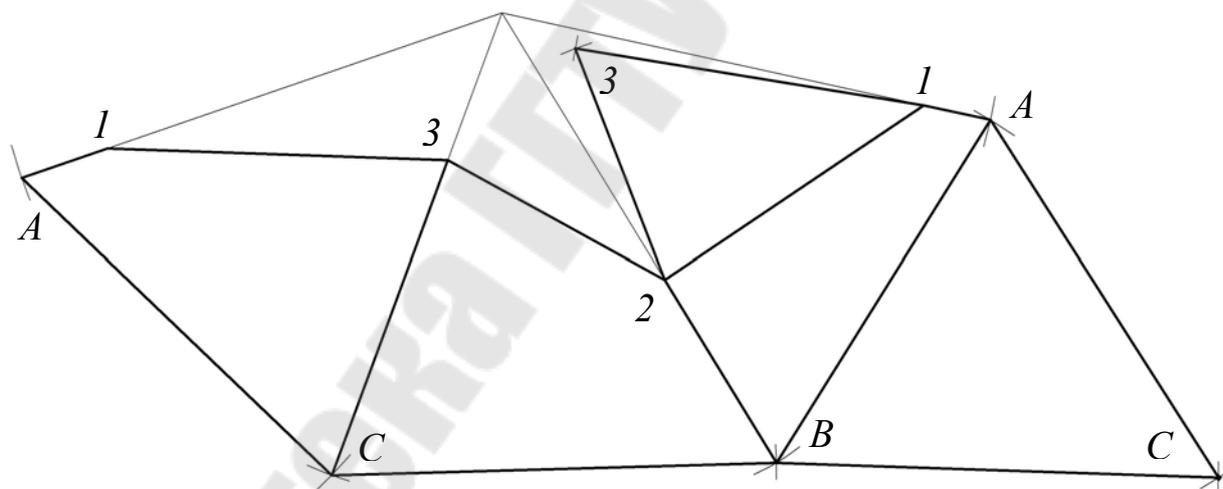


Рис. 9. Развертка пирамиды пересекаемой плоскостью  $\alpha$  ( $\alpha_V, \alpha_H$ )

## 5.2. Пересечение тел вращения плоскостью и построение разверток

При пересечении тел вращения плоскостью получаются различные плоские кривые линии, проекции которых строят по проекциям ряда точек, определяемым соответствующими способами. При этом следует стремиться определить, прежде всего, характерные точки фи-

гуры сечения: верхние и нижние, т. е. точки наиболее и наименее удаленные от плоскостей проекций; и левые, и правые, т. е. точки, лежащие на крайней из образующих их поверхностей и др. После этого определяют ряд промежуточных точек, которые затем соединяют с характерными плавной кривой линией.

При построении линии пересечения кривой поверхности и плоскости методом вспомогательных секущих плоскостей эти плоскости выбирают таким образом, чтобы они пересекали кривую поверхность по линиям, легко определяемым на чертеже. Наиболее желательными в этом отношении являются сечения в виде прямых линий и окружностей, так как изображение их производится только с помощью линейки и циркуля.

### 5.2.1. Пересечение цилиндра плоскостью

При пересечении кругового цилиндра плоскостью в зависимости от положения секущей плоскости могут получиться: окружность, если секущая плоскость перпендикулярна к оси вращения цилиндра (рис. 10, *а*); эллипс, если секущая плоскость наклонена к оси цилиндра под углом, отличным от прямого (рис. 10, *б*); прямоугольник, если секущая плоскость параллельна оси цилиндра (рис. 10, *в*). Рассмотрим пример.

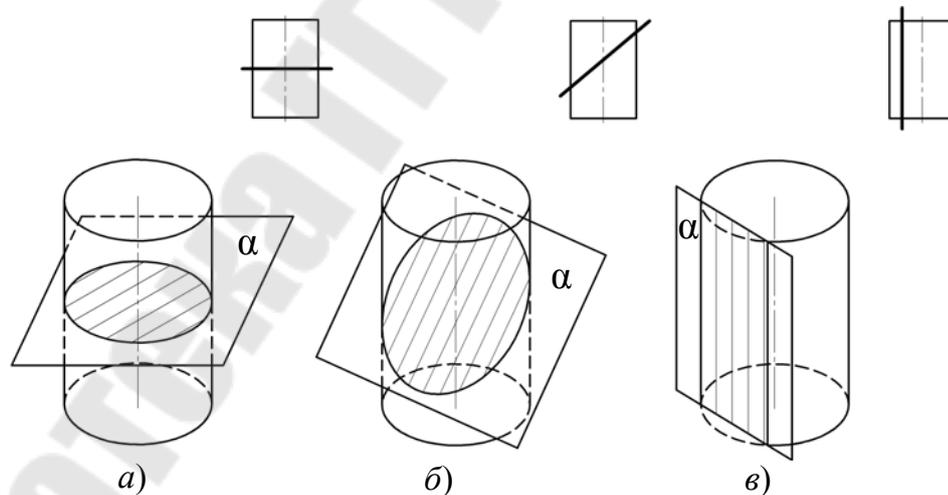


Рис. 10. Пересечения цилиндра плоскостью

**Пример.** В этом примере секущая плоскость  $\alpha$  ( $\alpha_V, \alpha_H$ ) наклонена к оси цилиндра (рис. 11), поэтому боковая поверхность цилиндра пересекается по эллипсу.

Построение опорных точек: наивысшая и наинизшая точки линии пересечения (точки 1 и 2) определяются с помощью вспомогательной плоскости  $\beta$ , проведенной через ось цилиндра перпендикулярно секущей плоскости  $\alpha$ .

Плоскость  $\beta$  пересекает плоскость  $\alpha$  по линии  $MN$ ; а цилиндр по образующим  $l$  и  $m$ . Полученные образующие  $l$  и  $m$  пересекаются с линией  $MN$  в искомым точках 1 и 2, являющихся концами большой оси эллипса.

Построение точек 3 и 4 малой оси эллипса проводится следующим образом.

Большая ось эллипса лежит на линии  $MN$  наибольшего наклона секущей плоскости  $\alpha$ , а малая 3–4, перпендикулярная к ней, является отрезком горизонтали плоскости  $\alpha$ , проходящей через середину (точку  $O$ ) большой оси. Так как эллипс расположен на поверхности цилиндра, образующие которого перпендикулярны к плоскости  $H$ , то он проецируется на плоскость  $H$  в виде окружности; его большая ось 1–2 проецируется отрезком  $[1_H-2_H]$ , а малая 3–4 в натуральную величину – отрезком  $[3_H-4_H]$ , перпендикулярным к  $1_H-2_H$  и проходящим через его середину – точку  $O_H$ . Так как малая ось эллипса 3–4 является отрезком горизонтали  $4F$  плоскости  $\alpha$ , то построение ее фронтальной проекции  $4_VF_V$  выполнено по горизонтальной проекции 4–3 с помощью той же горизонтали  $4F$ .

Точки 5 и 6 являются точками перехода видимого контура сечения в невидимый. Для построения их проведем плоскость  $\gamma$ , проходящую через ось цилиндра и очерковые образующие  $n$  и  $t$ . Плоскость  $\gamma$  сечет плоскость  $\alpha$  по фронтале  $f$ , а фронталь  $f$  пересекает образующие  $n$  и  $t$  в искомым точках 5 и 6 – точках перехода видимой части фронтальной проекции эллипса в невидимую.

Построение промежуточных точек можно производить при помощи горизонтальных плоскостей. Каждая такая плоскость  $\omega$  пересекает цилиндр по окружности, а плоскость  $\alpha$  – по горизонтали  $h$ , которые пересекаются в искомым точках 7 и 8.

Фронтальные проекции окружности сечения и горизонтали сливаются с фронтальным следом плоскости  $\omega$ , а горизонтальные проекции пересекаются в точках  $7_H$  и  $8_H$ , являющихся проекциями искомым точек.



По горизонтальным проекциям  $7_H$  и  $8_H$  точек 7 и 8 строим фронтальные проекции  $7_V$  и  $8_V$ . Аналогично строятся и другие промежуточные точки линии пересечения.

Соединяем полученные точки плавной кривой линией. Кривая от точки 5 через точки 2, 4, 7 до точки 6 на фронтальной плоскости проекции является видимой, а остальная часть – невидимой.

**Построение проекций линии пересечения способом перемены плоскостей проекций.** В ряде случаев бывает целесообразно для построения линии пересечения или для определения некоторых характерных точек этой линии прибегать к преобразованию чертежа, при котором заданная плоскость общего положения становилась бы проецирующей.

На рис. 11 (положение 2) к данным плоскостям проекций добавлена плоскость  $V_1$ . Плоскость  $\alpha$  проецируется на плоскость  $V_1$  в виде прямой  $\alpha_{V_1}$ , а сечение цилиндра плоскостью  $\alpha$  проецируется в виде отрезка  $[1_1-2_1]$ , совпадающего с линией  $\alpha_{V_1}$ . Ход построения точек фронтальной проекции сечения отмечен стрелками, причем расстояния этих точек от оси берутся равными расстояниям от оси  $X$  соответствующих точек на плоскости  $V_1$  (для точек 7 и 8 берется расстояние, равное  $Z$ ).

Истинный вид сечения может быть определен способом совмещения секущей плоскости  $\alpha$  с плоскостью проекции  $H$ . Эллипс может быть построен по большой и малой осям, длины которых найдены путем совмещения концевых точек  $1_0$  и  $2_0$  для большей оси,  $3_0$  и  $4_0$  – для малой оси.

Развертка боковой поверхности прямого кругового цилиндра, не усеченного плоскостью, представляет собой прямоугольник с основанием, равным длине окружности основания цилиндра, и высотой, равной высоте цилиндра (рис. 12).

Для того чтобы избежать вычислений, связанных с определением длины окружности основания, обычно вписывают в основание цилиндра правильный многоугольник (обычно 12-угольник, в нашем случае 14-угольник) и его периметр принимают за длину основания прямоугольника.

При построении развертки боковой поверхности усеченной части цилиндра на развертку необходимо нанести точки, принадлежащие линии пересечения, и затем эти точки соединить плавной кривой линией. Проводим на развертке боковой поверхности 14 образующих, наносим соответственно на эти образующие точки 1, 2, 3, ..., взяв

расстояние от этих точек до нижнего основания фронтальной проекции. Для получения полной развертки усеченной части пристраиваем нижнее основание и фигуру сечения.

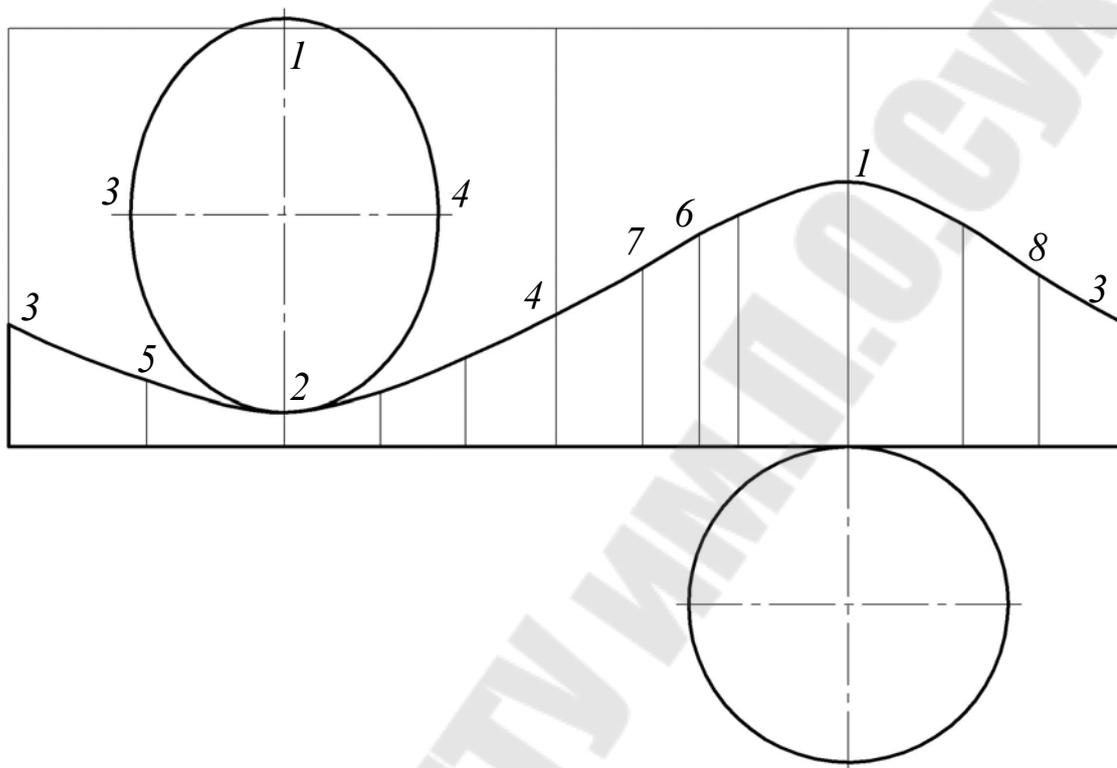


Рис. 12. Развертка боковой поверхности прямого кругового цилиндра

### 5.2.2. Пересечение конуса плоскостью

При пересечении кругового конуса плоскостью в зависимости от положения секущей плоскости могут получаться: окружность, если секущая плоскость перпендикулярна оси вращения конуса (рис. 13, а); эллипс, если секущая плоскость наклонена к оси вращения конуса под углом, отличающимся от прямого, и пересекает все образующие конуса (рис. 13, б); гипербола, если секущая плоскость параллельна двум образующим конуса (рис. 13, в); парабола, если плоскость параллельна одной образующей конуса (рис. 13, г); треугольник, если секущая плоскость проходит через вершину конуса (рис. 13, д).

Проекция фигуры сечения конуса плоскостью в общем случае строят аналогично проекциям фигуры сечения пирамиды плоскостью (в конус вписывают многогранную пирамиду), а в частных – аналогично случаю построения проекций фигуры сечения прямого кругового цилиндра плоскостью.

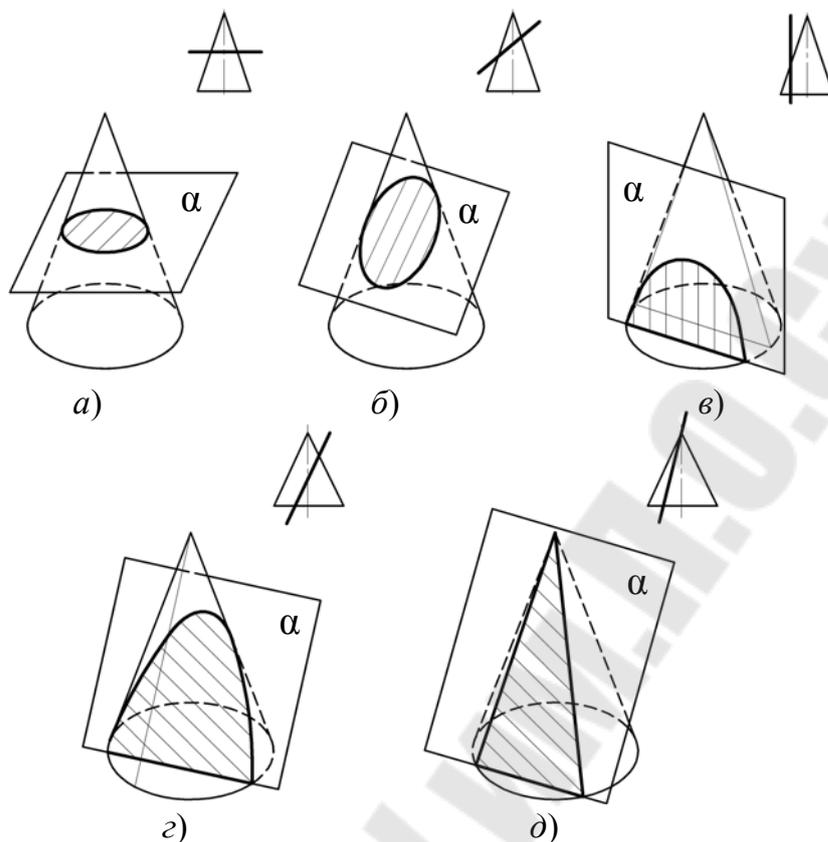


Рис. 13. Виды пересечения кругового конуса плоскостью общего положения  $\alpha$  ( $\alpha_V, \alpha_H$ )

На рис. 14 построена линия пересечения конуса вращения плоскостью общего положения  $\alpha$  ( $\alpha_V, \alpha_H$ ).

**Определение опорных точек.** В сечении получается эллипс, для построения которого определяем главные или опорные точки.

1. Наивысшая (1) и наинизшая (2) точки сечения определяются с помощью вспомогательной плоскости  $\beta$ , проведенной через ось конуса, перпендикулярно к секущей плоскости  $\alpha$ .

Плоскость  $\beta$  сечет конус по образующим  $SQ$  и  $ST$ , а плоскость  $\alpha$  — по линии наибольшего наклона  $m$ . Точки пересечения 1 и 2 образующих  $SQ$  и  $ST$  с линией  $m$  являются наивысшей и наинизшей точками. Они определяют большую ось эллиптического сечения конуса.

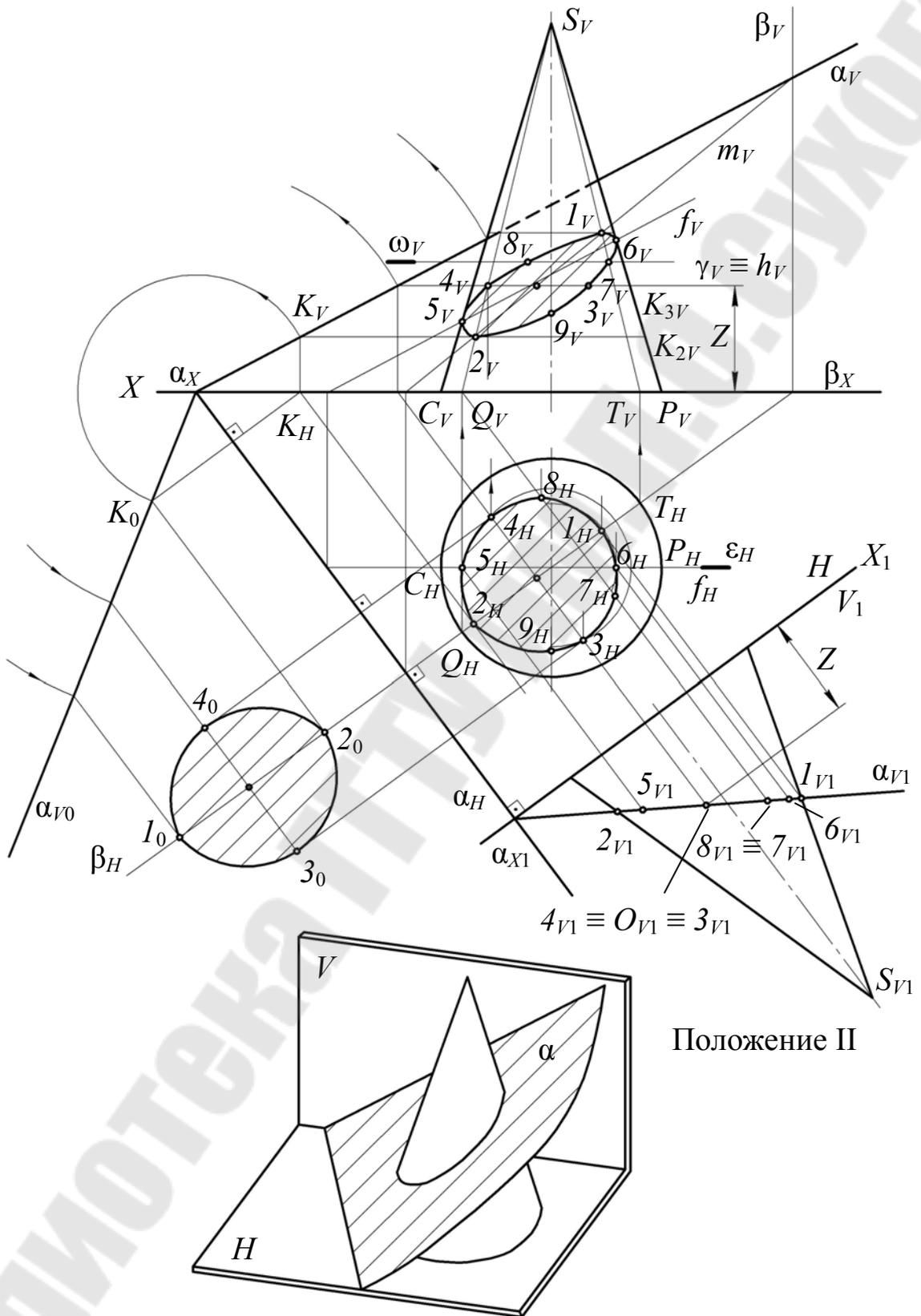


Рис. 14. Пересечение конуса вращения плоскостью общего положения  $\alpha$  ( $\alpha_V, \alpha_H$ )

2. Большая ось  $1-2$  лежит на линии  $m$  наибольшего наклона плоскости  $\alpha$ , тогда малая ось  $3-4$ , перпендикулярная большой, должна лежать на горизонтали плоскости  $\alpha$ , проходящей через середину отрезка  $[1-2]$  – центр эллипса (точку  $O$ ).

Рассечем конус и плоскость  $\alpha$  горизонтальной плоскостью уровня,  $\gamma$ , проходящей через точку  $O_V$ , делящую  $1_V-2_V$  пополам. Плоскость  $\gamma$  сечет конус по окружности, а плоскость  $\alpha$  – по горизонтали  $h$ . Горизонталь пересекает окружность сечения в точках  $3$  и  $4$ , определяющих конечные точки малой оси эллипса.

Проводим вспомогательную плоскость  $\varepsilon$ , параллельную  $V$  и проходящую через ось конической поверхности. Эта плоскость пересекает плоскость  $\alpha$  по фронтале  $f$  ( $f_H, f_V$ ), а коническую поверхность – по образующим  $SC$  и  $SP$ . Точки  $5$  и  $6$ , в которых пересекаются фронталь  $f$  с образующими  $SC$  и  $SP$ , являются граничными точками. Их фронтальные проекции  $5_V$  и  $6_V$  делят фронтальную проекцию эллипса сечения на видимую и невидимую части.

**Построение промежуточных точек.** На рис. 14 показано также построение промежуточных точек  $7$  и  $8$  линии пересечения. Положение проекций этих точек определено с помощью вспомогательной плоскости  $\omega$ , проведенной параллельно  $H$ .

**Построение проекций линии пересечения с помощью способа перемены плоскостей проекций.** Плоскость  $V_1$  (рис. 14, положение 2) перпендикулярна плоскости  $\alpha$  и, следовательно, проецируется на нее в виде прямой  $\alpha_{V_1}$ . Конус проецируется на плоскость  $V_1$  в виде треугольника, а сечение его плоскостью  $\alpha$  – в виде отрезка  $[1_{V_1}-2_{V_1}]$ .

Эта проекция позволяет, не пользуясь вспомогательными плоскостями, найти точки эллипса на любых образующих конуса.

Ход построений горизонтальной и фронтальной проекций сечения по проекции  $1_{V_1}-2_{V_1}$  отмечен стрелками. Истинную величину эллипса сечения строим путем совмещения плоскости  $\alpha$  с плоскостью проекции  $H$ . Можно построить эллипс геометрически, пользуясь большой и малой осями.

Боковая поверхность конуса разворачивается в круговой сектор (рис. 15). Центральный угол сектора можно высчитать по формуле

$$\alpha = \frac{R}{360^\circ l},$$

где  $R$  – радиус окружности основания конуса;  $l$  – длина образующей конуса.

Чтобы избежать вычислений, связанных с определением длины дуги сектора или угла  $\alpha$ , обычно вписывают в основание конуса правильный многоугольник и развертку боковой поверхности прямого кругового конуса заменяют (с достаточной для практики точностью) разверткой правильной пирамиды, вписанной в данный конус. В нашем примере через все полученные точки сечения проводили образующие конуса. Длина отрезков образующих, заключенных между основанием конуса и фигурой сечения, определяется вращением образующих до положения, параллельного плоскости  $V$ . То есть определяли положение промежуточных точек на очерковых образующих (точки  $K_2, K_3$  и т. д.). Проводили радиусом, равным очерковой образующей, дугу окружности (рис. 15) и от произвольной точки на ней откладывали дуги, равные хордам, измеренным на горизонтальной проекции основания конуса для соответствующих точек. На соответствующих образующих откладывали отрезки  $[SK_2] \equiv [S_V K_{2V}]$ ;  $[SK_3] \equiv [S_V K_{3V}]$  и т. д. Соединяли по лекалу точки, получали развертку боковой поверхности усеченного конуса. Пристраивали нижнее основание и сечение и получали полную развертку усеченной поверхности конуса.

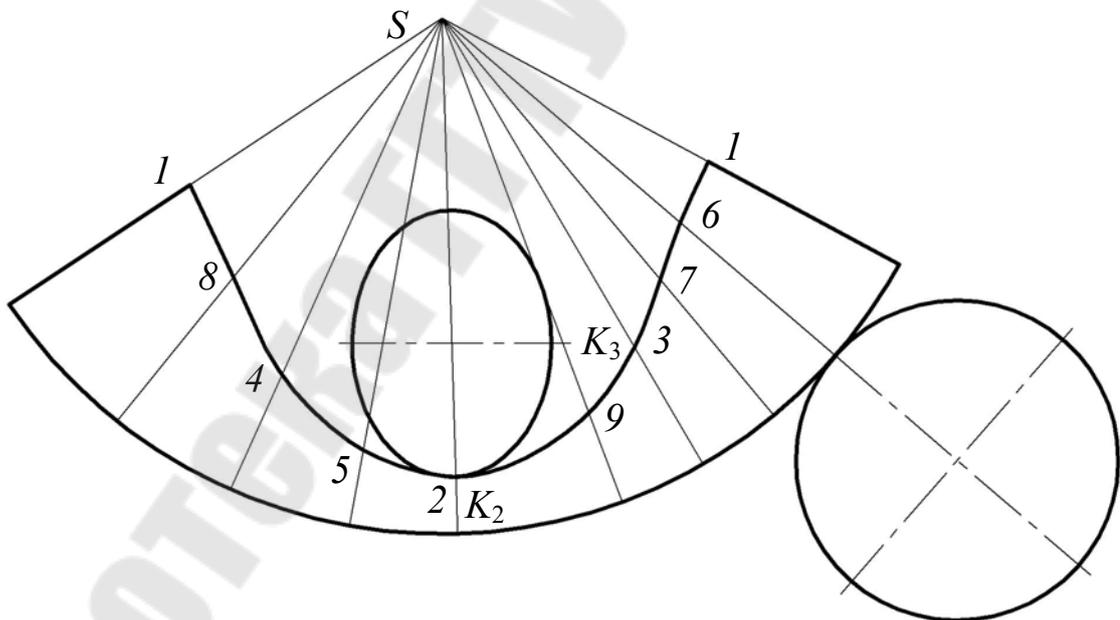


Рис. 15. Развертка поверхности конуса в круговой сектор

## 6. ВЗАИМНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ (Задача 2)

Проработайте теоретический материал «Пересечение поверхностей» (общий случай; с помощью вспомогательных секущих плоскостей; с помощью вспомогательных сферических поверхностей; частные случаи).

Для успешного выполнения задания необходимо свободно владеть пройденным материалом:

- выделять на поверхности семейства линий (если возможно, простейших);
- строить проекции точек и линий на поверхности;
- знать и применять свойства проекций проецирующих фигур.

Ответьте на вопросы:

1. Как формулируется алгоритм решения задачи по определению линии пересечения поверхностей?

2. На каком основании осуществляется выбор поверхности-посредника?

3. Какие рекомендации подбора вспомогательных секущих плоскостей можно сделать для случаев пересечения цилиндров, конусов, призм, пирамид?

4. В каких случаях для построения линии пересечения одной поверхности другою рекомендуется применить вспомогательные секущие плоскости, параллельные плоскости проекций?

5. По каким линиям пересекаются между собой поверхности вращения, имеющие общую ось?

6. Как можно использовать случай, когда одна из проекций линии пересечения совпадает с проекцией цилиндрической или призматической поверхности?

7. В каких случаях возможно и целесообразно применять вспомогательные секущие сферы?

8. Какие линии получаются при взаимном пересечении двух поверхностей вращения, описанных вокруг общей для них сферы или вписанных в сферу?

9. Сформулируйте условия, при которых линия пересечения поверхностей второго порядка распадается на две плоские кривые.

Две поверхности пересекаются в общем случае по пространственной линии, точки которой принадлежат каждой из заданных поверхностей.

Для построения линии пересечения находят ряд точек, общих для обеих поверхностей, и соединяют их линией с учетом ее видимости.

В общем случае для определения линии пересечения двух кривых поверхностей применяют **метод вспомогательных секущих поверхностей**. Например, проводят ряд (семейство) секущих плоскостей (рис. 16)  $\omega$ . Каждая из них пересекает поверхность  $\alpha$  по линиям семейства  $k$ , а поверхность  $\beta$  – по линиям семейства  $l$ . Соответствующие линии этих семейств пересекаются в точках, принадлежащих обеим поверхностям, т. е. линии их пересечения:  $k_1 \cap l_1 = M_1, M_2$ ;  $k_2 \cap l_2 = M_3, M_4$  и т. д.

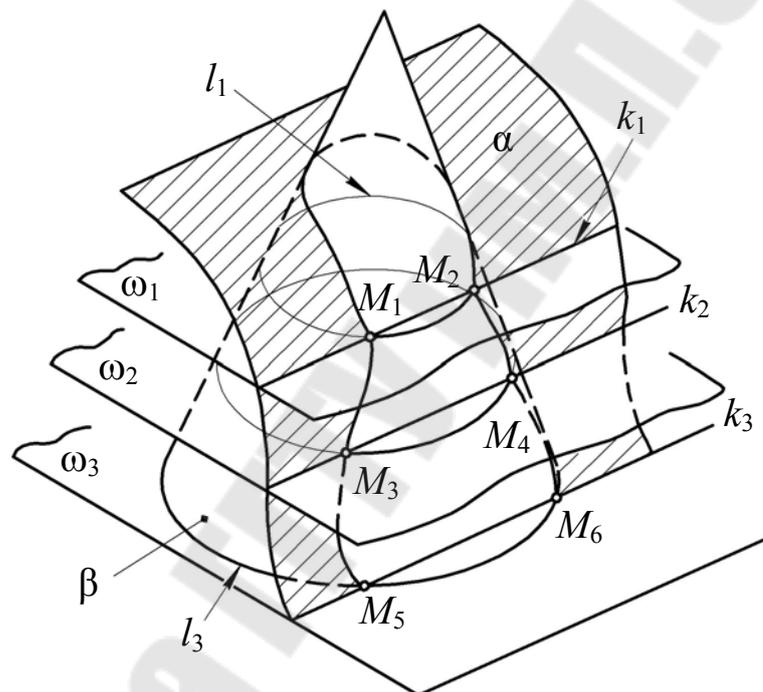


Рис. 16. Семейство секущих плоскостей  $\omega$

#### Алгоритм решения задачи:

1. Вводим вспомогательную секущую поверхность  $\omega_1$ .
2. Отстроим линии пересечения поверхности  $\omega_1$  с заданными поверхностями  $\alpha$  и  $\beta$ :  $\omega_1 \cap \alpha = l_1$ ;  $\omega_1 \cap \beta = k_1$ .
3. Находим точку (точки) пересечения найденных линий  $M_1(M_2) = l_1 \cap k_1$ .
4. Повторяя операцию 3, получаем множество таких точек и проводим через них искомую линию пересечения  $t \in M_1 \dots M_n$ .

В качестве вспомогательных рекомендуется выбирать поверхности, которые в пересечении с данными поверхностями дают линии, проекции которых являются простейшими – прямыми или окружностями. Этот выбор зависит от следующих условий:

- вида заданных поверхностей;
- взаимного расположения заданных поверхностей;
- их положения относительно плоскостей проекций.

Приступая к решению задачи, сначала следует охарактеризовать заданные поверхности (их вид, положение в пространстве, взаимное расположение, семейства простейших линий на этих поверхностях).

При решении задач на пересечение двух поверхностей целесообразно заранее определить характер искомой линии пересечения, что облегчит ее построение на чертеже.

Поверхность порядка  $n_1$  пересекается с поверхностью порядка  $n_2$  по кривой линии, порядок которой равен произведению порядков  $n_1$  и  $n_2$ .

Далее решение проводят в такой последовательности:

- находят, если возможно, опорные точки (высшие, низшие, точки границ видимости и др.);
- определяют вид вспомогательных поверхностей и зоны их ввода на чертеже;
- находят несколько промежуточных точек;
- соединяют найденные точки линией с учетом видимости.

Чаще всего в качестве простейших вспомогательных поверхностей используют плоскости и сферы, в связи с чем из общего способа выделяют в основном два, которые называются способом вспомогательных секущих плоскостей и способом вспомогательных секущих сфер.

Две соосные поверхности вращения пересекаются между собой по окружностям, число которых равно числу точек пересечения их образующих. Это свойство составляет основу способа вспомогательных секущих сфер.

Условия, при которых может быть использован способ вспомогательных секущих сфер:

1. Две пересекающиеся поверхности должны быть поверхностями вращения.
2. Оси вращения двух данных поверхностей должны пересекаться между собой.
3. Две данные поверхности должны иметь общую плоскость симметрии, параллельную какой-либо плоскости проекций.

Преимущество метода сфер: можно построить линию пересечения поверхностей вращения только на одной проекции.

Если одна из заданных поверхностей занимает проецирующее положение (в вариантах 4, 5, 6, 12, 13, 15, 19, 20, 21, 23, 27, 29, 30 одна поверхность – прямая призма, перпендикулярная какой-либо плоско-

сти проекций, а в вариантах 1, 9, 17, 18, 22, 24, 26, 27, 28 – является прямым круговым цилиндром), то построение линии пересечения на чертеже сводится к построению ее недостающей проекции, так как одна из проекций всегда имеется на чертеже. Таким образом, задача сводится к построению недостающей проекции линии, принадлежащей данной поверхности. Решение задачи справедливо для любой поверхности в сочетании с проецирующей.

Графические построения упрощаются и в некоторых частных случаях, которые описываются рядом теорем (например, теоремой Монжа).

**Рассмотрим примеры** на построение линии пересечения поверхностей вращения с применением **метода вспомогательных секущих плоскостей**.

**Пример 1.** На рис. 17 даны две пересекающиеся поверхности  $\alpha \cap \beta$ .

Поверхность  $\alpha$ : прямой круговой конус с вершиной  $S$  ( $S_H, S_V$ ) и диаметр окружности основания  $AB$  ( $A_H B_H, A_V B_V$ ).

Поверхность  $\beta$ : фронтально проецирующая поверхность цилиндра вращения с осью  $J$  ( $i_H, i_V$ ) и образующей  $CD$  ( $C_H D_H, C_V D_V$ ).

Анализ их взаимного расположения показывает, что имеет место глубокая врезка цилиндра в конус. Следовательно, линия пересечения будет одна пространственная кривая четвертого порядка.

Анализ положения поверхностей относительно плоскостей проекций позволяет сделать вывод, что фронтальная проекция линии пересечения задана по условию  $1_V 2_V 3_V 4_V 5_V 6_V 7_V 8_V 9_V 10_V 11_V 12_V 13_V 14_V$ , так как цилиндр фронтально проецирующий.

Алгоритм построения точек пересечения  $\alpha \cap \beta = 1, 2, 3, 4, 5, \dots, 14$ :

1. Вводим вспомогательную секущую плоскость  $\omega \parallel H$ ;  $\omega_2 \cap \alpha_V = \Pi (R_Z)$  – окружность  $\Pi$  радиуса  $R_Z$ .

2.  $\omega_2 \cap \beta_V = E_V \equiv F_V$  – фронтальная проекция очерковой образующей цилиндра.

3.  $\Pi (R_Z) \cap E_H F_H = 2, 14$  – искомые точки, принадлежащие линии пересечения.

Многочисленное применение вспомогательной плоскости  $\omega$  позволяет построить все обозначенные на рис. 17 проекции точек линии пересечения  $\alpha$  и  $\beta$ .

Построение проекций опорных точек: фронтальная проекция цилиндра – окружность с центром  $i_V$  (рис. 17). Часть ее, наложенная на фронтальную проекцию конуса, и будет являться фронтальной

проекцией искомой линии пересечения – это линия  $1_V, 2_V \equiv 14_V, 3_V \equiv 13_V, 4_V \equiv 12_V, 5_V \equiv 11_V, 6_V \equiv 10_V, 7_V \equiv 9_V, 8_V$ .

Из этих точек фронтальными проекциями опорных будут:

1. Самая верхняя  $1_V$ .
2. Самая нижняя  $7_V \equiv 9_V$ .
3. Самые левые и пара точек, являющихся границей видимости горизонтальной проекции линии пересечения точки  $4_V \equiv 12_V$ .
4. Самая правая  $B_V$ .

Построение горизонтальных проекций всех намеченных точек следует начинать с опорных.

Горизонтальные проекции точек  $1$  и  $8-1_H$  и  $8_H$  лежат на горизонтальной проекции образующей конуса  $SB - S_H B_H$ . Таким образом, по  $1_V$  строим  $1_H$ , по  $8_V \rightarrow 8_H$ , проводя соответствующие линии связи.

Горизонтальные проекции всех остальных точек строим с помощью метода вспомогательных секущих плоскостей, применяя приведенный алгоритм.

Например: точки  $4, 12$ , фронтальные проекции которых  $4_V \equiv 12_V$  принадлежат очерковой образующей цилиндра, являются границей видимой и невидимой частей горизонтальной проекции линии пересечения. Чтобы построить  $4_H$  и  $12_H$ , проведем горизонтальную вспомогательную секущую плоскость  $\omega_4$ . Ее фронтальный след пройдет через  $4_V \equiv 12_V$  и ось цилиндра  $i_V$ . Она рассекает цилиндр по очерковой образующей, а конус – по окружности IV радиуса  $R_4$ . Там, где окружность IV пересекает очерковую образующую, и лежат горизонтальные проекции  $4_H$  и  $12_H$  точек  $4, 12$ .

Горизонтальные проекции самых нижних точек  $7_H$  и  $9_H$  строятся аналогично: проводим горизонтальную плоскость  $\omega_7$ , фронтальный след ее пройдет через  $7_V \equiv 9_V$ . Она пересечет конус по окружности VII радиуса  $R_7$  и коснется цилиндра по самой нижней образующей, горизонтальная проекция которой совпадает с осью  $i_H$  цилиндра. Там, где окружность VII пересечет  $i_H$ , и будут горизонтальные проекции  $7_H, 9_H$  точек  $7, 9$ . Аналогично строим горизонтальные проекции всех остальных точек. Плавной линией – сплошной  $4_H, 3_H, 2_H, 1_H, 14_H, 13_H, 12_H$  – соединяем видимую часть линии, лежащую на верхнем полуцилиндре; пунктирной линией соединяем точки  $4_H, 5_H, 6_H, 7_H, 8_H, 9_H, 10_H, 11_H, 12_H$ , лежащие на нижнем полуцилиндре.

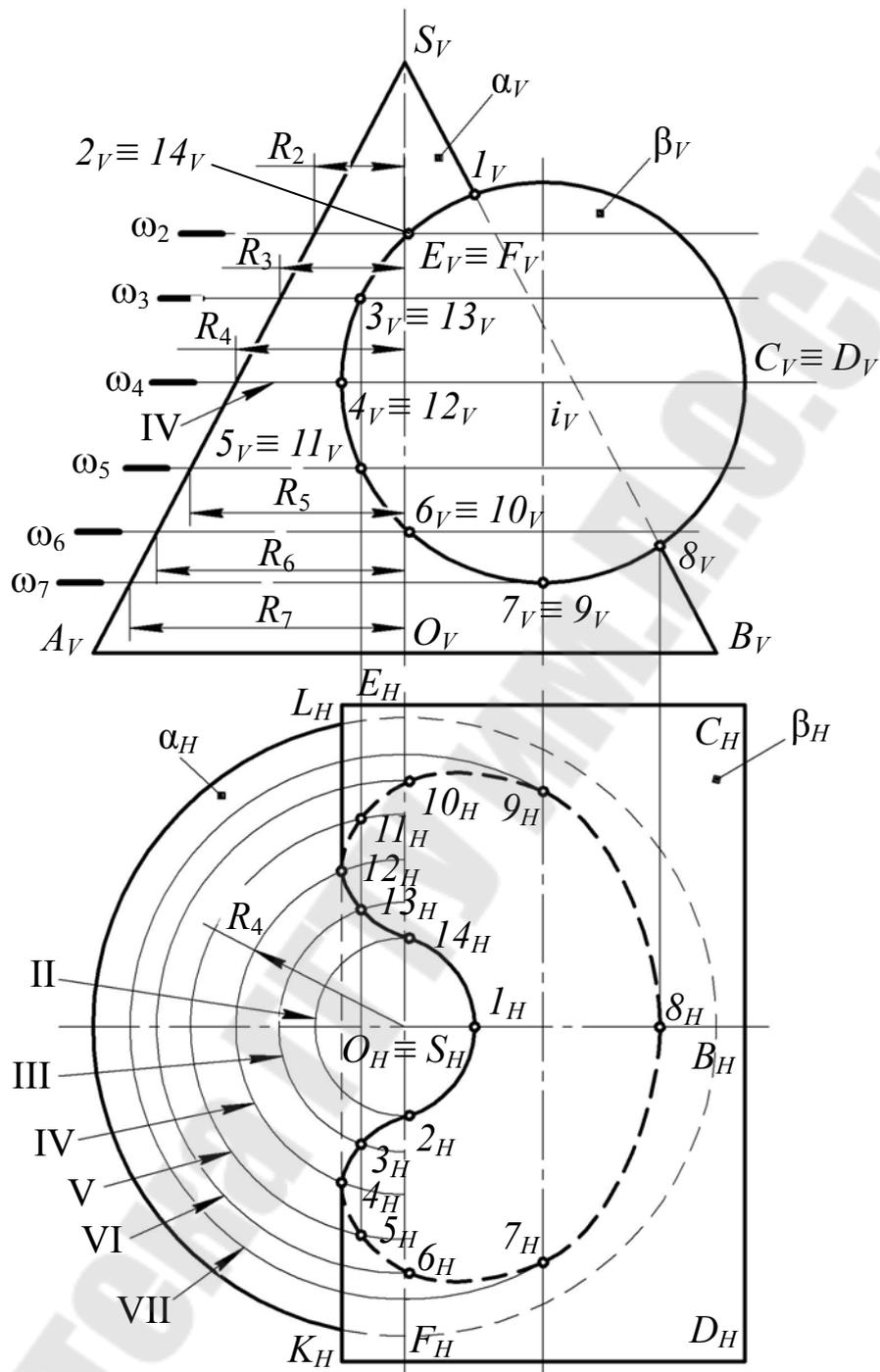


Рис. 17. Две пересекающиеся поверхности  $\alpha \cap \beta$

**Пример 2.** Полусфера  $\alpha$  пересекается с трехгранной призматической поверхностью  $\beta$  (рис. 18).

Анализ условия задачи позволяет сделать вывод о том, что каждая грань призмы рассекает сферу по окружности, плоскость которой в двух гранях 1, 2, 3, 4 и 5, 6, 7, 8, 9, 10 – горизонтально-проецирующая, а в третьей 1, 11, 10 – фронтальная.

Фронтальные проекции окружностей, лежащих в горизонтально-проецирующих плоскостях, есть эллипсы. Часть окружности во фронтальной плоскости спроецируется в натуральную величину.

**Опорные точки.** При пересечении многогранника с кривой поверхностью опорными являются точки пересечения ребер многогранника с кривой поверхностью. В нашем случае горизонтальные проекции опорных точек  $1_H$ ,  $5_H$  и  $10_H$ . Кроме этих, к опорным относятся точки – границы видимости фронтальной проекции линии пересечения, горизонтальные проекции их  $3_H$  и  $8_H$  – пересечение главного меридиана сферы с боковыми гранями призмы. Точки  $12$ ,  $13$  – наивысшие точки.

Построение фронтальных проекций опорных и промежуточных точек выполняется с помощью вспомогательных фронтальных плоскостей  $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_7$ , горизонтальные следы которых  $\varepsilon_{H1} \dots \varepsilon_{H7}$ .

**Алгоритм построения:**

1.  $\varepsilon_{H7} \cap \alpha_H = I(R_5)$  – окружность радиуса  $R_5$ .
2.  $\varepsilon_{H7} \in BB_1$  ( $B_H = B_{1H}, B_V, B_{1V}$ ) – переднее ребро призмы.
3.  $I(R_5) \cap B_V, B_{1V} = 5_V$ .

Каждая из этих плоскостей рассекает сферу по окружности – например,  $R_5$  и  $R_{10}$ , а призму – по ребрам  $5$  и  $10$  (или, для других плоскостей – по горизонтально-проецирующим прямым  $2, 3, 4, 6, 7, 8, 9$ ), фронтальные проекции которых совпадут с линиями связи.

Точки пересечения фронтальных проекций окружностей и фронтальных проекций соответствующих прямых определяют фронтальные проекции линии пересечения:  $1_V 2_V 3_V 4_V 5_V 6_V 7_V 8_V 9_V 10_V 11_V 12_V 13_V$ . Видимая часть линии – на передней четверти сферы между точками  $3, 4, 5, 6, 7, 8$ . Невидимая – на задней четверти сферы, за главным меридианом –  $3, 2, 1, 11, 10, 9, 8$ .

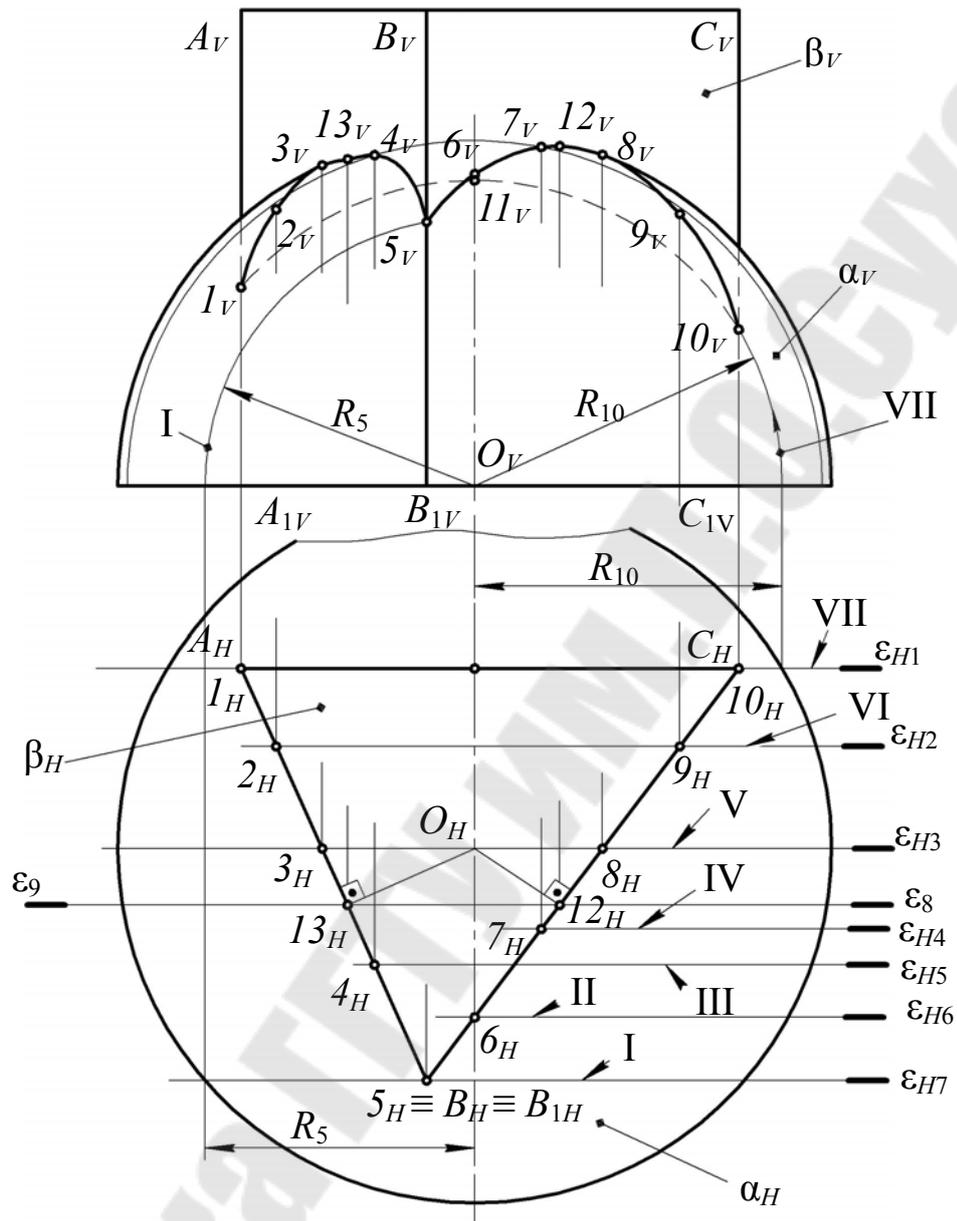


Рис. 18. Полусфера  $\alpha$  пересекается с трехгранной призматической поверхностью  $\beta$

**Метод вспомогательных концентрических сфер.** Метод вспомогательных секущих плоскостей не всегда обеспечивает простейшее решение задачи.

Если пересекаются два конуса, то плоскости частного положения не пересекут каждый конус по простейшей линии. Например, если один пересекут по окружности, то другой – по эллипсу, параболе, гиперболу – в зависимости от взаимного расположения. Нужно применять плоскости общего положения, проходящие через вершины конусов – задача усложняется. Поэтому в рассматриваемом примере предпочтение следует отдать методу концентрических сфер.

**Пример 1.** Даны два пересекающихся круговых конуса с вершинами  $S_1$  и  $S_2$  (рис. 19).

Анализ взаимного расположения фигур:

1. Оси конусов пересекаются в точке  $O$  ( $O_V, O_H$ ).

2. Плоскость пересекающихся осей параллельна фронтальной плоскости проекций  $V$ , т. е.  $S_1OS_2$  ( $S_{1V}O_VS_{2V}, S_{1H} \equiv O_H, S_{2H}$ )  $\parallel V$ . Эти два условия определяют применимость метода концентрических сфер.

Центр вспомогательных сфер располагается в точке пересечения осей, т. е. сфера соосна с каждым из конусов. А так как по условию конусы круговые, т. е. представляют поверхности вращения, они при этом пересекутся со сферой по окружностям, плоскости которых перпендикулярны осям соответствующего конуса.

Далее плоскость осей фронтальная, следовательно, плоскости окружностей будут фронтально-проецирующими, значит, спроецируются в отрезки прямых, точки пересечения которых будут искомыми точками линии пересечения.

**Алгоритм построения** (пример для сферы  $R_{\max}$ ; см. рис. 19):

1. Сфера  $C_{\Phi} R_{\max} \cap \alpha = [E_V F_V]$  (окружность  $\parallel H$ );  
Сфера  $C_{\Phi} R_{\max} \cap \alpha = [L_V T_V]$  (окружность  $\parallel H$ ).
2. Сфера  $C_{\Phi} R_{\max} \cap \beta = [A_V B_V]$  (окружность  $\perp V$ );  
Сфера  $C_{\Phi} R_{\max} \cap \beta = [P_V Q_V]$  (окружность  $\perp V$ ).
3.  $[E_V F_V] \cap [A_V B_V] = 2_V \equiv 8_V \rightarrow 2_H, 8_H$ ;  
 $[L_V T_V] \cap [A_V B_V] = 10_V \equiv 20_V \rightarrow 10_H, 20_H$ ;  
 $[L_V T_V] \cap [P_V Q_V] = 14_V \equiv 15_V \rightarrow 14_H, 16_H$ .

Опорные точки  $1$  ( $1_V, 1_H$ ),  $5$  ( $5_V, 5_H$ ),  $9$  ( $9_V, 9_H$ ),  $15$  ( $15_V, 15_H$ ) находятся на пересечении фронтальных очерков и по их фронтальным проекциям находим горизонтальные – на следе фронтальной плоскости симметрии, т. е. на  $S_H \equiv O_H, S_{1H}$ .

Минимальная сфера –  $C_{\Phi} R_{\min}$  вписывается в наклонный конус с вершиной  $S_1$  ( $S_{1V}, S_{1H}$ ). Ее фронтальная проекция касается конуса по окружности, спроецировавшейся в прямую ( $C_V D_V$ ). Эта же сфера ( $C_{\Phi} R_{\min}$ ) пересекает прямой конус по двум окружностям  $[K_V 5_V]$  и  $[M_V N_V]$ , пересекаясь с окружностью  $C_V D_V$  они определяют фронтальные проекции двух пар точек линии пересечения  $[C_V D_V] \cap [K_V 5_V] = (4_V \equiv 6_V)$  и  $[C_V D_V] \cap [M_V N_V] = (12_V \equiv 18_V)$ . Горизонтальные проекции  $4_H, 6_H$  строятся на горизонтальной проекции окружности диаметром, равным отрезку  $[K_V 5_V]$ , и, соответственно, горизонтальные проекции  $12_H, 18_H$  – на горизонтальной проекции окружности диаметром  $[M_V N_V]$ .

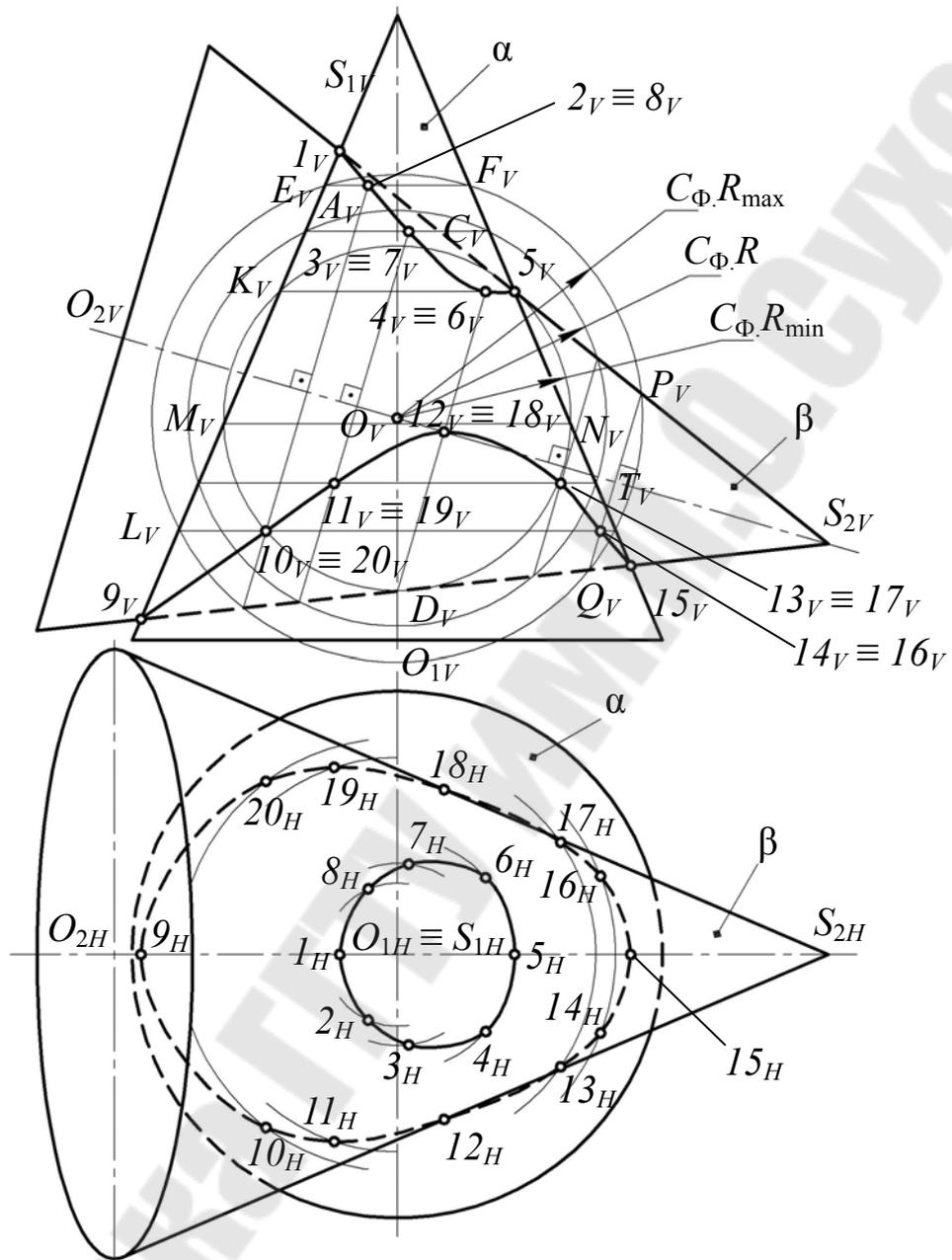


Рис. 19. Два пересекающихся круговых конуса с вершинами  $S_1$  и  $S_2$

Максимальная сфера –  $C_{\Phi}R_{\max}$  выбирается несколько меньше расстояния от центра  $O_V$  до удаленной опорной точки ( $I_V$  или  $9_V$ ). Она пересекает прямой конус по окружностям, фронтальные проекции которых  $[E_VF_V]$  и  $[L_VT_V]$ , а наклонный – по окружностям –  $[A_VB_V]$  и  $[P_VQ_V]$ . Фронтальные проекции этих окружностей соответственно пересекаются в точках, являющихся фронтальными проекциями точек линий пересечения:

$$\begin{aligned}
[E_V F_V] \cap [A_V B_V] &= (2_V \equiv 8_V); \\
[L_V T_V] \cap [A_V B_V] &= (10_V \equiv 20_V); \\
[L_V T_V] \cap [P_V Q_V] &= (14_V \equiv 16_V).
\end{aligned}$$

Горизонтальные проекции  $2_H, 8_H$  точек  $2, 8$  лежат на горизонтальной проекции окружности диаметром  $[E_V F_V]$  и, соответственно,  $10_H, 20_H$  на окружности  $[L_V T_V]$ . Аналогично строят точки с помощью промежуточной сферы –  $C_\Phi R$ . Это точки  $3_V \equiv 7_V, 11_V \equiv 19_V, 13_V \equiv 17_V$ . (Диаметры вспомогательных окружностей не обозначены).

**Пример 2.** Построить линию пересечения поверхностей – цилиндрической  $\alpha$  и закрытого тора  $\beta$  (рис. 20).

Анализ условия задачи показывает, что оси поверхностей пересекаются и параллельны плоскости  $V$ . Общая плоскость симметрии  $\gamma \perp V$ . При этих условиях можно применить способ концентрических сфер с центром в точке  $O = i_\beta \cap i_\alpha$ .

План решения соответствует общему алгоритму.

**Последовательность построения на чертеже:** нахождение проекций высшей  $1$  и низшей  $2$  точек аналогично предыдущему примеру.

Определяем проекции общего центра вспомогательных сфер:  $O_V = i_{\alpha V} \cap i_{\beta V}, O_H \equiv i_{\alpha H}$ . Величина радиуса сферы изменяется в пределах  $R_{\max} > R > R_{\min}$ . В данной задаче  $R_{\max}$  определяется как  $|O_V I_V|$ ;  $R_{\min}$  как радиус сферы, касательной к поверхности тора.

Для нахождения какой-либо промежуточной точки, например  $3(3_1)$ , вводим вспомогательную сферу  $C_\Phi R$ , задав ее фронтальный очерк – окружность радиусом  $R$  с центром  $O_V$ . Построим отрезки  $a_V$  и  $b_V$  – фронтальные проекции окружностей, по которым  $C_\Phi R$  пересекает, соответственно,  $\alpha$  и  $\beta$ . Находим  $3_V(3_{1V}) = a_V \cap b_V$ . Горизонтальные проекции  $3_H$  и  $3_{1H}$  определяем на окружности  $a_H$ .

Построим аналогичным образом несколько промежуточных точек. Соединим одноименные проекции всех найденных точек кривыми  $l_H$  и  $l_V$  с учетом видимости.

Видимость линии  $l$  в проекции на плоскость  $V$  определяется проекциями  $1_V$  и  $2_V$ . Видимость линии  $l$  в проекции на плоскость  $H$  определяется проекциями  $5_H$  и  $6_H$  точек  $5$  и  $6$  на очерковых образующих цилиндра.

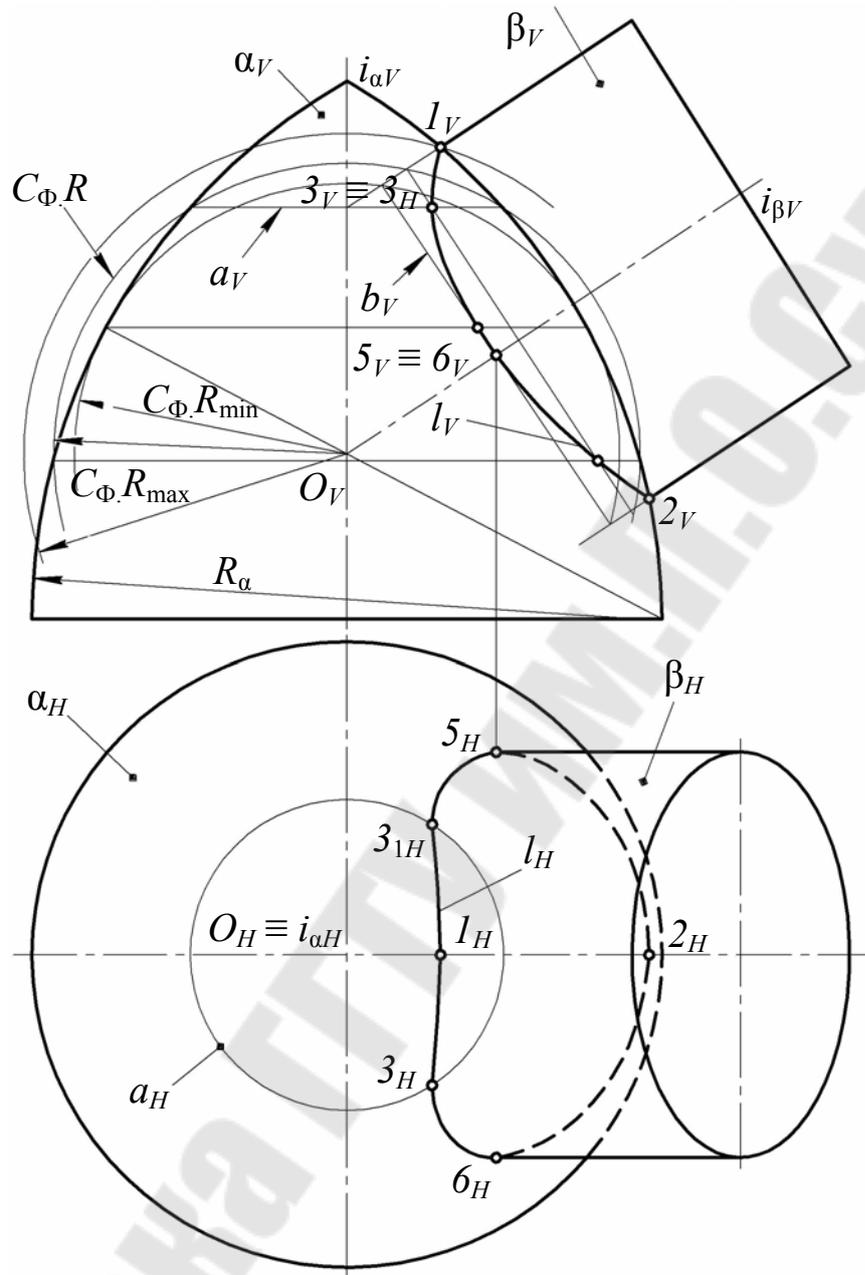


Рис. 20. Пересечение поверхностей – цилиндрической  $\alpha$  и закрытого тора  $\beta$

## 7. ТИПИЧНЫЕ ОШИБКИ, ДОПУСКАЕМЫЕ ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ ЗАДАНИЯ

1. Неверно строят развертку боковой поверхности пирамиды. Следует обращать внимание на ребра: являются ли они прямыми общего положения или частного? Если общего, следует найти натуральную величину ребер.

2. Аналогично, при построении развертки усеченной поверхности пирамиды, следует обращать внимание на отрезки ребер, какого они положения: частного или общего.

3. При построении развертки усеченной поверхности конуса вращения следует правильно определять натуральные величины отрезков образующих, используя очерковые образующие.

4. При выполнении задания встречаются варианты, где нужно вычертить проекции конуса, ось которого параллельна одной плоскости проекций и наклонна ко второй плоскости проекций. Неверно строят очерк проекции конуса с основанием в виде эллипса.

## 8. ПРИМЕРНЫЕ КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Изложите общий принцип построения обобщенного алгоритма для решения задач по определению линии пересечения поверхностей.

2. Сформулируйте возможные варианты решения задачи по определению линии пересечения поверхности многогранника плоскостью.

3. В чем заключается решение задачи по определению сечения поверхности плоскостью с помощью способа граней и способа ребер?

4. Как строится линия пересечения цилиндра вращения, конуса вращения плоскостью?

5. Какие линии получаются при пересечении цилиндра вращения, конуса вращения плоскостью?

6. Как определить натуральную величину отрезка прямой общего положения?

7. Как определить натуральную величину плоской фигуры (треугольника, четырехугольника и т. д.)?

8. Что называется разверткой поверхности?

9. Как строятся развертки боковых поверхностей призмы, пирамиды?

10. Как построить развертки боковых поверхностей цилиндра вращения, конуса вращения?

11. В каком случае эти развертки будут полными?
12. Как строятся развертки усеченных поверхностей призмы, пирамиды, цилиндра вращения, конуса вращения?
13. Какие рекомендации подбора вспомогательных секущих плоскостей можно сделать для случаев пересечения цилиндров, конусов, призм, пирамид?
14. В каких случаях для построения линии пересечения одной поверхности другою рекомендуется применить вспомогательные секущие плоскости, параллельные плоскостям проекций?
15. По каким линиям пересекаются между собой поверхности вращения, имеющие общую ось?
16. Какая из кривых второго порядка является проекцией линии пересечения одной цилиндрической поверхности вращения другой на плоскость, параллельную общей плоскости симметрии этих поверхностей?
17. Как можно использовать случай, когда одна из проекций линии пересечения совпадает с проекцией цилиндрической или призматической поверхности?
18. В каких случаях возможно и целесообразно применять вспомогательные секущие сферы?
19. Какие линии получаются при взаимном пересечении двух поверхностей вращения, описанных вокруг общей для них сферы или вписанных в сферу?
20. Какие точки линии пересечения называются характерными?

## ЛИТЕРАТУРА

1. Арустамов, Х. А. Сборник задач по начертательной геометрии / Х. А. Арустамов. – М. : Машиностроение, 1970. – Гл. XVII–XIX, с. 189–235 ; гл. XXII, XXIII, XXIV, с. 253–291 ; гл. XXVI, с. 326–334.
2. Гордон, В. О. Сборник задач по курсу начертательной геометрии / В. О. Гордон, С. Б. Иванов, Т. Е. Солнцева. – М. : Высш. шк., 1973. – § 22, с. 184–185; § 23, с. 202–221.
3. Гордон, В. О. Курс начертательной геометрии / В. О. Гордон, М. А. Семенцов-Огиевский. – М. : Наука, 1977. – § 33–38, с. 109–144; § 42, с. 156–160; § 44, с. 165–169; § 54, с. 228–229; § 56, 57, с. 234–253; § 61–66, с. 267–306.
4. Фролов, С. А. Начертательная геометрия / С. А. Фролов. – М. : Машиностроение, 1978. – § 38–43, с. 93–109; § 46–54, с. 116–145; § 68–70, с. 190–196.
5. Бубенников, А. В. Начертательная геометрия / А. В. Бубенников. – М. : Высш. шк., 1985. – § 71–75, с. 182–200; § 77–81, с. 204–230.
6. Зеленый, П. В. Инженерная графика. Практикум : учеб. пособие для вузов / П. В. Зеленый, Е. И. Белякова ; под ред. П. В. Зеленого. – Минск : БНТУ, 2011. – 256 с.
7. Кокошко, А. Ф. Основы начертательной геометрии : учеб. пособие для вузов / А. Ф. Кокошко. – 2-е изд., испр. – Минск : ТетраСистемс, 2013. – 191 с.
8. Чукмаченко, Г. В. Техническое черчение : учеб. пособие / Г. В. Чукмаченко. – 6-е изд. – Ростов н/Д : Феникс, 2013. – 349 с.

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
1. ЦЕЛЬ И СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ.....	4
2. ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ ЗАДАНИЯ, ПОРЯДОК КОНСУЛЬТАЦИИ И ПРИЕМА ЗАДАНИЯ.....	4
3. МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ.....	5
4. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ.....	6
5. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПЛОСКОСТЬЮ (Задача 1).....	8
5.1. Пересечение многогранников плоскостью и построение разверток.....	10
5.2. Пересечение тел вращения плоскостью и построение разверток.....	22
5.2.1. Пересечение цилиндра плоскостью.....	23
5.2.2. Пересечение конуса плоскостью.....	27
6. ВЗАИМНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ (Задача 2).....	32
7. ТИПИЧНЫЕ ОШИБКИ, ДОПУСКАЕМЫЕ ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ ЗАДАНИЯ.....	44
8. ПРИМЕРНЫЕ КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.....	44
ЛИТЕРАТУРА.....	46

Учебное электронное издание комбинированного распространения

Учебное издание

# **НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ**

**Практикум  
по одноименному курсу для студентов  
машиностроительных специальностей  
дневной формы обучения**

**Электронный аналог печатного издания**

Составители: **Остриков** Олег Михайлович  
**Влашевич** Владислав Владимирович

Редактор *А. В. Власов*  
Компьютерная верстка *Е. Б. Яцук*

Подписано в печать 05.03.16.

Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».

Ризография. Усл. печ. л. 2,79. Уч.-изд. л. 2,87.

Изд. № 26.

<http://www.gstu.by>

Издатель и полиграфическое исполнение  
Гомельский государственный  
технический университет имени П. О. Сухого.  
Свидетельство о гос. регистрации в качестве издателя  
печатных изданий за №1/273 от 04.04.2014 г.  
246746, г. Гомель, пр. Октября, 48