Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Высшая математика»

В. И. Гойко, В. Г. Тепляков

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

КУРС ЛЕКЦИЙ
по дисциплинам «Высшая математика» и «Математика» для студентов всех специальностей заочной формы обучения

Электронный аналог печатного издания

Гомель 2010

УДК 514.12+512.743(075.8)
ББК 22.151.5+22.143я73
Г59

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом
заочного факультета ГГТУ им. П. О. Сухого
(*протокол № 7 от 30.03.2010 г.*)

Рецензент: зав. каф. «Высшая математика» БелГУТ канд. физ.-мат. наук, доц. *С. П. Новиков*

Гойко, В. И.

Г59 Аналитическая геометрия и элементы линейной алгебры : курс лекций по дисциплинам «Высшая математика» и «Математика» для студентов всех специальностей заоч. формы обучения / В. И. Гойко, В. Г. Тепляков. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2010. – 65 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: http://lib.gstu.local. – Загл. с титул. экрана.

ISBN 978-985-420-965-4.

Изложены основы аналитической геометрии и элементы линейной алгебры. Приведены решенные задачи и примеры, иллюстрирующие основные положения, формулы и определения аналитической геометрии и линейной алгебры.

Для студентов всех специальностей заочной формы обучения.

УДК 514.12+512.743(075.8)
ББК 22.151.5+22.143я73

ISBN 978-985-420-965-4

Глава 1
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Рассмотрим на прямой $\boldsymbol{l}$ две различные точки O и E. Будем говорить, что точка M прямой $\boldsymbol{l}$, отличная от точки O, и точка E лежbт по одну сторону относительно O, если точка O не лежит между E и M. Точки E и M лежат по разные стороны от точки O, если O лежит между ними.

Лучом (O, E) называется совокупность точек, состоящих из O, E и всех точек M прямой $\boldsymbol{l}$, лежащих по одну сторону с точкой E относительно точки O. Точка O называется *началом луча* (рис. 1.1).

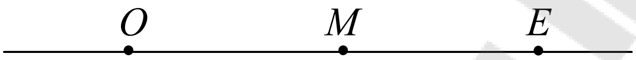

Рис. 1.1

Рассмотрим на прямой $\boldsymbol{l}$ две точки O и E. Точка O делит прямую $\boldsymbol{l}$ на два луча. Точка O называется *началом системы координат*, прямая $\boldsymbol{l}$ – *осью координат*. Выберем отрезок OE в качестве единицы масштаба. Возьмем на прямой $\boldsymbol{l}$ произвольную точку M. Этой точке поставим в соответствие число x, определяемое следующим образом:

1) $|x|$ – длина отрезка OM, измеренного при помощи единичного отрезка OE;

2) $x > 0$, если точки M и E принадлежат одному лучу (O, E), и $x < 0$, если точки M и E принадлежат разным лучам прямой $\boldsymbol{l}$ относительно точки O;

3) $x = 0$, если точка M совпадает с точкой O.

Число x называется *координатой точки* M и записывается $M(x)$. Обратно, всякому числу x ставится в соответствие на прямой $\boldsymbol{l}$ точка M, для которой число x есть координата, если даны начало системы координат O и единица масштаба OE.

§ 1.1. Вычисление длины отрезка на прямой. Деление отрезка в данном отношении

Пусть даны две точки $A(x_1)$ и $B(x_2)$.

Длина отрезка AB, измеренного единичным отрезком OE (рис. 1.2), вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{d} = |x_2 - x_1|. \tag{1.1}$$

Рис. 1.2

Разделить отрезок в данном отношении λ – это значит на прямой AB найти такую точку C, что выполняются следующие условия:

$$\frac{\text{длина } AC}{\text{длина } BC} = |\lambda|;$$

точка C принадлежит отрезку AB, если $\lambda > 0$, и лежит вне отрезка AB, если $\lambda < 0$.

Пусть координаты точек A и B будут соответственно x_1 и x_2. Так как $AC = |x - x_1|$, $CB = |x_2 - x|$, а знаки разностей $x - x_1$ и $x_2 - x$ одинаковы, если точка C принадлежит отрезку AB, и различны в противном случае, то получим равенство

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda .$$

Теперь получаем $(1+\lambda)x = x_1 + \lambda x_2$. Если $1+\lambda \neq 0$, то $x = (x_1 + \lambda x_2)/(1+\lambda)$.

Если $\lambda = 1$, то $x = (x_1 + x_2)/2$. В этом случае делящая точка $C(x)$ будет серединой отрезка.

§ 1.2. Прямоугольные декартовы координаты на плоскости

Рассмотрим на плоскости две взаимно перпендикулярные прямые (рис. 1.3).

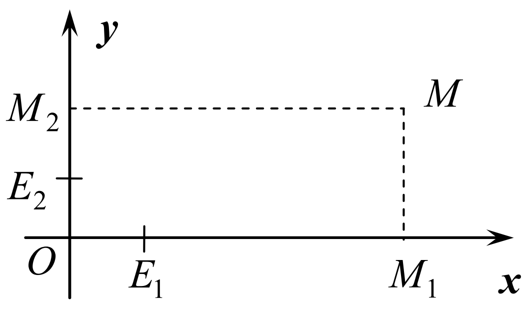

Рис. 1.3

Пусть точка O – точка пересечения этих прямых и E_1, E_2 – две точки на этих прямых, удовлетворяющих условию

$$|OE_1| = |OE_2|.$$

Точка O называется *началом системы координат*, ось Ox называется осью *абсцисс*, ось Oy – осью *ординат*. На рисунках ось абсцисс проводится горизонтально, а ось ординат – вертикально. На оси абсцисс положительным направлением считается направление слева направо, а на оси ординат положительным направлением считается направление снизу вверх.

Пусть M – произвольная точка плоскости. Проведем перпендикуляры из точки M к осям Ox и Oy и найдем точки M_1 и M_2 пересечения этих перпендикуляров с соответствующими осями. *Координатами точки* M называются числа $x_0 = OM_1$, $y_0 = OM_2$. Запись $M(x_0, y_0)$ обозначает, что x_0, y_0 есть координаты точки M. Теперь мы скажем, что на плоскости построена *декартова прямоугольная система координат*, которая обозначается символом Oxy. Каждой точке M плоскости поставлена в соответствие вполне определенная пара вещественных чисел, взятых в определенном порядке, короче, упорядоченная пара чисел – ее координаты x и y. Обратно, каждой упорядоченной паре действительных чисел x и y соответствует единственная точка M, координаты которой равны x и y.

§ 1.3. Вычисление длины отрезка на плоскости

Вычислим длину $\boldsymbol{d}$ отрезка AB, если заданы координаты точек $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$. Проведем через точки A и B прямые, параллельные осям координат, до пересечения с ними в точках A_1, A_2, B_1, B_2 (рис. 1.4).

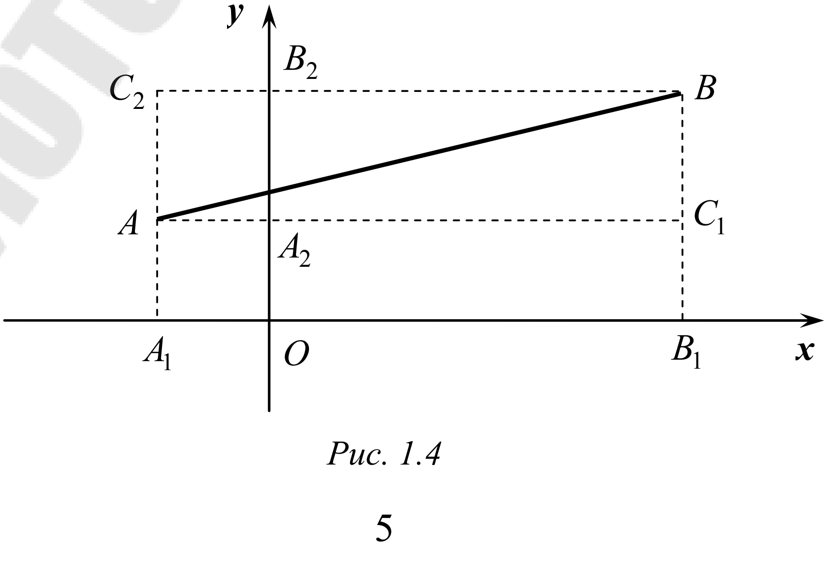

Рис. 1.4

Рассмотрим прямоугольный треугольник AC_1B. Используя теорему Пифагора, получим:

$$|AB|^2 = |AC_1|^2 + |BC_1|^2 = |A_1B_1|^2 + |A_2B_2|^2;$$

$$\boldsymbol{d}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Отсюда получаем следующую формулу:

$$\boldsymbol{d} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (1.2)$$

Если прямая *AB* параллельна одной из осей координат, например, оси *Ox*, или совпадает с ней, то длина отрезка *AB* равна длине отрезка A_1B_1. Следовательно, $|AB| = |x_2 - x_1|$, и т. к. в этом случае $y_2 = y_1$, то $\boldsymbol{d}$ вычисляется по формуле (1.2). Формула (1.2) является общей формулой, справедливой для любого положения точек *A*, *B* на плоскости.

Пример 1.1

Вычислить длину отрезка *AB*, если $A(-2; 3)$, $B(6; -12)$.

Решение. Используем формулу (1.2):

$$\boldsymbol{d} = \sqrt{[6-(-2)]^2 + [(-12)-3]^2} = \sqrt{64+225} = 17.$$

§ 1.4. Деление отрезка в данном отношении

Пусть даны точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$. Требуется найти точку $M(x, y)$, которая делит отрезок M_1M_2 в отношении $\lambda_1 : \lambda_2$, т. е. удовлетворяющую соотношению $\dfrac{M_1M}{M\,M_2} = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$. Тогда координаты точки *M* вычисляются по формулам:

$$x = \frac{x_1\lambda_2 + x_2\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}; \quad y = \frac{y_1\lambda_2 + y_2\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}. \qquad (1.3)$$

Пусть $M(x, y)$ – середина отрезка M_1M_2. Легко видно, что координаты точки *M* вычисляются по следующим формулам:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \qquad (1.4)$$

Пример 1.2

Найти центр тяжести $M(x, y)$ треугольника ABC (рис. 1.5), если $A(1,5)$, $B(7,8)$, $C(4,2)$.

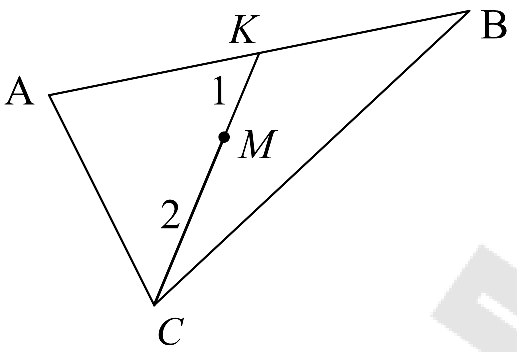

Рис. 1.5

Решение. Известно, что искомая точка M лежит на пересечении медиан треугольника и делит каждую из них в отношении 2:1 (считая от вершины треугольника). Так как CK – медиана, то $K(x_1, y_1)$ – середина стороны AB. Тогда $x_1 = \frac{1+7}{2} = 4$; $y_1 = \frac{5+8}{2} = 6{,}5$. Теперь используем формулы (1.3). Делим отрезок CK в отношении $2:1$, получим:

$$x = \frac{4 \cdot 1 + 4 \cdot 2}{1+2} = 4; \;\; y = \frac{2 \cdot 1 + 6{,}5 \cdot 2}{1+2} = 5.$$

Итак, $M(4; 5)$.

§ 1.5. Полярные координаты точки

Рассмотрим на плоскости луч (O, E) с начальной точкой O и некоторой точкой E. Луч называется *полярной осью*, точка O – *полюсом*, точка E – *единичной точкой*.

Пусть M – произвольная точка плоскости. Длину отрезка OM, измеренного единичным отрезком OE, называют длиной *полярного радиуса* точки M и обозначают $\boldsymbol{r}$. Положительный угол от луча (O, E) до луча (O, M) называют *полярным углом* точки M и обозначают буквой φ (рис. 1.6). Пара чисел φ и $\boldsymbol{r}$ называется *полярными координатами* точки M. Последний факт записывается следующим образом: $M(\varphi, \boldsymbol{r})$.

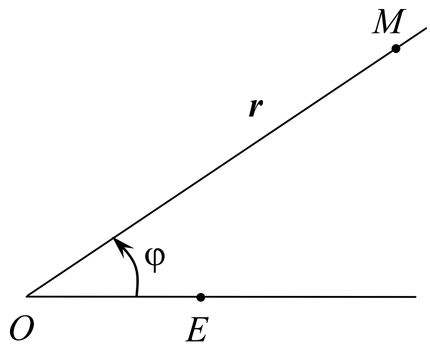

Рис. 1.6

Если известны полярные координаты φ, $\boldsymbol{r}$ точки M, то по формулам:

$$x = r\cos\varphi; \;\; y = r\sin\varphi \tag{1.5}$$

вычисляются декартовы координаты. Обратно, если известны декартовы координаты x, y точки M, то ее полярные координаты вычисляются по формулам:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}; \\ \cos\varphi = \dfrac{x}{r} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{r} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{cases} \tag{1.6}$$

§ 1.6. Элементы векторной алгебры

Одни физические величины, такие как масса, температура, время, можно вполне характеризовать численным значением. Такие величины называются *скалярными*, а числа, выражающие значения этих величин, называются *скалярами*. Другие же величины, такие как сила, скорость, ускорение, характеризуются не только численным значением, но и направлением. Такие величины называются *векторными*.

Под скалярами мы будем понимать вещественные числа. Вектором называется отрезок, концы которого рассматриваются в определенном порядке.

Если за первую точку отрезка AB принять точку A, а за вторую – точку B, то вектор записывается символом $\overline{AB}$. Точка A называется *начальной точкой вектора*, а точка B – *конечной*. Иногда вектор обозначают одной буквой (прописной латинской) с черточкой вверху, например, $\overline{a}$. На чертежах вектор изображается отрезком со стрелкой, направленной к концу отрезка (рис. 1.7).

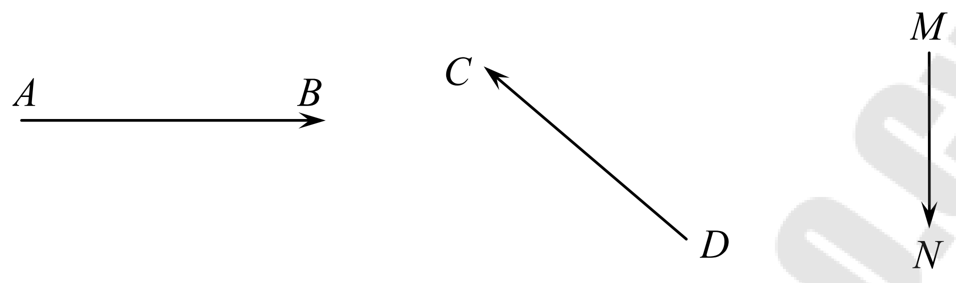

Рис. 1.7

Если конечная точка *B* вектора совпадает с начальной точкой *A*, то вектор $\overline{AB}$ называется *нулевым вектором*. Длина отрезка *AB* называется *модулем вектора* $\overline{AB}$ и обозначается символом $|\overline{AB}|$. Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным вектором*. Два вектора называются *равными*, если они имеют общее направление и равные модули.

Два вектора называются коллинеарными, если они принадлежат одной прямой или параллельным прямым.

Проекция вектора на ось

Пусть задан вектор $\overline{AB}$ и ось *L* (рис. 1.8).

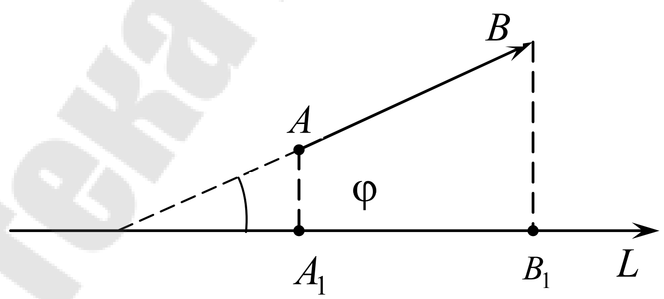

Рис. 1.8

Пусть A_1 и B_1 – проекции точек *A* и *B* на эту ось. *Проекцией* вектора $\overline{AB}$ на ось *L* называется длина вектора $\overline{A_1B_1}$, взятая со знаком «+», если направление $\overline{A_1B_1}$ совпадает с направлением оси *L*, и взятая со знаком «–», если направления $\overline{A_1B_1}$ и L противоположны. Проекция вектора $\overline{AB}$ на L ось вычисляется по формуле

$$\text{Пр}_L \overline{AB} = |\overline{A_1B_1}| \cos\varphi,$$

где φ – угол между вектором $\overline{AB}$ и осью L.

Сложение и вычитание векторов

Сумма векторов $\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + ... + \bar{a}_n$ определяется следующим образом: совместим начало второго вектора с концом первого, начало третьего вектора с концом второго и т. д., начало n-го вектора с концом $(n-1)$-го вектора (рис. 1.9).

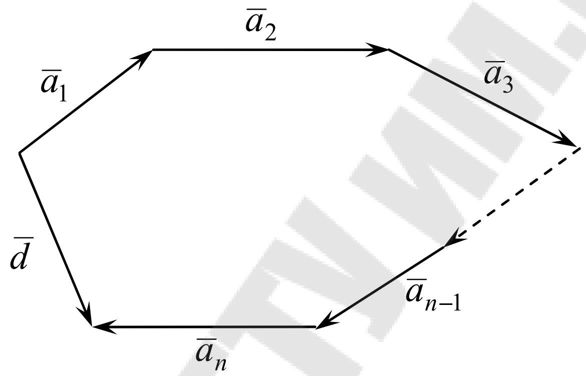

Рис. 1.9

Вектор $\bar{d}$, начало которого совпадает с началом вектора $\bar{a}_1$, а конец совпадает с концом вектора $\bar{a}_n$, называется *суммой векторов* $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, ..., $\bar{a}_n$ и записывается следующим образом:

$$\bar{d} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + ... + \bar{a}_n.$$

При сложении двух векторов можно воспользоваться правилом параллелограмма, смысл которого состоит в следующем: возьмем два вектора $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$, совместим их начала и достроим до параллелограмма (рис. 1.10). Вектор-сумма $\bar{d} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2$ совпадает с большей диагональю параллелограмма и направлен от общего начала этих векторов в сторону противоположной вершины параллелограмма.

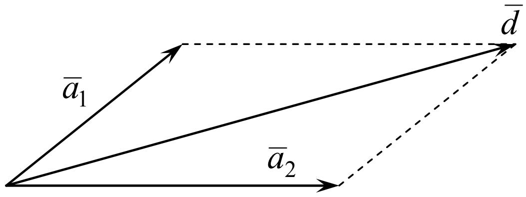

Рис. 1.10

Разностью двух векторов $\overline{a}_1 - \overline{a}_2$ называется такой вектор $\overline{c}$, который при сложении с вектором $\overline{a}_2$ дает вектор $\overline{a}_1$.

Если совместить начала векторов $\overline{a}_1$ и $\overline{a}_2$, то вектор-разность $\overline{c}$ лежит на меньшей диагонали параллелограмма и направлен к вектору-уменьшаемому $\overline{a}_1$ (рис. 1.11).

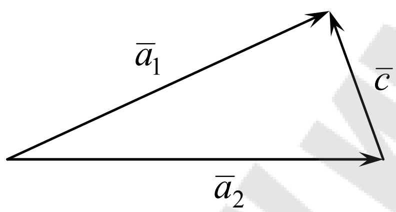

Рис. 1.11

Умножение вектора на число

Произведением вектора $\overline{a}$ на число $m \neq 0$ называется такой вектор $\overline{b}$, который удовлетворяет условиям: $\overline{b}$ и $\overline{a}$ имеют общее направление, если $m > 0$, и противоположные направления, если $m < 0$; $|\overline{b}| = |m| \cdot |\overline{a}|$.

Под произведением вектора $\overline{a}$ на число $m = 0$ понимают нулевой вектор $\overline{0}$.

Из определения следует, что если $|\overline{b}| = |\overline{a}|$ и векторы $\overline{b}$ и $\overline{a}$ имеют противоположные направления, то имеет место равенство $\overline{a} = (-1) \cdot \overline{b}$, или $\overline{a} = -\overline{b}$.

Свойства умножения вектора на число:

1. Для коллинеарности векторов $\overline{b}$ и $\overline{a}$ необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число *m*, при котором выполняется равенство $\overline{b} = m \cdot \overline{a}$.
2. $(\overline{b} + \overline{a}) \cdot m = \overline{b} \cdot m + \overline{a} \cdot m$.
3. $(m + n)\overline{a} = m \cdot \overline{a} + n \cdot \overline{a}$.
4. $m(n \cdot \overline{a}) = (mn) \cdot \overline{a}$.

Разложение вектора по двум неколлинеарным направлениям

Разложить вектор $\bar{c}$ по направлениям двух неколлинеарных векторов $\bar{b}$ и $\bar{a}$ – это значит представить его в виде суммы двух векторов, коллинеарных этим векторам $\bar{b}$ и $\bar{a}$.

Проведем через точку C прямую CB, параллельную прямой, содержащей вектор $\bar{a}$, и прямую CA, паралельную прямой, содержащей вектор $\bar{b}$ (рис. 1.12):

$$\bar{c} = \overline{OC} = \overline{OA} + \overline{OB}.$$

В силу п. 1 (свойства умножения вектора на число) имеем:

$$\overline{OA} = \bar{a} \cdot p;\ \overline{OB} = \bar{b} \cdot q.$$

Следовательно,

$$\bar{c} = \bar{a} \cdot p + \bar{b} \cdot q. \tag{1.7}$$

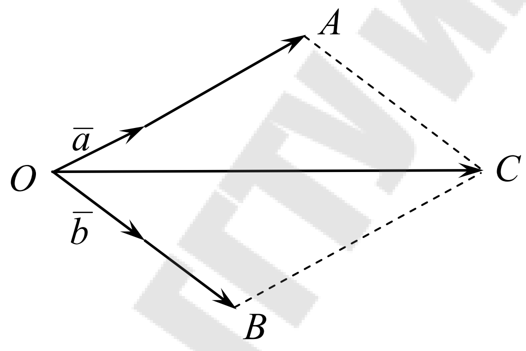

Рис. 1.12

§ 1.7. Прямая на плоскости

Пусть на плоскости задана некоторая линия l. Выберем какую-либо декартову прямоугольную систему координат Oxy. Уравнение

$$F(x, y) \tag{1.8}$$

называется общим уравнением линии l в системе координат Oxy, если ему удовлетворяют координаты любой точки M, принадлежащей линии l, и не удовлетворяют координаты точек, не принадлежащих этой линии. Поскольку линия l вполне определяется своим уравнением (1.8), мы будем использовать выражение «линия (1.8)». Однако можно привести примеры, когда множество l всех точек, координаты которых удовлетворяют уравнению (1.8), но l не является линией.

Пример 1.3

$$x^2 + y^2 = 0\,.$$

Этому уравнению удовлетворяет только пара вещественных чисел: $x = 0$, $y = 0$.

Пример 1.4

$$x^2 + y^2 + 1 = 0\,.$$

В данном примере l является пустым множеством.

Уравнение прямой по угловому коэффициенту и отрезку на оси ординат

Уравнение $y = kx + b$ задает прямую на плоскости, где k называется *угловым коэффициентом* прямой. Угловой коэффициент равен тангенсу угла между прямой и положительным направлением оси OX (рис. 1.13). Отрезок b откладывается на оси OY в положительном направлении при $b > 0$ и в отрицательном при $b < 0$. Если $k = 0$, то получаем уравнение $y = b$, которое задает прямую, параллельную оси OX. Уравнение $x = a$ задает прямую, параллельную оси OY.

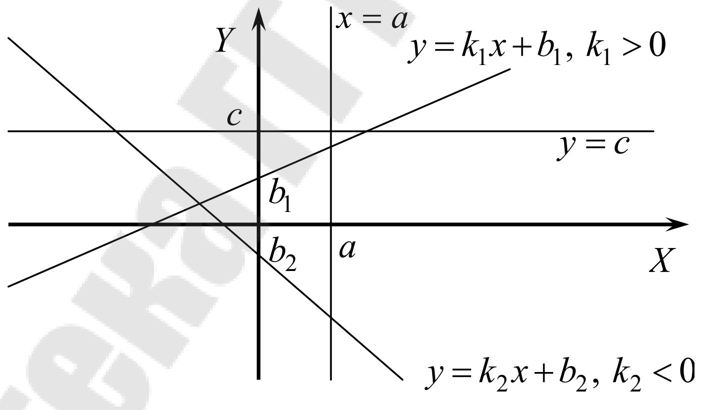

Рис. 1.13

Уравнение прямой с данным угловым коэффициентом и проходящей через точку

Уравнение прямой, имеющей угловой коэффициент k и проходящей через точку $M(x_1; y_1)$, имеет вид:

$$y - y_1 = k(x - x_1)\,. \tag{1.9}$$

Уравнение прямой по двум данным точкам

Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$, имеет вид:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \tag{1.10}$$

Угловой коэффициент прямой через координаты двух ее различных точек $M_1(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2)$ определяется формулой

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}. \tag{1.11}$$

Уравнение прямой по точке и направляющему вектору

Вектор $\overline{a}$ называется *направляющим* вектором прямой d, если $\overline{a}\parallel d$. Вектор $(-\overline{a})$ также будет направляющим вектором прямой d. Пусть заданы прямая d, вектор $\overline{a}(l;m)$, параллельный d, и точка $M(x_1;y_1)$ (рис. 1.14). Тогда уравнение прямой, проходящей через $M(x_1;y_1)$ и параллельной $\overline{a}(l;m)$, имеет вид:

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}. \tag{1.12}$$

Уравнение прямой по двум точкам можно рассматривать как частный случай уравнения по точке и направляющему вектору. Пусть даны точки $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$. Тогда $\overline{AB}=(x_2-x_1;y_2-y_1)$ будет направляющим вектором прямой AB, и оба уравнения в таком случае совпадают.

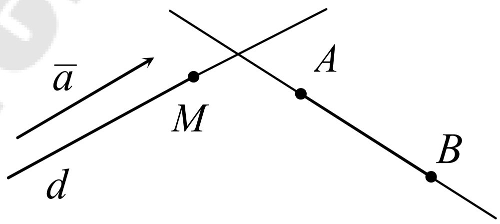

Рис. 1.14

Общее уравнение прямой

Общим уравнением прямой называют уравнение $Ax + By + C = 0$, где A и B не равны нулю одновременно. Вектор $\overline{n}(A;B)$ перпендикулярен прямой $Ax + By + C = 0$ и называется *нормалью* к этой прямой (рис. 1.15).

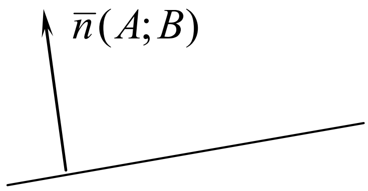

Рис. 1.15

Параметрические уравнения прямой

Если переписать уравнение (1.10) в виде: $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = t$, где t – параметр, то получим *параметрические уравнения прямой*:

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)t; \quad y = y_1 + (y_2 - y_1)t. \qquad (1.13)$$

Параметрические уравнения можно также получить из уравнения (1.12). Тогда они примут вид:

$$x = x_1 + lt; \quad y = y_1 + mt. \qquad (1.14)$$

Уравнение прямой в отрезках по осям

Уравнением прямой в отрезках по осям (рис. 1.16) называют уравнение $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$, где a и b – величины направленных отрезков, отсекаемых соответственно на осях OX и OY.

Пример 1.5

Преобразовать общее уравнение прямой $x - 2y - 2 = 0$ в уравнение в отрезках по осям.

Решение. $x - 2y = 2$; $\dfrac{x}{2} + \dfrac{-2y}{2} = \dfrac{2}{2}$; $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{-1} = 1$. Соответствующая прямая α изображена на рис. 1.16.

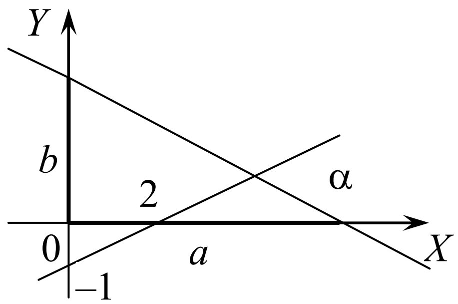

Рис. 1.16

Пример 1.6

Даны точки $A(-2;5)$ и $B(3;1)$. Написать все изложенные выше виды уравнения прямой AB.

Решение. $\dfrac{x-(-2)}{3-(-2)}=\dfrac{y-5}{1-5} \Rightarrow \dfrac{x+2}{5}=\dfrac{y-5}{-4}$ – уравнение по двум точкам. Так как $\overline{AB}=(5;-4)$ – направляющий вектор прямой AB, то полученное уравнение является уравнением по точке и направляющему вектору.

Запишем полученное уравнение в виде:

$$(x+2)\cdot(-4)=(y-5)\cdot 5.$$

Отсюда получим общее уравнение прямой:

$$4x+5y-17=0.$$

Из последнего уравнения имеем: $\dfrac{4x}{17}+\dfrac{5y}{17}=\dfrac{17}{17} \Rightarrow \dfrac{x}{\frac{17}{4}}+\dfrac{y}{\frac{17}{5}}=1$ – уравнение в отрезках по осям.

Также из общего уравнения прямой получим: $5y=-4x+17 \Rightarrow$ $\Rightarrow y=-0{,}8x+3{,}4$ – уравнение по угловому коэффициенту и отрезку, отсекаемому на оси OY. Здесь $k=-0{,}8$.

Зная k и взяв одну из точек, например, B, получим уравнение по угловому коэффициенту и точке: $y-1=-0{,}8(x-3)$.

Записав уравнение прямой AB по двум точкам в виде:

$$\frac{x+2}{5}=\frac{y-5}{-4}=t,$$

получим параметрические уравнения: $x=5t-2$; $y=-4t+5$.

Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых

Тангенс угла между двумя прямыми

$$y = k_1 x + b_1;\ \ y = k_2 x + b_2 \tag{1.15}$$

вычисляется по формуле

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \tag{1.16}$$

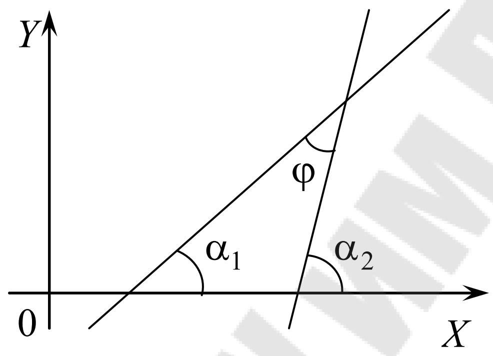

Рис. 1.17

Если прямые заданы общими уравнениями:

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0;\ \ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0,$$

то тангенс угла между ними определяется формулой

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2}. \tag{1.17}$$

Так как $\bar{n}_1(A_1, B_1)$, $\bar{n}_2(A_2, B_2)$ – нормальные векторы этих двух прямых, то угол между ними можно также вычислить по формуле

$$\cos\varphi = \cos(\bar{n}_1 \hat{,} \bar{n}_2) = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \tag{1.18}$$

Необходимое и достаточное условие параллельности прямых выражается равенством

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \tag{1.19}$$

(это означает, что векторы нормалей этих прямых должны быть коллинеарны), а условие их перпендикулярности – равенством

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0. \tag{1.20}$$

Необходимое и достаточное условие параллельности прямых, заданных уравнениями (1.15), выражается равенством $k_1 = k_2$, а условие их перпендикулярности – равенством

$$k_1 \cdot k_2 = -1. \tag{1.21}$$

Уравнение прямой в нормальном виде. Расстояние от точки до прямой

Предположим, что в уравнении прямой $A_0x + B_0y + C_0 = 0$ справедливо $A_0^2 + B_0^2 = 1$. Тогда длина вектора $\overline{n}_0 = \{A_0, B_0\}$ равна 1. В этом случае вышеприведенное уравнение прямой называется уравнением прямой в *нормальном виде*.

Общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$ можно привести к нормальному виду, если его левую часть умножить на нормирующий множитель $1/|\overline{n}|$. Величина $N = 1/\sqrt{A^2 + B^2}$ называется *нормирующим множителем*. Уравнение принимает вид:

$$\frac{Ax}{\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{By}{\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0. \tag{1.22}$$

Введем обозначения: $\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} = A_0$, $\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} = B_0$, $\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = C_0$. Получим теперь уравнение прямой в нормальном виде: $A_0x + B_0y + C_0 = 0$, т. к. здесь имеет место равенство $(A_0)^2 + (B_0)^2 = 1$.

Расстояние от точки $M(x_0; y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ вычисляется по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{1.23}$$

Задачи, относящиеся к прямым на плоскости

Пример 1.7

Найти угол между прямыми, заданными уравнениями:

$$5x + 3y + 15 = 0,\ x + 4y - 7 = 0.$$

Решение. Так как $A_1 = 5,\ B_1 = 3,\ A_2 = 1,\ B_2 = 4$, то, применяя формулу (1.17), получим:

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{5\cdot 4 - 1\cdot 3}{5\cdot 1 + 3\cdot 4} = 1,\ \varphi = 45^{\circ}.$$

Замечание. При другой нумерации прямых ($A_1 = 1,\ B_1 = 4,$ $A_2 = 5,\ B_2 = 3$) получим: $\mathrm{tg}\varphi' = -1,\ \varphi' = 135^{\circ}$. Очевидно, что $\varphi + \varphi' = 180^{\circ}$.

Пример 1.8

Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(4;-1)$ и параллельно прямой $-3x + 2y + 5 = 0$.

Решение. Координаты вектора нормали $\overline{n}_1(A;B)$ искомой прямой должны быть пропорциональны координатам вектора нормали $\overline{n}(-3;2)$ данной прямой. Коэффициент пропорциональности можно выбрать любым, но проще выбрать его равным 1. Тогда искомое уравнение имеет вид: $-3x + 2y + C = 0$. Так как точка M лежит на искомой прямой, то ее координаты удовлетворяют этому уравнению. Подставляя в него координаты $x = 4,\ y = -1$, получим

$$-3\cdot 4 + 2(-1) + C = 0.$$

Отсюда: $C = 14$. Итак, $-3x + 2y + 14 = 0$ – искомое уравнение.

§ 1.8. Кривые второго порядка

Алгебраическим уравнением второй степени называется всякое уравнение вида:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

где по крайней мере одна из величин A, B, C не равна нулю. Линия, представляемая уравнением второй степени, называется *линией* (*кривой*) *второго порядка*. Рассмотрим некоторые свойства кривых второго порядка: эллипса, гиперболы, параболы.

Эллипс

Эллипсом называется геометрическое место точек ($M(x,y)$), сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек F_1 и F_2 (рис. 1.18) равна одному и тому же значению $2a$:

$$F_1M + F_2M = 2a.$$

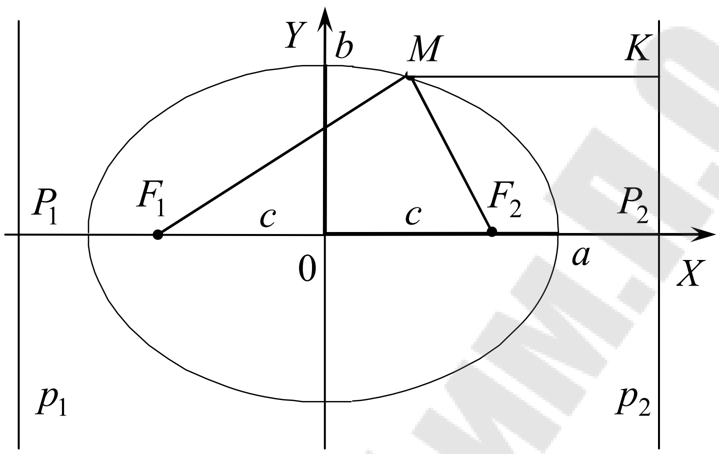

Рис. 1.18

Точки F_1 и F_2 называются *фокусами* эллипса, а расстояние F_1F_2 – *фокусным расстоянием*. Оно обозначается $2c$. Так как $F_1F_2 < F_1M + F_2M$, то $2c < 2a$, т. е. $c < a$.

Отрезок $2a$ (а часто и прямая, его содержащая) называется *большой осью* эллипса. Отрезок $2b$ (а часто и соответствующая прямая) называется *малой осью* эллипса. Точка O называется *центром* эллипса.

Каноническое уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{1.24}$$

где a – большая полуось, b – малая полуось. Фокусы эллипса имеют координаты $F_1(-c,0), F_2(c,0)$, где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. *Эксцентриситетом* эллипса ε называют отношение фокусного расстояния $2c$ к длине большой оси $2a$:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \varepsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}. \tag{1.25}$$

Отложим от центра O эллипса на его большой оси отрезки $OP_1 = OP_2 = \frac{a}{\varepsilon}$. Прямые p_1, p_2, проходящие соответственно через точки P_1, P_2 параллельно малой оси, называются *директрисами* эллипса. Таким образом, директрисы эллипса (1.24) задаются уравнениями: $x = -\frac{a}{\varepsilon}$, $x = \frac{a}{\varepsilon}$. Тогда справедливо следующее утверждение: для любой точки M эллипса отношение расстояния от нее до фокуса к расстоянию от нее до соответствующей директрисы равно эксцентриситету ε, т. е. $\frac{MF}{MK} = \varepsilon$. Так как для эллипса $\varepsilon < 1$, то каждая точка эллипса ближе к фокусу, чем к соответствующей директрисе. Если большая ось эллипса остается неизменной, а эксцентриситет стремится к нулю (т. е. эллипс все меньше отличается от окружности), то директрисы неограниченно удаляются от центра. У окружности директрис нет. Параметрическое уравнение эллипса имеет вид:

$$\begin{cases} x = a\cos t; \\ y = b\sin t. \end{cases} \tag{1.26}$$

Гипербола

Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых модуль разности расстояний до двух данных точек F_1 и F_2 этой же плоскости есть величина постоянная и равная $2a$ (рис. 1.19), т. е.

$$|F_1M - F_2M| = 2a.$$

Точки F_1 и F_2 называются *фокусами* гиперболы, расстояние F_1F_2 – *фокусным расстоянием*, оно обозначается через $2c$:

$$F_1F_2 = 2c.$$

Таким образом, фокусы гиперболы имеют координаты $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$. Так как $F_1F_2 > |F_1M - F_2M|$, то $c > a$.

Гипербола симметрична относительно точки O, которая называется *центром* гиперболы. Она также симметрична относительно прямой F_1F_2 и относительно прямой, перпендикулярной F_1F_2 и проходящей через центр гиперболы. Прямая F_1F_2 пересекает гиперболу в двух точках $A_1(-a,0)$ и $A_2(a,0)$ – они называются *вершинами* гиперболы. Отрезок $A_1A_2 = 2a$ (а часто и прямая A_1A_2) называется *действительной осью* гиперболы. Прямая OY не пересекает гиперболу, однако на ней откладывают отрезки $OB_1 = OB_2 = b$ и называют отрезок $B_1B_2 = 2b$ (а также и прямую B_1B_2) *мнимой осью* гиперболы. Гипербола с равными осями называется *равносторонней*.

Расстояние от вершины гиперболы до конца мнимой оси (например, A_1B_1) равно половине фокусного расстояния, т. е. c. Таким образом, $b = \sqrt{c^2 - a^2}$; $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

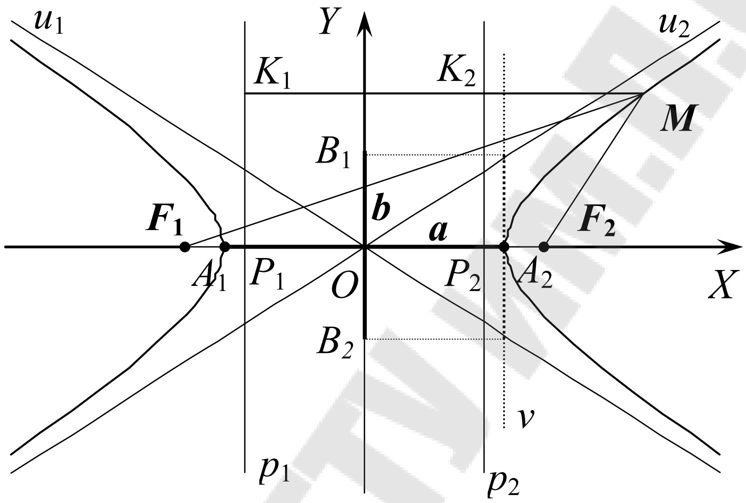

Рис. 1.19

Каноническое уравнение гиперболы имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{1.27}$$

где a – действительная полуось гиперболы; b – *мнимая* полуось гиперболы.

Эксцентриситетом гиперболы называется отношение фокусного расстояния $2c$ к длине действительной оси $2a$:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Асимптотами гиперболы называют прямые u_1, u_2, определяемые уравнениями:

$$y = -\frac{b}{a}x; \quad y = \frac{b}{a}x. \tag{1.28}$$

Отложим от точки O на действительной оси отрезки $OP_1 = OP_2 = \dfrac{a}{\varepsilon}$. Тогда прямые p_1, p_2, проходящие соответственно через точки P_1, P_2 перпендикулярно действительной оси, называются *директрисами* гиперболы. Таким образом, директрисы гиперболы определяются уравнениями:

$$x = -\frac{a}{\varepsilon};\ x = \frac{a}{\varepsilon}. \qquad (1.29)$$

Справедливо следующее утверждение: для любой точки M гиперболы отношение ее расстояния до фокуса к расстоянию до соответствующей директрисы равно эксцентриситету ε, т. е. $\dfrac{MF_1}{MK_1} = \dfrac{MF_2}{MK_2} = \varepsilon$. Так как для гиперболы $\varepsilon > 1$, то каждая точка гиперболы ближе к директрисе, чем к соответствующему фокусу.

Геометрический смысл мнимой оси. Через вершину гиперболы проведем прямую, перпендикулярную действительной оси. Тогда отрезок этой прямой, заключенный между асимптотами гиперболы, равен мнимой оси $2b$.

Парабола

Парабола есть геометрическое место точек M, равноудаленных от данной точки F и данной прямой l (рис. 1.20), т. е.

$$FM = KM.$$

Точка F называется *фокусом*, а прямая l – *директрисой* параболы. Расстояние $PF = p$ от фокуса до директрисы называется *параметром* параболы. Точка O называется *вершиной* параболы. Парабола симметрична относительно прямой FC – она называется *осью* параболы. Вершина параболы является серединой отрезка PF. Таким образом, $OP = OF = \dfrac{p}{2}$. Каноническое уравнение параболы, проходящей через начало координат и симметричной относительно оси OX, имеет вид:

$$y^2 = 2px. \qquad (1.30)$$

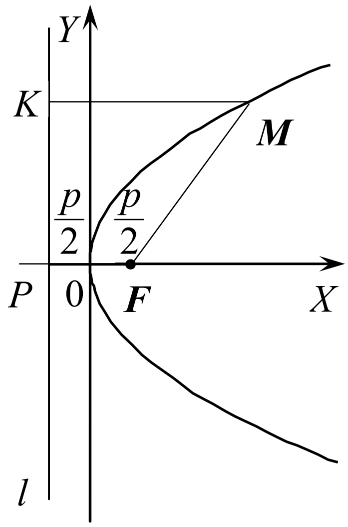

Рис. 1.20

Уравнение директрисы в этой же системе координат $x = -\frac{p}{2}$, а координаты фокуса $F(\frac{p}{2},0)$.

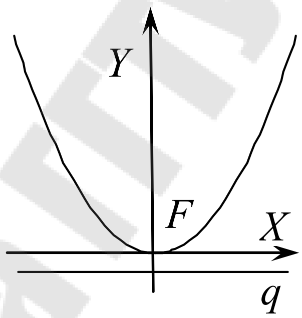

Рис. 1.21

Парабола, симметричная относительно оси OY и проходящая через начало координат, определяется уравнением

$$x^2 = 2qy. \tag{1.31}$$

Фокус этой параболы находится в точке $F(0,\frac{q}{2})$, уравнение директрисы имеет вид:

$$y = -\frac{q}{2}.$$

Пример 1.9

Какую линию определяет уравнение $3x^2 + 4y^2 = 12$?

Решение. Так как x и y входят в уравнение во второй степени, то сразу понятно, что это не парабола. Разделим это уравнение почленно на 12: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$. Сравнивая полученное уравнение с уравнением (1.24), заключаем, что оно определяет эллипс с полуосями $a = 2$, $b = \sqrt{3}$.

Пример 1.10

Эксцентриситет эллипса $\varepsilon = 0{,}8$. Вычислить фокусное расстояние, написать каноническое уравнение и уравнения директрис эллипса, если известно, что эллипс проходит через точку $M(3, \frac{12}{5})$.

Решение. Воспользуемся второй из формул (1.25). Имеем $0{,}8 = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$. Отсюда находим $\frac{b}{a} = 0{,}6$, $b = 0{,}6a$. Так как точка M принадлежит эллипсу, то ее координаты удовлетворяют каноническому уравнению эллипса (1.24). Подставим координаты точки в данное уравнение, а вместо b подставим $0{,}6a$. Тогда: $\frac{3^2}{a^2} + \frac{2{,}4^2}{(0{,}6a)^2} = 1$; $9 + \frac{5{,}76}{0{,}36} = a^2$; $a^2 = 25$; $b^2 = 0{,}36a^2 = 9$. Итак, каноническое уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Из формулы (1.25) получим $c = a\varepsilon = 5 \cdot 0{,}8 = 4$. Значит, фокусное расстояние эллипса равно $2c = 8$. Наконец, получим уравнения директрис $x = \pm\frac{a}{\varepsilon} = \pm\frac{5}{0{,}8} = \pm 6{,}25$.

Пример 1.11

Записать уравнения асимптот и директрис гиперболы $4x^2 - 9y^2 = 36$.

Решение. Приведем уравнение гиперболы к каноническому виду $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$. Таким образом, $a^2 = 9$, $b^2 = 4$, т. е. $a = 3, b = 2$. В соответствии с формулой (1.28) записываем уравнения асимптот:

$y = \frac{2}{3}x, \quad y = -\frac{2}{3}x$. Находим $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$. Тогда эксцентриситет гиперболы равен $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{3}$. Наконец, по формуле (1.29) получаем уравнения директрис:

$$x = -\frac{9}{\sqrt{13}}, \; x = \frac{9}{\sqrt{13}}.$$

Глава 2
МАТРИЦЫ. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 2.1. Матрицы. Действия над матрицами

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел вида:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Элемент a_{ij} таблицы имеет два индекса. Первый индекс означает номер строки, в которой находится элемент, второй – номер столбца. Данная таблица имеет n строк и m столбцов, поэтому она называется *матрицей размера* $n \times m$. Пишут $A_{n\times m}$ или A_{nm}. Элементы a_{i1}, a_{i2}, …, a_{im} называются элементами *i*-й строки матрицы A, а элементы a_{k1}, $a_{k2}, \ldots,$ a_{kn} – элементами *k*-го столбца матрицы A.

Две матрицы называются *равными*, если они одинаковых размеров и их соответствующие элементы равны.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой*. Нулевую матрицу обозначают буквой O:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица, у которой число строк равно числу столбцов называется *квадратной* матрицей, т. е. матрицей вида:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица размера $n \times n$ называется *матрицей порядка* n.

Диагональ, содержащая элементы $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$, называется *главной диагональю* квадратной матрицы A, а вторая диагональ, содержащая элементы $a_{1n}, a_{2n-1}, \ldots, a_{n1}$, – *побочной диагональю*.

Диагональной называется квадратная матрица, у которой все элементы, не принадлежащие главной диагонали, равны нулю:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Единичной называется диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице. Единичную матрицу обозначают буквой E.

Треугольной называется квадратная матрица, все элементы которой, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Для матриц рассмотрим следующие операции:

1) сложение (вычитание) матриц;
2) умножение матрицы на число;
3) произведение матриц.

Сложение матриц. Операция сложения вводится только для матриц одинаковых размеров по правилу: каждый элемент c_{ij} матрицы C, являющейся суммой матриц A и B, равен сумме сответствующих элементов этих матриц, т. е. $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Пример 2.1

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 7 & 2 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+(-1) & 0+4 & -3+2 \\ 7+(-3) & 2+0 & 9+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 4 & 2 & 14 \end{pmatrix}$$

Разность двух матриц определяется аналогичным образом.

Пример 2.2

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 7 & 2 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-(-1) & 0-4 & -3-2 \\ 7-(-3) & 2-0 & 9-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -5 \\ 10 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Умножение матрицы на число. Чтобы умножить матрицу на число, нужно умножить на это число каждый элемент матрицы.

Пример 2.3

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 4 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 5 & 3\cdot(-2) \\ 3\cdot 0 & 3\cdot 4 \\ 3\cdot(-1) & 3\cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -6 \\ 0 & 12 \\ -3 & 21 \end{pmatrix}$$

Произведение матриц. Операция умножения двух матриц вводится только для случая, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы, т. е. $A_{n\times m} \times B_{m\times l} = C_{n\times l}$, при этом элемент *i*-й строки *k*-го столбца матрицы C равен сумме произведений элементов *i*-й строки матрицы A на соответствующие элементы *k*-го столбца матрицы B.

Пример 2.4

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}_{2\times 3} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}_{3\times 2} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

Убедитесь в справедливости равенства

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 3 \\ 0 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}_{4\times 2} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 9 & 1 \\ -5 & 2 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 3} = \begin{pmatrix} -11 & -16 & -2 \\ 6 & 69 & 7 \\ -20 & 8 & 0 \\ 8 & 7 & 1 \end{pmatrix}_{4\times 3}$$

Из того, что матрицу A можно умножить на матрицу B, не следует, что матрицу B можно умножать на матрицу A.

Если матрицы A и B квадратные, то произведение $A \times B$ всегда существует. Следует помнить, что $A \times B \neq B \times A$. Если $A \times B = B \times A$, то матрицы A и B называются *перестановочными*.

Пример 2.5
Пусть

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$A \times B = \begin{pmatrix} -3 & -10 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}, \; B \times A = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

§ 2.2. Определители. Вычисление определителей

Определитель (*детерминант*) – число, которое ставится в соответствие квадратной матрице A порядка n и вычисляется по определенному правилу. Обозначается $\det A$, $|A|$, Δ.

Матрица первого порядка – это число. Определитель такой матрицы равен этому числу. Приведем правило вычисления определителей второго и третьего порядков.

Определитель *второго порядка* равен разности произведений элементов, стоящих на главной и побочной диагоналях:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Пример 2.6

$$\begin{vmatrix} 3 & -8 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 1 \cdot (-8) = 20.$$

При вычислении определителя третьего порядка удобно пользоваться *правилом треугольников* (*правилом Саррюса*), которое символически изображено на рис. 1.21.

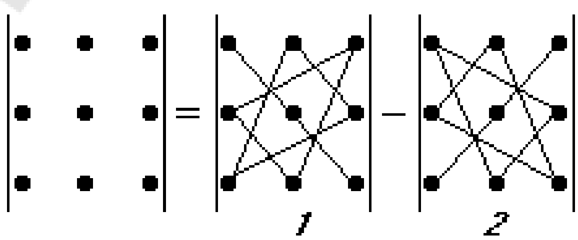

Рис. 2.1

Объяснение схемы. Для вычисления определителя третьего порядка нужно, во-первых, перемножить элементы, стоящие на главной диагонали, и прибавить к ним произведения элементов, находящихся в вершинах треугольников, основания которых параллельны главной диагонали (на рис. 1.21 эта сумма обозначена цифрой *1*. Во-вторых, перемножить элементы, стоящие на побочной диагонали, и прибавить к ним произведения элементов, находящихся в вершинах треугольников, основания которых параллельны побочной диагонали (на рис. 1.21 эта сумма обозначена цифрой *2*). В-третьих, от суммы 1 отнять сумму 2. Это правило отражает следующая формула:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad |A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+$$

$$+a_{12}a_{23}a_{31}-(a_{13}a_{22}a_{31}+a_{21}a_{12}a_{33}+a_{11}a_{23}a_{32}).$$

Пример 2.7

Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & 0 \\ -1 & 7 & -6 \end{vmatrix}=3\cdot 1\cdot(-6)+4\cdot 7\cdot 5+(-2)\cdot 0\cdot(-1)-((-1)\cdot 1\cdot 5+3\cdot 7\cdot 0+$$

$$+(-2)\cdot 4\cdot(-6))=85.$$

Свойства определителей

1. Определитель не изменится при замене всех его строк столбцами с такими же номерами.

Пример 2.8

$$\begin{vmatrix} 9 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}=-54.$$

2. При перестановке каких-либо двух строк (столбцов) абсолютное значение определителя остается прежним, а знак определителя меняется на противоположный.

Пример 2.9

$$\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & b \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & b & a \end{vmatrix} = a^2 + ab$$ (переставлены 2-й и 3-й столбцы).

3. Определитель с нулевой строкой (столбцом) равен нулю.

Пример 2.10

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

4. Определитель, у которого элементы одной строки (столбца) соответственно пропорциональны элементам другой строки (столбца), равен нулю. В частности, определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю.

Пример 2.11

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -6 \\ d & d & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0$$ (1-й и 2-й столбцы одинаковы);

$$\begin{vmatrix} 1 & -8 & 3 & 2 \\ 7 & 0 & 1 & 10 \\ 2 & -16 & 6 & 4 \\ 9 & 9 & 0 & 72 \end{vmatrix} = 0$$ (элементы 3-й строки пропорциональны элементам 1-й строки).

5. Определитель не изменится, если к элементам некоторой строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), предварительно умножив их на один и тот же множитель.

Пример 2.12

$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 1 & -4 & 6 \\ -11 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -48$. Прибавим к элементам первой строки элементы второй строки (умноженные на единицу). Получим определитель $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & -6 \\ -11 & -2 & 0 \end{vmatrix}$. Этот определитель тоже равен -48.

Вычисление определителей порядка выше третьего

Для выяснения этого вопроса введем понятия минора и алгебраического дополнения. *Минором* m_{ij} элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель $(n-1)$-го порядка, полученный из исходного определителя путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых находится выбранный элемент (т. е. определитель, оставшийся после вычеркивания i-й строки и j-го столбца).

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} определителя называется его минор, взятый со знаком «+», если сумма $i + j$ – четное число, и со знаком «–», если эта сумма нечетная. Таким образом, $A_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}$.

Пусть, например,

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 1 & -4 & 6 \\ -11 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

Тогда

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ -11 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot 66 = -66;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 = 0.$$

6. Разложение определителя по элементам некоторой строки (столбца).

Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на соответствующие им алгебраические дополнения. Для разложения определителя лучше выбирать тот ряд, где есть нулевые элементы, т. к. соответствующие им слагаемые в разложении будут равны нулю.

Пример 2.13

Вычислить определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 9 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 8 \end{vmatrix}.$$

Разложение будем проводить по элементам 3-й строки:

$$\Delta = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} + a_{34}A_{34} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 8 \end{vmatrix} + 9 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= -1(2 \cdot 0 \cdot 8 - 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot (-2) - (-2 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 8)) +$$

$$+ 9(2 \cdot 4 \cdot 8 - 1 \cdot 3 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cdot (-2) - (1 \cdot 4 \cdot (-2) + 2 \cdot 2 \cdot 3 - 1 \cdot (-3) \cdot 8)) = 406.$$

(Так как $a_{31} = 0, a_{34} = 0,$ то первое и второе слагаемые в разложении равны 0. В связи с этим мы вычисляли только второе и третье слагаемые).

Разложением по элементам строки или столбца можно вычислять определители любого порядка, в том числе второго и третьего. Поэтому определитель, полученный в примере 1.12, можно вычислить вышеприведенным способом.

7. Вычисление определителей треугольной матрицы.

Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали, например:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot a_{44}.$$

§ 2.3. Решение систем линейных неоднородных уравнений методами Гаусса и Крамера

Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если она не имеет решений. Система линейных уравнений часто записывается в матричном виде. Так, система

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

эквивалентна записи $A \cdot X = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Матрица A, составленная из коэффициентов при неизвестных, называется *основной матрицей* системы. Матрица X – это матрица-столбец неизвестных, а матрица B – матрица-столбец свободных коэффициентов. Основная матрица системы, дополненная столбцом свободных коэффициентов, называется *расширенной матрицей* системы. Если столбец B – нулевой, т. е. все $b_i = 0$, то соответствующая система уравнений называется *однородной*. Система называется *неоднородной*, если хотя бы один $b_i \neq 0$.

Метод Гаусса

Метод Гаусса заключается в последовательном исключении неизвестных и состоит из двух основных этапов:

1) приведение системы к треугольному виду посредством эквивалентных преобразований;

2) решение полученной треугольной системы, начиная с последнего уравнения.

Напомним, что *эквивалентными преобразованиями* системы являются следующие преобразования:

1. Умножение любого уравнения системы на любое не равное нулю число.

2. Замена местами строк системы.

3. Прибавление к какому-либо уравнению системы какое-либо другое уравнение, умноженное на некоторое число.

В процессе эквивалентных преобразований системы могут возникнуть следующие ситуации:

1. Появятся нулевые строки, т. е. строки вида $0 = 0$. Такие уравнения отбрасывают. Получится система, у которой число неизвестных больше числа уравнений – такая система имеет бесконечное множество решений. Из последнего уравнения такой системы нужно выразить одну какую-либо неизвестную (она будет *базисной*) через остальные неизвестные (они будут *свободными*) и затем через эти свободные неизвестные выразить остальные неизвестные системы.

2. Появятся строки вида $0 = d$. В таком случае система несовместна

Пример 2.14

Найти решение системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 2, \\ -3x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ -2x_1 + x_2 + 6x_3 = 3. \end{cases}$$

Решение. Запишем расширенную матрицу системы и будем осуществлять эквивалентные преобразования строк, чтобы привести систему к треугольному виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 2 \\ -3 & -1 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 6 & 3 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{matrix} \scriptstyle \mathrm{II} + \mathrm{I} \times 3 \\ \\ \scriptstyle \mathrm{III} + \mathrm{I} \times 2 \end{matrix} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & 16 & 10 \\ 0 & 5 & 16 & 7 \end{array}\right) \Leftrightarrow {\scriptstyle \mathrm{III} + \mathrm{II} \times (-1)} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & 16 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

Получили уравнение $0 = -3$. Система несовместна.

Пример 2.15

Найти решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 3t_1 + 2t_2 - 7t_3 \qquad = 12, \\ -2t_1 - t_2 + t_3 + 3t_4 = -6, \\ \quad -2t_2 + 2t_3 + 5t_4 = 5, \\ \quad t_1 + t_2 - t_3 - 2t_4 = 1. \end{cases}$$

Решение. Запишем расширенную матрицу системы и будем осуществлять эквивалентные преобразования строк, чтобы привести систему к треугольному виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -7 & 0 & 12 \\ -2 & -1 & 1 & 3 & -6 \\ 0 & -2 & 2 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \underset{\text{I и IV строки}}{\overset{\text{поменяем местами}}{\Leftrightarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 3 & -6 \\ 0 & -2 & 2 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & -7 & 0 & 12 \end{array}\right) \underset{\text{IV + I × (-3)}}{\overset{\text{II + I × 2}}{\Leftrightarrow}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & -2 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & -1 & -4 & 6 & 9 \end{array}\right) \underset{\text{IV + II}}{\overset{\text{III + II × 2}}{\Leftrightarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & 5 \end{array}\right) \underset{\text{меняем с III}}{\overset{\text{IV строку}}{\Leftrightarrow}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

Система приведена к треугольному виду. Решаем ее.
Из IV уравнения: $3t_4 = -3;\ t_4 = -1.$
Из III уравнения: $-5t_3 + 5t_4 = 5;\ -5t_3 = 10;\ t_3 = -2.$
Из II уравнения: $t_2 - t_3 - t_4 = -4;\ t_2 + 2 + 1 = -4;\ t_2 = -7.$
Из I уравнения: $t_1 + t_2 - t_3 - 2t_4 = 1;\ t_1 - 7 + 2 + 2 = 1;\ t_1 = 4.$
Ответ: (4; –7; –2; –1).
Пример 2.16
Найти решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 11, \\ -3x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 - 5x_2 - 9x_3 = 23. \end{cases}$$

Решение. Запишем расширенную матрицу системы, и будем осуществлять эквивалентные преобразования строк, чтобы привести систему к треугольному виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -4 & 11 \\ -3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -5 & -9 & 23 \end{array}\right) \underset{\text{I и III строки}}{\overset{\text{меняем местами}}{\Leftrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -9 & 23 \\ -3 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -4 & 11 \end{array}\right) \underset{\text{III + I × (-2)}}{\overset{\text{II + I × 3}}{\Leftrightarrow}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -5 & -9 & 23\\ 0 & -14 & -28 & 70\\ 0 & 7 & 14 & -35\end{array}\right)\underset{\text{III}\div 7}{\overset{\text{II}\div 14}{\Leftrightarrow}}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -5 & -9 & 23\\ 0 & -1 & -2 & 5\\ 0 & 1 & 2 & -5\end{array}\right)\overset{\text{III}+\text{II}}{\Leftrightarrow}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -5 & -9 & 23\\ 0 & -1 & -2 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

Получили уравнение $0=0$. Отбрасываем третье уравнение. Поскольку число уравнений меньше числа неизвестных, то система имеет бесконечное множество решений. Выберем x_3 в качестве свободной неизвестной. Тогда система примет вид: $\left(\begin{array}{cc|c}1 & -5 & 9x_3+23\\ 0 & -1 & 2x_3+5\end{array}\right)$.

Из II уравнения получим: $x_2=-2x_3-5$.

Из I уравнения: $x_1-5(-2x_3-5)=9x_3+25 \Rightarrow x_1=-x_3-2$.

Ответ: $\{-x_3-2;\ -2x_3-5;\ x_3,\text{где } x_3\in R\}$.

Метод Крамера

Метод Крамера можно применять только для таких систем, у которых число уравнений равно числу неизвестных и определитель основной матрицы системы не равен нулю.

Такая система имеет единственное решение, которое вычисляется по формулам:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},\ \cdots,\ x_n=\frac{\Delta_n}{\Delta},$$

где Δ – определитель матрицы системы, Δ_i – определитель, полученный из Δ заменой i-го столбца столбцом свободных коэффициентов (i = 1, 2, …, n).

Пример 2.17

Решить систему по формулам Крамера:

$$\begin{cases}-x_1+2x_2+4x_3=-8,\\ \quad 5x_2+x_3=-6,\\ -x_1+x_2+4x_3=-7.\end{cases}$$

Решение. $\Delta=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 4\\ 0 & 5 & 1\\ -1 & 1 & 4\end{vmatrix}=-20+0-2-(-20-1+0)=-1\neq 0$. Система имеет единственное решение. Вычислим остальные определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -8 & 2 & 4 \\ -6 & 5 & 1 \\ -7 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & -8 & 4 \\ 0 & -6 & 1 \\ -1 & -7 & 4 \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -8 \\ 0 & 5 & -6 \\ -1 & 1 & -7 \end{vmatrix} = 1.$$

Таким образом, $x_1 = \dfrac{-2}{-1} = 2;\ \ x_2 = \dfrac{1}{-1} = -1;\ \ x_3 = \dfrac{1}{-1} = -1.$

Ответ: (2; –1; –1).

Замечание. Если окажется, что $\Delta = 0$, то непосредственно метод Крамера к такой системе применить нельзя. В таком случае следует привести систему к треугольному виду и отбросить уравнения вида $\Delta = 0$ (если таковые появятся). Здесь возможны две ситуации:

1) $\Delta = 0$ и хотя бы один из Δ_i отличен от 0. Такая система является несовместной;

2) $\Delta = 0$ и все Δ_i также равны нулю. В данном случае система либо имеет бесконечное множество решений, либо вообще не имеет решений.

Если система имеет бесконечное множество решений, то следует выбрать свободные неизвестные и перенести их в правую часть оставшихся уравнений. Полученная система может быть решена по формулам Крамера.

Пример 2.18

Решить систему линейных неоднородных уравнений, расширенная матрица которой имеет вид:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

Легко заметить, что $\Delta = 0$ и все $\Delta_i = 0$. Также очевидно, что любые два уравнения из этой системы попарно несовместимы. Например, умножив первое уравнение на 2, получим уравнение, исключающее второе, и т. п. То есть система не имеет решений. Тем не менее, попробуем решить ее методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Мы получили два уравнения вида $0 = d$. Система не имеет решений.

§ 2.4. Решение систем линейных уравнений методом обратной матрицы

Матрицей, *обратной* квадратной матрице A, называется квадратная матрица A^{-1}, удовлетворяющая равенствам $A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = E$. Квадратная матрица называется *невырожденной*, или *неособенной*, если ее определитель отличен от нуля. В противном случае матрица называется *вырожденной* или *особенной*.

Всякая невырожденная квадратная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

имеет единственную обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ik} – алгебраическое дополнение элемента a_{ik} матрицы A (алгебраическое дополнение A_{ik} записывается в строку с номером k и в столбец с номером i, т. е. в так называемом транспонированном порядке).

Пример 2.19

Найти матрицу, обратную матрице $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 7 & 3 & 10 \\ 15 & 6 & 20 \end{pmatrix}$.

Решение. Нетрудно убедиться, что $\det A = 1$. Так как $\det A \neq 0$, то матрица A имеет обратную матрицу. Найдем алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 6 & 20 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 20 \end{vmatrix} = 10, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 15 & 6 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 20 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 15 & 20 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 15 & 6 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = -1.$$

Таким образом,

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 10 & -5 & 1 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 10 & -5 & 1 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Легко проверить, что $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Возьмем систему следующего вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{2.1}$$

Систему (2.1) n линейных уравнений с n неизвестными можно записать в матричном виде $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Если система является невырожденной, т. е. $\det A \neq 0$, то она имеет единственное решение:

$$X = A^{-1}B, \tag{2.2}$$

где A^{-1} – матрица, обратная матрице A.

Пример 2.20

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4, \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18. \end{cases}$$

Решение. Данную систему запишем в матричном виде $AX = B$, где

$$A=\begin{pmatrix}4 & -3 & 2\\ 2 & 5 & -3\\ 5 & 6 & -2\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}9\\ 4\\ 18\end{pmatrix}.$$

Вычислим определитель матрицы A и найдем матрицу A^{-1}:

$$\Delta=\begin{vmatrix}4 & -3 & 2\\ 2 & 5 & -3\\ 5 & 6 & -2\end{vmatrix}=39,$$

$$A_{11}=8,\ A_{12}=-11,\ A_{13}=-13,\ A_{21}=6,\ A_{22}=-18,$$
$$A_{23}=-39,\ A_{31}=-1,\ A_{32}=16,\ A_{33}=26,$$

$$A^{-1}=\frac{1}{39}\begin{pmatrix}8 & 6 & -1\\ -11 & -18 & 16\\ -13 & -39 & 26\end{pmatrix}$$

По формуле (2.2) получаем решение системы:

$$X=\frac{1}{39}\begin{pmatrix}8 & 6 & -1\\ -11 & -18 & 16\\ -13 & -39 & 26\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9\\ 4\\ 18\end{pmatrix}=\frac{1}{39}\begin{pmatrix}78\\ 117\\ 195\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 3\\ 5\end{pmatrix},$$

т. е. $x_1=2,\ x_2=3,\ x_3=5$.

§ 2.5. Системы линейных однородных уравнений

Система линейных однородных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0,\\ \quad\vdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=0.\end{cases}$$

Очевидно, что система линейных однородных уравнений всегда имеет нулевое решение, т. е. решение вида $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$. Это решение не представляет интереса. Нас интересует ответ на вопрос, при каких условиях однородная система имеет ненулевое решение. На это отвечает следующая теорема: система линейных однородных уравнений имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда определитель матрицы системы равен нулю. Последнее означает, что одно или несколько уравнений системы можно получить из оставшихся путем линейных преобразований. Говорят еще, что такие уравнения линейно зависимы.

Ограничимся рассмотрением только двух разновидностей таких систем:

1) система двух уравнений с двумя неизвестными;

2) система трех уравнений с тремя неизвестными.

Случай 1. Два уравнения с двумя неизвестными.

Пример 2.21

Решить систему линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} 3x+4y=0, \\ -x+2y=0. \end{cases}$$

Очевидно, что $\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\neq 0$. Система имеет только нулевое решение $x=y=0$.

Пример 2.22

Решить систему линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} x-3y=0, \\ -2x+6y=0; \end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}=0.$$

Равенство нулю определителя матрицы системы означает, что одно уравнение является следствием второго. Например, разделив второе уравнение на (–2), получим первое уравнение. Значит, прямые совпадают. Система имеет бесконечное множество решений, которые можно записать в виде: $\{3y;\ y,\ y\in R\}$.

Случай 2. Три уравнения с тремя неизвестными.

Здесь возможны три ситуации. Три плоскости могут иметь одну общую точку (0, 0, 0), т. е. это нулевое решение. Три плоскости могут совпадать – это в том случае, когда каждое из трех уравнений является следствием любого другого. То есть мы имеем дело с тремя одинаковыми уравнениями. Наконец, три плоскости могут пересекаться по прямой. В этом случае одно из уравнений является линейной комбинацией двух остальных уравнений.

Пример 2.23

Решить систему линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} 2x-3y+5z=0, \\ -x+4y-z=0, \\ 3x-7y+6z=0. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & -1 \\ 3 & -7 & 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 2 & -3 & 5 \\ 3 & -7 & 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Из второго уравнения имеем $y=-\frac{3}{5}z$. Из первого уравнения $x=-\frac{17}{5}z$. Заменив Z на t, получим параметрические уравнения прямой: $x=3{,}4t$; $y=-0{,}6t$; $z=t$, где $t\in R$.

Глава 3
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Декартова прямоугольная система координат в пространстве определяется заданием линейной единицы для измерения длин и трех пересекающихся в одной точке взаимно перпендикулярных осей, пронумерованных в каком-либо порядке.

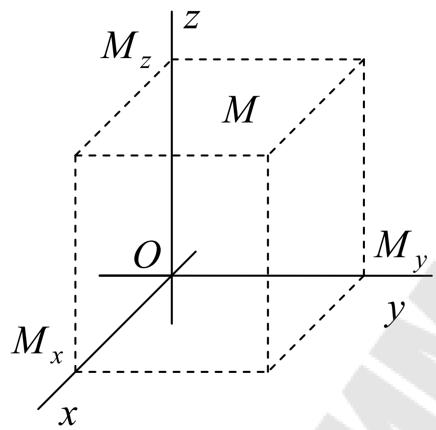

Рис. 3.1

Точка пересечения осей называется *началом координат*, а сами оси – *осями координат*. Первая координатная ось называется *осью абсцисс*, вторая – *осью ординат*, третья – *осью аппликат*. Начало координат обозначается буквой *O*, оси координат обозначаются соответственно символами *Ox*, *Oy*, *Oz* (рис. 3.1).

Координатами точки M в заданной системе называются числа:

$$x = OM_x,\ y = OM_y,\ z = OM_z,$$

где OM_x, OM_y, OM_z – соответственно абсцисса, ордината и аппликата точки *M*; символ $M(x, y, z)$ обозначает, что точка *M* имеет координаты *x*, *y*, *z*.

§ 3.1. Разложение вектора по трем некомпланарным направлениям

Три вектора $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ называются *некомпланарными*, если не существует такой плоскости, которой эти три вектора параллельны. Если же такая плоскость существует, то векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ называются *компланарными*.

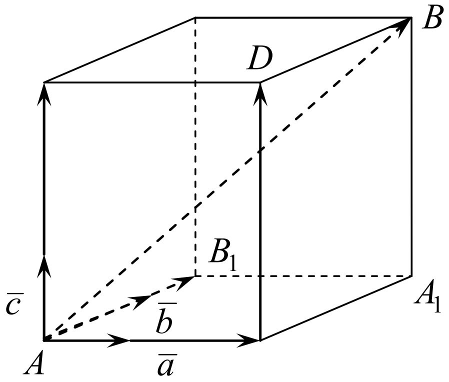

Рис. 3.2

Любой вектор $\overline{AB}$ можно разложить по направлениям трех некомпланарных векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$, т. е. представить вектор $\overline{AB}$ в виде суммы трех векторов, соответственно коллинеарных векторам $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$, причем такое разложение является единственным.

Совместим начала векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ в точку A и рассмотрим параллелепипед, у которого вектор $\overline{AB}$ является диагональю (рис. 3.2). Тогда получим

$$\overline{AB} = \overline{AA_1} + \overline{A_1D} + \overline{DB}.$$

Отсюда

$$\overline{AB} = p\overline{a} + q\overline{b} + r\overline{c}. \qquad (3.1)$$

Легко доказать, что вектор $\overline{AB}$ разложен по векторам $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ единственным образом.

Пусть x, y, z есть численные значения проекций вектора $\overline{AB}$ соответственно на оси Ox, Oy, Oz. Эти числа называются *координатами вектора*. В дальнейшем вектор $\overline{AB}$, заданный координатами x, y, z, будем обозначать следующим образом: $\overline{AB} = \{x, y, z\}$.

Свойства координат векторов и действия над векторами в координатах. Деление отрезка в данном отношении

1. Равные векторы имеют равные соответствующие координаты. Обратно, если соответствующие координаты двух векторов равны, то и векторы равны.

2. Координаты суммы нескольких векторов равны суммам соответствующих координат этих векторов.

3. Координаты разности двух векторов равны разностям соответствующих координат этих векторов.

4. Если умножить вектор $\overline{a}$ на число λ, то получим вектор $\overline{b}$, координаты которого равны соответствующим координатам данного вектора $\overline{a}$, умноженным на число λ.

5. Если два вектора коллинеарны, то их соответствующие координаты пропорциональны, и обратно, если координаты двух векторов пропорциональны, то векторы коллинеарны.

6. Если вектор $\overline{AB}$ задан координатами начальной точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и конечной точки $B(x_2, y_2, z_2)$, то его координаты равны разностям соответствующих координат конечной и начальной точек, т. е.

$$\overline{AB} = \{x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1\}. \tag{3.2}$$

Пусть даны точки $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ и число $\lambda \neq 1$. Координаты точки $C(x, y, z)$, которая делит отрезок AB в отношении λ, находятся по формулам:

$$\frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\ \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},\ \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}. \tag{3.3}$$

§ 3.2. Скалярное произведение двух векторов

Скалярным произведением вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$ называется **число**, равное произведению их длин на косинус угла между ними. Обозначается $\overline{a}\overline{b}$ или $\overline{a} \cdot \overline{b}$ (но ни в коем случае нельзя писать $\overline{a} \times \overline{b}$ – т. к. знак «×» используется для обозначения векторного произведения). Согласно определению

$$\overline{a}\overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\varphi. \tag{3.4}$$

Свойства скалярного произведения

1. Скалярным квадратом вектора $\overline{a}$ называется скалярное произведение вектора $\overline{a}$ на себя: $\overline{a}^2 = \overline{a}\overline{a} = |\overline{a}||\overline{a}|\cos 0 = |\overline{a}|^2$.

2. Свойство переместительности: $\overline{a}\overline{b} = \overline{b}\overline{a}$.

3. Сочетательность относительно числового множителя: $(\alpha\overline{a})\overline{b} = \alpha(\overline{a}\overline{b})$.

4. Распределительность относительно суммы векторов: $\overline{a}(\overline{c} + \overline{d}) = \overline{a}\overline{c} + a\overline{d}$.

Скалярное произведение в координатах

Скалярное произведение двух векторов

$$\overline{a}(x_1, y_1, z_1), \quad \overline{b}(x_2, y_2, z_2) \qquad (3.5)$$

выражается формулой

$$\overline{a}\overline{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2, \qquad (3.6)$$

т. е. скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений соответствующих координат.

Ортогональность двух векторов. Векторы (3.5) перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю, т. е. $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$.

Угол между двумя векторами

Косинус угла между векторами (3.5) определяется формулой

$$\cos\varphi = \frac{\overline{a}\overline{b}}{|\overline{a}||\overline{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Пример 3.1

Даны точки $A(1;10;-5)$, $B(9;3;-7)$, $C(8;-1;3)$. Найти: а) $\overline{AB}\cdot\overline{BC}$; б) угол между $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$; в) площадь треугольника ABC.

Решение: а) $\overline{AB} = (9-1, 3-10, -7-(-5)) = (8,-7,-2)$. Аналогично находим $\overline{BC}(-1,-4,10)$. $\overline{AB}\cdot\overline{BC} = 8(-1) - 7(-4) - 2\cdot 10 = 0$ (значит, треугольник ABC прямоугольный, $\angle B = 90^\circ$);

б) $\overline{AC} = (7,-11,-8)$. Тогда

$$\cos\angle A = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{|\overline{AB}||\overline{AC}|} = \frac{8\cdot 7 + (-7)(-11) + (-2)8}{\sqrt{8^2 + (-7)^2 + (-2)^2}\sqrt{7^2 + (-11)^2 + 8^2}} =$$

$$= \frac{117}{\sqrt{117}\sqrt{234}} = \frac{117}{117\sqrt{2}} == \frac{\sqrt{2}}{2}, \angle A = 45^\circ;$$

в) т. к. $\sin\angle A = \sin 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, то

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|AB||AC|\sin\angle A = \frac{1}{2}\sqrt{117}\sqrt{234}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{117}{2} = 58{,}5 \text{ кв. ед.}$$

§ 3.3. Векторное произведение двух векторов

Ориентированные тройки векторов

Пусть дана тройка некомпланарных векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$, выходящих из одной точки. Будем вращать вектор $\overline{a}$ в плоскости векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ по кратчайшему пути до совмещения его направления с направлением вектора $\overline{b}$ и будем наблюдать за этим вращением с конца вектора $\overline{c}$. Если это вращение будет совершаться против часовой стрелки, то упорядоченная тройка векторов называется *правой*. Если же вышеуказанное вращение совершается по часовой стрелке, то упорядоченная тройка векторов называется *левой* (рис. 3.3).

Правая тройка векторов Левая тройка векторов

Рис. 3.3

Векторное произведение

Векторным произведением векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется такой третий вектор $\overline{c}$, который удовлетворяет следующим условиям:

1) $|\overline{c}| = |\overline{a}||\overline{b}|\sin(\widehat{\overline{a},\overline{b}})$;

2) его направление перпендикулярно плоскости, содержащей векторы $\overline{a}$,$\overline{b}$, т. е. перпендикулярно и $\overline{a}$ и $\overline{b}$;

3) векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ в указанном порядке образуют такую же тройку, какую образуют единичные векторы системы координат, например, правую тройку (рис. 3.4).

Обозначается $\overline{c} = \overline{a} \times \overline{b}$ или $\overline{c} = [\overline{a}, \overline{b}]$.

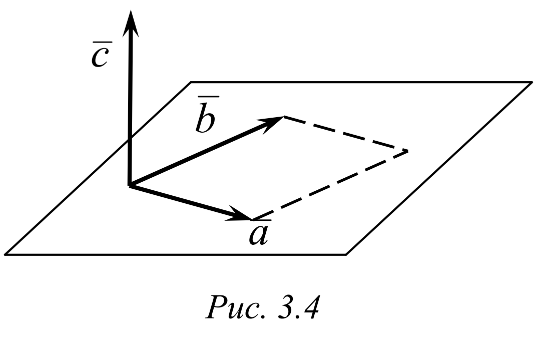

Рис. 3.4

Геометрический смысл векторного произведения

Модуль векторного произведения $|\overline{a}\times\overline{b}|$ численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a},\overline{b}$.

Пример 3.2

Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ имеют длины, соответственно равные 8 и 5, и образуют угол в 30°. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

Решение. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a},\overline{b}$, равна $8\cdot 5\sin 30^{\circ}=40\cdot 0{,}5=20$ кв. ед. Значит, площадь соответствующего треугольника равна $20\cdot 0{,}5=10$ кв. ед.

Свойства векторного произведения:

1. Векторное произведение равно нулю, если либо по крайней мере один из векторов есть нулевой вектор, либо векторы коллинеарны.
2. При перестановке сомножителей векторное произведение меняет знак на противоположный: $\overline{a}\times\overline{b}=-\overline{b}\times\overline{a}$.

3. Свойство распределительности: $(\overline{a}+\overline{b})\times\overline{c}=\overline{a}\times\overline{c}+\overline{b}\times\overline{c}$.
4. Сочетательность относительно скалярного множителя: $(\beta\overline{a})\times\overline{b}=\beta(\overline{a}\times\overline{b})$.

Векторное произведение двух векторов в координатах

Пусть даны два вектора $\overline{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\overline{b}=(x_2,y_2,z_2)$ в правой системе координат $\overline{e_1},\overline{e_2},\overline{e_3}$. Тогда, используя формулу (3.1), получим:

$$\overline{a}=x_1\overline{e_1}+y_1\overline{e_2}+z_1\overline{e_3};$$

$$\overline{b}=x_2\overline{e_1}+y_2\overline{e_2}+z_2\overline{e_3}.$$

Составим векторное произведение $\overline{c}=\overline{a}\times\overline{b}$:

$$\overline{c}=(x_1\overline{e_1}+y_1\overline{e_2}+z_1\overline{e_3})\times(x_2\overline{e_1}+y_2\overline{e_2}+z_2\overline{e_3}).$$

Пользуясь свойствами 1–4 векторного произведения, получим:

$$\overline{c}=x_1x_2\left[\overline{e}_1\overline{e}_1\right]+x_1y_2\left[\overline{e}_1\overline{e}_2\right]+x_1z_2\left[\overline{e}_1\overline{e}_3\right]+y_1x_2\left[\overline{e}_2\overline{e}_1\right]+y_1y_2\left[\overline{e}_2\overline{e}_2\right]+$$
$$+y_1z_2\left[\overline{e}_2\overline{e}_3\right]+z_1x_2\left[\overline{e}_3\overline{e}_1\right]+z_1y_2\left[\overline{e}_3\overline{e}_2\right]+z_1z_2\left[\overline{e}_3\overline{e}_3\right];$$

$$\bar{c} = x_1y_2\bar{e}_3 - x_1z_2\bar{e}_2 - y_1x_2\bar{e}_3 + y_1z_2\bar{e}_1 + z_1x_2\bar{e}_2 - z_1y_2\bar{e}_1 =$$
$$= (y_1z_2 - z_1y_2)\bar{e}_1 + (z_1x_2 - x_1z_2)\bar{e}_2 + (x_1y_2 - y_1x_2)\bar{e}_3.$$

Последнее равенство можно записать в виде:

$$\bar{c} = \left[\bar{a}\bar{b}\right] = \begin{bmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{bmatrix}\bar{e}_1 + \begin{bmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{bmatrix}\bar{e}_2 + \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}\bar{e}_3. \qquad (3.7)$$

Формулу (3.7) можно представить через определитель третьего порядка:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \qquad (3.8)$$

Замечание. Если составить матрицу $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}$ из координат векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, то координаты векторного произведения $\bar{a} \times \bar{b}$ равны минорам второго порядка этой матрицы, полученным путем поочередного вычеркивания 1, 2 и 3-го столбцов, причем второй минор нужно взять со знаком «–».

Тогда модуль векторного произведения выражается формулой

$$\left|\bar{a} \times \bar{b}\right| = \sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2}. \qquad (3.9)$$

Необходимое и достаточное условие коллинеарности двух векторов

Два вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулевому вектору.

Пример 3.3

Найти векторное произведение $\bar{a} \times \bar{b}$ векторов $\bar{a}(3,-4,-8)$ и $\bar{b}(-5,2,-1)$.

Решение. Составим матрицу из координат векторов:

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & -8 \\ -5 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Обозначив координаты векторного произведения через x, y, z, имеем:

$$x = \begin{vmatrix} -4 & -8 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 4 + 16 = 20,$$

$$y = -\begin{vmatrix} 3 & -8 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = -(-3-40) = 43, \; z = -\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 20 = -14.$$

Итак, $\overline{a} \times \overline{b} = (20, 43, -14)$.

Пример 3.4

Найти площадь S треугольника, заданного вершинами $A(2,-3,1)$, $B(0,5,-4)$, $C(1,8,6)$.

Решение. Искомая площадь равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, (которая, как уже известно, равна $\left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right|$). Находим $\overline{AB} = (-2, 8, -5)$, $\overline{AC} = (-1, 11, 5)$.

Тогда

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \left(\begin{vmatrix} 8 & -5 \\ 11 & 5 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 8 \\ -1 & 11 \end{vmatrix} \right) = (95, 15, -14).$$

Значит,

$$S = \frac{1}{2}\left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{95^2 + 15^2 + (-14)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{9446} \approx 48{,}6.$$

Пример 3.5

Коллинеарны ли векторы $\overline{a}(2,-5,1)$ и $\overline{b}(-6,15,-3)$?

Решение. Вычислим векторное произведение $\overline{a} \times \overline{b}$:

$$\overline{a} \times \overline{b} = \left(\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 15 & -3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -6 & -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -6 & 15 \end{vmatrix} \right) = (0,0,0).$$

Итак, векторы коллинеарны. Однако проще проверить пропорциональность соответствующих координат.

§ 3.4. Смешанное произведение трех векторов

Смешанным произведением трех векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ называется скалярное произведение вектора $\overline{a}$ на векторное произведение $\overline{b} \times \overline{c}$.

Обозначается смешанное произведение трех векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ следующим образом: $\overline{a} \cdot (\overline{b} \times \overline{c})$ или $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$.

Геометрический смысл смешанного произведения

Модуль смешанного произведения $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$ трех некомпланарных векторов равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, т. е. $V = \left|\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\right|$ (рис. 3.5).

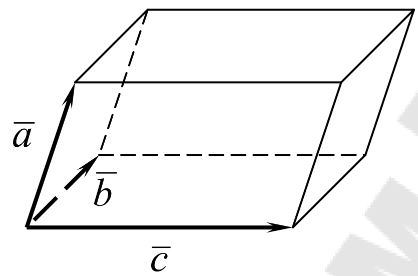

Рис. 3.5

Отсюда следует *необходимое и достаточное условие компланарности* трех векторов: векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю: $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = 0$. Как видно из рис. 3.5, если векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ компланарны (лежат в одной плоскости), то объем соответствующего параллелепипеда равен нулю.

Свойства смешанного произведения:

1. Круговой перестановке сомножителей смешанное произведение не меняется, при перестановке двух сомножителей меняет знак на противоположный: $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = \overline{b}\,\overline{c}\,\overline{a} = \overline{c}\,\overline{a}\,\overline{b} = -(\overline{b}\,\overline{a}\,\overline{c}) = -(\overline{a}\,\overline{c}\,\overline{b}) = -(\overline{c}\,\overline{a}\,\overline{b})$.

2. Свойство распределительности: $(\overline{a} + \overline{b})\overline{c}\,\overline{d} = \overline{a}\,\overline{c}\,\overline{d} + \overline{b}\,\overline{c}\,\overline{d}$.

3. Свойство сочетательности относительно числового множителя: $(m\overline{a})\overline{b}\,\overline{c} = m(\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c})$.

4. Смешанное произведение, имеющее хотя бы два равных сомножителя, равно нулю: $\overline{a}\,\overline{a}\,\overline{c} = 0$ (векторы компланарны).

Пример 3.6

$$\overline{a}\,\overline{b}(3\overline{a} + 2\overline{b} - 5\overline{c}) = 3\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{a} + 2\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{b} - 5\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = -5\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\,.$$

Вычисление смешанного произведения

Смешанное произведение трех векторов

$$\overline{a}(x_1, y_1, z_1),\ \overline{b}(x_2, y_2, z_2),\ \overline{c}(x_3, y_3, z_3) \tag{3.10}$$

определяется формулой

$$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}, \tag{3.11}$$

а следовательно, объем параллелепипеда, построенного на этих векторах, вычисляется по формуле

$$V = \operatorname{mod}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \tag{3.12}$$

Пусть требуется определить объем треугольной пирамиды с вершинами в точках $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, $M_4(x_4, y_4, z_4)$. Объем треугольной пирамиды $M_1M_2M_3M_4$ равен шестой части объема параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}, \overline{M_1M_4}$. Так как $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, $\overline{M_1M_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$, $\overline{M_1M_4} = (x_4 - x_1, y_4 - y_1, z_4 - z_1)$, то

$$V = \frac{1}{6}\operatorname{mod}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}. \tag{3.13}$$

Необходимое и достаточное условие компланарности трех векторов (3.10) выражается равенством

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{3.14}$$

Пример 3.7

Вычислить объем треугольной пирамиды, вершины которой находятся в точках $M_1(6,1,4)$, $M_2(1,-3,7)$, $M_3(7,1,3)$, $M_4(2,-2,-5)$.

Решение. В соответствии с формулой (3.13) находим

$$V=\frac{1}{6}\mathrm{mod}\begin{vmatrix}1-6 & -3-1 & 7-4\\ 7-6 & 1-1 & 3-4\\ 2-6 & -2-1 & -5-4\end{vmatrix}=\frac{1}{6}\mathrm{mod}\begin{vmatrix}-5 & -4 & 3\\ 1 & 0 & -1\\ -4 & -3 & -9\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{6}\mathrm{mod}\begin{vmatrix}-5 & -4 & -2\\ 1 & 0 & 0\\ -4 & -3 & -13\end{vmatrix}=\frac{23}{3}.$$

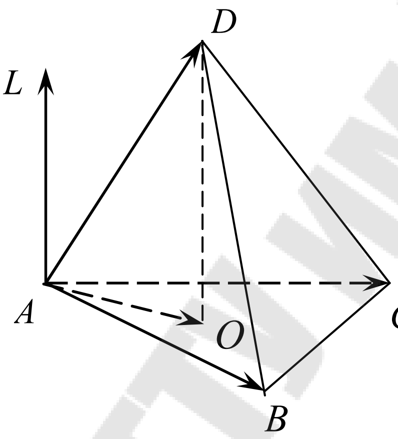

Рис. 3.6

Пример 3.8

Даны точки $A(-2,-3,1)$, $B(1,-1,2)$, $C(2,4,2)$, $D(1,2,6)$. Вычислить: 1) угол между ребром AD пирамиды $ABCD$ и плоскостью ABC; 2) длину высоты DO пирамиды (рис. 3.6).

Решение.

1. Пусть O – проекция точки D на плоскость ABC (рис. 3.6). Тогда угол между векторами $\overline{AD}$ и $\overline{AO}$ – искомый угол. Пусть $\overline{AL}=\overline{AB}\times\overline{AC}$, тогда $\overline{AL}\perp ABC$ и $\angle DAO=90^{\circ}-\angle LAD$. Тогда

$$\overline{AD}=(3,5,5),\ \overline{AB}=(3,4,1),\ \overline{AC}=(4,7,1),\ \overline{AL}=\left(\begin{vmatrix}4 & 1\\ 7 & 1\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}3 & 1\\ 4 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3 & 4\\ 4 & 7\end{vmatrix}\right)=(-3,1,5).$$

$$\cos(\angle LAD)=\frac{\overline{AL}\cdot\overline{AD}}{\left|\overline{AL}\right|\left|\overline{AD}\right|}=\frac{21}{\sqrt{35}\sqrt{59}}\approx 0{,}46;\ \angle LAD\approx 62{,}5^{\circ}.$$

Значит, $\angle DAO\approx 90^{\circ}-62{,}5^{\circ}=27{,}5^{\circ}$.

2. Как видно из рисунка, $|DO| = \overline{AD}\overline{AL}$. Значит, $|DO| = |\overline{AD}|\cos(\angle LAD) = \sqrt{59}\cdot 0{,}46 \approx 3{,}53$.

§ 3.5. Различные виды уравнения плоскости

Поверхностью называется совокупность точек пространства, координаты которых удовлетворяют уравнению следующего вида:

$$\Phi(x, y, z). \tag{3.15}$$

Может случится, что уравнению (3.15) удовлетворяют координаты лишь конечного числа точек. Например, рассмотрим уравнение $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=0$. Этому уравнению удовлетворяют координаты лишь единственной точки $M(a, b, c)$. Рассмотрим еще такой пример: $x^2+y^2+z^2+1=0$. В этом случае не существует ни одной точки, координаты которой удовлетворяли бы этому уравнению. В этом случае поверхность называется *мнимой поверхностью*.

В том случае когда переменные в уравнение (3.15) входят в первой степени, получается плоскость.

Параметрическое уравнение плоскости

Вектор $\bar{a}$ называется параллельным плоскости α, если он лежит на прямой l, параллельной плоскости α, или лежит на самой плоскости α. Плоскость α вполне определяется, если задана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, лежащая в этой плоскости, и два неколлинеарных вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$, каждый из которых параллелен плоскости α. Пусть $\bar{a}$ = $\{a_1, a_2, a_3\}$, $\bar{b}$ = $\{b_1, b_2, b_3\}$. Составим уравнение плоскости α, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и параллельной векторам $\bar{a}$, $\bar{b}$. Возьмем в плоскости α произвольную точку $M(x, y, z)$. Ясно, что векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\overline{M_0M} = \{x-x_0, y-y_0, z-z_0\}$ компланарны. Так как векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ неколлинеарны, то вектор $\overline{M_0M}$ можно разложить по двум неколлинеарным напрвлениям $\bar{a}$, $\bar{b}$, т. е. имеет место уравнение

$$\overline{M_0M} = u\bar{a} + v\bar{b}. \tag{3.16}$$

Запишем равенство (3.16) в координатной форме:

$$x-x_0 = ua_1+vb_1,\ \ y-y_0 = ua_2+vb_2,\ \ z-z_0 = ua_3+vb_3.$$

Отсюда получим:

$$\begin{cases} x = x_0 + ua_1 + vb_1, \\ y = y_0 + ua_2 + vb_2, \\ z = z_0 + ua_3 + vb_3. \end{cases} \tag{3.17}$$

Уравнение (3.17) есть параметрическое уравнение плоскости.

Общее уравнение плоскости

Условие компланарности векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\overline{M_0M}$, а следовательно, уравнение плоскости α можно записать в виде:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{3.18}$$

или в виде:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{3.19}$$

Коэффициенты A, B, C одновременно в нуль не обращаются. Уравнение (3.19) определяет плоскость в пространстве. Оно называется общим уравнением плоскости. Отметим частные случаи этого уравнения:

1. Если $D = 0$, то уравнение (3.19) принимает вид: $Ax + By + Cz = 0$. Значит, плоскость проходит через начало координат.

2. Если $C = 0$, то уравнение (3.19) принимает вид: $Ax + By + D = 0$ и определяет плоскость параллельную оси OZ. Случаи, когда $A = 0$ или $B = 0$, аналогичны, и уравнение определяет плоскость, параллельную соответствующей оси.

3. Если из трех коэффициентов A, B, C два равны нулю, например, $A = B = 0$, то уравнение (3.19) принимает вид: $Cz + D = 0$ и определяет плоскость, параллельную плоскости XOY (т. е. плоскость, параллельную и оси OX, и оси OY).

Вектор $\bar{n}(A, B, C)$ называется *нормальным* вектором (или *нормалью*) плоскости (3.19) и проходит перпендикулярно данной плоскости.

Уравнение плоскости, проходящей через три точки

Если даны три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, не лежащие на одной прямой (рис. 3.7), то уравнение плоскости, проходящей через эти точки, имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (3.20)$$

Равенство (3.20) выражает необходимое и достаточное условие компланарности трех векторов:

$$\overline{M_1M} = (x-x_1, y-y_1, z-z_1); \quad \overline{M_1M_2} = (x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1);$$

$$\overline{M_1M_3} = (x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1),$$

где $M(x, y, z)$ – любая точка данной плоскости.

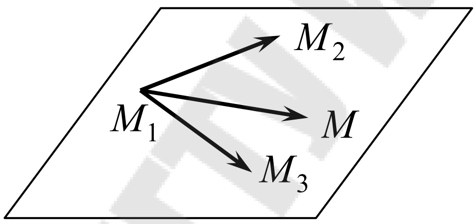

Рис. 3.7

Пример 3.9

Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1,-3,2)$, $M_2(8,5;0)$ и параллельной вектору $\overline{a}(4,1,-1)$.

Решение. Пусть точка $M(x, y, z)$ принадлежит искомой плоскости. Тогда векторы $\overline{M_1M} = (x-1, y+3, z-2)$, $\overline{M_1M_2} = (7,8,-2)$, $\overline{a}$ – компланарны (т. е. их смешанное произведение равно нулю). Тогда получаем:

$$\overline{MM_1}\ \overline{M_1M_2}\ \overline{a} = \begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z-2 \\ 7 & 8 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-1)\begin{vmatrix} 8 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - (y+3)\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + (z-2)\begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -6x + 6 - y - 3 - 25z + 50 = -6x - y - 25z + 53.$$

Приравнивая к нулю полученное смешанное произведение, получим искомое уравнение плоскости: $-6x - y - 25z + 53 = 0$ или $6x + y + 25z - 53 = 0$.

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку и имеющую данную нормаль

Пусть известно, что плоскость проходит через точку $M(x_0, y_0, z_0)$ и имеет нормаль $\overline{n}(A, B, C)$. Тогда ее уравнение имеет вид:

$$A(x - x_0) + B(y - y_o) + C(z - z_0) = 0. \tag{3.21}$$

Пример 3.10

Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $A(3,-3,0)$, $B(0,7,1), C(-5,3,2)$.

Решение. В соответствии с формулой (3.20) имеем

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+3 & z-0 \\ 0-3 & 7+3 & 1-0 \\ -5-3 & 3+3 & 2-0 \end{vmatrix} = (x-3)\begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} - (y+3)\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -8 & 2 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} -3 & 10 \\ -8 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= 14x - 42 - 2y - 6 + 62z = 14x - 2y + 62z - 48 = 0.$$

Итак, $7x - y + 31z - 24 = 0$ – искомая плоскость.

Взаимное расположение двух плоскостей

Даны две плоскости:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \; A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \tag{3.22}$$

Необходимое и достаточное условие параллельности этих плоскостей выражается равенствами:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1}, \tag{3.23}$$

Это означает коллинеарность нормальных векторов $\overline{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ и $\overline{n}_2(A_2, B_2, C_2)$ плоскостей (3.22).

Косинус угла между плоскостями (3.22) определяется формулой

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^{\,2} + B_1^{\,2} + C_1^{\,2}}\sqrt{A_2^{\,2} + B_2^{\,2} + C_2^{\,2}}}. \qquad (3.24)$$

Фактически эта формула определяет угол между нормальными векторами плоскостей. Тогда необходимое и достаточное условие перпендикулярности плоскостей (3.22) выражается равенством

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \qquad (3.25)$$

Нормальное уравнение плоскости. Расстояние от точки до плоскости

Если вектор $\bar{n}_0 = \{A_0, B_0, C_0\}$, перпендикулярный плоскости

$$A_0x + B_0y + C_0z + D_0 = 0, \qquad (3.26)$$

единичный, т. е. $A_0^2 + B_0^2 + C_0^2 = 1$, то уравнение плоскости (3.26) в этом случае называется *уравнением в нормальном виде*. Если плоскость дана в общем виде $Ax + By + Cz + D = 0$, то его можно привести к нормальному виду, разделив обе части этого уравнения на $|\bar{n}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$. В этом случае мы получим нормальное уравнение плоскости:

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0. \qquad (3.27)$$

Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ вычисляется по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (3.28)$$

§ 3.6. Различные виды уравнений прямой в пространстве

Пусть дана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на прямой и направляющий вектор $\bar{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$. Этими условиями вполне определяется положение прямой в пространстве. Возьмем на прямой текущую точку $M(x, y, z)$. Векторы $\overline{M_0M}$ и $\bar{a}$ коллинеарны. Следовательно, имеет место равенство

$$\overline{M_0M} = \bar{a}\,t.$$

От этого равенства перейдем к соотношениям между координатами векторов $\overline{M_0 M}$ и $\bar{a}$:

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t, \\ y = y_0 + a_2 t, \\ z = z_0 + a_3 t. \end{cases} \tag{3.29}$$

Каноническое уравнение прямой

Из уравнения (3.29) исключим параметр t, получим:

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}. \tag{3.30}$$

Уравнение (3.30) есть каноническое уравнение прямой.

Прямая как пересечение двух плоскостей

Очевидно, что две непараллельные плоскости пересекаются по прямой. Таким образом, если векторы $\bar{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ и $\bar{n}_2(A_2, B_2, C_2)$ неколлинеарны, то система уравнений

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0, \end{cases}$$

каждое из которых представляет некоторую плоскость, однозначно определяет прямую, являющуюся их пересечением. Решив эту систему двух уравнений с тремя неизвестными, получим параметрические уравнения прямой.

Угол между двумя прямыми

Углом между двумя прямыми называется любой из двух углов, образуемых двумя прямыми, соответственно параллельными данным прямым и проходящими через одну точку.

Пусть две прямые имеют направляющие векторы соответственно $\bar{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\bar{b}(b_1, b_2, b_3)$. Из вышеприведенного определения следует, что один из углов между прямыми равен углу φ между направляющими векторами $\bar{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\bar{b}(b_1, b_2, b_3)$, а второй равен $\pi - \varphi$. Тогда

$$\cos\varphi = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}. \tag{3.31}$$

Если прямые перпендикулярны, то угол между направляющими векторами будет прямым. Следовательно, $\overline{a}\overline{b}=0$. Отсюда следует, что

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0. \qquad (3.32)$$

Условие (3.32) не только необходимое, но и достаточное для перпендикулярности двух прямых.

Расстояние от точки до прямой

Расстоянием от точки до прямой называется длина перпендикуляра, опущенного из точки на прямую.

Пусть дана прямая l:

$$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3} \qquad (3.33)$$

и точка $M_1(x_1,y_1,z_1)$. Искомое расстояние d есть высота параллелограмма, построенного на векторах:

$$\overline{a}=\{a_{1,}a_2,a_3\},\ \overline{M_0M_1}=\{x_1-x_0,y_1-y_0,z_1-z_0\}.$$

Пусть $\overline{p}=[\overline{M_0M_1}\cdot\overline{a}]$. Так как модуль вектора $\overline{p}$ численно равен площади параллелограмма, то $d=\dfrac{|\overline{p}|}{|\overline{a}|}$. Далее используем следующие вычисления:

$$\overline{p}=\left\{\begin{vmatrix} y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ a_2 & a_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix} z_1-z_0 & x_1-x_0 \\ a_3 & a_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix} x_1-x & y_1-y_0 \\ a_1 & a_2\end{vmatrix}\right\},$$

$$|\overline{p}|=\sqrt{\begin{vmatrix} y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ a_2 & a_3\end{vmatrix}^2,\begin{vmatrix} z_1-z_0 & x_1-x_0 \\ a_3 & a_1\end{vmatrix}^2,\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 \\ a_1 & a_2\end{vmatrix}^2},$$

$$\overline{a}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.$$

Следовательно,

$$d=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ a_2 & a_3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z_1-z_0 & x_1-x_0 \\ a_3 & a_1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 \\ a_1 & a_2\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}. \qquad (3.34)$$

Угол между прямой и плоскостью

Пусть дана плоскость γ

$$Ax + By + Cz = 0$$

и прямая c, не перпендикулярная плоскости:

$$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}.$$

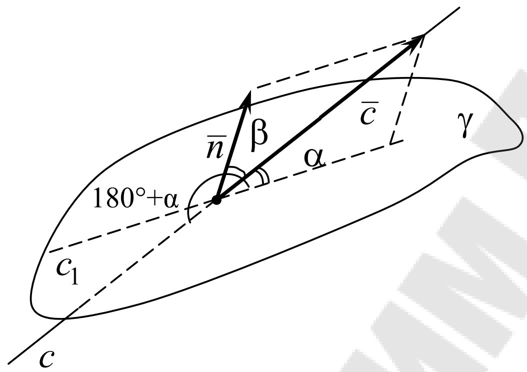

Рис. 3.8

Под углом α между прямой и плоскостью понимают угол между этой прямой и ее проекцией на плоскость γ:

$$\sin\varphi=\frac{|Aa_1+Bb_1+Cc_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}, \tag{3.35}$$

где $\bar{n}=\{A,B,C\}$ – нормальный вектор плоскости γ: $\bar{c}=\{a_1,a_2,a_3\}$ – направляющий вектор прямой c (рис. 3.8).

Из формулы (3.35) получим необходимое и достаточное условия параллельности прямой и плоскости:

$$Aa_1+Ba_2+Ca_3=0. \tag{3.36}$$

Необходимое и достаточное условие перпендикулярности прямой и плоскости:

$$\frac{A}{a_1}=\frac{B}{a_2}=\frac{C}{a_3}. \tag{3.37}$$

Литература

1. Апатенок, Р. Ф. Элементы линейной алгебры / Р. Ф. Апатенок. – Минск : Высш. шк., 1997. – 256 с.

2. Бугров, Я. С. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – Москва : Наука, 1980. – 176 с.

3. Воеводин, В. В. Линейная алгебра / В. В. Воеводин. – Москва : Наука, 1974. – 336 с.

4. Головина, Л. И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения / Л. И. Головина. – Москва : Наука, 1971. – 288 с.

5. Гурский, Е. И. Основы линейной алгебры и аналитической геометрии / Е. И. Гурский. – Минск : Высш. шк., 1982. – 272 с.

6. Гусак, А. А. Высшая математика : в 2 т. / А. А. Гусак. – Минск : Изд-во БГУ им. В. И. Ленина, 1978. – Т. 1. – 353 с.

7. Гусак, А. А. Задачи и упражнения по высшей математике : в 2 т. / А. А. Гусак. – Минск : Изд-во БГУ им. В. И. Ленина, 1972. – Т. 1. – 361 с.

8. Ильин, В. А. Аналитическая геометрия / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – Москва : Наука, 1978. – 302 с.

Содержание

Учебное электронное издание комбинированного распространения

Учебное издание

Гойко Владимир Иосифович
Тепляков Виктор Герардович

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Курс лекций по дисциплинам «Высшая математика» и «Математика» для студентов всех специальностей заочной формы обучения

Электронный аналог печатного издания

Редактор *М. В. Аникеенко*
Компьютерная верстка *Н. Б. Козловская*

Подписано в печать 30.11.10.
Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Ризография. Усл. печ. л. 3,95. Уч.-изд. л. 3,02.
Изд. № 39.
E-mail: ic@gstu.by
http://www.gstu.by

Издатель и полиграфическое исполнение:
Издательский центр учреждения образования
«Гомельский государственный технический университет
имени П. О. Сухого».
ЛИ № 02330/0549424 от 08.04.2009 г.
246746, г. Гомель, пр. Октября, 48.