

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Высшая математика»

Ю. Д. Черниченко, А. В. Емелин

**РЯДЫ. КРАТНЫЕ, КРИВОЛИНЕЙНЫЕ
И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ**

**КУРС ЛЕКЦИЙ
по дисциплинам «Высшая математика»
и «Математика» для студентов всех специальностей
дневной и заочной форм обучения
В двух частях**

**Часть 2
Криволинейные и поверхностные интегралы.
Элементы теории поля**

Электронный аналог печатного издания

Гомель 2011

УДК 517(075.8)
ББК 22.16я73
Ч-49

*Рекомендовано к изданию научно-методическим советом
факультета автоматизированных и информационных систем
ГГТУ им. П. О. Сухого
(протокол № 9 от 10.05.2010 г.)*

Рецензент: зав. каф. «Физика» ГГТУ им. П. О. Сухого д-р физ.-мат. наук,
проф. П. А. Хило

Черниченко, Ю. Д.

Ч-49 Ряды. Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы. Элементы теории поля : курс лекций по дисциплинам «Высшая математика» и «Математика» для студентов всех специальностей днев. и заоч. форм обучения. В 2 ч. Ч. 2. Криволинейные и поверхностные интегралы. Элементы теории поля / Ю. Д. Черниченко, А. В. Емелин. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2011. – 84 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: <http://lib.gstu.local>. – Загл. с титул. экрана.

ISBN 978-985-420-969-2.

Курс лекций содержит теоретический материал, сопровождаемый решением типовых примеров, и задания для самостоятельной работы. Как и в части 1 курса лекций, в теоретической части каждого раздела сформулированы основные понятия, определения, свойства, формулы.

Для студентов всех специальностей дневной и заочной форм обучения.

**УДК 517(075.8)
ББК 22.16я73**

**ISBN 978-985-420-969-2 (ч. 2)
ISBN 978-985-420-954-8**

© Черниченко Ю. Д., Емелин А. В., 2011
© Учреждение образования «Гомельский
государственный технический университет
имени П. О. Сухого», 2011

Предисловие

Тема «Криволинейные и поверхностные интегралы» так же, как и тема «Кратные интегралы», не только является одной из самых трудных в курсе высшей математики втуза, но и чрезвычайно важной для физики (включая математическую и теоретическую физику) и других наук (особенно технических). Поэтому отдельные параграфы курса лекций посвящены геометрическим и физическим приложениям криволинейных и поверхностных интегралов (§ 3.3, 3.6, 4.4, 4.7), а также описаниям на языке кратных и криволинейных интегралов красивых закономерностей, существующих в теории поля (раздел 5).

Раздел 3. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Лекция 16

§ 3.1. Криволинейный интеграл первого рода: определение и свойства

К понятию криволинейного интеграла первого рода приводит механическая задача о вычислении массы кривой AB по ее линейной плотности $f(M)$, заданной во всех точках $M(x; y; z) \in AB$. Для решения этой задачи разобьем кривую AB произвольно точками $M_i(x_i; y_i; z_i)$ на n частичных дуг $\overline{M_i M_{i+1}}$ ($i = 1, 2, \dots, n$). На каждой из дуг $\overline{M_i M_{i+1}}$ выберем произвольно точку $\bar{M}_i(\bar{x}_i; \bar{y}_i; \bar{z}_i)$ (рис. 3.1).

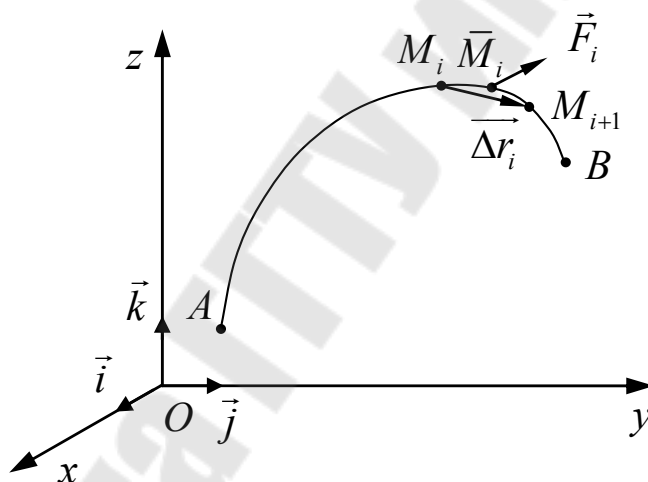


Рис. 3.1

Тогда, приближенно считая, что плотность во всех точках дуги $\overline{M_i M_{i+1}}$ равна $f(\bar{M}_i)$ и обозначая длину дуги $\overline{M_i M_{i+1}}$ через Δl_i , для массы Δm_i этой дуги приближенно будем иметь $\Delta m_i \approx f(\bar{M}_i) \Delta l_i$. Суммируя по всем элементарным дугам, находим для массы всей искомой кривой AB выражение

$$m \approx \sum_{i=1}^n f(\bar{M}_i) \Delta l_i. \quad (3.1)$$

При этом погрешность соотношения (3.1) будет стремиться к нулю, когда $\max \Delta l_i \rightarrow 0$. Следовательно, переходя в выражении (3.1) к пределу при $\max \Delta l_i \rightarrow 0$, получим точное выражение для массы искривленной кривой. Таким образом, абстрагируясь от физического содержания функции $f(M) = f(x, y, z)$, приходим к понятию *криволинейного интеграла первого рода*.

Определение 3.1. Если существует предел интегральных сумм

$$\sum_{i=1}^n f(\bar{M}_i) \Delta l_i = \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i) \Delta l_i,$$

когда $\max \Delta l_i \rightarrow 0$, не зависящий как от способа разбиения кривой AB точками $M_i(x_i; y_i; z_i)$ на частичные дуги $\widehat{M_i M_{i+1}}$, так и от выбора точек $\bar{M}_i(\bar{x}_i; \bar{y}_i; \bar{z}_i)$ на каждой из них, то этот предел называют **криволинейным интегралом первого рода** от функции $f(M) = f(x, y, z)$ по кривой AB и обозначают символом

$$\int_{AB} f(M) dl = \int_{AB} f(x, y, z) dl.$$

Итак, по определению

$$\int_{AB} f(M) dl = \int_{AB} f(x, y, z) dl = \lim_{\max \Delta l_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i) \Delta l_i. \quad (3.2)$$

Для случая плоской кривой определение криволинейного интеграла первого рода дается выражением

$$\int_{AB} f(M) dl = \int_{AB} f(x, y) dl = \lim_{\max \Delta l_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \Delta l_i. \quad (3.3)$$

Замечание 3.1. Напомним, что длина Δl_i дуги $\widehat{M_i M_{i+1}}$ пространственной кривой приближенно дается выражением $\Delta l_i \approx \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2 + (\Delta z_i)^2}$, которое в дифференциальной форме принимает вид: $dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$ (на плоскости $\Delta z_i, dz = 0$).

Механический и геометрический смысл криволинейного интеграла первого рода

Как следует из выражения (3.1), если на кривой AB функция $f(x, y, z) \equiv \gamma(x, y, z) \geq 0$ есть линейная плотность этой кривой, то интеграл (3.2) или (3.3) определяет массу m_{AB} кривой AB , т. е.

$$m_{AB} = \int_{AB} \gamma(x, y, z) dl. \quad (3.4)$$

В частности, при $\gamma(x, y, z) \equiv 1$ криволинейный интеграл первого рода применяют для нахождения длины l кривой AB :

$$l = \int_{AB} dl. \quad (3.5)$$

Свойства криволинейного интеграла первого рода

Свойство 3.1 (свойство линейности). Если для каждой из функций $f_1(x, y, z)$ и $f_2(x, y, z)$ существуют криволинейные интегралы первого рода по кривой AB , а C_1, C_2 – любые постоянные, то для функции $C_1 f_1(x, y, z) + C_2 f_2(x, y, z)$ также существует криволинейный интеграл первого рода по кривой AB , причем

$$\begin{aligned} & \int_{AB} [C_1 f_1(x, y, z) + C_2 f_2(x, y, z)] dl = \\ & = C_1 \int_{AB} f_1(x, y, z) dl + C_2 \int_{AB} f_2(x, y, z) dl. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Свойство 3.2 (свойство аддитивности). Если кривая AB составлена из двух кривых AC и CB , и если для функции $f(x, y, z)$ существует криволинейный интеграл первого рода по кривой AB , то для этой функции существуют и криволинейные интегралы первого рода по каждой из этих кривых AC и CB , причем

$$\int_{AB} f(x, y, z) dl = \int_{AC} f(x, y, z) dl + \int_{CB} f(x, y, z) dl. \quad (3.7)$$

Свойство 3.3. При изменении направления интегрирования криволинейный интеграл первого рода не изменяет своего значения, т. е.

$$\int_{AB} f(x, y, z) dl = \int_{BA} f(x, y, z) dl. \quad (3.8)$$

Свойство 3.4 (оценка модуля интеграла). Если существует криволинейный интеграл первого рода от функции $f(x, y, z)$ по кривой AB , то существует и криволинейный интеграл первого рода от функции $|f(x, y, z)|$ по кривой AB , причем

$$\left| \int_{AB} f(x, y, z) dl \right| \leq \int_{AB} |f(x, y, z)| dl. \quad (3.9)$$

Свойство 3.5 (формула среднего). Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна вдоль кривой AB , то существует такая точка $M_0(x_0; y_0; z_0) \in AB$, что

$$\int_{AB} f(x, y, z) dl = f(x_0, y_0, z_0) l, \quad (3.10)$$

где l – длина кривой AB .

§ 3.2. Вычисление криволинейного интеграла первого рода

В зависимости от способа задания кривой AB вычисление криволинейного интеграла первого рода сводится к вычислению соответствующего определенного интеграла.

1. Если плоская кривая AB задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$), тогда, принимая во внимание замечание 3.1, находим: $dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$. Следовательно, интеграл (3.3) сводится к определенному интегралу

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \quad (3.11)$$

2. Если плоская кривая AB задана уравнением в полярных координатах $(\rho; \varphi)$ так, что $\rho = \rho(\varphi)$ ($\alpha \leq \varphi \leq \beta$), тогда, принимая во внимание замечание 3.1 и, что $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, находим:

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2} d\varphi.$$

Следовательно,

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(\rho(\varphi) \cos \varphi, \rho(\varphi) \sin \varphi) \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2} d\varphi. \quad (3.12)$$

Замечание 3.2. Если плоская кривая AB лежит в плоскости Oxy и задана уравнением $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$, то кривую AB можно параметризовать, полагая $x = x$, $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$. Тогда вместо (3.11) будем иметь:

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx. \quad (3.13)$$

Замечание 3.3. Аналогично, если кривая AB задана уравнением $x = x(y)$, $c \leq y \leq d$, то полагаем $y = y$, $x = x(y)$, $c \leq y \leq d$. Тогда (3.11) принимает вид:

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_c^d f(x(y), y) \sqrt{1 + (x'(y))^2} dy. \quad (3.14)$$

3. Если кривая AB – пространственная кривая, заданная параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$), тогда, принимая во внимание замечание 3.1, получим:

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

Следовательно, интеграл (3.3) сводится к определенному интегралу

$$\int_{AB} f(x, y, z) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt. \quad (3.15)$$

Пример 3.1. Вычислить $\int_{AB} \sqrt{y} dl$, если AB – первая арка циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $a > 0$ (рис. 3.2).

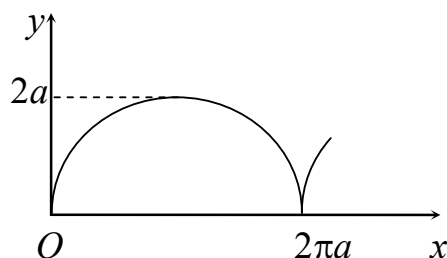


Рис. 3.2

Решение. Поскольку кривая AB задана параметрически, то согласно (3.11) находим:

$$\begin{aligned} x'(t) &= a(1 - \cos t), \quad y'(t) = a \sin t, \\ \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} &= \\ &= \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} = \\ &= a\sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} = \\ &= a\sqrt{2(1 - \cos t)}. \end{aligned}$$

Для первой арки циклоиды $0 \leq t \leq 2\pi$ (рис. 3.2). Тогда, в соответствии с (3.11), будем иметь:

$$\begin{aligned} \int_{AB} \sqrt{y} dl &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a(1 - \cos t)} a \sqrt{2(1 - \cos t)} dt = \sqrt{2} a^{3/2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) dt = \\ &= \sqrt{2} a^{3/2} (t - \sin t) \Big|_0^{2\pi} = \pi(2a)^{3/2}. \end{aligned}$$

Ответ: $\pi(2a)^{3/2}$.

Замечание 3.4. В некоторых случаях бывает удобно, а порой и необходимо, перейти от одного способа задания кривой AB к другому, например, от задания кривой в декартовой системе координат к параметрическому или к уравнению кривой в полярной системе координат.

Пример 3.2. Вычислить $\int_{AB} \sqrt{x^2 + y^2} dl$, если AB – лемниската Бернулли $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, $a > 0$ (рис. 3.3).

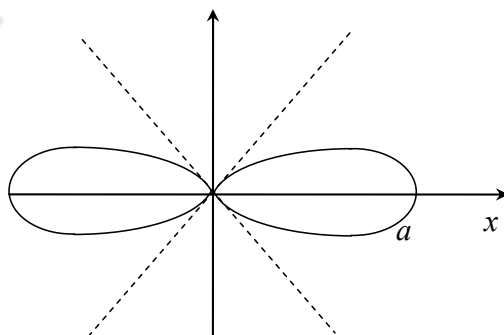


Рис. 3.3

Решение. В полярной системе координат

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi$$

и, следовательно, уравнение лемнискаты принимает вид:

$$(\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi)^2 = a^2 (\rho^2 \cos^2 \varphi - \rho^2 \sin^2 \varphi),$$

$$\rho^4 = a^2 \rho^2 \cos 2\varphi \Rightarrow \rho^2 = 0, \quad \rho^2 = a^2 \cos 2\varphi.$$

Отсюда находим: $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$, $\rho \neq 0$, причем из условия $\cos 2\varphi \geq 0$ следует, что $2\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right] \Rightarrow \Rightarrow \varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$ (рис. 3.3). Поэтому применим формулу (3.12).

Для этого находим:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi} = \rho = a\sqrt{\cos 2\varphi};$$

$$\rho' = a \frac{1}{2} (\cos 2\varphi)^{-1/2} (-\sin 2\varphi) 2 = \frac{-a \sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}};$$

$$\sqrt{\rho^2 + \rho'^2} = \sqrt{a^2 \cos 2\varphi + \frac{a^2 \sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}} = a \sqrt{\frac{\cos^2 2\varphi + \sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}} = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}.$$

Тогда получим:

$$\begin{aligned} \int_{AB} \sqrt{x^2 + y^2} dl &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} a\sqrt{\cos 2\varphi} \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi + \int_{3\pi/4}^{5\pi/4} a\sqrt{\cos 2\varphi} \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi = \\ &= a^2 \cdot 2 \int_0^{\pi/4} d\varphi + a^2 \int_{3\pi/4}^{5\pi/4} d\varphi = 2a^2 \varphi \Big|_0^{\pi/4} + a^2 \varphi \Big|_{3\pi/4}^{5\pi/4} = \frac{\pi a^2}{2} + a^2 \left(\frac{5\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} \right) = \\ &= \frac{\pi a^2}{2} + \frac{\pi a^2}{2} = \pi a^2. \end{aligned}$$

Ответ: πa^2 .

Лекция 17

§ 3.3. Геометрические и физические приложения криволинейных интегралов первого рода

Геометрические приложения криволинейных интегралов первого рода

Вычисление длин дуг кривых

Длина дуги кривой AB вычисляется с помощью формулы (3.5) (см. геометрический смысл криволинейного интеграла первого рода, § 3.1).

Пример 3.3. Вычислить длину кривой AB : $x^2 + y^2 = R^2$, $R > 0$.

Решение. Будем находить длину искомой кривой с помощью формулы (3.5). Уравнение искомой кривой, которое является уравнением окружности с центром в начале координат радиуса R , запишем в параметрическом виде: $x = R \cos t$, $y = R \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Тогда к интегралу в формуле (3.5) применима формула (3.11). Для этого находим:

$$\begin{aligned}x'(t) &= -R \sin t, \quad y'(t) = R \cos t \Rightarrow, \quad \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \\ &= \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t} = R.\end{aligned}$$

Тогда получим:

$$l = \int_{AB} dl = \int_0^{2\pi} R dt = Rt \Big|_0^{2\pi} = 2\pi R.$$

Ответ: $2\pi R$.

Физические приложения криволинейных интегралов первого рода

Формулы, отражающие физические приложения криволинейных интегралов первого рода, можно получить (как и в случае двойного и тройного интегралов), используя подход бесконечно малых величин.

1. Вычисление массы кривой

Масса кривой AB вычисляется с помощью формулы (3.4) по заданной вдоль нее линейной плотности $\gamma(x, y, z)$ (см. механический смысл криволинейного интеграла первого рода, § 3.1).

Пример 3.4. Найти массу участка цепной линии $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ между точками $A(0; a)$ и $B(a; a \operatorname{ch} 1)$, если линейная плотность кривой в каждой ее точке обратно пропорциональна ординате точки.

Решение. Поскольку в нашем случае $\gamma(x, y) = k / y = k / \left(a \operatorname{ch} \frac{x}{a} \right)$, $y' = \operatorname{sh} \frac{x}{a}$, то по формуле (3.13) имеем:

$$m_{AB} = \int_{AB} \gamma(x, y) dl = \int_0^a \frac{k}{a \operatorname{ch} \frac{x}{a}} \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}} dx = \frac{k}{a} \int_0^a \frac{\operatorname{ch} \frac{x}{a}}{\operatorname{ch} \frac{x}{a}} dx = \frac{k}{a} x \Big|_0^a = k.$$

Ответ: $m_{AB} = k$.

2. Вычисление статических моментов плоской кривой относительно координатных осей. Вычисление координат центра тяжести плоской кривой

К криволинейным интегралам первого рода приводят и задачи, связанные с вычислением *статических моментов плоской кривой относительно координатных осей*, а также *координат ее центра тяжести*. Если использовать подход бесконечно малых величин (см. физические приложения двойных и тройных интегралов, изложенные в разделе 2, § 2.4, 2.8), то результаты запишутся в следующем виде:

$$M_x = \int_{AB} y \gamma(x, y) dl, \quad M_y = \int_{AB} x \gamma(x, y) dl, \quad x_c = \frac{M_y}{m_{AB}}, \quad y_c = \frac{M_x}{m_{AB}}. \quad (3.16)$$

Замечание 3.5. К криволинейным интегралам первого рода приводят (используя подход бесконечно малых величин) также и задачи, связанные с вычислением *моментов инерции плоской кривой относительно координатных осей и начала координат*. Более того, этот подход позволяет также получить и формулы для вычисления *статических моментов относительно координатных плоскостей и моментов инерции относительно координатных плоскостей, осей и начала координат пространственной кривой*, а также формулы для вычисления *координат ее центра тяжести*.

Пример 3.5. Найти координаты центра тяжести участка параболы $y = x^2/2$ между точками $A(0;0)$ и $B(\sqrt{3};3/2)$, если линейная плотность кривой в каждой ее точке пропорциональна абсциссе точки.

Решение. В нашем случае $\gamma(x,y) = kx$, $y' = x$. Тогда по формулам (3.4), (3.13) и (3.16) имеем:

$$m_{AB} = \int_0^{\sqrt{3}} kx\sqrt{1+x^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} t^2 = 1+x^2, \quad tdt = xdx; \\ x=0 \Rightarrow t=1; \quad x=\sqrt{3} \Rightarrow t=2 \end{array} \right\} = k \int_1^2 t \cdot tdt =$$

$$= k \frac{t^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{k}{3}(8-1) = \frac{7}{3}k;$$

$$M_x = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{2} kx\sqrt{1+x^2} dx = \{t^2 = 1+x^2 \text{ и т. д.}\} = \frac{k}{2} \int_1^2 (t^2-1)t \cdot tdt =$$

$$= \frac{k}{2} \int_1^2 (t^4 - t^2) dt = \frac{k}{2} \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_1^2 = \frac{k}{2} \left(\frac{32}{5} - \frac{8}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \right) = \frac{k}{2} \left(\frac{31}{5} - \frac{7}{3} \right) =$$

$$= \frac{k}{2} \frac{93-35}{15} = \frac{k58}{2 \cdot 15} = \frac{29}{15}k;$$

$$M_y = \int_0^{\sqrt{3}} xkx\sqrt{1+x^2} dx = k \int_0^{\sqrt{3}} x^2\sqrt{1+x^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} x = \text{sh } \varphi, \quad dx = \text{ch } \varphi d\varphi; \\ x=0 \Rightarrow \varphi = \text{arsh } 0 = 0; \\ x=\sqrt{3} \Rightarrow \varphi = \text{arsh } \sqrt{3} \end{array} \right\} =$$

$$= k \int_0^{\text{arsh } \sqrt{3}} \text{sh}^2 \varphi \sqrt{1+\text{sh}^2 \varphi} \text{ch } \varphi d\varphi = k \int_0^{\text{arsh } \sqrt{3}} \text{sh}^2 \varphi \text{ch}^2 \varphi d\varphi =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{т. к. } 1 + \text{sh}^2 \varphi = \text{ch}^2 \varphi, \\ \text{а } \text{sh } 2\varphi = 2 \text{sh } \varphi \text{ch } \varphi \end{array} \right\} = \frac{k}{4} \int_0^{\text{arsh } \sqrt{3}} \text{sh}^2(2\varphi) d\varphi =$$

$$= \frac{k}{8} \int_0^{\text{arsh } \sqrt{3}} (\text{ch } 4\varphi - 1) d\varphi = \left\{ \text{т. к. } \text{sh}^2 \alpha = \frac{1}{2}(\text{ch } 2\alpha - 1) \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{k}{8} \left(\frac{\operatorname{sh} 4\varphi}{4} - \varphi \right) \Big|_0^{\operatorname{arsh} \sqrt{3}} = \frac{k}{8} \left(\frac{\operatorname{sh}(4 \operatorname{arsh} \sqrt{3})}{4} - \operatorname{arsh} \sqrt{3} \right) = \\
&= \frac{k}{32} \left(\operatorname{sh}(4 \operatorname{arsh} \sqrt{3}) - 4 \operatorname{arsh} \sqrt{3} \right).
\end{aligned}$$

Отсюда находим:

$$x_c = \frac{M_y}{m_{AB}} = \frac{k \left(\operatorname{sh}(4 \operatorname{arsh} \sqrt{3}) - 4 \operatorname{arsh} \sqrt{3} \right) 3}{32 \cdot 7k} = \frac{3 \operatorname{sh}(4 \operatorname{arsh} \sqrt{3}) - 12 \operatorname{arsh} \sqrt{3}}{224},$$

$$y_c = \frac{M_x}{m_{AB}} = \frac{29k \cdot 3}{15 \cdot 7k} = \frac{29}{35}.$$

$$\text{Ответ: } x_c = \frac{3 \operatorname{sh}(4 \operatorname{arsh} \sqrt{3}) - 12 \operatorname{arsh} \sqrt{3}}{224}, \quad y_c = \frac{29}{35}.$$

3. Вычисление силы притяжения кривой

Отметим еще одно применение криволинейного интеграла первого рода при нахождении *силы притяжения*, действующей на материальную точку массы m_0 со стороны материальной кривой по *закону Ньютона* $f m_0 m \vec{r} / r^3$, где f – гравитационная постоянная. Для нахождения компонент X , Y , Z силы притяжения воспользуемся вновь подходом бесконечно малых величин (см. физические приложения двойных и тройных интегралов, изложенных в разделе 2, § 2.4, 2.8). При этом будем считать, что притягивающая масса распределена непрерывным образом по кривой AB с линейной плотностью $\gamma(x, y, z)$. Тогда для элементарных компонент силы притяжения, действующей на материальную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ массы m_0 со стороны элемента dl кривой, будем иметь:

$$dX(x_0, y_0, z_0) = f m_0 \frac{\gamma(x, y, z)(x - x_0)}{r^3} dl;$$

$$dY(x_0, y_0, z_0) = f m_0 \frac{\gamma(x, y, z)(y - y_0)}{r^3} dl;$$

$$dZ(x_0, y_0, z_0) = f m_0 \frac{\gamma(x, y, z)(z - z_0)}{r^3} dl,$$

где r означает длину вектора $\vec{r} = \overline{M_0M}$, идущего из точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$, в которой сосредоточена масса m_0 , в точку $M(x; y; z)$ на кривой AB [формула (2.53)]. Отсюда для самих компонент силы притяжения сразу получаем:

$$\begin{cases} X(x_0, y_0, z_0) = fm_0 \int_{AB} \frac{\gamma(x, y, z)(x - x_0)}{r^3} dl; \\ Y(x_0, y_0, z_0) = fm_0 \int_{AB} \frac{\gamma(x, y, z)(y - y_0)}{r^3} dl; \\ Z(x_0, y_0, z_0) = fm_0 \int_{AB} \frac{\gamma(x, y, z)(z - z_0)}{r^3} dl. \end{cases} \quad (3.17)$$

Пример 3.6. Найти притяжение, которое оказывает бесконечная однородная прямая на точку массы m_0 , лежащую на расстоянии h от нее, если линейная плотность прямой в каждой ее точке постоянна и равна γ_0 .

Решение. Искомое притяжение будем рассматривать, как предел притяжения, которое оказывает конечный отрезок данной прямой, когда его концы устремляются к минус и плюс бесконечности. Пусть искомая прямая совпадает с осью Ox , а ось Oy проходит через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ массы m_0 . В этом случае $x_0 = z_0 = 0$, $y_0 = h$, $y = z = 0$, $dl = dx$, а $r = \sqrt{x^2 + h^2}$ (рис. 3.4).

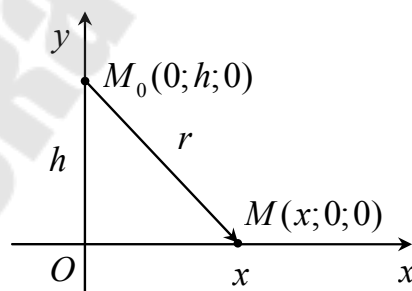


Рис. 3.4

Тогда по формулам (3.17) находим:

$$Z = 0; \quad X = fm_0\gamma_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{(x^2 + h^2)^{3/2}} = 0,$$

т. к. подынтегральная функция нечетная, а пределы симметричны;

$$\begin{aligned}
Y &= -fm_0\gamma_0 h \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + h^2)^{3/2}} = -2fm_0\gamma_0 h \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3 \left(\frac{h^2}{x^2} + 1 \right)^{3/2}} = \\
&= fm_0\gamma_0 \frac{1}{h} \int_0^{\infty} \left(\frac{h^2}{x^2} + 1 \right)^{-3/2} d \left(\frac{h^2}{x^2} + 1 \right) = f \frac{m_0\gamma_0}{h} \frac{\left(\frac{h^2}{x^2} + 1 \right)^{-1/2}}{-1/2} \Big|_0^{\infty} = \\
&= -\frac{2fm_0\gamma_0}{h} (1 - 0) = -\frac{2fm_0\gamma_0}{h}.
\end{aligned}$$

Ответ: $X = Z = 0$, $Y = -2fm_0\gamma_0/h$.

Пример 3.7. Найти притяжение, которое оказывает полуокружность радиуса R на точку массы m_0 , помещенную в ее центре, если линейная плотность в каждой точке полуокружности постоянна и равна γ_0 .

Решение. Поместим начало координат в центр полуокружности, а ось абсцисс проведем через ее концы (рис. 3.5).

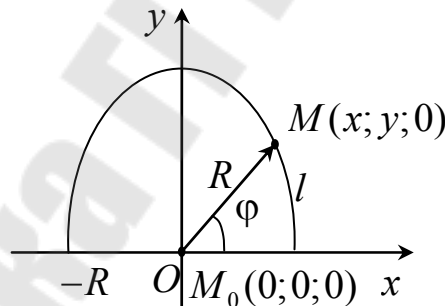


Рис. 3.5

В этом случае:

$$r = R, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad x_0 = y_0 = z_0 = 0, \quad z = 0;$$

$$x = R \cos \varphi, \quad y = R \sin \varphi, \quad dl = R d\varphi.$$

Тогда формулы (3.17) дают:

$$Z = 0; \quad X = fm_0\gamma_0 \int_0^{\pi} \frac{R \cos \varphi \cdot R}{R^3} d\varphi = \frac{fm_0\gamma_0}{R} \sin \varphi \Big|_0^{\pi} = 0;$$

$$Y = fm_0\gamma_0 \int_0^\pi \frac{R \sin \varphi \cdot R}{R^3} d\varphi = -\frac{fm_0\gamma_0}{R} \cos \varphi \Big|_0^\pi = \frac{2fm_0\gamma_0}{R}.$$

Ответ: $X = Z = 0$, $Y = 2fm_0\gamma_0/R$.

Пример 3.8. Найти притяжение, которое оказывает дуга астрои-ды $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, лежащая в первом квадранте, на точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ массы m_0 , расположенную в начале координат, если линейная плотность в каждой точке кривой равна кубу расстояния этой точки от начала координат.

Решение. По условию плотность $\gamma = r^3$, $z = 0$, $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, (рис. 3.6).

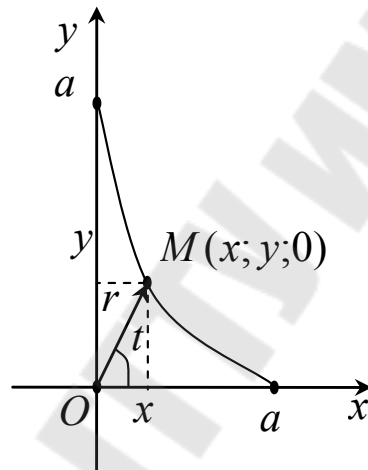


Рис. 3.6

Поэтому по формулам (3.17) имеем:

$$Z = 0, \quad X = fm_0 \int_{AB} \frac{r^3}{r^3} x dl = fm_0 \int_{AB} x dl, \quad Y = fm_0 \int_{AB} \frac{r^3}{r^3} y dl = fm_0 \int_{AB} y dl.$$

Далее находим (см. замечание 3.1):

$$dx = (a \cos^3 t)' dt = (-3a \cos^2 t \cdot \sin t) dt;$$

$$dy = (a \sin^3 t)' dt = (3a \sin^2 t \cdot \cos t) dt, \quad dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \\ = 3a |\cos t \sin t| \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} dt = 3a \cos t \sin t \cdot dt, \quad 0 \leq t \leq \pi/2.$$

Тогда получим:

$$\begin{aligned}
 X &= fm_0 \int_0^{\pi/2} a \cos^3 t \cdot 3a \cos t \sin t \, dt = \\
 &= -3fm_0 a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^4 t \, d(\cos t) = -3fm_0 a^2 \frac{\cos^5 t}{5} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{3}{5} fm_0 a^2; \\
 Y &= fm_0 \int_0^{\pi/2} a \sin^3 t \cdot 3a \cos t \sin t \, dt = 3fm_0 a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^4 t \, d(\sin t) = \\
 &= 3fm_0 a^2 \frac{\sin^5 t}{5} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{3}{5} fm_0 a^2.
 \end{aligned}$$

Ответ: $X = Y = \frac{3}{5} fm_0 a^2$, $Z = 0$.

Лекция 18

§ 3.4. Криволинейный интеграл второго рода: определение и свойства

К понятию криволинейного интеграла второго рода приводит задача о вычислении работы \mathcal{A} силы $\vec{F} = X(x, y, z)\vec{i} + Y(x, y, z)\vec{j} + Z(x, y, z)\vec{k}$, заданной в базисе \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} и действующей на материальную точку, движущуюся вдоль пространственной линии AB от точки A к точке B . Для вычисления работы \mathcal{A} силы \vec{F} разобьем линию AB на n произвольных частей точками $M_i(x_i; y_i; z_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) в направлении от точки A к точке B (см. рис. 3.1). Введем обозначения:

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, \quad \Delta y_i = y_{i+1} - y_i, \quad \Delta z_i = z_{i+1} - z_i;$$

$$\overrightarrow{\Delta r_i} = \overrightarrow{M_i M_{i+1}} = \Delta x_i \cdot \vec{i} + \Delta y_i \cdot \vec{j} + \Delta z_i \cdot \vec{k}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

На каждой из частичных дуг $\overline{M_i M_{i+1}}$ выберем произвольную точку $\bar{M}_i(\bar{x}_i; \bar{y}_i; \bar{z}_i)$. Тогда скалярное произведение

$$\vec{F}_i \cdot \overrightarrow{\Delta r}_i = X(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)\Delta x_i + Y(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)\Delta y_i + Z(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)\Delta z_i$$

будет представлять собой приближенное выражение работы $\Delta \mathcal{A}_i$ силы \vec{F} вдоль дуги $\overline{M_i M_{i+1}}$:

$$\Delta \mathcal{A}_i \approx \vec{F}_i \cdot \overrightarrow{\Delta r}_i = X(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)\Delta x_i + Y(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)\Delta y_i + Z(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)\Delta z_i.$$

Следовательно, приближенное значение работы \mathcal{A} силы \vec{F} на всей кривой AB дается выражением

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\approx \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \overrightarrow{\Delta r}_i = \\ &= \sum_{i=1}^n [X(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)\Delta x_i + Y(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)\Delta y_i + Z(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)\Delta z_i]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

При этом погрешность выражения (3.18) будет стремиться к нулю, когда $\max |\overrightarrow{\Delta r}_i| = \max \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2 + (\Delta z_i)^2} \rightarrow 0$. Значит, переходя в выражении (3.18) к пределу при $\max |\overrightarrow{\Delta r}_i| \rightarrow 0$, получим точное выражение для работы \mathcal{A} силы \vec{F} вдоль линии AB . Таким образом, абстрагируясь от физического содержания векторной функции \vec{F} , приходим к понятию *криволинейного интеграла второго рода*.

Определение 3.2. Если существует предел интегральных сумм

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \overrightarrow{\Delta r}_i = \sum_{i=1}^n [X(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)\Delta x_i + Y(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)\Delta y_i + Z(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)\Delta z_i],$$

когда $\max |\overrightarrow{\Delta r}_i| \rightarrow 0$, не зависящий как от способа разбиения кривой AB точками $M_i(x_i; y_i; z_i)$ на частичные дуги $\overline{M_i M_{i+1}}$, так и от выбора точек $\bar{M}_i(\bar{x}_i; \bar{y}_i; \bar{z}_i)$ на каждой из них, то этот предел называют **криволинейным интегралом второго рода** от векторной функции $\vec{F} = \{X(x, y, z); Y(x, y, z); Z(x, y, z)\}$ в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ вдоль линии AB и обозначают символом

$$\int_{AB} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dr} = \int_{AB} X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy + Z(x, y, z)dz,$$

где $\overrightarrow{dr} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$.

Итак, по определению

$$\int_{AB} \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_{AB} X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy + Z(x, y, z)dz =$$

$$= \lim_{\max|\Delta r_i| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [X(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)\Delta x_i + Y(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)\Delta y_i + Z(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)\Delta z_i]. \quad (3.19)$$

Физический смысл криволинейного интеграла второго рода

Из выражения (3.18) следует, что криволинейный интеграл второго рода (3.19) определяет работу \mathcal{A} силового поля \vec{F} вдоль линии AB и в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ может быть представлен в виде:

$$\mathcal{A} = \int_{AB} \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_{AB} X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy + Z(x, y, z)dz. \quad (3.20)$$

Замечание 3.6. Если AB – плоская кривая, например, лежащая в плоскости Oxy , то в формулах (3.18)–(3.20) необходимо положить $\Delta z_i = 0, dz = 0$.

Свойства криволинейного интеграла второго рода

Свойство 3.6 (свойство линейности). Если для каждой из векторных функций \vec{F}_1 и \vec{F}_2 существуют криволинейные интегралы второго рода по кривой AB , а C_1 и C_2 – произвольные постоянные, то для функции $C_1\vec{F}_1 + C_2\vec{F}_2$ также существует криволинейный интеграл второго рода по кривой AB , причем

$$\int_{AB} (C_1\vec{F}_1 + C_2\vec{F}_2) \cdot \vec{dr} = C_1 \int_{AB} \vec{F}_1 \cdot \vec{dr} + C_2 \int_{AB} \vec{F}_2 \cdot \vec{dr}. \quad (3.21)$$

Свойство 3.7 (свойство аддитивности). Если кривая AB составлена из двух кривых AC и CB , и если для векторной функции \vec{F} существует криволинейный интеграл второго рода по кривой AB , то для этой функции существуют и криволинейные интегралы второго рода по каждой из кривых AC и CB , причем

$$\int_{AB} \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_{AC} \vec{F} \cdot \vec{dr} + \int_{CB} \vec{F} \cdot \vec{dr}. \quad (3.22)$$

Свойство 3.8. При изменении направления пути интегрирования криволинейный интеграл второго рода меняет свой знак на обратный

$$\int_{AB} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dr} = - \int_{BA} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dr}. \quad (3.23)$$

Замечание 3.7. Поскольку криволинейный интеграл второго рода зависит от направления пути интегрирования (свойство 3.8), то в случае, когда $L \equiv AB$ – замкнутая кривая (т. е. в случае, когда точка B совпадает с точкой A), за положительное направление обхода замкнутого контура L , обозначаемого символом L^+ , выбирают то направление, при котором область, лежащая внутри этого контура, остается по левую сторону по отношению к точке, совершающей обход. Такое движение условно называют «движением против часовой стрелки», а интеграл по замкнутому контуру L^+ называют *циркуляцией векторного поля* и обозначают

$$\oint_{L^+} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dr}.$$

§ 3.5. Вычисление криволинейного интеграла второго рода

В зависимости от способа задания кривой AB вычисление криволинейного интеграла второго рода сводится к вычислению соответствующего определенного интеграла.

1. Если AB – пространственная кривая, то записывают уравнение этой кривой в параметрическом виде: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, причем точкам A и B отвечают значения параметра $t = \alpha$ и $t = \beta$, соответственно (выполнение условия $\alpha < \beta$ при этом не обязательно). Тем самым вычисление криволинейного интеграла второго рода (3.19) сводится к вычислению определенного интеграла

$$\int_{AB} X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy + Z(x, y, z)dz = \int_{\alpha}^{\beta} [X(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Y(x(t), y(t), z(t))y'(t) + Z(x(t), y(t), z(t))z'(t)]dt. \quad (3.24)$$

2. Если плоская кривая AB задана уравнением в полярных координатах $(\rho; \varphi)$ так, что $\rho = \rho(\varphi)$, причем в точке A угол $\varphi = \alpha$, а в точке B угол $\varphi = \beta$, то, учитывая, что $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, находим:

$$dx = (\rho(\varphi) \cos \varphi)' d\varphi = (\rho'(\varphi) \cos \varphi - \rho(\varphi) \sin \varphi) d\varphi;$$

$$dy = (\rho(\varphi) \sin \varphi)' d\varphi = (\rho'(\varphi) \sin \varphi + \rho(\varphi) \cos \varphi) d\varphi.$$

Следовательно, принимая во внимание замечание 3.6, вычисление криволинейного интеграла (3.19) сводится к вычислению определенного интеграла

$$\begin{aligned} & \int_{AB} X(x, y) dx + Y(x, y) dy = \\ & = \int_{\alpha}^{\beta} \{ X(\rho(\varphi) \cos \varphi, \rho(\varphi) \sin \varphi) [\rho'(\varphi) \cos \varphi - \rho(\varphi) \sin \varphi] + \\ & + Y(\rho(\varphi) \cos \varphi, \rho(\varphi) \sin \varphi) [\rho'(\varphi) \sin \varphi + \rho(\varphi) \cos \varphi] \} d\varphi. \quad (3.25) \end{aligned}$$

Замечание 3.8. Если плоская кривая AB лежит в плоскости Oxy и задана уравнением $y = y(x)$ (или уравнением $x = x(y)$), причем $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, то кривую AB можно параметризовать, полагая $x = x$, $y = y(x)$ (или, полагая $y = y$, $x = x(y)$). Тем самым, криволинейный интеграл второго рода (3.19), учитывая замечание 3.6, принимает вид:

$$\int_{AB} X(x, y) dx + Y(x, y) dy = \int_{x_A}^{x_B} [X(x, y(x)) + Y(x, y(x)) y'(x)] dx \quad (3.26)$$

или

$$\int_{AB} X(x, y) dx + Y(x, y) dy = \int_{y_A}^{y_B} [X(x(y), y) x'(y) + Y(x(y), y)] dy. \quad (3.27)$$

Пример 3.9. Вычислить $\int_{AB} y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$ вдоль отрезка прямой, идущего от точки $A(1; -2; 2)$ до точки $B(0; 0; 0)$.

Решение. Запишем уравнение прямой, проходящей через две данные точки A и B : $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{2}$. Полагая все эти отношения, равными параметру t , получим уравнение искомой прямой в параметриче-

ском виде: $x = t$, $y = -2t$, $z = 2t$. Отсюда находим: $x' = 1$, $y' = -2$, $z' = 2$. При этом точке A соответствует, очевидно, значение параметра $t = 1$, а в точке B — значение $t = 0$. Тогда, используя формулу (3.24), будем иметь:

$$\begin{aligned} \int_{AB} y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz &= \int_1^0 (4t^2 \cdot 1 + 4t^2(-2) + t^2 \cdot 2) dt = -\int_0^1 (-2t^2) dt = \\ &= 2 \frac{t^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{2}{3}$.

Пример 3.10. Вычислить

$$\int_{AB} (2y - x) dx + (x + y^2) dy,$$

где AB — дуга параболы $x = 2y - y^2$ от точки $A(1;1)$ до точки $B(-3;3)$ (рис. 3.7).

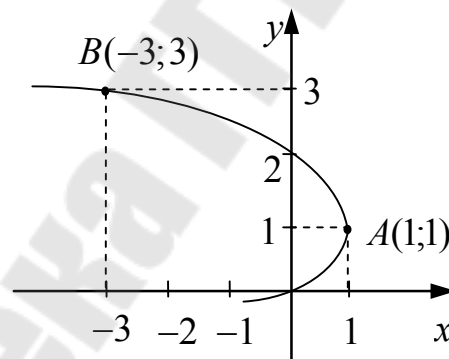


Рис. 3.7

Решение. Принимая во внимание замечание 3.8 и формулу (3.27), находим: $x' = 2 - 2y$, $y_A = 1$, $y_B = 3$;

$$\begin{aligned} \int_{AB} (2y - x) dx + (x + y^2) dy &= \\ &= \int_1^3 [(2y - 2y + y^2)(2 - 2y) + (2y - y^2 + y^2)] dy = \int_1^3 [2y^2(1 - y) + 2y] dy = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_1^3 (2y^2 - 2y^3 + 2y) dy = \left(\frac{2}{3} y^3 - \frac{y^4}{2} + y^2 \right) \Big|_1^3 = 18 - \frac{81}{2} + 9 - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 1 \right) = \\
&= 27 - \frac{81}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 1 = 26 - 40 - \frac{2}{3} = -14 - \frac{2}{3} = -\frac{44}{3}.
\end{aligned}$$

Ответ: $-\frac{44}{3}$.

Пример 3.11. Вычислить $\oint_L y dx + dy$, где L – эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,

обходимый в положительном направлении.

Решение. Также воспользуемся замечанием 3.4 и запишем уравнение эллипса в параметрическом виде: $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Для вычисления искомого интеграла воспользуемся формулой (3.24), в которой, согласно замечанию 3.6, $dz = z'(t)dt = 0$. Тогда будем иметь:

$$\begin{aligned}
\oint_L y dx + dy &= \int_0^{2\pi} [b \sin t (-a \sin t) + b \cos t] dt = \int_0^{2\pi} (-ab \sin^2 t + b \cos t) dt = \\
&= \frac{-ab}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2t) dt + b \sin t \Big|_0^{2\pi} = -\frac{ab}{2} \left(t - \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} + b(\sin 2\pi - \sin 0) = \\
&= \frac{-ab}{2} 2\pi = -\pi ab.
\end{aligned}$$

Ответ: $-\pi ab$.

Лекция 19

§ 3.6. Геометрические и физические приложения криволинейных интегралов второго рода

Геометрические приложения криволинейных интегралов второго рода

Вычисление площадей плоских областей

Пусть область D , ограниченная кривой L , – правильная область, как в направлении оси Oy , так и в направлении оси Ox . Пусть

в области D определены функции $X(x, y)$ и $Y(x, y)$, непрерывные в области D вместе со своими частными производными. Поскольку область D является правильной в направлении оси Oy , то положим: область D ограничена снизу линией \widehat{ACB} , уравнение которой $y = y_1(x)$, а сверху – линией \widehat{AEB} , уравнение которой $y = y_2(x)$, причем $\widehat{ACB} + \widehat{AEB} = L$, $y_1(x) \leq y_2(x)$ для всех $x \in [a; b]$, где точке A отвечает значение $x = a$, а точке B отвечает значение $x = b$ (рис. 3.8).

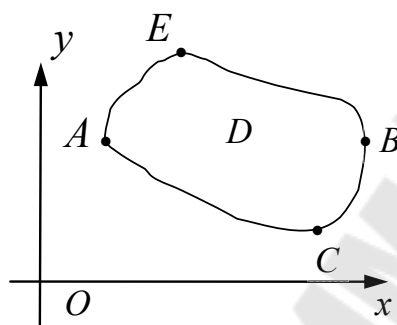


Рис. 3.8

В этом случае площадь S_D области D можно записать с помощью определенного интеграла в виде:

$$S_D = \int_a^b [y_2(x) - y_1(x)] dx = \int_a^b y_2(x) dx - \int_a^b y_1(x) dx.$$

В свою очередь определенные интегралы можно преобразовать в криволинейные интегралы по линиям \widehat{ACB} и \widehat{AEB} , используя формулу (3.26) (см. замечание 3.8). В результате получим:

$$S_D = \int_a^b y_2(x) dx - \int_a^b y_1(x) dx = \int_{\widehat{AEB}} y dx - \int_{\widehat{ACB}} y dx.$$

Далее, принимая во внимание свойства 3.7, 3.8 [см. формулы (3.22), (3.23)] и замечание 3.7, криволинейные интегралы по линиям \widehat{ACB} и \widehat{AEB} в правой части последнего соотношения можно записать в виде криволинейного интеграла по замкнутому контуру $L^+ = \widehat{ACB} + \widehat{BEA}$. Тогда получим:

$$S_D = \int_{\widehat{AEB}} y dx - \int_{\widehat{ACB}} y dx = - \int_{\widehat{BEA}} y dx - \int_{\widehat{ACB}} y dx = - \oint_{L^+} y dx.$$

Итак,

$$S_D = -\oint_{L^+} y dx. \quad (3.28)$$

Аналогично, считая область D правильной в направлении оси Ox , положим: область D ограничена слева линией \widehat{CAE} , уравнение которой $x = x_1(y)$, а справа – линией \widehat{CBE} , уравнение которой $x = x_2(y)$. Теперь $\widehat{CAE} + \widehat{CBE} = L$, $x_1(y) \leq x_2(y)$ для всех $y \in [c; d]$, где точке C отвечает значение $y = c$, а точке E отвечает значение $y = d$ (рис. 3.8). В этом случае площадь S_D области D запишется с помощью определенного интеграла в виде:

$$S_D = \int_c^d [x_2(y) - x_1(y)] dy = \int_c^d x_2(y) dy - \int_c^d x_1(y) dy.$$

Определенные интегралы преобразуются в криволинейные интегралы второго рода по линиям \widehat{CAE} и \widehat{CBE} , используя формулу (3.27) (см. замечание 3.8). В результате получим:

$$S_D = \int_c^d x_2(y) dy - \int_c^d x_1(y) dy = \int_{\widehat{CBE}} x dy - \int_{\widehat{CAE}} x dy.$$

Теперь, принимая во внимание свойства 3.7, 3.8 [см. формулы (3.22), (3.23)] и замечание 3.7, криволинейные интегралы по линиям \widehat{CBE} и \widehat{CAE} в правой части последнего соотношения запишутся в виде криволинейного интеграла по замкнутому контуру $L^+ = \widehat{CBE} + \widehat{EAC}$:

$$S_D = \int_{\widehat{CBE}} x dy - \int_{\widehat{CAE}} x dy = \int_{\widehat{CBE}} x dy + \int_{\widehat{EAC}} x dy = \oint_{L^+} x dy.$$

Итак,

$$S_D = \oint_{L^+} x dy. \quad (3.29)$$

Наконец, вместо формул (3.28) и (3.29) можно получить симметричную формулу, взяв их среднее арифметическое:

$$S_D = \frac{1}{2} \oint_{L^+} (x dy - y dx). \quad (3.30)$$

Замечание 3.9. Формулы (3.28)–(3.30) справедливы и в том случае, когда область D не является правильной. Действительно, в этом случае область D можно разбить линией l на части, которые являются правильными, а, значит, к ним применимы формулы (3.28)–(3.30). Но поскольку линия l проходится дважды в противоположных направлениях, то вклады интегралов по линии l взаимно сокращаются (см. свойство 3.8).

Пример 3.12. Вычислить площадь эллипса

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Решение. Применим формулу (3.30):

$$S_D = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \cos t \cdot b \cos t + b \sin t \cdot a \sin t) dt = \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} dt = \frac{ab}{2} t \Big|_0^{2\pi} = \pi ab.$$

Ответ: πab .

Физические приложения криволинейных интегралов второго рода

1. Вычисление работы силового поля

Согласно физическому смыслу криволинейного интеграла второго рода, они применяются для вычисления *работы силового поля* – формула (3.20). Эта формула также удобна и для исследования ряда важных, связанных с нею, вопросов: *о зависимости произведенной работы от формы траектории, соединяющей две данные точки, и об условиях равенства нулю работы по замкнутой траектории* (см. замечание 5.6).

Пример 3.13. Найти работу поля ньютоновского притяжения, создаваемого массой m , по перемещению материальной точки массы $m_0 = 1$ из точки $A(x_A; y_A; z_A)$ в точку $B(x_B; y_B; z_B)$.

Решение. Если массу m поместить в начале координат O , а массу $m_0 = 1$ – в точку M , то точка M будет притягиваться к центру O с силой (см. пример 5.1):

$$\vec{F} = -\frac{m}{r^3} \vec{r},$$

где $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = (x; y; z)$, $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Легко проверить, что ньютоновское поле является потенциальным, поскольку $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$ (см. замечание 5.3). Значит, существует потенциал поля $u(r)$, который дается выражением (см. пример 5.1):

$$u(r) = \frac{m}{r}.$$

Тем самым работа ньютоновского поля, создаваемого массой m , по перемещению материальной точки массы $m_0 = 1$ из точки A в точку B не зависит от формы кривой, соединяющей эти точки, а определяется приращением потенциала этого поля, т. е.

$$\mathcal{A} = \int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r} = u(r) \Big|_A^B = \frac{m}{r} \Big|_A^B = m \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right),$$

где $r_A = \sqrt{x_A^2 + y_A^2 + z_A^2}$, $r_B = \sqrt{x_B^2 + y_B^2 + z_B^2}$.

$$\text{Ответ: } \mathcal{A} = m \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right).$$

Пример 3.14. Показать, что приращение кинетической энергии при переходе из одной точки в другую равно работе силы, действующей на массу m (теорема живых сил).

Решение. Умножим скалярно основное уравнение динамики материальной точки массы m , даваемое соотношением

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F},$$

на выражение $\vec{v} dt = d\vec{r}$, следующее из определения скорости \vec{v} . Тогда получим:

$$m\vec{v} \cdot d\vec{v} = \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

откуда следует

$$\frac{m}{2} d(v^2) = \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Проинтегрируем последнее выражение вдоль траектории движения, соединяющей точки A и B . В результате получим:

$$\frac{m}{2} \int_{AB} d(v^2) = \int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

или

$$\frac{m}{2}v^2 \Big|_B - \frac{m}{2}v^2 \Big|_A = \int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Это и есть *теорема живых сил*.

2. Формула Грина

Пусть область D , ограниченная кривой L , – правильная область, как в направлении оси Oy , так и в направлении оси Ox . Пусть в области D определены функции $X(x, y)$ и $Y(x, y)$, непрерывные в области D вместе со своими частными производными. Поскольку область D является правильной в направлении оси Oy , то положим: область D ограничена снизу линией \overline{ACB} , уравнение которой $y = y_1(x)$, а сверху – линией \overline{AEB} , уравнение которой $y = y_2(x)$. При этом $\overline{ACB} + \overline{AEB} = L$, $y_1(x) \leq y_2(x)$ для всех $x \in [a; b]$, где точке A отвечает значение $x = a$, а точке B отвечает значение $x = b$ (см. рис. 3.8). Аналогично, считая область D правильной в направлении оси Ox , положим: область D ограничена слева линией \overline{CAE} , уравнение которой $x = x_1(y)$, а справа – линией \overline{CBE} , уравнение которой $x = x_2(y)$. Теперь $\overline{CAE} + \overline{CBE} = L$, $x_1(y) \leq x_2(y)$ для всех $y \in [c; d]$, где точке C отвечает значение $y = c$, а точке E отвечает значение $y = d$ (рис. 3.8). Рассмотрим двойной интеграл

$$\iint_D \left(\frac{\partial Y(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial X(x, y)}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D \frac{\partial Y(x, y)}{\partial x} dx dy - \iint_D \frac{\partial X(x, y)}{\partial y} dx dy,$$

который сведем к двум повторным интегралам, т. к. область D является правильной как в направлении оси Ox , так и в направлении оси Oy :

$$\iint_D \left(\frac{\partial Y(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial X(x, y)}{\partial y} \right) dx dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial Y(x, y)}{\partial x} dx - \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial X(x, y)}{\partial y} dy.$$

Внутренние определенные интегралы в каждом из полученных повторных интегралов легко вычисляются

$$\iint_D \left(\frac{\partial Y(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial X(x, y)}{\partial y} \right) dx dy = \int_c^d dy Y(x, y) \Big|_{x_1(y)}^{x_2(y)} - \int_a^b dx X(x, y) \Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} =$$

$$= \int_c^d dy Y(x_2(y), y) - \int_c^d dy Y(x_1(y), y) - \int_a^b dx X(x, y_2(x)) + \int_a^b dx X(x, y_1(x)).$$

В свою очередь, полученные определенные интегралы преобразуем в криволинейные интегралы второго рода по линиям \overline{CBE} , \overline{CAE} , \overline{AEB} и \overline{ACB} соответственно, используя формулы (3.26), (3.27) и замечание 3.8 [см. рис. 3.8, а также вывод формул (3.28) и (3.29)]. Тогда получим:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Y(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial X(x, y)}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\overline{CBE}} Y(x, y) dy - \int_{\overline{CAE}} Y(x, y) dy - \int_{\overline{AEB}} X(x, y) dx + \int_{\overline{ACB}} X(x, y) dx.$$

Теперь, принимая во внимание свойства 3.7, 3.8 [см. формулы (3.22), (3.23)] и замечание 3.7, криволинейные интегралы по линиям \overline{CBE} , \overline{CAE} и \overline{AEB} , \overline{ACB} в правой части последнего соотношения запишутся в виде криволинейных интегралов по замкнутому контуру $L^+ = \overline{CBE} + \overline{EAC} = \overline{BEA} + \overline{ACB}$. В результате приходим к формуле

$$\iint_D \left(\frac{\partial Y(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial X(x, y)}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{L^+} X(x, y) dx + Y(x, y) dy, \quad (3.31)$$

которую и называют **формулой Грина** [см. также замечание 5.5, § 5.2, формула (5.15)].

Замечание 3.10. Формула (3.31) справедлива и в том случае, когда область D не является правильной. Действительно, в этом случае область D можно разбить линией l на части, которые являются правильными, а, значит, к ним применима формула Грина (3.31). Но поскольку линия l проходится дважды в противоположных направлениях, то вклады интегралов по линии l взаимно сокращаются (см. свойство 3.8, замечание 3.9).

УПРАЖНЕНИЯ

Лекция 16

Задание 16.1. Вычислить криволинейные интегралы первого рода:

1) $\int_L (x - y) dl$, L – окружность $x^2 + y^2 = 2x$.

Ответ: 2π ;

2) $\int_L (4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[3]{y}) dl$, L – дуга астроида $x = \cos^3 t$; $y = \sin^3 t$ между точками $A(1;0)$ и $B(0;1)$.

Ответ: 1;

3) $\int_L \frac{z^2 dl}{x^2 + y^2}$, L – первый виток винтовой линии $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$.

Ответ: $8\pi \frac{\sqrt[3]{2}}{3}$.

Лекция 17

Задание 17.1. Вычислить длину дуги кривой $x = \sin^4 t$, $y = \cos^2 t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

Ответ: $\frac{2\sqrt{5} + \ln(2 + \sqrt{5})}{4}$.

Задание 17.2. Вычислить массу дуги четверти эллипса $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, если $\mu(x, y) = xy$.

Ответ: $\frac{14}{9}$.

Задание 17.3. Вычислить массу дуги кривой $y = \ln x$, заключенной между точками с абсциссами $x = \sqrt{3}$ и $x = \sqrt{8}$, если плотность дуги в каждой точке равна квадрату абсциссы этой точки.

Ответ: $\frac{19}{3}$.

Задание 17.4. Вычислить координаты центра тяжести однородной полуокружности $x^2 + y^2 = 4$, симметричной относительно оси Ox .

Ответ: $(\frac{4}{\pi}; 0)$.

Лекция 18

Задание 18.1. Вычислить криволинейные интегралы второго рода:

1) $\int_L (x^2 + y^2)dx + 2xydy$, где L – дуга кубической параболы

$y = x^3$ от точки $O(0;0)$ до точки $A(1;1)$.

Ответ: $\frac{4}{3}$;

2) $\int_L (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$, где L – контур треугольника с вер-

шинами в точках $O(0;0)$, $B(1;0)$, $C(0;1)$ при положительном направлении обхода контура.

Ответ: $-\frac{1}{3}$;

3) $\int_L (x + y)dx + (x - y)dy$, где L – дуга параболы $y = x^2$ от точки

$A(-1;1)$ до точки $B(1;1)$.

Ответ: 2.

Лекция 19

Задание 19.1. С помощью криволинейного интеграла второго рода вычислить площадь области D , ограниченной линиями:

1) $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.

Ответ: $\frac{1}{3}$;

2) $x = 2\cos^3 t$; $y = 2\sin^3 t$.

Ответ: $\frac{3\pi}{2}$.

Задание 19.2. Найти работу силы \vec{F} при перемещении вдоль линии (AB) от точки A к точке B :

1) $\vec{F} = 2xy\vec{i} - y\vec{j}$; (AB) : $y = x^2 - 1$; $A(1;0)$; $B(\sqrt{3};2)$.

Ответ: 0;

2) $\vec{F} = (4x - 5y)\vec{i} + (2x + y)\vec{j}$; (AB) : отрезок AB ; $A(1;-9)$; $B(3;-3)$.

Ответ: 64.

Раздел 4. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Лекция 20

§ 4.1. Понятие поверхности

Напомним, что под поверхностью σ понимают отображение f области D , заданной, например, на плоскости Oxy , на множество σ трехмерного евклидова пространства, причем это отображение представляет собой взаимно однозначное и взаимно непрерывное соответствие между точками этих множеств. Таким образом, поверхность σ представляет собой некоторое множество точек M пространства с координатами $(x; y; z)$. Тем самым вектор $\vec{r} = \vec{r}(M) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, идущий из начала координат в точку $M(x; y; z) \in \sigma$, задает поверхность σ и называется **радиус-вектором поверхности** σ (рис. 4.1). Напомним также, что **касательная плоскость** в точке M определяется как плоскость, для которой угол между этой плоскостью и секущей MM' (M' – произвольная точка поверхности) стремится к нулю при стремлении точки M' к точке M .

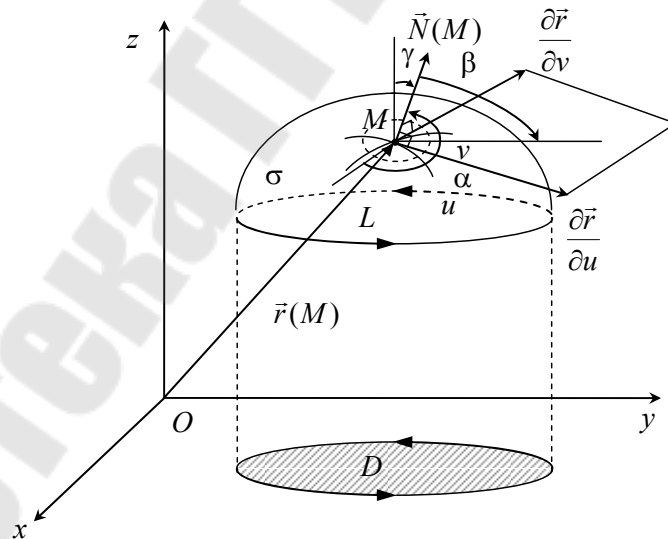


Рис. 4.1

Определение 4.1. Поверхность σ называется **гладкой**, если в каждой точке поверхности σ существует единственная касательная плоскость, положение которой непрерывно изменяется вместе с точкой касания.

Определение 4.2. *Вектором нормали* к поверхности σ в точке M называют любой ненулевой вектор $\vec{N}(M)$, перпендикулярный к касательной плоскости к поверхности σ в точке M .

Замечание 4.1. Из определения касательной плоскости к поверхности σ следует, что касательные прямые в точке M к любым гладким линиям u и v , расположенными на поверхности σ и проходящими через точку M , лежат в касательной плоскости к поверхности σ в точке M . Тогда координаты x, y, z точки M являются функциями переменных u и v , а значит, вектор $\vec{r}(M)$ также будет являться функцией переменных u и v : $\vec{r}(M) = \vec{r}(u, v)$. Но поскольку векторы $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ и $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ являются касательными к линиям u и v , проходящими через точку M , то эти векторы также лежат в касательной плоскости к поверхности σ в точке M (рис. 4.1), причем в качестве вектора нормали к касательной плоскости можно взять вектор

$$\vec{N}(M) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}. \quad (4.1)$$

Кроме того, по условию поверхность σ является гладкой, а, следовательно, в каждой точке гладкой поверхности σ существует непрерывное векторное поле нормалей.

Определение 4.3. Поверхности, на которых в целом существует непрерывное векторное поле нормалей, называют **двусторонними**; поверхности, на которых в целом такого поля не существует, называют **односторонними**.

Плоскость, сфера, эллипсоид, конус – двусторонние поверхности; *лист Мёбиуса* – односторонняя поверхность (рис. 4.2).

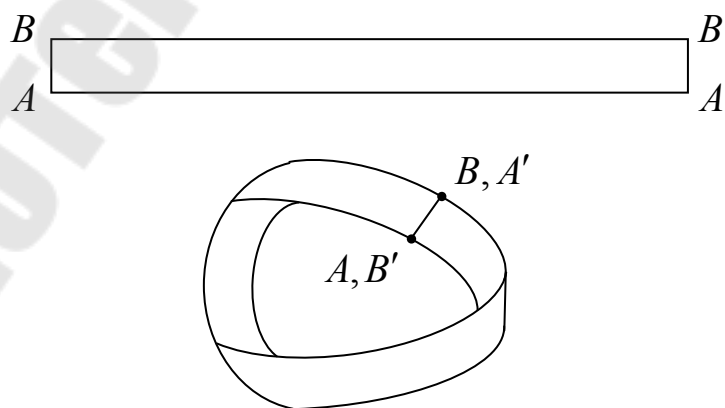


Рис. 4.2

Определение 4.4. Незамкнутая, гладкая, двусторонняя поверхность σ , ограниченная простым контуром L (рис. 4.1), называется **положительно ориентированной**, если обход по контуру L должен казаться происходящим против часовой стрелки наблюдателю, смотрящему из конца вектора нормали $\vec{N}(M)$. При этом сторона поверхности, отвечающая выбранному вектору нормали $\vec{N}(M)$, называется **положительной** и обозначается символом σ^+ . В противном случае – **отрицательно ориентированной**, а сторона поверхности – **отрицательной** и обозначается символом σ^- .

В случае замкнутой гладкой поверхности σ , ограничивающей некоторое тело, за положительную сторону поверхности выбирают ту, которая отвечает внешнему вектору нормали, а за отрицательную – противоположную ей.

§ 4.2. Поверхностный интеграл первого рода: определение и свойства

Поверхностный интеграл первого рода представляет собой такое же естественное обобщение двойного интеграла, как и криволинейный интеграл первого рода является обобщением по отношению к обычному определенному интегралу. При этом к понятию *поверхностного интеграла первого рода приводит задача о вычислении массы поверхности σ по ее поверхностной плотности $f(M)$, заданной во всех точках $M(x; y; z) \in \sigma$.*

Пусть в точках $M(x; y; z)$ некоторой двусторонней гладкой или кусочно-гладкой поверхности σ , ограниченной кусочно-гладким контуром, определена функция $f(M) = f(x, y, z)$. Разобьем поверхность σ кусочно-гладкими кривыми на n частей $\Delta\sigma_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$). В каждой из частей $\Delta\sigma_i$ выберем произвольную точку $\bar{M}_i(\bar{x}_i; \bar{y}_i; \bar{z}_i)$. Тогда приближенно считая, что плотность во всех точках области $\Delta\sigma_i$ равна $f(\bar{M}_i)$ и обозначая площадь области $\Delta\sigma_i$ через $\Delta\sigma_i$, для массы m_σ искомой поверхности σ будем иметь приближенное выражение

$$m_\sigma \approx \sum_{i=1}^n f(\bar{M}_i) \Delta\sigma_i = \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i) \Delta\sigma_i. \quad (4.2)$$

При этом погрешность приближения (4.2) будет стремиться к нулю, когда максимальный диаметр областей $\Delta\sigma_i$ стремится к нулю

($\max \text{diam} \Delta\sigma_i \rightarrow 0$). Следовательно, переходя в выражении (4.2) к пределу при $\max \text{diam} \Delta\sigma_i \rightarrow 0$, получим точное выражение для массы искомой поверхности. Итак, абстрагируясь от физического содержания функции $f(M) = f(x, y, z)$, приходим к понятию *поверхностного интеграла первого рода*.

Определение 4.5. Если существует предел интегральных сумм

$$\sum_{i=1}^n f(\bar{M}_i) \Delta\sigma_i = \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i) \Delta\sigma_i,$$

когда $\max \text{diam} \Delta\sigma_i \rightarrow 0$, не зависящий как от способа разбиения поверхности σ кусочно-гладкими кривыми на части $\Delta\sigma_i$, так и от выбора точек $\bar{M}_i(\bar{x}_i; \bar{y}_i; \bar{z}_i)$ в каждой из них, то этот предел называют **поверхностным интегралом первого рода** от функции $f(M) = f(x, y, z)$ по поверхности σ и обозначают символом

$$\iint_{\sigma} f(M) d\sigma = \iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma.$$

Итак, по определению

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \lim_{\max \text{diam} \Delta\sigma_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i) \Delta\sigma_i. \quad (4.3)$$

Механический и геометрический смысл поверхностного интеграла первого рода

Как следует из выражения (4.2), поверхностный интеграл первого рода (4.3) дает *массу поверхности* σ , поверхностная плотность которой равна $\gamma(x, y, z)$:

$$m_{\sigma} = \iint_{\sigma} \gamma(x, y, z) d\sigma. \quad (4.4)$$

В частности, при $f(x, y, z) \equiv 1$ поверхностный интеграл первого рода используют для вычисления *площади поверхности* σ :

$$S_{\sigma} = \iint_{\sigma} d\sigma. \quad (4.5)$$

Замечание 4.2. Из вида суммы в (4.3) очевидно, что *поверхностный интеграл первого рода не зависит от выбора стороны поверхности интегрирования*.

Свойства поверхностного интеграла первого рода

Свойство 4.1 (свойство линейности). Если для каждой из функций $f_1(x, y, z)$ и $f_2(x, y, z)$ существуют поверхностные интегралы первого рода по поверхности σ , а C_1, C_2 – любые постоянные, то для функции $C_1f_1(x, y, z) + C_2f_2(x, y, z)$ также существует поверхностный интеграл первого рода по поверхности σ , причем

$$\begin{aligned} & \iint_{\sigma} [C_1f_1(x, y, z) + C_2f_2(x, y, z)]d\sigma = \\ & = C_1 \iint_{\sigma} f_1(x, y, z)d\sigma + C_2 \iint_{\sigma} f_2(x, y, z)d\sigma. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Свойство 4.2 (свойство аддитивности). Если поверхность σ составлена из двух поверхностей σ_1 и σ_2 , и если для функции $f(x, y, z)$ существует поверхностный интеграл первого рода по поверхности σ , то для этой функции существуют и поверхностные интегралы первого рода по каждой из поверхностей σ_1 и σ_2 , причем

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z)d\sigma = \iint_{\sigma_1} f(x, y, z)d\sigma + \iint_{\sigma_2} f(x, y, z)d\sigma. \quad (4.7)$$

Свойство 4.3 (формула среднего). Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна на поверхности σ , то существует такая точка $M_0(x_0; y_0; z_0) \in \sigma$, что

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z)d\sigma = f(x_0, y_0, z_0)S_{\sigma}, \quad (4.8)$$

где S_{σ} – площадь поверхности σ .

Свойство 4.4 (оценка модуля интеграла). Если существует поверхностный интеграл первого рода от функции $f(x, y, z)$ по поверхности σ , то существует и поверхностный интеграл первого рода от функции $|f(x, y, z)|$ по поверхности σ , причем

$$\left| \iint_{\sigma} f(x, y, z)d\sigma \right| \leq \iint_{\sigma} |f(x, y, z)|d\sigma. \quad (4.9)$$

§ 4.3. Вычисление поверхностного интеграла первого рода

Вычисление поверхностного интеграла первого рода основано на сведении его к двойному интегралу. Пусть поверхность σ можно задать параметрически посредством радиуса-вектора

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$$

в ограниченной замкнутой области D плоскости $O'uv$. Тогда элемент площади $d\sigma$ в криволинейной системе координат $(u; v)$ дается выражением

$$d\sigma = |\vec{N}(M)| dudv, \quad (4.10)$$

где

$$\vec{N}(M) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}. \quad (4.11)$$

Если при этом функция $f(x, y, z)$ непрерывна на поверхности σ , то поверхностный интеграл первого рода (4.3) существует и может быть сведен к двойному интегралу по формуле

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| dudv. \quad (4.12)$$

При вычислении поверхностного интеграла первого рода (4.3) поверхность σ часто задается явно. В этом случае вместо общей формулы (4.12) его вычисление удобно проводить по одной из следующих формул.

1. Если поверхность σ задана явно непрерывно дифференцируемой функцией $z = z(x, y)$, $(x; y) \in D_{xy}$, где D_{xy} – проекция поверхности σ на плоскость Oxy , то поверхность σ параметризуют, полагая $u = x$, $v = y$. Тогда вместо (4.12) получим:

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy. \quad (4.13)$$

2. Если поверхность σ задана явно непрерывно дифференцируемой функцией $y = y(x, z)$, $(x; z) \in D_{xz}$, где D_{xz} – проекция поверхности σ на плоскость Oxz , то поверхность σ параметризуют, полагая $u = z$, $v = x$. Тогда вместо (4.12) будем иметь:

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_{D_{xz}} f(x, y(x, z), z) \sqrt{1 + (y'_x)^2 + (y'_z)^2} dx dz. \quad (4.14)$$

3. Если поверхность σ задана явно непрерывно дифференцируемой функцией $x = x(y, z)$, $(y; z) \in D_{yz}$, где D_{yz} – проекция поверхности σ на плоскость Oyz , то поверхность σ параметризуют, полагая $u = y$, $v = z$. Тогда формула (4.12) принимает вид:

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_{D_{yz}} f(x(y, z), y, z) \sqrt{1 + (x'_y)^2 + (x'_z)^2} dy dz. \quad (4.15)$$

Замечание 4.3. Если поверхность σ задана в неявном виде уравнением

$$\Phi(x, y, z) = 0, \quad (4.16)$$

которое можно разрешить однозначно относительно одной из переменных, то при вычислении поверхностного интеграла первого рода (4.3) используют одну из формул (4.13)–(4.15). Если же поверхность σ неоднозначно проектируется на координатные плоскости, то ее необходимо разбить на части, однозначно проектирующиеся на одну из координатных плоскостей.

Пример 4.1. Вычислить $\iint_{\sigma} x^2 y^2 d\sigma$, где σ – часть поверхности конуса $x = \sqrt{y^2 + z^2}$, отсеченная плоскостью $x = a$ ($a > 0$).

Решение. Поверхность σ (рис. 4.3) однозначно проектируется на плоскость Oyz в круг

$$D_{yz} = \{(y; z) \mid y^2 + z^2 \leq a^2\}.$$

Следовательно, мы будем пользоваться формулой (4.15). Для этого находим:

$$x'_y = \left(\sqrt{y^2 + z^2} \right)'_y = \frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}},$$

$$x'_z = \left(\sqrt{y^2 + z^2} \right)'_z = \frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}}.$$

Тогда в соответствии с формулой (4.15) получим:

$$\begin{aligned} & \iint_{\sigma} x^2 y^2 d\sigma = \\ & = \iint_{D_{yz}} (y^2 + z^2) y^2 \sqrt{1 + \frac{y^2}{y^2 + z^2} + \frac{z^2}{y^2 + z^2}} dydz = \sqrt{2} \iint_{D_{yz}} y^2 (y^2 + z^2) dydz. \end{aligned}$$

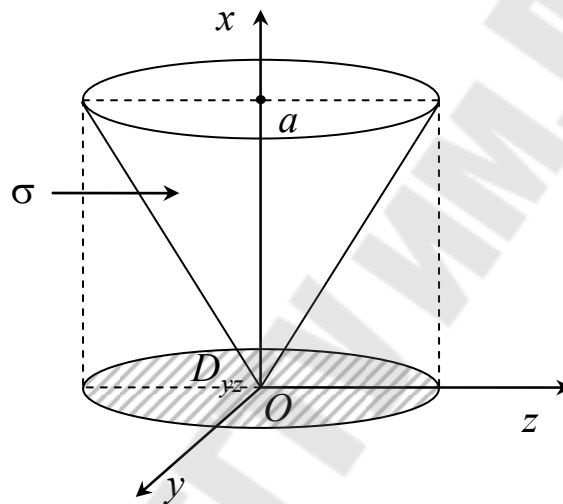


Рис. 4.3

Для вычисления полученного двойного интеграла перейдем к полярным координатам $(\rho; \varphi)$, которые связаны с декартовыми координатами $(x; y)$ этой же точки соотношениями: $y = \rho \cos \varphi$, $z = \rho \sin \varphi$. Тогда область $D_{yz} = \{(y; z) \mid y^2 + z^2 \leq a^2\}$ будет образом области $D_{\rho\varphi}$:

$$\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi \leq a^2 \text{ или } \rho^2 \leq a^2,$$

откуда (рис. 4.4):

$$D_{\rho\varphi} = \{(\rho; \varphi) \mid 0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

Теперь примем во внимание, что якобиан отображения $D_{\rho\varphi} \rightarrow D_{yz}$ равен ρ . Тем самым искомый поверхностный интеграл сводится к двойному интегралу по области $D_{\rho\varphi}$ (рис. 4.4) и легко вычисляется с помощью повторного интеграла

$$\iint_{\sigma} x^2 y^2 d\sigma = \sqrt{2} \iint_{D_{\rho\varphi}} \rho^2 \cos^2 \varphi \cdot \rho^2 \rho d\rho d\varphi = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \cos^2 \varphi \int_0^a d\rho \rho^5 =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi (1 + \cos 2\varphi) \frac{\rho^6}{6} \Big|_0^a = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} \frac{a^6}{6} = \frac{\pi\sqrt{2}}{6} a^6.$$

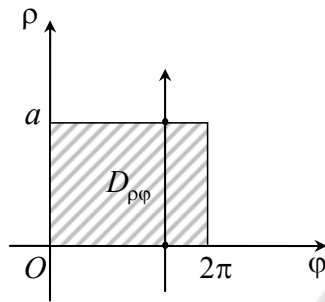


Рис. 4.4

Ответ: $\frac{\pi\sqrt{2}}{6} a^6$.

Замечание 4.4. 1. Пусть f – функция с областью определения D и областью значений E , т. е. $f: D \rightarrow E$. Тогда множество E называют **образом множества D** , а множество D – **прообразом множества E** при отображении f .

2. Подчеркнем очевидный факт: координаты y, z и область D_{yz} нам известны изначально (т. е. первичны), координаты же ρ, φ и область $D_{\rho\varphi}$ по ним отыскиваются, а значит, они – вторичны.

Лекции 21, 22

§ 4.4. Геометрические и физические приложения поверхностных интегралов первого рода

Геометрические приложения поверхностных интегралов первого рода

Вычисление площадей поверхностей

Площадь поверхности σ вычисляется с помощью формулы (4.5) (см. геометрический смысл поверхностного интеграла первого рода, § 4.2).

Вычисление же поверхностного интеграла первого рода в формуле (4.5) осуществляют с помощью общей формулы (4.12). Однако в том случае, когда поверхность σ задана явно, вместо общей формулы (4.12) вычисление поверхностного интеграла первого рода в формуле (4.5) удобно проводить по одной из формул (4.13)–(4.15).

Пример 4.2. Вычислить площадь части поверхности конуса $y^2 = x^2 + z^2$, расположенной в первом октанте и ограниченной плоскостью $x + z = 2$.

Решение. Поверхность $y^2 = x^2 + z^2$ есть конус второго порядка, осью которого служит ось Oy , а плоскость $x + z = 2$ параллельна оси Oy (рис. 4.5).

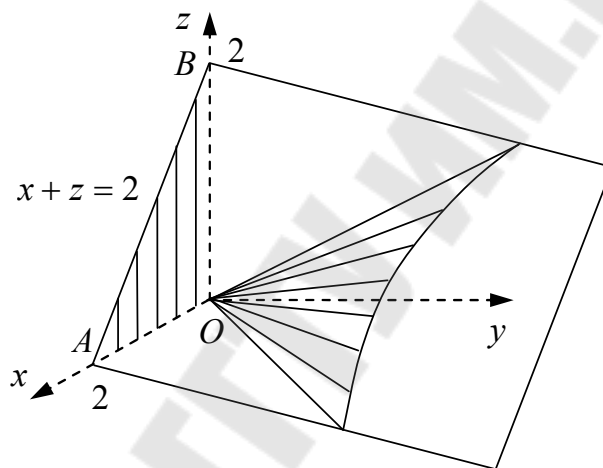


Рис. 4.5

Поскольку в нашем примере $y = \sqrt{x^2 + z^2}$, то конечно будем проектировать интересующую нас часть поверхности конуса на плоскость Oxz . Очевидно, ее проекцией является прямоугольный треугольник AOB . Тогда площадь поверхности σ , вычисляемая для рассматриваемого случая с помощью формул (4.5) и (4.14), запишется в виде:

$$S_{\sigma} = \iint_{D_{xz}} \sqrt{1 + y'_x{}^2 + y'_z{}^2} dx dz.$$

Далее находим:

$$y'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}},$$

$$y'_z = \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}} \Rightarrow 1 + y'_x{}^2 + y'_z{}^2 = 1 + \frac{x^2}{x^2 + z^2} + \frac{z^2}{x^2 + z^2} =$$

$$= 1 + \frac{x^2 + z^2}{x^2 + z^2} = 2.$$

Отсюда получим:

$$S_\sigma = \iint_{D_{xz}} \sqrt{2} \cdot dx dz = \sqrt{2} \int_0^2 dx \int_0^{2-x} dz = \sqrt{2} \int_0^2 dx z \Big|_0^{2-x} = \sqrt{2} \int_0^2 (2-x) dx =$$

$$= \sqrt{2} \left[2x - \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = \sqrt{2} (4 - 2) = 2\sqrt{2}.$$

Ответ: $2\sqrt{2}$.

Физические приложения поверхностных интегралов первого рода

Формулы, отражающие физические приложения поверхностных интегралов первого рода, можно получить (как и в случае двойного, тройного и криволинейного интегралов), используя подход бесконечно малых величин.

1. Вычисление массы поверхности

Масса поверхности σ вычисляется с помощью формулы (4.4) по заданной вдоль нее линейной плотности $\gamma(x, y, z)$ (см. механический смысл поверхностного интеграла первого рода, § 4.2).

Пример 4.3. Найти массу поверхности сферы σ : $\{x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$, если ее поверхностная плотность $\gamma(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Решение. Масса m_σ искомой поверхности дается выражением

$$m_\sigma = \iint_\sigma \gamma(x, y, z) d\sigma = \iint_\sigma \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma.$$

Для ее вычисления перейдем к сферическим координатам $(r; \theta; \varphi)$, полагая

$$x = r \cos \varphi \sin \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \theta.$$

Поскольку на поверхности сферы σ $r = R$, то, используя формулы (4.10), (4.11) и считая $u = \varphi$, $v = \theta$, находим:

$$\begin{aligned} \vec{N} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -R \sin \varphi \sin \theta & R \cos \varphi \sin \theta & 0 \\ R \cos \varphi \cos \theta & R \sin \varphi \cos \theta & -R \sin \theta \end{vmatrix} = \vec{i}(-R^2 \cos \varphi \sin^2 \theta) - \\ &- \vec{j}R^2 \sin \varphi \sin^2 \theta + \vec{k}(-R^2 \sin^2 \varphi \sin \theta \cos \theta - R^2 \cos^2 \varphi \sin \theta \cos \theta) = \\ &= \vec{i}(-R^2 \cos \varphi \sin^2 \theta) + \vec{j}(-R^2 \sin \varphi \sin^2 \theta) + \vec{k}(-R^2 \sin \theta \cos \theta); \\ d\sigma &= |\vec{N}| d\varphi d\theta = \\ &= \sqrt{R^4 \cos^2 \varphi \sin^4 \theta + R^4 \sin^2 \varphi \sin^4 \theta + R^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta} d\varphi d\theta = \\ &= R^2 \sqrt{\sin^4 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \theta} d\varphi d\theta = R^2 \sin \theta d\varphi d\theta; \end{aligned}$$

$$\gamma(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{R^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + R^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta} = R \sin \theta.$$

При этом сфера σ будет образом области

$$\sigma' = \{(\theta; \varphi) \mid 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} m_\sigma &= \iint_{\sigma'} R \sin \theta R^2 \sin \theta d\varphi d\theta = R^3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin^2 \theta = \\ &= R^3 \varphi \Big|_0^{2\pi} \frac{1}{2} \int_0^\pi d\theta (1 - \cos 2\theta) = \pi R^3 \left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right) \Big|_0^\pi = \pi^2 R^3. \end{aligned}$$

Ответ: $m_\sigma = \pi^2 R^3$.

2. Вычисление статических моментов, моментов инерции и координат центра тяжести поверхностей

К поверхностным интегралам первого рода приводят и задачи, связанные с вычислением *статических моментов, моментов инерции и координат центра тяжести поверхностей*. Для получения формул, выражающих указанные выше величины, достаточно использовать подход бесконечно малых величин, изложенный в разделе 2, § 2.4, 2.8.

В результате получим формулы, аналогичные формулам (2.27), (2.28) и (2.50)–(2.52):

$$\begin{cases} M_{yz} = \iint_{\sigma} x\gamma(x, y, z)d\sigma, & M_{zx} = \iint_{\sigma} y\gamma(x, y, z)d\sigma, \\ M_{xy} = \iint_{\sigma} z\gamma(x, y, z)d\sigma; \end{cases} \quad (4.17)$$

$$\begin{cases} I_{yz} = \iint_{\sigma} x^2\gamma(x, y, z)d\sigma, & I_{zx} = \iint_{\sigma} y^2\gamma(x, y, z)d\sigma, \\ I_{xy} = \iint_{\sigma} z^2\gamma(x, y, z)d\sigma; \end{cases} \quad (4.18)$$

$$I_x = \iint_{\sigma} (y^2 + z^2)\gamma(x, y, z)d\sigma = I_{zx} + I_{xy};$$

$$I_y = \iint_{\sigma} (x^2 + z^2)\gamma(x, y, z)d\sigma = I_{yz} + I_{xy};$$

$$I_z = \iint_{\sigma} (x^2 + y^2)\gamma(x, y, z)d\sigma = I_{yz} + I_{zx};$$

$$I_0 = \iint_{\sigma} (x^2 + y^2 + z^2)\gamma(x, y, z)d\sigma = I_{yz} + I_{zx} + I_{xy};$$

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m_{\sigma}}, \quad y_c = \frac{M_{zx}}{m_{\sigma}}, \quad z_c = \frac{M_{xy}}{m_{\sigma}}. \quad (4.19)$$

Пример 4.4. Найти положение центра тяжести верхней полусферы радиуса R , если ее поверхностная плотность $\gamma(x, y, z) = x^2 + y^2$.

Решение. Для нахождения массы m_{σ} искомой полусферы делаем такую же замену переменных, как и в примере 4.3. В результате будем иметь:

$$d\sigma = R^2 \sin \theta d\varphi d\theta, \quad \gamma(x, y, z) = x^2 + y^2 = R^2 \sin^2 \theta;$$

$$\sigma' = \{(\theta; \varphi) \mid 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\};$$

$$m_{\sigma} = \iint_{\sigma} (x^2 + y^2)d\sigma = \iint_{\sigma'} R^2 \sin^2 \theta \cdot R^2 \sin \theta d\varphi d\theta =$$

$$\begin{aligned}
&= -R^4 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d(\cos\theta)(1 - \cos^2\theta) = -R^4 \varphi \Big|_0^{2\pi} \left(\cos\theta - \frac{\cos^3\theta}{3} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \\
&= 2\pi R^4 \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi R^4.
\end{aligned}$$

Статические моменты вычисляем, как и массу в переменных θ, φ , по формулам (4.17):

$$\begin{aligned}
M_{yz} &= \iint_{\sigma} x(x^2 + y^2) d\sigma = \iint_{\sigma'} R \cos\varphi \sin\theta \cdot R^2 \sin^2\theta \cdot R^2 \sin\theta d\varphi d\theta = \\
&= R^5 \int_0^{2\pi} d\varphi \cos\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \sin^4\theta = R^5 \sin\varphi \Big|_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta \sin^4\theta = 0; \\
M_{zx} &= \iint_{\sigma} y(x^2 + y^2) d\sigma = \iint_{\sigma'} R \sin\varphi \sin\theta \cdot R^2 \sin^2\theta \cdot R^2 \sin\theta d\varphi d\theta = \\
&= R^5 \int_0^{2\pi} d\varphi \sin\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \sin^4\theta = -R^5 \cos\varphi \Big|_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta \sin^4\theta = 0; \\
M_{xy} &= \iint_{\sigma} z(x^2 + y^2) d\sigma = \iint_{\sigma'} R \cos\theta \cdot R^2 \sin^2\theta \cdot R^2 \sin\theta d\varphi d\theta = \\
&= R^5 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d(\sin\theta) \sin^3\theta = R^5 \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot \frac{\sin^4\theta}{4} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} R^5.
\end{aligned}$$

Тогда координаты центра тяжести находятся по формулам (4.19):

$$x_c = y_c = 0, \quad z_c = \frac{\pi R^5 \cdot 3}{2 \cdot 4\pi R^4} = \frac{3}{8} R.$$

Ответ: $x_c = y_c = 0, \quad z_c = \frac{3}{8} R.$

Пример 4.5. Найти моменты инерции конической поверхности $\sigma: \{z = \frac{h}{R} \sqrt{x^2 + y^2}, z = h\}$ относительно координатных плоскостей, если поверхностная плотность в каждой ее точке постоянна и равна γ_0 .

Решение. Моменты инерции конической поверхности σ относительно координатных плоскостей вычисляются по формулам (4.18).

Поскольку искомая коническая поверхность σ однозначно проектируется на плоскость Oxy в круг $D_{xy} = \{(x; y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$ [5, рис. 2.22], то, следовательно, при вычислении поверхностных интегралов, входящих в (4.18), мы будем пользоваться формулой (4.13). Для этого находим:

$$z'_x = \left(\frac{h}{R} \sqrt{x^2 + y^2} \right)'_x = \frac{hx}{R\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad z'_y = \left(\frac{h}{R} \sqrt{x^2 + y^2} \right)'_y = \frac{hy}{R\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Тогда в соответствии с формулами (4.18) и (4.13) будем иметь:

$$\begin{aligned} I_{yz} &= \iint_{\sigma} x^2 \gamma_0 d\sigma = \gamma_0 \iint_{D_{xy}} x^2 \sqrt{1 + \frac{h^2 x^2}{R^2(x^2 + y^2)} + \frac{h^2 y^2}{R^2(x^2 + y^2)}} dx dy = \\ &= \gamma_0 \sqrt{1 + \frac{h^2}{R^2}} \iint_{D_{xy}} x^2 dx dy; \quad I_{zx} = \iint_{\sigma} y^2 \gamma_0 d\sigma = \gamma_0 \sqrt{1 + \frac{h^2}{R^2}} \iint_{D_{xy}} y^2 dx dy; \\ I_{xy} &= \iint_{\sigma} z^2 \gamma_0 d\sigma = \gamma_0 \sqrt{1 + \frac{h^2}{R^2}} \frac{h^2}{R^2} \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) dx dy. \end{aligned}$$

Для вычисления полученных двойных интегралов перейдем к полярным координатам $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. Тогда область $D_{xy} = \{(x; y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$ будет образом области $D_{\rho\varphi} = \{(\rho; \varphi) \mid 0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$, а якобиан отображения $D_{\rho\varphi} \rightarrow D_{xy}$ равен ρ . Тем самым искомые моменты инерции выразятся через двойные интегралы по области $D_{\rho\varphi}$, которые легко вычисляются с помощью повторных интегралов:

$$\begin{aligned} I_{yz} &= \gamma_0 \frac{\sqrt{R^2 + h^2}}{R} \iint_{D_{\rho\varphi}} \rho^2 \cos^2 \varphi \cdot \rho d\rho d\varphi = \\ &= \gamma_0 \frac{\sqrt{R^2 + h^2}}{R} \int_0^{2\pi} d\varphi \cos^2 \varphi \int_0^R d\rho \rho^3 = \gamma_0 \frac{\sqrt{R^2 + h^2}}{R} \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right) \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^R = \\ &= \frac{1}{8} \gamma_0 \frac{\sqrt{R^2 + h^2}}{R} \left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} R^4 = \frac{\pi l R^3}{4} \gamma_0 \quad (l = \sqrt{R^2 + h^2}); \end{aligned}$$

$$I_{zx} = \gamma_0 \frac{\sqrt{R^2 + h^2}}{R} \iint_{D_{\rho\varphi}} \rho^2 \sin^2 \varphi \cdot \rho d\rho d\varphi = \gamma_0 \frac{l}{R} \int_0^{2\pi} d\varphi \sin^2 \varphi \int_0^R d\rho \rho^3 =$$

$$= \gamma_0 \frac{l}{R} \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \right) \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^R = \frac{1}{8} \gamma_0 \frac{l}{R} \left(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} R^4 = \frac{\pi l R^3}{4} \gamma_0;$$

$$I_{xy} = \gamma_0 \frac{h^2 \sqrt{R^2 + h^2}}{R^3} \iint_{D_{\rho\varphi}} \rho^2 \rho d\rho d\varphi = \gamma_0 \frac{h^2 l}{R^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R d\rho \rho^3 =$$

$$= \gamma_0 \frac{h^2 l}{R^3} \varphi \Big|_0^{2\pi} \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^R = \frac{\pi h^2 l R}{2} \gamma_0.$$

Ответ: $I_{yz} = I_{zx} = \frac{\pi l R^3}{4} \gamma_0$, $I_{xy} = \frac{\pi h^2 l R}{2} \gamma_0$ ($l = \sqrt{R^2 + h^2}$).

3. Вычисление силы притяжения поверхности

Поверхностные интегралы первого рода, как и тройные, и криволинейные интегралы первого рода, находят свое применение при изучении сил притяжения, действующих на материальную точку со стороны масс, распределенных на поверхности.

Пусть по поверхности σ непрерывным образом распределены массы с заданной в каждой ее точке $M(x, y, z)$ поверхностной плотностью $\gamma(x, y, z)$. Тогда материальная точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ массы m_0 будет притягиваться поверхностью σ с силой $\vec{F} = (X; Y; Z)$, если в основу положен закон всемирного тяготения (закон Ньютона: $f m_0 m \vec{r} / r^3$). Используя, как обычно, подход бесконечно малых величин, получим для элементарных компонент силы притяжения, действующей на материальную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ массы m_0 со стороны элемента $d\sigma$ поверхности с массой $dm = \gamma(x, y, z) d\sigma$, следующие выражения:

$$dX(x_0, y_0, z_0) = f m_0 \frac{\gamma(x, y, z)(x - x_0)}{r^3} d\sigma;$$

$$dY(x_0, y_0, z_0) = f m_0 \frac{\gamma(x, y, z)(y - y_0)}{r^3} d\sigma;$$

$$dZ(x_0, y_0, z_0) = fm_0 \frac{\gamma(x, y, z)(z - z_0)}{r^3} d\sigma,$$

где r , как обычно, означает длину вектора $\vec{r} = \overrightarrow{M_0M}$ [5, формула (2.53)]. Отсюда сразу следуют формулы для проекций силы \vec{F} притяжения простого слоя на координатные оси:

$$\begin{cases} X(x_0, y_0, z_0) = fm_0 \iint_{\sigma} \frac{\gamma(x, y, z)(x - x_0)}{r^3} d\sigma; \\ Y(x_0, y_0, z_0) = fm_0 \iint_{\sigma} \frac{\gamma(x, y, z)(y - y_0)}{r^3} d\sigma; \\ Z(x_0, y_0, z_0) = fm_0 \iint_{\sigma} \frac{\gamma(x, y, z)(z - z_0)}{r^3} d\sigma. \end{cases} \quad (4.20)$$

Замечание 4.5. Формулы (4.20) остаются справедливыми и в том случае, когда точка $M_0 \in \sigma$. Однако в этом случае все интегралы в формулах (4.20) являются несобственными, поскольку подынтегральные функции в них вблизи точки M_0 перестают быть ограниченными.

Наконец, как и в случае пространственного тела V , введем функцию $u(x_0, y_0, z_0)$, полагая

$$u(x_0, y_0, z_0) = fm_0 \iint_{\sigma} \frac{\gamma(x, y, z)}{r} d\sigma. \quad (4.21)$$

Функцию $u(x_0, y_0, z_0)$ называют *потенциалом простого слоя*, обусловленного распределенной по поверхности σ массой с поверхностной плотностью $\gamma(x, y, z)$ и действующего на точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$. При этом для этого потенциала сохраняется фундаментальное свойство (2.56) или в скалярной форме (2.57) [5].

Пример 4.6. Найти притяжение, испытываемое вершиной конуса со стороны его поверхности $\sigma: \{z = (h/R)\sqrt{x^2 + y^2}, z = h\}$, и потенциал этой поверхности на ее вершину, если поверхностная плотность масс, распределенных по поверхности конуса, равна расстоянию точки $M(x; y; z)$ конуса от его вершины $M_0(0; 0; 0)$.

Решение. Из условия задачи следует, что $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, а $\gamma(x, y, z) = r$ [5, рис. 2.22]. Тогда формулы (4.20) и (4.21) для компо-

нент силы притяжения и потенциала поверхности конуса на его вершину принимают вид ($m_0 = 1$):

$$X = f \iint_{\sigma} \frac{xd\sigma}{r^2}, \quad Y = f \iint_{\sigma} \frac{yd\sigma}{r^2}, \quad Z = f \iint_{\sigma} \frac{zd\sigma}{r^2}, \quad u = f \iint_{\sigma} d\sigma.$$

Поскольку искомая поверхность σ конуса в выбранной системе координат задается уравнениями $\sigma: \{z = \left(\frac{h}{R}\right)\sqrt{x^2 + y^2}, z = h\}$ [5, рис. 2.22], то на поверхности конуса

$$\begin{aligned} r = |\overrightarrow{M_0M}| &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + \frac{h^2}{R^2}(x^2 + y^2)} = \\ &= \sqrt{1 + \frac{h^2}{R^2}} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{\sqrt{R^2 + h^2}}{R} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{l}{R} \sqrt{x^2 + y^2}, \end{aligned}$$

где $l = \sqrt{R^2 + h^2}$.

Кроме того, поверхность конуса однозначно проектируется на плоскость Oxy в круг $D_{xy} = \{(x; y) | x^2 + y^2 \leq R^2\}$. Значит, при вычислении поверхностных интегралов, входящих в выражения для компонент силы притяжения и потенциала, мы воспользуемся формулой (4.13), как это было сделано в примере 4.5. В результате получим:

$$\begin{aligned} X &= f \iint_{D_{xy}} \frac{R^2 x}{l^2(x^2 + y^2)} \sqrt{1 + \frac{h^2}{R^2}} dx dy = \frac{fR}{l} \iint_{D_{xy}} \frac{xdxdy}{x^2 + y^2}; \\ Y &= f \iint_{D_{xy}} \frac{R^2 y}{l^2(x^2 + y^2)} \sqrt{1 + \frac{h^2}{R^2}} dx dy = \frac{fR}{l} \iint_{D_{xy}} \frac{ydx dy}{x^2 + y^2}; \\ Z &= f \iint_{D_{xy}} \frac{R^2 (h/R) \sqrt{x^2 + y^2}}{l^2(x^2 + y^2)} \sqrt{1 + \frac{h^2}{R^2}} dx dy = \frac{fh}{l} \iint_{D_{xy}} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \\ u &= f \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + \frac{h^2}{R^2}} dx dy = \frac{fl}{R} \iint_{D_{xy}} dxdy = \frac{fl}{R} \pi R^2 = \pi R l f. \end{aligned}$$

Для вычисления полученных двойных интегралов перейдем, как и в примере 4.5, к полярной системе координат. Тогда искомые ком-

поненты силы притяжения выразятся через двойные интегралы по области $D_{\rho\varphi} = \{(\rho; \varphi) \mid 0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$, которые легко вычисляются с помощью повторных интегралов:

$$X = \frac{fR}{l} \iint_{D_{\rho\varphi}} \frac{\rho \cos \varphi \cdot \rho d\rho d\varphi}{\rho^2} = \frac{fR}{l} \int_0^{2\pi} d\varphi \cos \varphi \int_0^R d\rho = \frac{fR}{l} \sin \varphi \Big|_0^{2\pi} \rho \Big|_0^R = 0;$$

$$Y = \frac{fR}{l} \iint_{D_{\rho\varphi}} \frac{\rho \sin \varphi \cdot \rho d\rho d\varphi}{\rho^2} = \frac{fR}{l} \int_0^{2\pi} d\varphi \sin \varphi \int_0^R d\rho = -\frac{fR}{l} \cos \varphi \Big|_0^{2\pi} \rho \Big|_0^R = 0;$$

$$Z = f \frac{h}{l} \iint_{D_{\rho\varphi}} \frac{\rho d\rho d\varphi}{\rho} = f \frac{h}{l} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R d\rho = f \frac{h}{l} \varphi \Big|_0^{2\pi} \rho \Big|_0^R = \frac{2\pi h R}{l} f.$$

Ответ: $X = Y = 0$, $Z = \frac{2\pi h R}{l} f$, $u = \pi R l f$.

Лекция 23

§ 4.5. Поверхностный интеграл второго рода: определение и свойства

Поверхностный интеграл второго рода вводится так же, как и криволинейный интеграл второго рода. Для этого рассмотрим двустороннюю гладкую или кусочно-гладкую поверхность σ , в каждой точке $M(x; y; z)$ которой определены *векторное поле*

$$\vec{F} = X(x, y, z)\vec{i} + Y(x, y, z)\vec{j} + Z(x, y, z)\vec{k}$$

и *единичный вектор нормали*

$$\vec{n} = \frac{\vec{N}(M)}{|\vec{N}(M)|} = (\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma), \quad (4.22)$$

где α , β , γ – углы, которые единичный вектор нормали \vec{n} к выбранной стороне поверхности σ в произвольной точке $M(x; y; z)$ образует с осями координат Ox , Oy , Oz , соответственно (рис. 4.1).

Отметим, что если поверхность σ задана в неявном виде уравнением (4.16), то направляющие косинусы единичного вектора нормали этой поверхности определяются формулами:

$$\cos \alpha = \pm \frac{\partial \Phi / \partial x}{|\text{grad } \Phi|}, \quad \cos \beta = \pm \frac{\partial \Phi / \partial y}{|\text{grad } \Phi|}, \quad \cos \gamma = \pm \frac{\partial \Phi / \partial z}{|\text{grad } \Phi|}, \quad (4.23)$$

где $\text{grad } \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \vec{k}$, а знак « \pm » должен быть согласован с выбранной стороной поверхности.

Как и в случае поверхностного интеграла первого рода, разобьем поверхность σ кусочно-гладкими кривыми на n частей $\Delta \sigma_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$). В каждой из частей $\Delta \sigma_i$ выберем произвольную точку $\bar{M}_i(\bar{x}_i; \bar{y}_i; \bar{z}_i)$. Введем обозначения $\Delta \sigma_i$ – площадь области $\Delta \sigma_i$, $\vec{F}(\bar{M}_i)$ – значение векторной функции \vec{F} в точке $\bar{M}_i(\bar{x}_i; \bar{y}_i; \bar{z}_i)$, $\vec{n}(\bar{M}_i)$ – значение вектора нормали области $\Delta \sigma_i$ в точке $\bar{M}_i(\bar{x}_i; \bar{y}_i; \bar{z}_i)$ и составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}(\bar{M}_i) \cdot \vec{n}(\bar{M}_i) \Delta \sigma_i.$$

Определение 4.6. Если существует предел интегральных сумм

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}(\bar{M}_i) \cdot \vec{n}(\bar{M}_i) \Delta \sigma_i,$$

когда $\max \text{diam } \Delta \sigma_i \rightarrow 0$, не зависящий как от способа разбиения поверхности σ кусочно-гладкими кривыми на части $\Delta \sigma_i$, так и от выбора точек $\bar{M}_i(\bar{x}_i; \bar{y}_i; \bar{z}_i)$ в каждой из них, то этот предел называют **поверхностным интегралом второго рода** от векторной функции \vec{F} по ориентируемой поверхности σ , определяемой единичным вектором нормали \vec{n} , и обозначают

$$\iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma.$$

Итак, по определению

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma &= \iint_{\sigma} [X(x, y, z) \cos \alpha + Y(x, y, z) \cos \beta + Z(x, y, z) \cos \gamma] d\sigma = \\ &= \lim_{\max \text{diam } \Delta \sigma_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \vec{F}(\bar{M}_i) \cdot \vec{n}(\bar{M}_i) \Delta \sigma_i. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Физический смысл поверхностного интеграла второго рода

Если под вектором \vec{F} подразумевать вектор скорости течения жидкости в данной точке, то поверхностный интеграл второго рода (4.24) дает общее количество жидкости, протекающей в единицу времени через поверхность σ в направлении вектора \vec{n} , и называется потоком Ψ векторного поля \vec{F} через поверхность σ , и записывают

$$\Psi = \iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma.$$

Свойства поверхностного интеграла второго рода

Свойство 4.5 (свойство линейности). Если для каждой из векторных функций \vec{F}_1 и \vec{F}_2 существуют поверхностные интегралы второго рода по поверхности σ , а C_1, C_2 – произвольные постоянные, то для функции $C_1\vec{F}_1 + C_2\vec{F}_2$ также существует поверхностный интеграл второго рода по поверхности σ , причем

$$\iint_{\sigma} (C_1\vec{F}_1 + C_2\vec{F}_2) \cdot \vec{n} d\sigma = C_1 \iint_{\sigma} \vec{F}_1 \cdot \vec{n} d\sigma + C_2 \iint_{\sigma} \vec{F}_2 \cdot \vec{n} d\sigma. \quad (4.25)$$

Свойство 4.6 (свойство аддитивности). Если поверхность σ составлена из двух поверхностей σ_1 и σ_2 , и если для функции \vec{F} существует поверхностный интеграл второго рода по поверхности σ , то для этой функции существуют и поверхностные интегралы второго рода по каждой из поверхностей σ_1 и σ_2 , причем

$$\iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{\sigma_1} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma + \iint_{\sigma_2} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma. \quad (4.26)$$

Свойство 4.7. При изменении стороны поверхности поверхностный интеграл второго рода меняет свой знак на обратный, т. е.

$$\iint_{\sigma^+} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = - \iint_{\sigma^-} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma. \quad (4.27)$$

Замечание 4.6. В случае замкнутой гладкой поверхности σ поверхностный интеграл второго рода обозначают символом

$$\oiint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma.$$

§ 4.6. Вычисление поверхностного интеграла второго рода

Вычисление поверхностного интеграла второго рода основано на сведении его к двойному интегралу. Так, если поверхность σ задана параметрически посредством радиуса-вектора $\vec{r} = \vec{r}(u, v) = (x(u, v); y(u, v); z(u, v))$ в ограниченной замкнутой области D плоскости $(u; v)$, то, принимая во внимание соотношения (4.1) и (4.10), поверхностный интеграл второго рода (4.24) сводится к двойному интегралу по области D :

$$\iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_D \vec{F} \cdot \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} |\vec{N}| dudv = \iint_D \vec{F} \cdot \vec{N} \Big|_{\substack{x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \\ z=z(u,v)}} dudv. \quad (4.28)$$

В том случае, если поверхность σ задается явно, то вычисление поверхностного интеграла второго рода (4.24) удобно проводить по одной из следующих формул:

1. Если поверхность σ задана явно непрерывно дифференцируемой функцией $z = z(x, y)$, $(x; y) \in D_{xy}$, где D_{xy} – проекция поверхности σ на плоскость Oxy , то поверхность σ параметризуют, полагая $u = x$, $v = y$. Тогда вместо (4.28) получим:

$$\iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \pm \iint_{D_{xy}} \vec{F} \cdot \vec{N} \Big|_{z=z(x,y)} dx dy, \quad (4.29)$$

где знак плюс (минус) берется тогда, когда интегрирование в левой части (4.29) ведется по стороне поверхности σ , для которой $\cos \gamma > 0$ ($\cos \gamma < 0$); $\vec{N} = (-z'_x; -z'_y; 1)$ – вектор нормали к поверхности σ , а запись $\vec{F} \cdot \vec{N} \Big|_{z=z(x,y)}$, означает, что в этом скалярном произведении переменную z необходимо заменить на функцию $z(x, y)$.

2. Если поверхность σ задана явно непрерывно дифференцируемой функцией $y = y(x, z)$, $(x; z) \in D_{xz}$, где D_{xz} – проекция поверхности σ на плоскость Oxz , то поверхность σ параметризуют, полагая $u = z$, $v = x$. Тогда вместо (4.28) будем иметь:

$$\iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \pm \iint_{D_{xz}} \vec{F} \cdot \vec{N} \Big|_{y=y(x,z)} dx dz, \quad (4.30)$$

где знак плюс (минус) берется тогда, когда интегрирование в левой части (4.30) ведется по стороне поверхности σ , для которой $\cos\beta > 0$ ($\cos\beta < 0$); $\vec{N} = (-y'_x; 1; -y'_z)$ – вектор нормали к данной поверхности, а запись $\vec{F} \cdot \vec{N} \Big|_{y=y(x,z)}$ означает, что в этом скалярном произведении переменную y необходимо заменить на функцию $y(x, z)$.

3. Если поверхность σ задана явно непрерывно дифференцируемой функцией $x = x(y, z)$, $(y, z) \in D_{yz}$, где D_{yz} – проекция поверхности σ на плоскость Oyz , то поверхность σ параметризуют, полагая $u = y$, $v = z$. Тогда вместо (4.28) будем иметь:

$$\iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \pm \iint_{D_{yz}} \vec{F} \cdot \vec{N} \Big|_{x=x(y,z)} dydz, \quad (4.31)$$

где знак плюс берется при $\cos\alpha > 0$, знак минус – при $\cos\alpha < 0$; $\vec{N} = (1; -x'_y; -x'_z)$ – вектор нормали к данной поверхности, а запись $\vec{F} \cdot \vec{N} \Big|_{x=x(y,z)}$ означает, как и ранее, что здесь теперь переменную x необходимо заменить на функцию $x(y, z)$.

Замечание 4.7. Если поверхность σ задана уравнением (4.16), которое можно разрешить однозначно относительно одной из переменных, то при вычислении поверхностного интеграла второго рода (4.24) удобно воспользоваться одной из формул (4.29)–(4.31), т. е. нет необходимости прибегать к проектированию на все три координатные плоскости. *Если же незамкнутая поверхность σ неоднозначно проектируется на координатные плоскости, то ее необходимо разбить на части, которые однозначно проектируются на одну из координатных плоскостей.*

Пример 4.7. Вычислить

$$\iint_{\sigma} [(3x + z) \cos\alpha + (3x + 3) \cos\beta + (y + z) \cos\gamma] d\sigma,$$

где σ – верхняя сторона части плоскости $6x + 3y + z = 6$, расположенная в первом октанте.

Решение. Векторное поле дается выражением $\vec{F} = (3x + z; 3x + 3; y + z)$. Поскольку поверхность σ однозначно проектируется на плоскость Oxy , причем $D_{xy} : \{6x + 3y = 6, x = 0, y = 0\}$ (рис. 4.6), то, принимая во внимание замечание 4.7, воспользуемся формулой (4.29).

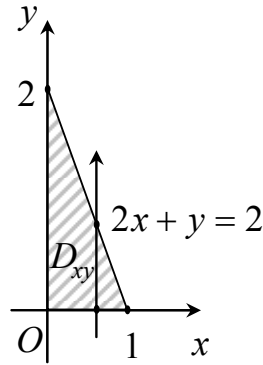


Рис. 4.6

Для этого из уравнения плоскости σ находим $z = 6 - 6x - 3y$, откуда $z'_x = -6$, $z'_y = -3$. Следовательно, вектор нормали $\vec{N} = (-z'_x; -z'_y; 1) = (6; 3; 1)$, причем $\cos \gamma > 0$, т. к. σ – верхняя сторона части искомой плоскости. Тогда, применяя формулу (4.29), получим:

$$\begin{aligned}
 & \iint_{\sigma} [(3x + z) \cos \alpha + (3x + 3) \cos \beta + (y + z) \cos \gamma] d\sigma = \\
 & = \iint_{D_{xy}} \vec{F} \cdot \vec{N} \Big|_{z=z(x,y)} dx dy = \\
 & = \iint_{D_{xy}} [6(3x + z) + 3(3x + 3) + (y + z)] \Big|_{z=6-6x-3y} dx dy = \\
 & = \iint_{D_{xy}} [6(3x + 6 - 6x - 3y) + 9x + 9 + y + 6 - 6x - 3y] dx dy = \\
 & = \iint_{D_{xy}} (-15x - 20y + 51) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{2-2x} (-15x - 20y + 51) dy = \\
 & = \int_0^1 dx (-15xy - 10y^2 + 51y) \Big|_0^{2-2x} = \int_0^1 dx [-15x(2 - 2x) - 10(2 - 2x)^2 + \\
 & + 51(2 - 2x)] = \int_0^1 dx [-30x + 30x^2 - 40(1 - x)^2 + 102 - 102x] = \\
 & = \int_0^1 dx [30x^2 - 132x + 102 - 40(x - 1)^2] = 10x^3 - 66x^2 + 102x - \frac{40}{3}(x - 1)^3 \Big|_0^1 =
 \end{aligned}$$

$$= 10 - 66 + 102 - \frac{40}{3} = 46 - \frac{40}{3} = \frac{98}{3}.$$

Ответ: $\frac{98}{3}$.

Пример 4.8. Найти поток векторного поля $\vec{F} = (-x; 2y; -z)$ через поверхность σ , представляющую собой внешнюю сторону верхней части ($z \geq 0$) поверхности параболоида $y = x^2 + z^2$, отсеченную плоскостью $y = 4$.

Решение. Построим поверхность σ , для которой $\cos\beta < 0$, т. к. σ – внешняя сторона верхней части параболоида (рис. 4.7). Поскольку она однозначно проектируется (рис. 4.8) на плоскость Oxz в область $D_{xz} = \{(x; z) \mid x^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\}$, то воспользуемся формулой (4.30).

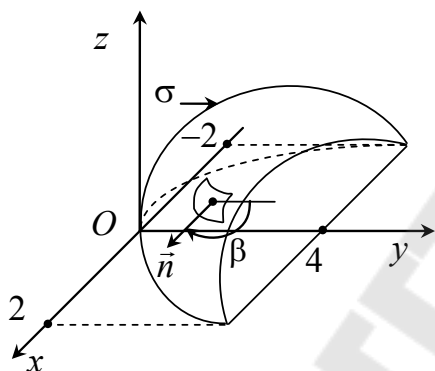


Рис. 4.7

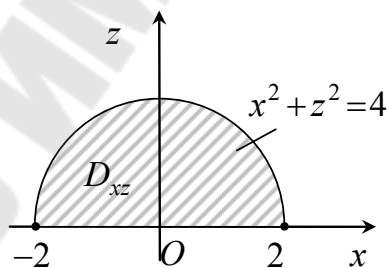


Рис. 4.8

Для этого из уравнения поверхности $y = x^2 + z^2$ находим: $y'_x = 2x$, $y'_z = 2z$. Следовательно, вектор нормали дается выражением

$$\vec{N} = (-y'_x; 1; -y'_z) = (-2x; 1; -2z).$$

Тогда поток Ψ найдем по формуле (4.30):

$$\begin{aligned} \Psi &= \iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = - \iint_{D_{xz}} \vec{F} \cdot \vec{N} \Big|_{y=y(x,z)} dx dz = \\ &= - \iint_{D_{xz}} [-x(-2x) + 2y \cdot 1 - z(-2z)] \Big|_{y=x^2+z^2} dx dz = \\ &= -2 \iint_{D_{xz}} (x^2 + x^2 + z^2 + z^2) dx dz = -4 \iint_{D_{xz}} (x^2 + z^2) dx dz. \end{aligned}$$

Для вычисления полученного двойного интеграла сделаем замену переменных: $x = 2\rho \cos \varphi$, $z = 2\rho \sin \varphi$. Тогда область $D_{xz} = \{(x; z) \mid x^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\}$ будет образом области $D_{\rho\varphi}$: $4\rho^2 \cos^2 \varphi + 4\rho^2 \sin^2 \varphi \leq 4$, $2\rho \sin \varphi \geq 0$ или $\rho^2 \leq 1$, $\sin \varphi \geq 0$, откуда $D_{\rho\varphi} = \{(\rho; \varphi) \mid 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \pi\}$ (рис. 4.9).

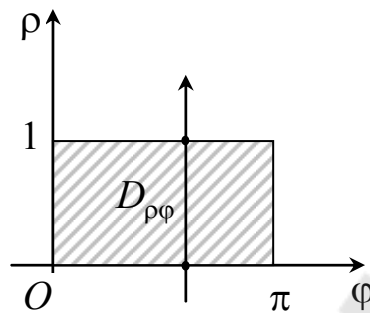


Рис. 4.9

Наконец, принимая во внимание, что якобиан отображения $D_{\rho\varphi} \rightarrow D_{xz}$ равен 4ρ , искомый поток Ψ выразится через двойной интеграл по области $D_{\rho\varphi}$, который легко вычисляется с помощью повторного интеграла

$$\begin{aligned} \Psi &= -4 \iint_{D_{\rho\varphi}} (4\rho^2 \cos^2 \varphi + 4\rho^2 \sin^2 \varphi) 4\rho d\rho d\varphi = -64 \iint_{D_{\rho\varphi}} \rho^3 d\rho d\varphi = \\ &= -64 \int_0^\pi d\varphi \int_0^1 \rho^3 d\rho = -64 \varphi \Big|_0^\pi \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^1 = -16\pi. \end{aligned}$$

Ответ: $\Psi = -16\pi$.

§ 4.7. Физические приложения поверхностных интегралов второго рода

Применение поверхностных интегралов второго рода связано с вычислением потоков векторных полей через заданную поверхность (см. физический смысл поверхностного интеграла второго рода и пример 4.8).

Пример 4.9. Вычислить поток вектора \vec{D} электрической индукции электростатического поля точечного заряда e , находящегося в

точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$, через поверхность сферы радиуса R с центром в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$, считая среду однородной и изотропной.

Решение. Так как среда однородна и изотропна, то вектор \vec{D} электрической индукции электростатического поля точечного заряда e дается выражением $\vec{D} = \frac{e\vec{r}}{4\pi r^3}$, где $\vec{r} = \overrightarrow{M_0M}$, $r = |\vec{r}|$.

Выберем систему координат так, чтобы точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ совпадала с центром системы координат $Oxyz$. Тогда, очевидно,

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0, \quad \vec{r} = (x; y; z), \quad \text{а } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = R,$$

когда точка $M(x; y; z)$ лежит на сфере. Поток Ψ векторного поля \vec{D} будем вычислять по формуле (см. физический смысл поверхностного интеграла второго рода):

$$\Psi = \oiint_{\sigma} \vec{D} \cdot \vec{n} d\sigma,$$

где \vec{n} – единичный вектор внешней нормали в произвольной точке $M(x; y; z)$ сферы ($|\vec{n}| = 1$), а значит, $\vec{r} = R\vec{n}$. Отсюда находим:

$$\Psi = \frac{e}{4\pi} \oiint_{\sigma} \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{r^3} d\sigma = \frac{e}{4\pi R^3} \oiint_{\sigma} R\vec{n} \cdot \vec{n} d\sigma = \frac{e}{4\pi R^2} \iint_{\sigma} d\sigma = \frac{e}{4\pi R^2} 4\pi R^2 = e.$$

Отметим, что полученный результат представляет собой интегральную форму одного из уравнений Максвелла для электромагнитного поля в дифференциальной форме: $\operatorname{div} \vec{D} = q$, где q – объемная плотность зарядов.

Ответ: $\Psi = e$.

УПРАЖНЕНИЯ

Лекция 20

Задание 20.1. Вычислить интегралы:

1) $\iint_{\sigma} (x^2 + y^2) d\sigma$, где σ – часть конической поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, выделяемая условием $z \leq 1$.

Ответ: $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$;

2) $\iint_{\sigma} (x + y + z) d\sigma$, где σ – часть плоскости $x + 2y + 4z = 4$, выделяемая условием $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

Ответ: $\frac{7\sqrt{21}}{3}$.

Лекция 21, 22

Задание 21.1. Вычислить площадь поверхности $\sigma: 2z = x^2 + y^2$, отсекаемой плоскостью $z = \frac{3}{2}$.

Ответ: $\frac{14\pi}{3}$.

Задание 22.1. Вычислить массу полусферы $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, если поверхностная плотность $\mu(x, y) = x^2 y^2$.

Ответ: $\frac{128\pi}{15}$.

Лекция 23

Задание 23.1. Вычислить поверхностный интеграл второго рода: $\iint_{\sigma} x^2 dydz + z^2 dxdy$, где σ – часть поверхности конуса $z^2 = x^2 + y^2$, лежащая между плоскостями $z = 0, z = 1$ (нормальный вектор \vec{n} образует тупой угол с ортом \vec{k}).

Ответ: $-\frac{\pi}{2}$.

Задание 23.2. Вычислить поток векторного поля $\vec{F} = x\vec{i} + (x+z)\vec{j} + (y+z)\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемой плоскостью $3x + 3y + z = 3$ и координатными плоскостями.

Ответ: 1.

Раздел 5. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Лекция 24

§ 5.1. Некоторые сведения из теории поля

Применение интегрального исчисления к задачам механики и математической физики очень часто удобнее проводить в векторной форме. Поэтому дадим некоторые основные понятия векторного анализа, которые приводят к физической интерпретации рассмотренных ранее интегральных образований и связывающих их формул интегрального исчисления.

Определение 5.1. Если в каждой точке $M(x; y; z)$ области V определена скалярная функция $u = u(M) = u(x, y, z)$, то говорят, что в области V задано *скалярное поле* $u = u(x, y, z)$.

Примерами скалярных полей являются *поле температуры* и *электрического потенциала*.

Поверхности, определяемые уравнением $u(x, y, z) = C$, где $C = \text{const}$, называют *поверхностями уровня*. Если поле плоское, т. е. $u = u(x, y)$, то уравнение $u(x, y) = C = \text{const}$ определяет *линии уровня*. Примерами поверхностей (линий) уровня являются: *изотермы* – поверхности (линии) постоянной температуры, *изохоры* – поверхности (линии) постоянного объема, *изобары* – поверхности (линии) постоянного давления. При этом поверхности (линии) уровня между собой не пересекаются.

Определение 5.2. Если в каждой точке $M(x; y; z)$ области V определена векторная функция

$$\vec{F} = \vec{F}(M) = \vec{F}(\vec{r}) = X(x, y, z)\vec{i} + Y(x, y, z)\vec{j} + Z(x, y, z)\vec{k}, \quad (5.1)$$

где $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ – радиус-вектор точки $M(x; y; z)$, то говорят, что в области V задано *векторное поле* \vec{F} .

Примерами векторных полей могут служить *силовое поле* и *поле скоростей*.

Линия, направление которой в каждой точке $M(x; y; z)$ совпадает с направлением вектора $\vec{F} = \vec{F}(M)$, называется *векторной линией*. Поскольку направляющие косинусы касательной к кривой пропорциональны дифференциалам dx , dy , dz , то для векторной линии поля \vec{F} справедливы равенства:

$$\frac{dx}{X(x, y, z)} = \frac{dy}{Y(x, y, z)} = \frac{dz}{Z(x, y, z)}. \quad (5.2)$$

При этом векторные линии между собой не пересекаются.

Поверхности, образованные векторными линиями, называются **векторными поверхностями**. Если в рассматриваемой области пространства взять какую-нибудь замкнутую линию, отличную от векторных линий, и через каждую ее точку провести векторную линию, то образованная ими трубкообразная векторная поверхность называется **векторной трубкой**.

Напомним, что **градиентом** скалярного поля $u = u(x, y, z)$ в точке $M(x; y; z)$ называют вектор

$$\operatorname{grad} u = \vec{\nabla} u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} \quad (5.3)$$

при условии, что все частные производные существуют и вычисляются в точке $M(x; y; z)$. Здесь $\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$ есть **оператор Гамильтона** (читается как «**набла**»).

При этом направление градиента совпадает с направлением нормали к поверхности уровня $u(x, y, z) = C$, проходящей через данную точку.

Пример 5.1. Найти поле ньютоновского притяжения, создаваемого массой m .

Решение. Пусть масса m сосредоточена в точке O . Обозначим через \vec{r} радиус-вектор \overline{OM} , соединяющий точку O с произвольной точкой $M(x; y; z)$ пространства. Положим $u(M) = \frac{m}{r}$, $r = |\vec{r}|$.

При этом поверхностями уровня, очевидно, будут сферы радиуса r с центром в точке O , так что направление градиента будет противоположно направлению вектора \vec{r} . Тогда легко видеть, что напряжение \vec{F} **поля ньютоновского притяжения** в точке $M(x; y; z)$ будет

$$\vec{F} = \operatorname{grad} \frac{m}{r} = -\frac{m}{r^3} \vec{r}.$$

Ответ: $\vec{F} = \operatorname{grad} \frac{m}{r} = -\frac{m}{r^3} \vec{r}$.

Пример 5.2. Найти количество тепла, протекающего через элемент поверхности.

Решение. Рассмотрим поле температуры $u = u(x, y, z, t)$. Подсчитаем количество dQ тепла, протекающего через элемент поверхности $d\sigma$ в направлении единичного вектора ее внешней нормали \vec{n} за бесконечно малый промежуток времени dt . Тепло течет от более нагретых частей среды к менее нагретым, и притом тем быстрее, чем быстрее убывает температура, а также зависит от свойств среды. Тем самым можно считать, что элементарное количество тепла dQ пропорционально $d\sigma$, dt и $\frac{\partial u}{\partial n}$, т. е.

$$dQ = -k \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma dt = -k \operatorname{grad} u \cdot \vec{n} d\sigma dt,$$

где коэффициент пропорциональности $k > 0$ зависит от свойств среды, и называют **коэффициентом внутренней теплопроводности среды**.

Ответ: $dQ = -k \operatorname{grad} u \cdot \vec{n} d\sigma dt$.

Определение 5.3. *Дивергенцией* или *расходимостью* векторного поля (5.1) в точке $M(x; y; z)$ называется скаляр

$$\operatorname{div} \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \quad (5.4)$$

при условии, что все частные производные существуют.

Замечание 5.1. *Физический смысл дивергенции:* если под векторным полем \vec{F} подразумевать вектор скорости \vec{v} течения жидкости в данной точке, то $\operatorname{div} \vec{v}$ представляет собой **плотность источников** этого поля.

Определение 5.4. *Ротором* (или *вихрем*) векторного поля (5.1) в точке $M(x; y; z)$ называется вектор

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \vec{k} \end{aligned} \quad (5.5)$$

при условии, что все частные производные существуют.

Замечание 5.2. Физический смысл ротора: если под векторным полем \vec{F} подразумевать вектор скорости \vec{v} точек твердого тела, то ротор поля скорости \vec{v} дает с точностью до числового множителя *мгновенную угловую скорость*: $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{v}$.

Определение 5.5. Векторное поле \vec{F} называется *потенциальным* в области V , если в каждой точке $M(x; y; z) \in V$ существует такая скалярная функция $u(x, y, z)$, что справедливо представление

$$\vec{F} = \text{grad } u. \quad (5.6)$$

Функция $u(x, y, z)$ называется *потенциалом поля* \vec{F} . Из равенств (5.1) и (5.6) следуют три равенства:

$$X = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (5.7)$$

Это означает, что выражение $Xdx + Ydy + Zdz$ является полным дифференциалом от функции $u(x, y, z)$.

Определение 5.6. Векторное поле \vec{F} называется *безвихревым* в области V , если в каждой точке $M(x; y; z) \in V$:

$$\text{rot } \vec{F} = 0. \quad (5.8)$$

Замечание 5.3. Для того чтобы векторное поле \vec{F} в области V было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы во всей рассматриваемой области оно было безвихревым. В этом случае существует потенциал поля $u(x, y, z)$, который определяется из системы уравнений (5.7). Примерами потенциальных полей являются *поле ньютоновского притяжения (гравитационное поле)* и *электростатическое поле*.

Определение 5.7. Векторное поле \vec{F} называется *соленоидальным* в области V , если в каждой точке $M(x; y; z) \in V$ существует такая векторная функция \vec{A} , что справедливо представление

$$\vec{F} = \text{rot } \vec{A}. \quad (5.9)$$

Функция \vec{A} называется *векторным потенциалом поля* \vec{F} . Из равенств (5.1) и (5.9) следует три равенства:

$$X = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad Y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad Z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}. \quad (5.10)$$

Замечание 5.4. Для того чтобы поле \vec{F} было соленоидальным в области V , необходимо и достаточно, чтобы во всей рассматриваемой области выполнялось равенство

$$\operatorname{div} \vec{F} = 0. \quad (5.11)$$

Примером соленоидального поля является *магнитное поле*.

Заметим, что произвольное поле \vec{F} всегда может быть представлено в виде суммы потенциального поля \vec{A} и соленоидального поля \vec{B} :

$$\vec{F} = \vec{A} + \vec{B}, \quad (\operatorname{rot} \vec{A} = 0, \operatorname{div} \vec{B} = 0). \quad (5.12)$$

Пример 5.3. Проверить потенциальность и соленоидальность векторного поля $\vec{F} = (6x + 7yz)\vec{i} + (6y + 7xz)\vec{j} + (6z + 7xy)\vec{k}$. В случае потенциальности поля найти его потенциал.

Решение. По условию имеем:

$$X = 6x + 7yz, \quad Y = 6y + 7xz, \quad Z = 6z + 7xy.$$

Тогда, пользуясь определением ротора (5.5), находим:

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = (6z + 7xy)'_y - (6y + 7xz)'_z = 7x - 7x = 0;$$

$$\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = (6x + 7yz)'_z - (6z + 7xy)'_x = 7y - 7y = 0;$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = (6y + 7xz)'_x - (6x + 7yz)'_y = 7z - 7z = 0.$$

Таким образом, условие потенциальности поля (5.8) выполнено. Следовательно, для данного поля \vec{F} существует потенциал поля $u(x, y, z)$, который определяется из системы уравнений (5.7):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 6x + 7yz, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 6y + 7xz, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 6z + 7xy. \quad (*)$$

Отсюда, интегрируя, например, первое уравнение, находим:

$$u = \int \frac{\partial u}{\partial x} dx = \int (6x + 7yz) dx = 3x^2 + 7xyz + \varphi(y, z).$$

Далее, из второго уравнения системы (*) после подстановки в него найденного выражения для функции u , получим:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 7xz + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 6y + 7xz \text{ или } \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 6y.$$

Теперь, проинтегрировав полученное уравнение, находим функцию φ :

$$\varphi = \int \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = \int 6y dy = 3y^2 + \psi(z).$$

Тогда потенциал u будет иметь вид:

$$u = 3x^2 + 3y^2 + 7xyz + \psi(z).$$

Наконец, используя третье уравнение системы (*) и подставляя в него последнее выражение для поля u , будем иметь:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 7xy + \frac{\partial \psi}{\partial z} = 6z + 7xy \text{ или } \frac{\partial \psi}{\partial z} = 6z.$$

Отсюда, интегрируя, находим:

$$\psi = \int 6z dz = 3z^2 + C.$$

Итак, потенциал поля u определяется с точностью до произвольной постоянной C :

$$u = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 7xyz + C.$$

Теперь проверим условие (5.11) соленоидальности векторного поля. По определению дивергенции (5.4) имеем:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(6x + 7yz) + \frac{\partial}{\partial y}(6y + 7xz) + \frac{\partial}{\partial z}(6z + 7xy) = 18 \neq 0.$$

Следовательно, данное поле \vec{F} не является соленоидальным.

Ответ: поле несоленоидальное, потенциальное и его потенциал равен: $u = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 7xyz + C$.

Лекция 25

§ 5.2. Теоремы (формулы) Стокса и Грина

Пусть σ – кусочно-гладкая, двусторонняя поверхность, ограниченная кусочно-гладким контуром λ . Будем считать, что в области V ,

содержащей поверхность σ , задано векторное поле (5.1), непрерывное в этой области вместе со своими частными производными.

Тогда имеет место *теорема Стокса*.

Теорема 5.1 (теорема Стокса). Циркуляция векторного поля \vec{F} вдоль замкнутого контура λ равна потоку ротора этого поля через поверхность σ , ограниченную этим контуром, т. е.

$$\oint_{\lambda} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{\sigma} \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma \quad (5.13)$$

или в развернутом виде:

$$\begin{aligned} \oint_{\lambda} Xdx + Ydy + Zdz = \iint_{\sigma} & \left[\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \cos \beta + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] d\sigma. \end{aligned} \quad (5.14)$$

При этом направление обхода контура λ и сторона поверхности σ , определяемая единичным вектором нормали \vec{n} [см. формулу (4.22)], должны быть согласованы (рис. 5.1), как это разъяснено в определении 4.4.

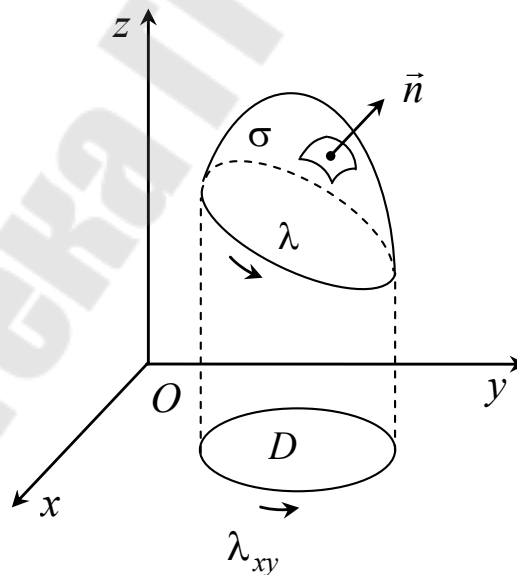


Рис. 5.1

Формулы (5.13) или (5.14) называют **формулами Стокса**. Вывод *формулы Стокса* см. в Приложении 1.

Замечание 5.5. Если поверхность σ представляет собой часть плоскости, параллельной плоскости Oxy или совпадающей с ней (рис. 5.1), то

$$dz = 0, \quad \alpha = \beta = \pi/2, \quad \gamma = 0,$$

и вместо **формулы Стокса** (5.14) мы получим **формулу Грина** [см. также формулу (3.31), § 3.6]:

$$\oint_L Xdx + Ydy = \iint_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dxdy. \quad (5.15)$$

Замечание 5.6. Из формулы (5.13) следует, что если $\text{rot } \vec{F} = 0$, т. е. поле \vec{F} в соответствии с замечанием 5.3 является **потенциальным**, то криволинейный интеграл второго рода по любой замкнутой пространственной кривой λ равен 0:

$$\oint_{\lambda} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0. \quad (5.16)$$

Отсюда также следует, что для **потенциального поля** \vec{F} **криволинейный интеграл второго рода не зависит от формы кривой интегрирования** λ . Таким образом, условия (5.8) и (5.16) представляют собой **дифференциальную и интегральную формы необходимого и достаточного условия потенциальности поля** \vec{F} . При этом для такого поля существует потенциал u , который определяется из системы уравнений (5.7).

Пример 5.4. Показать, что циркуляция скорости потенциально-го течения идеальной жидкости по любому замкнутому контуру постоянна во времени (**теорема Томсона**).

Решение. Рассмотрим внутри идеальной жидкости замкнутую линию λ в произвольный момент времени t . Тогда циркуляция скорости $\vec{v} = d\vec{r} / dt$, определяемая соотношением

$$J = \oint_{\lambda} \vec{v} \cdot d\vec{r},$$

может быть продифференцирована по времени t по правилу Лейбница

$$\frac{dJ}{dt} = \oint_{\lambda} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} + \oint_{\lambda} \vec{v} \cdot d\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \oint_{\lambda} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} + \oint_{\lambda} \vec{v} \cdot d\vec{v} = \oint_{\lambda} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r},$$

т. к. $\oint_{\lambda} \vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{1}{2} \oint_{\lambda} d(\vec{v}^2) = \frac{1}{2} \vec{v}^2 \Big|_{\lambda} = 0$.

Поскольку течение рассматриваемой жидкости является потенциальным, а значит, $\text{rot } \vec{v} = 0$, то по *теореме Стокса* (5.13) имеем:

$$\frac{dJ}{dt} = \oint_{\lambda} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = \iint_{\sigma} \text{rot} \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right) \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{\sigma} \frac{d}{dt} (\text{rot } \vec{v}) \cdot \vec{n} d\sigma = 0,$$

т. е. $J = \text{const}$.

Отсюда, как простое следствие, получается **утверждение Лагранжа**: *если рассматриваемая масса жидкости не имеет вихрей в некий определенный момент времени, то она не может иметь вихрей в любой другой момент времени.*

Ответ: $J = \text{const}$.

§ 5.3. Теорема (формула) Остроградского

Рассмотрим трехмерную область V , ограниченную кусочно-гладкой поверхностью σ ; через \vec{n} обозначим единичный вектор внешней нормали к поверхности σ . Пусть векторное поле \vec{F} (5.1) определено и непрерывно вместе со своими частными производными в области V , включая ее границу σ . Тогда имеет место *теорема Остроградского*.

Теорема 5.2 (теорема Остроградского). *Поток векторного поля \vec{F} через замкнутую поверхность σ в направлении единичного вектора ее внешней нормали \vec{n} равен тройному интегралу от дивергенции этого поля по объему V , ограниченного этой поверхностью, т. е.*

$$\oiint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_V \text{div } \vec{F} d\upsilon \quad (5.17)$$

или в развернутом виде

$$\oiint_{\sigma} (X \cos \alpha + Y \cos \beta + Z \cos \gamma) d\sigma = \iiint_V \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dx dy dz. \quad (5.18)$$

Формулы (5.17) или (5.18) называют **формулами Остроградского** (или **Остроградского–Гаусса**). Вывод *формулы Остроградского* см. в Приложении 2.

Замечание 5.7. *Формуле Остроградского можно дать физическую интерпретацию.* Если под вектором \vec{F} понимать вектор скорости жидкости, протекающей через область V , тогда поверхностный интеграл в формуле (5.17) дает количество жидкости, выте-

кающей из области V через поверхность σ в единицу времени (или втекающей в область V , если этот интеграл отрицателен). Тем самым это количество жидкости выражается через тройной интеграл от $\operatorname{div} \vec{F}$ по области V .

Замечание 5.8. Из формулы (5.17) следует, что если $\operatorname{div} \vec{F} = 0$, т. е. поле \vec{F} в соответствии с замечанием 5.4 является *соленоидальным*, то поток этого поля по любой замкнутой поверхности σ равен нулю:

$$\oiint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = 0, \quad (5.19)$$

т. е. количество жидкости, вытекающей (или втекающей) через любую замкнутую поверхность σ , будет равно нулю (отсутствуют источники). Точнее говоря, количество жидкости, втекающей внутрь области, равно количеству жидкости, вытекающей из этой области.

Замечание 5.9. Формулы Стокса, Грина и Остроградского объединены одной идеей: они выражают интеграл, распространенный на некоторый геометрический образ, через интеграл, взятый по границе этого образа. При этом формула Грина относится к случаю двумерного пространства, формула Стокса – также к случаю двумерного, но неплоского пространства, а формула Остроградского – к случаю трехмерного пространства.

Отметим также, что формулу Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a)$$

можно рассматривать, как некоторый аналог этих формул для одномерного пространства.

Пример 5.5. Найти поток векторного поля $\vec{F} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ через произвольную замкнутую двустороннюю поверхность σ , ограничивающую тело V .

Решение. Для вычисления потока Ψ воспользуемся формулой Остроградского (5.17). Поскольку $\operatorname{div} \vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$, то получим:

$$\Psi = \oiint_{\sigma} \vec{r} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \vec{r} d\upsilon = 3 \iiint_V d\upsilon = 3\upsilon.$$

Итак, поток радиуса-вектора \vec{r} через произвольную замкнутую поверхность σ равен утроенному объему ν данного тела V , ограниченного поверхностью σ .

Ответ: $\Psi = 3\nu$.

Пример 5.6. Вывести основное уравнение движения идеальной жидкости.

Решение. Будем считать, что на жидкость действуют как внешние, так и внутренние силы. Внешние силы будем считать пропорциональными массе так, что если \vec{F} есть сила, действующая на единицу массы, то на элемент жидкости dV объема $d\nu$ и плотности γ будет действовать сила $\vec{F}\gamma d\nu$, а, следовательно, на весь выделенный объем V будет действовать сила $\iiint_V \vec{F}\gamma d\nu$.

Поскольку жидкость является идеальной, то внутренние силы, действующие на выделенный из жидкости объем V со стороны остальной жидкости, представляют собой давление p , приходящееся на единицу площади, и направлено внутрь объема V по нормали \vec{n} к поверхности σ , ограничивающей этот объем. Значит, на элемент поверхности σ площади $\Delta\sigma$ действует сила $-\vec{n}pd\sigma$. Тогда на весь выделенный объем V будет действовать сила $-\iint_{\sigma} \vec{n}pd\sigma$ или, применяя

формулу Остроградского, получим:

$$-\iint_{\sigma} \vec{n}pd\sigma = -\iiint_V \text{grad } p d\nu.$$

Если теперь $\frac{d\vec{v}}{dt}$ есть ускорение, отвечающее элементу dV жидкости, то $\iiint_V \frac{d\vec{v}}{dt} \gamma d\nu$ есть ускорение выделенного объема V жидкости.

Следовательно, по *второму закону Ньютона* получим уравнение движения:

$$\iiint_V \frac{d\vec{v}}{dt} \gamma d\nu = \iiint_V \vec{F}\gamma d\nu - \iiint_V \text{grad } p d\nu,$$

откуда, в силу произвольности выбора объема V , окончательно имеем:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\gamma} \text{grad } p,$$

Это и есть искомое уравнение движения идеальной жидкости в векторной форме.

$$\text{Ответ: } \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\gamma} \text{grad } p.$$

Пример 5.7. Вывести уравнение теплопроводности.

Решение. В качестве последнего примера применения формулы Остроградского рассмотрим процесс распространения тепла в пространстве при отсутствии источников тепла. Используя результат примера 5.2, найдем, что количество тепла Q , протекающего через поверхность σ , ограничивающая произвольную область V объема υ пространства, в направлении единичного вектора ее внешней нормали \vec{n} за промежуток времени dt , дается выражением

$$Q = -\iint_{\sigma} k \text{grad } u \cdot \vec{n} d\sigma dt,$$

которое с помощью формулы Остроградского преобразуется к виду:

$$Q = -\iiint_V \text{div}(k \text{grad } u) d\upsilon dt.$$

Это тепло повлечет за собой изменение температуры u внутри области V за промежуток времени dt на величину $du = \frac{\partial u}{\partial t} dt$. Значит, количество тепла dQ , которое затрачивается на изменение температуры элемента dV области V , имеющего объем $d\upsilon$ и массу $\gamma d\upsilon$, на величину $\frac{\partial u}{\partial t} dt$, будет равно $dQ = c \frac{\partial u}{\partial t} dt \gamma d\upsilon$, где c – теплоемкость вещества области V , а γ – его плотность. Следовательно, общее количество тепла Q , затраченное на изменение температуры в области V за время dt , дается выражением

$$Q = \iiint_V c\gamma \frac{\partial u}{\partial t} d\upsilon dt.$$

Поскольку оба выражения для Q должны быть равны, то, приравняв их, получим:

$$-\iiint_V \text{div}(k \text{grad } u) d\upsilon dt = \iiint_V c\gamma \frac{\partial u}{\partial t} d\upsilon dt,$$

откуда, в силу произвольности области V , окончательно имеем иско-
мое уравнение теплопроводности:

$$c\gamma \frac{\partial u}{\partial t} = -\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u).$$

В случае однородной среды (k – константа) оно принимает вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u,$$

где $a^2 = -\frac{k}{c\gamma}$ – коэффициент температуропроводности; Δ – оператор

Лапласа: $\Delta u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

Ответ: $c\gamma \frac{\partial u}{\partial t} = -\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u)$.

УПРАЖНЕНИЯ

Лекция 24

Задание 24.1. Вычислить, является ли векторное поле \vec{F} соленоидальным и потенциальным. В случае потенциальности поля найти его потенциал:

- 1) $\vec{F} = x^2 y \vec{i} - 2xy^2 \vec{j} + 2xyz \vec{k}$;
- 2) $\vec{F} = (yz - 2x) \vec{i} + (xz + zy) \vec{j} + xy \vec{k}$;
- 3) $\vec{F} = x^2 yz \vec{i} + xz \vec{j} + xy \vec{k}$.

Лекция 25

Задание 25.1. Вычислить циркуляцию векторного поля \vec{F} по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $p: Ax + By + Cz + D = 0$ с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нормального вектора,

- 1) используя определение циркуляции;
- 2) с помощью формулы Стокса:

а) $\vec{F} = 4x \vec{i} + (x - y - z) \vec{j} + (3y + 2z) \vec{k}$;

(p): $2x + y + z - 4 = 0$.

Ответ: 36;

б) $\vec{F} = (3x - y) \vec{i} + (2y + z) \vec{j} + (2z - x) \vec{k}$;

(p): $2x - 3y + z - 6 = 0$.

Ответ: 12.

Задание 25.2. Найти поток векторного поля \vec{F} через замкнутую поверхность σ в направлении внешней нормали к ее поверхности, применив теорему Остроградского–Гаусса:

1) $\vec{F} = y \vec{i} + x \vec{j} - z \vec{k}$, $\sigma: z = x^2 + y^2$, $z = 1$.

Ответ: $\frac{-\pi}{2}$;

2) $\vec{F} = (2x + y) \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$, $\sigma: y^2 = x^2 + z^2$, $y = 4$.

Ответ: $\frac{88\pi}{3}$.

Литература

1. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление : учеб. для втузов. В 2 т. Т. 2 / Н. С. Пискунов. – Москва : Наука, 1970.

2. Бугров, Я. С. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – Москва : Наука, 1981.

3. Гурский, Е. И. Руководство к решению задач по высшей математике : учеб. пособие. В 2 ч. Ч. 2 / Е. И. Гурский. – Минск : Выш. шк., 1990.

4. Гусак, А. А. Задачи и упражнения по высшей математике : учеб. пособие. В 2 ч. Ч. 2 / А. А. Гусак. – Минск : Выш. шк., 1988.

5. Черниченко, Ю. Д. Ряды. Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы. Элементы теории поля : курс лекций по дисциплинам «Высшая математика» и «Математика» для студентов всех специальностей днев. и заоч. форм обучения. В 2 ч. Ч. 1. Ряды. Кратные интегралы / Ю. Д. Черниченко, А. В. Емелин. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2010. – 132 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Вывод формулы Стокса

Пусть σ – кусочно-гладкая, двусторонняя поверхность, ограниченная кусочно-гладким контуром λ , а $z = f(x, y)$ – уравнение поверхности σ . Будем также считать, что любая прямая параллельная оси Oz пересекает поверхность σ в одной точке, причем угол γ между единичным вектором нормали \vec{n} и осью Oz – острый. Пусть в области V , содержащей поверхность σ , задано векторное поле \vec{F} [см. формулу (5.1), § 5.1], непрерывное в этой области вместе со своими частными производными. При этих предположениях докажем формулу Стокса (5.13):

$$\oint_{\lambda} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{\sigma} \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma \quad (\text{П.1.1})$$

или в развернутом виде (5.14):

$$\begin{aligned} \oint_{\lambda} Xdx + Ydy + Zdz = \iint_{\sigma} & \left[\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \cos \beta + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] d\sigma. \end{aligned} \quad (\text{П.1.2})$$

При этом направление обхода контура λ и сторона поверхности σ , определяемая единичным вектором нормали \vec{n} [см. формулу (4.22), § 4.5], должны быть согласованы (см. рис. 5.1), как это разъяснено в определении 4.4.

Доказательство. Рассмотрим криволинейный интеграл второго рода $\oint_{\lambda} X(x, y, z) dx$. На линии λ , очевидно, имеем $z = f(x, y)$, где точка $(x, y) \in \lambda_{xy}$, а λ_{xy} есть проекция линии λ на плоскость Oxy (см. рис. 5.1). Следовательно, можно записать:

$$\oint_{\lambda} X(x, y, z) dx = \oint_{\lambda_{xy}} X(x, y, f(x, y)) dx,$$

где интеграл в правой части представляет собой криволинейный интеграл второго рода по линии λ_{xy} . Преобразуем этот криволинейный интеграл второго рода по линии λ_{xy} с помощью формулы Грина

$$\oint_{\lambda_{xy}} \bar{X}(x, y) dx + \bar{Y}(x, y) dy = \iint_D \left(\frac{\partial \bar{Y}(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial \bar{X}(x, y)}{\partial y} \right) dx dy,$$

полагая: $\bar{X}(x, y) = X(x, y, f(x, y))$, $\bar{Y}(x, y) = 0$ [см. формулы (3.31), § 3.6 и (5.15), § 5.2]. Тогда получим:

$$\oint_{\lambda} X(x, y, z) dx = \oint_{\lambda_{xy}} X(x, y, f(x, y)) dx = - \iint_D \frac{\partial X(x, y, f(x, y))}{\partial y} dx dy. \quad (\text{П.1.3})$$

Теперь учтем, что по определению производной сложной функции имеем:

$$\frac{\partial X(x, y, f(x, y))}{\partial y} = \frac{\partial X(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial X(x, y, z)}{\partial z} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}.$$

Следовательно, вместо (П.1.3) получим:

$$\oint_{\lambda} X(x, y, z) dx = - \iint_D \frac{\partial X(x, y, z)}{\partial y} dx dy - \iint_D \frac{\partial X(x, y, z)}{\partial z} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx dy. \quad (\text{П.1.4})$$

В свою очередь, двойные интегралы в правой части равенства (П.1.4) преобразуются в поверхностные интегралы второго рода по поверхности σ :

$$- \iint_D \frac{\partial X(x, y, z)}{\partial y} dx dy = - \iint_{\sigma} \frac{\partial X(x, y, z)}{\partial y} \cos \gamma d\sigma; \quad (\text{П.1.5})$$

$$\begin{aligned} - \iint_D \frac{\partial X(x, y, z)}{\partial z} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx dy &= - \iint_{\sigma} \frac{\partial X(x, y, z)}{\partial z} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \cos \gamma d\sigma = \\ &= \iint_{\sigma} \frac{\partial X(x, y, z)}{\partial z} \cos \beta d\sigma, \end{aligned} \quad (\text{П.1.6})$$

где учли, что $dx dy = \cos \gamma d\sigma$ (γ – острый угол), причем для направляющих косинусов имеем [см. формулы (4.16), § 4.3, (4.22) и (4.23), § 4.5]:

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2}};$$

$$\cos \beta = -\frac{f'_y(x, y)}{\sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2}} \Rightarrow \cos \beta = -f'_y(x, y) \cos \gamma.$$

Теперь из выражений (П.1.4)–(П.1.6) находим:

$$\oint_{\lambda} X(x, y, z) dx = -\iint_{\sigma} \frac{\partial X(x, y, z)}{\partial y} \cos \gamma d\sigma + \iint_{\sigma} \frac{\partial X(x, y, z)}{\partial z} \cos \beta d\sigma. \quad (\text{П.1.7})$$

Чтобы получить выражения для $\oint_{\lambda} Y(x, y, z) dy$ и $\oint_{\lambda} Z(x, y, z) dz$, которые входят в левую часть формулы Стокса (П.1.2), воспользуемся циклическими перестановками:

$$\begin{array}{ccc} x \longrightarrow y & X \longrightarrow Y & \alpha \longrightarrow \beta \\ \swarrow z \searrow & \swarrow Z \searrow & \swarrow \gamma \searrow \end{array} \quad (\text{П.1.8})$$

Тогда, применяя циклические перестановки к выражению (П.1.7), получим:

$$\oint_{\lambda} Y(x, y, z) dy = -\iint_{\sigma} \frac{\partial Y(x, y, z)}{\partial z} \cos \alpha d\sigma + \iint_{\sigma} \frac{\partial Y(x, y, z)}{\partial x} \cos \gamma d\sigma; \quad (\text{П.1.9})$$

$$\oint_{\lambda} Z(x, y, z) dz = -\iint_{\sigma} \frac{\partial Z(x, y, z)}{\partial x} \cos \beta d\sigma + \iint_{\sigma} \frac{\partial Z(x, y, z)}{\partial y} \cos \alpha d\sigma. \quad (\text{П.1.10})$$

Наконец, объединяя все три выражения (П.1.7), (П.1.9) и (П.1.10), приходим к формуле Стокса (П.1.2), которую можно записать в инвариантной форме (П.1.1), если воспользоваться выражением для ротора [см. формулу (5.5), § 5.1, а также замечание 3.7, § 3.4].

Вывод формулы Остроградского

Пусть V – трехмерная область, ограниченная замкнутой, кусочно-гладкой поверхностью σ ; через \vec{n} обозначим единичный вектор внешней нормали к поверхности σ . Пусть векторное поле \vec{F} , даваемое формулой (5.1), определено и непрерывно вместе со своими частными производными в области V , включая ее границу σ . При этих предположениях докажем формулу Остроградского (5.17):

$$\oiint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} d\upsilon \quad (\text{П.2.1})$$

или в развернутом виде

$$\oiint_{\sigma} (X \cos \alpha + Y \cos \beta + Z \cos \gamma) d\sigma = \iiint_V \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dx dy dz. \quad (\text{П.2.2})$$

Доказательство. Не ограничивая общности доказательства, будем считать, что область V ограничена однозначными и непрерывными поверхностями: снизу – поверхностью σ_1 , уравнение которой $z = f_1(x, y)$, сверху – поверхностью σ_2 , уравнение которой $z = f_2(x, y)$, где $f_1(x, y) \leq f_2(x, y)$ для всех точек $M(x, y)$, принадлежащих области D – проекции области V на плоскость Oxy , а сбоку – цилиндрической поверхностью σ_3 , образующая которой параллельна оси Oz (рис. П.2.1).

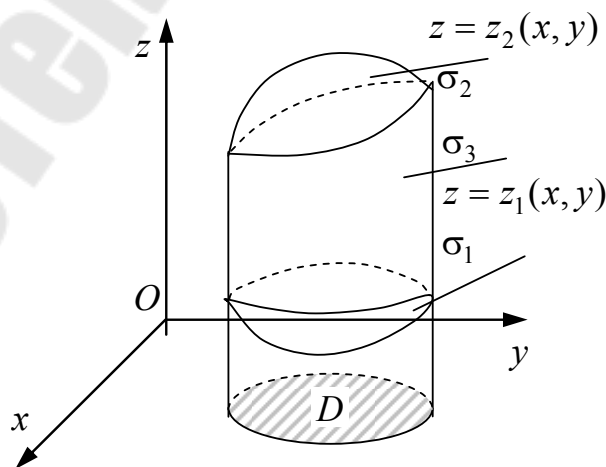


Рис. П.2.1

Такой специальный выбор области V действительно не ограничивает общности доказательства, поскольку любую область V можно разбить на сумму областей, имеющих рассматриваемый специальный вид.

Рассмотрим тройной интеграл $\iiint_V \frac{\partial Z(x, y, z)}{\partial z} dx dy dz$. Этот тройной интеграл сводится к повторному [см. формулу (2.37), § 2.6]:

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial Z(x, y, z)}{\partial z} dx dy dz &= \iint_D dx dy \int_{f_1(x, y)}^{f_2(x, y)} \frac{\partial Z(x, y, z)}{\partial z} dz = \\ &= \iint_D dx dy Z(x, y, z) \Big|_{f_1(x, y)}^{f_2(x, y)} = \\ &= \iint_D dx dy Z(x, y, f_2(x, y)) - \iint_D dx dy Z(x, y, f_1(x, y)). \end{aligned} \quad (\text{П.2.3})$$

Поскольку \vec{n} есть единичный вектор внешней нормали к поверхности σ , то на поверхности σ_1 имеем $\cos \gamma < 0$, на поверхности σ_2 имеем $\cos \gamma > 0$, а на поверхности σ_3 имеем $\cos \gamma = 0$ ($\gamma = \pi/2$). Тогда двойные интегралы в правой части выражения (П.2.3) преобразуются в поверхностные интегралы второго рода по поверхностям σ_2 и σ_1 [см. формулу (4.29), § 4.6]:

$$\begin{aligned} \iint_D dx dy Z(x, y, f_2(x, y)) &= \iint_{\sigma_2} Z(x, y, z) \cos \gamma d\sigma; \\ -\iint_D dx dy Z(x, y, f_1(x, y)) &= \iint_{\sigma_1} Z(x, y, z) \cos \gamma d\sigma. \end{aligned}$$

В результате, вместо (П.2.3) получим:

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial Z(x, y, z)}{\partial z} dx dy dz &= \iint_{\sigma_2} Z(x, y, z) \cos \gamma d\sigma + \iint_{\sigma_1} Z(x, y, z) \cos \gamma d\sigma + \\ &+ \iint_{\sigma_3} Z(x, y, z) \cos \gamma d\sigma = \oiint_{\sigma} Z(x, y, z) \cos \gamma d\sigma. \end{aligned} \quad (\text{П.2.4})$$

Чтобы получить выражения для интегралов $\iiint_V \frac{\partial X(x, y, z)}{\partial x} dx dy dz$ и $\iiint_V \frac{\partial Y(x, y, z)}{\partial y} dx dy dz$, которые входят в правую часть формулы Остроградского (П.2.2), воспользуемся циклическими перестановками (П.1.8). Тогда, применяя циклические перестановки к выражению (П.2.4), получим:

$$\iiint_V \frac{\partial X(x, y, z)}{\partial x} dx dy dz = \oiint_{\sigma} X(x, y, z) \cos \alpha d\sigma, \quad (\text{П.2.5})$$

$$\iiint_V \frac{\partial Y(x, y, z)}{\partial y} dx dy dz = \oiint_{\sigma} Y(x, y, z) \cos \beta d\sigma. \quad (\text{П.2.6})$$

Наконец, объединяя все три выражения (П.2.4)–(П.2.6), приходим к формуле Остроградского (П.2.2), которую можно записать в инвариантной форме (П.2.1), если воспользоваться выражением для дивергенции [см. формулу (5.4), § 5.1, а также замечание 4.6, § 4.5].

Содержание

Предисловие.....	3
Раздел 3. Криволинейные интегралы.....	4
<i>Лекция 16</i>	4
§ 3.1. Криволинейный интеграл первого рода: определение и свойства	4
§ 3.2. Вычисление криволинейного интеграла первого рода	7
<i>Лекция 17</i>	11
§ 3.3. Геометрические и физические приложения криволинейных интегралов первого рода	11
<i>Лекция 18</i>	18
§ 3.4. Криволинейный интеграл второго рода: определение и свойства	18
§ 3.5. Вычисление криволинейного интеграла второго рода	21
<i>Лекция 19</i>	24
§ 3.6. Геометрические и физические приложения криволинейных интегралов второго рода	24
Упражнения	31
Раздел 4. Поверхностные интегралы.....	33
<i>Лекция 20</i>	33
§ 4.1. Понятие поверхности	33
§ 4.2. Поверхностный интеграл первого рода: определение и свойства	35
§ 4.3. Вычисление поверхностного интеграла первого рода	38
<i>Лекции 21, 22</i>	41
§ 4.4. Геометрические и физические приложения поверхностных интегралов первого рода.....	41
<i>Лекция 23</i>	51
§ 4.5. Поверхностный интеграл второго рода: определение и свойства	51
§ 4.6. Вычисление поверхностного интеграла второго рода	54
§ 4.7. Физические приложения поверхностных интегралов второго рода.....	58
Упражнения	60
Раздел 5. Элементы теории поля	62
<i>Лекция 24</i>	62
§ 5.1. Некоторые сведения из теории поля.....	62
<i>Лекция 25</i>	67

§ 5.2. Теоремы (формулы) Стокса и Грина	67
§ 5.3. Теорема (формула) Остроградского	70
Упражнения	75
Литература	76
Приложения	77

Учебное электронное издание комбинированного распространения

Учебное издание

**Черниченко Юрий Дмитриевич
Емелин Анатолий Владимирович**

**РЯДЫ. КРАТНЫЕ, КРИВОЛИНЕЙНЫЕ
И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ**

**Курс лекций
по дисциплинам «Высшая математика»
и «Математика» для студентов всех специальностей
дневной и заочной форм обучения
В двух частях**

**Часть 2
Криволинейные и поверхностные интегралы.
Элементы теории поля**

Электронный аналог печатного издания

Редактор *Н. И. Жукова*
Компьютерная верстка *М. В. Аникеенко*

Подписано в печать 27.01.11.

Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».

Ризография. Усл. печ. л. 4,88. Уч.-изд. л. 3,9.

Изд. № 41.

E-mail: ic@gstu.by

<http://www.gstu.by>

Издатель и полиграфическое исполнение:
Издательский центр учреждения образования
«Гомельский государственный технический университет
имени П. О. Сухого».

ЛИ № 02330/0549424 от 08.04.2009 г.

246746, г. Гомель, пр. Октября, 48.