Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Высшая математика»

М. В. Задорожнюк, Е. А. Дегтярева, А. М. Чеховская

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

ПРАКТИКУМ
по подготовке к тестированию для студентов специальностей 1-36 04 02 «Промышленная электроника» и 1-40 05 01 «Информационные системы и технологии (по направлениям)» заочной формы обучения

Гомель 2015

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.171+22.172я73
З-15

*Рекомендовано советом факультета
автоматизированных и информационных систем
(протокол № 4 от 24.11.2014 г.)*

Рецензент: канд. физ.-мат. наук, доц. каф. «Медицинская и биологическая физика» Гомельского государственного медицинского университета *Е. С. Петрова*

Задорожнюк, М. В.

З-15 Теория вероятностей и математическая статистика : практикум по подготовке к тестированию для студентов специальностей 1-36 04 02 «Промышленная электроника» и 1-40 05 01 «Информационные системы и технологии (по направлениям)» заоч. формы обучения / М. В. Задорожнюк, Е. А. Дегтярева, А. М. Чеховская. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2015. – 68 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: https://elib.gstu.by. – Загл. с титул. экрана.

Практикум включает три раздела: «Случайные события», «Случайные величины» и «Элементы математической статистики». Каждый раздел содержит основной теоретический материал, а также детально разобранные примеры типовых задач.

Для студентов специальностей 1-36 04 02 «Промышленная электроника» и 1-40 05 01 «Информационные системы и технологии (по направлениям).

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.171+22.172я73

СОДЕРЖАНИЕ

1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

1.1. Основные понятия и определения

Теория вероятностей – математическая наука, изучающая закономерности, присущие массовым случайным явлениям (т.е. явлений, предсказать исход которых невозможно). Примеры случайных явлений – выпадение герба при подбрасывании монеты, выигрыш по купленному лотерейному билету, результат измерения какой-либо величины и т.п.

Случайное событие – любой исход опыта, который может произойти или не произойти. События обозначаются заглавными буквами $A, B, C, \ldots$.

Пример 1.1. Пусть опыт состоит в бросании игральной кости. Можно указать такие события:

A – «выпадение пяти очков»,

B – «выпадение четного числа очков»,

C – «выпадение целого числа очков»,

D – «выпадение семи очков»,

E – «выпадение не менее трех очков».

Событие называется

– *достоверным*, если оно обязательно наступит в результате данного опыта (событие C из примера 1.1);

– *невозможным*, если оно заведомо не произойдет в результате проведения опыта (событие D).

Непосредственные исходы опыта называются *элементарными событиями* и обозначаются через ω. Множество всех элементарных событий называется *пространством элементарных исходов* и обозначается Ω. Например, в случае с бросанием игральной кости пространство элементарных исходов состоит из шести элементарных событий ω_1 = «выпадение одного очка», ω_2 = «выпадение двух очков», …, ω_6 = «выпадение шести очков».

Два события называются *несовместными*, если появление одного из них исключает появление другого в том же опыте. В противном случае события называются *совместными*. В примере 1.1 события A и B – несовместны, события A и E – совместны.

Несколько событий образуют *полную группу*, если они попарно несовместны и в результате каждого опыта происходит одно и только одно из них.

Например, в опыте с бросанием игральной кости элементарные исходы ω_1 = «выпадение одного очка», ω_2 = «выпадение двух очков», …, ω_6 = «выпадение шести очков» образуют полную группу.

1.2. Операции над событиями

Суммой событий A и B называется событие $C = A + B$, состоящее в наступлении хотя бы одного из них (т.е. произошло событие A или B, или A и B вместе).

Произведением событий A и B называется событие $C = A \cdot B$, состоящее в совместном наступлении этих событий (т.е. события A и B произошли одновременно).

Противоположным событию A называется событие $\overline{A}$, которое происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие A.

1.3. Классическое определение вероятности

Пусть проводится опыт с n исходами, которые можно представить в виде полной группы несовместных равновозможных событий.

Определение. *Вероятностью* события A называется отношение числа m элементарных исходов, благоприятствующих появлению события A, к общему числу элементарных исходов n, т.е.

$$\boxed{P(A) = \frac{m}{n}.} \tag{1.1}$$

Из классического определения вероятности вытекают следующие свойства:

1. Вероятность любого события заключена между нулем и единицей, т.е.

$$0 \le P(A) \le 1.$$

2. Вероятность *невозможного* события равна нулю, вероятность *достоверного* события равна единице.

3. Вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий, т.е.

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Следствие:

$$P(A)+P(\overline{A})=1.$$

Пример 1.2. В урне 3 белых и 5 красных шаров. Наугад вынули один шар. Какова вероятность того, что он белый?

Решение

Воспользуемся формулой классической вероятности $P(A)=\frac{m}{n}$, где $n=3+5=8$ – количество всех шаров, $m=3$ – количество интересующих нас (т.е. белых) шаров. Следовательно, $P(A)=\frac{3}{8}=0,64$.

Ответ: 0,64.

Замечание. При решении задач на классическую вероятность наибольшую трудность составляет подсчет чисел m и n. При этом удобно использовать следующие правила:

Правило умножения: если из некоторого конечного множества первый объект (элемент x) можно выбрать n_1 способами и после каждого такого выбора второй объект (элемент y) можно выбрать n_2 способами, то оба объекта (x и y) в указанном порядке можно выбрать $n_1 \cdot n_2$ способами.

Правило суммы: если некоторый объект x можно выбрать n_1 способами, а объект y можно выбрать n_2 способами, причем первые и вторые способы не пересекаются, то любой из указанных объектов (x или y) можно выбрать n_1+n_2 способами.

Кроме того, для вычисления чисел m и n можно использовать формулы комбинаторики (*комбинаторика* – раздел математики, в котором изучаются задачи выбора элементов из заданного множества и расположения их в группы по заданным правилам).

Приведем несколько определений.

Перестановками называются комбинации, состоящие из одних и тех же n элементов и отличающихся только порядком их расположения.

Размещением из n элементов по m называется любое упорядоченное подмножество данного множества, содержащее m элементов. Таким образом, размещения – это выборки, состоящие из m элементов, которые различаются либо составом элементов, либо их порядком (упорядоченные выборки).

Сочетанием из n элементов по m называется любое подмножество, которое содержит m элементов данного множества. Таким образом, сочетания – это комбинации, каждая из которых состоит из m элементов, взятых из исходных n элементов, и которые отличаются друг от друга только составом элементов (неупорядоченные выборки).

Если выбор m объектов из исходных n осуществляется поэлементно, с обязательным возвращением отобранного элемента на каждом шаге, то говорят о выборке *с возвращением* (с повторением). Если же выбранные элементы не возвращаются обратно, то говорят о выборке *без возвращения* (без повторений).

Вычислим число всех перестановок из n элементов P_n, число размещений из n по m A_n^m, число сочетаний из n по m C_n^m, число размещений из n по m с повторениями $\overline{A}_n^m$ и число сочетаний из n по m с повторениями $\overline{C}_n^m$.

1) на первое место в *перестановке* можно поставить любой из n элементов исходного множества, на второе – любой из $n-1$ элемента и т.д. На последнее место – один элемент. Получаем

$$P_n = n(n-1)(n-2)\cdots 1 = n! \tag{1.2}$$

Напомним, что $n!$ – это произведение всех натуральных чисел от единицы до n. Например, $5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$.

2) рассуждая так же, как в пункте 1, получим

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-(m-1)) = \frac{n!}{(n-m)!}. \tag{1.3}$$

3) т.к. размещения и сочетания отличаются друг от друга упорядоченностью, то в сочетаниях C_n^m все возможные перестановки из m элементов будут рассматриваться как одна и та же, т.е.

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \tag{1.4}$$

4) рассмотрим размещения с повторениями. На первое место можно поставить любой из m элементов, на второе – любой из m элементов и т.д. Тогда

$$\overline{A}_n^m = n^m. \tag{1.5}$$

5) очевидно, что

$$\overline{C}_n^m = C_{n+(m-1)}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!((n+m-1)-m)!} = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}.$$

$$\overline{C}_n^{\,m} = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}. \qquad (1.6)$$

Пример 1.3. Сколькими способами:

1) можно расставить на полке 5 книг?

$P_5 = 5! = 120$;

2) можно расставить на полке три книги из имеющихся пяти?

$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$;

3) можно составить дозор из трех солдат и одного офицера, если имеются 80 солдат и 3 офицера?

$N = C_3^1 \cdot C_{80}^3 = 246480$;

4) можно составить наборы из 7 пирожных, если в продаже имеются 4 сорта?

$C_{4+7-1}^7 = C_{10}^7 = 120$.

Пример 1.4. В урне находятся 5 красных и 8 зеленых шаров. Найти вероятность того, что из взятых наугад шести шаров половина – красные.

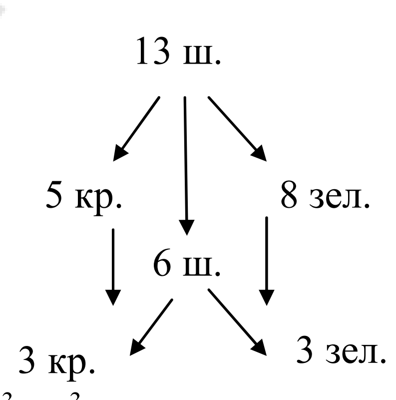
Решение

Воспользуемся формулой классической вероятности (1.1):

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Известно, что всего шаров 13, что из них выбрали 6, из которых половина (т.е. 3 шара) должны оказаться красными, а остальные 3 шара – зелеными.

Изобразим условие задачи в виде схемы:



Тогда $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_5^3 \cdot C_8^3}{C_{13}^6}$.

Воспользуемся формулой (1.4) для вычисления числа сочетаний из n по m:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Таким образом,

$$P(A) = \frac{C_5^3 \cdot C_8^3}{C_{13}^6} = \frac{5!}{3!\,2!} \cdot \frac{8!}{3!\,5!} : \frac{13!}{6!7!} = \frac{5!}{3!\,2!} \cdot \frac{8!}{3!\,5!} \cdot \frac{6!\,7!}{13!} = \frac{8!\,6!\,7!}{3!\,2!\,3!\,13!} =$$

$$= \frac{8!}{13!} \cdot \frac{6!}{3!} \cdot \frac{7!}{3!\,2!} = \frac{1}{9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13} \cdot \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1} \cdot \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2} \approx 0{,}326$$

Ответ: 0,326.

1.4. Геометрическое определение вероятности

Классическое определение вероятности предполагает, что множество элементарных исходов Ω конечно. На практике это бывает не всегда (например, когда мы говорим о времени или расстоянии). В таких случаях удобно применять геометрическое определение вероятности.

Рассмотрим на плоскости некоторую область Ω, имеющую площадь S_Ω, и внутри нее область D с площадью S_D как на рис.1:

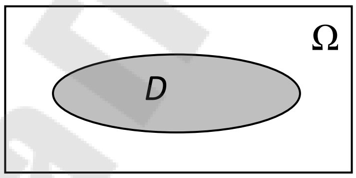


Рис.1

В область Ω случайным образом «бросают точку», при этом предполагают, что все точки области Ω равноправны (все элементарные события равновозможны). Пусть событие A – «брошенная точка попадет в область D».

Определение. *Геометрической вероятностью* события A называется отношение площади области D к площади области Ω, т.е.

$$P(A) = \frac{S_D}{S_\Omega}. \tag{1.7}$$

Замечание. Геометрическое определение вероятности применимо и в случае, когда области Ω и D линейные или объемные, только площади областей в формуле потребуется заменить, соответственно, на их длины или объемы.

1.5. Условная вероятность

Иногда приходится рассматривать вероятности событий при дополнительном условии, что произошло некоторое другое событие. Такие вероятности называются *условными*.

Условной вероятностью события B при условии, что произошло событие A, называется отношение вероятности произведения этих событий к вероятности события A, причем $P(A)\neq 0$. Обозначается условная вероятность символом $P(B/A)$. Таким образом, по определению

$$P(B/A)=\frac{P(AB)}{P(A)}. \tag{1.8}$$

События A и B называются *независимыми*, если появление одного из них не меняет вероятности появления другого.

Пример 1.5. В урне 3 белых и 7 красных шаров. Наугад вынули шар и отложили. После этого вынули еще один шар. Пусть событие A – «первый вынутый шар – белый», событие B – «второй вынутый шар белый». Зависимы ли события A и B?

Решение

Выясним, меняется ли вероятность события B в зависимости от того, произошло или нет событие A. Для этого найдем и сравним вероятности $P(B/A)$ и $P(B/\overline{A})$.

Если произошло событие A, и первый вынутый шар оказался белым, значит, из оставшихся в урне девяти шаров только 2 белых. Следовательно, $P(B/A)=\frac{2}{9}$.

Если же событие A не произошло, т.е. произошло противоположное событие $\overline{A}$ (первый вынутый шар оказался не белым, а красным), то белых шаров в урне по-прежнему 3, а значит $P(B/\overline{A})=\frac{3}{9}$.

Таким образом, события A и B зависимы.

Примером независимых событий могут служить события A – «первый раз выпал герб», событие B – «второй раз выпал герб» при двух подбрасываниях монеты.

1.6. Теоремы сложения и умножения вероятностей

1. *Теорема сложения* для двух *совместных* событий: вероятность суммы равна сумме вероятностей событий без учета их совместного появления, т.е.

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB) \tag{1.9}$$

2. *Теорема сложения* для двух *несовместных* событий:

$$\boxed{P(A+B)=P(A)+P(B)} \tag{1.10}$$

3. *Теорема сложения* для n *несовместных* событий:

$$P(\sum_{i=1}^{n} A_i)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \tag{1.11}$$

4. *Теорема умножения* для двух *зависимых* событий: вероятность произведения двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое событие произошло, т.е.

$$P(A\cdot B)=P(A)P(B/A) \tag{1.12}$$

5. *Теорема умножения* для n *зависимых* событий:

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)\cdots P(A_n/A_1A_2\cdots A_{n-1}) \tag{1.13}$$

6. *Теорема умножения* для *двух независимых* событий:

$$\boxed{P(A\cdot B)=P(A)P(B)} \tag{1.14}$$

7. *Теорема умножения* для n *независимых событий*:

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)\cdots P(A_n) \tag{1.15}$$

Пример 1.6. В двух ящиках находятся шары: в первом – 6 красных и 14 синих, во втором – 15 красных и 10 синих. Из каждого ящика наугад берут по одному шару. Какова вероятность того, что: а) оба шара красные; б) взяты шары разных цветов?

Решение

Обозначим события A_1 – «из первого ящика взят красный шар», A_2 – «из второго ящика взят красный шар», B – «оба вынутых шара – красные», C – «взяты шары разных цветов».

Найдем вероятности событий A_1 и A_2. Для этого воспользуемся классическим определением вероятности.

$p_1 = P(A_1) = \frac{m}{n} = \frac{6}{6+14} = \frac{6}{20} = 0{,}3$,

$p_2 = P(A_2) = \frac{15}{15+10} = \frac{15}{25} = 0{,}6$.

а) так как $B = A_1 A_2$, а события A_1 и A_2 независимы, то воспользуемся формулой (1.14):

$P(B) = P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1)P(A_2) = p_1 \cdot p_2 = 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}18$.

б) напомним, что $\overline{A_1}$ и $\overline{A_2}$ – события, противоположные событиям A_1 и A_2 соответственно, т.е.

$\overline{A_1}$ – «из первого ящика взят не красный (а значит, синий) шар»,

$\overline{A_2}$ – «из первого ящика взят синий шар».

Соответствующие вероятности будут равны:

$p(\overline{A_1}) = \overline{p}_1 = 1 - p_1 = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$,

$p(\overline{A_2}) = \overline{p}_2 = 1 - p_2 = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$.

Так как события $A_1\overline{A_2}$ и $\overline{A_1}A_2$ несовместны, а A и B – независимы, то по формулам (1.10) и (1.14) имеем

$P(C) = P(A \cdot \overline{B} + B \cdot \overline{A}) = P(A)P(\overline{B}) + P(B)P(\overline{A}) = p_1\overline{p}_2 + p_2\overline{p}_1 =$
$= 0{,}6 \cdot 0{,}2 + 0{,}8 \cdot 0{,}4 = 0{,}44$.

Ответ: а) 0,48; б) 0,44.

Пример 1.7. Экспедиция издательства отправила газеты в три почтовых отделения. Вероятность своевременной доставки газет в первое отделение равна 0,95, во второе – 0,9, в третье – 0,8. Найти вероятности следующих событий:

а) все отделения получат газеты вовремя;

б) только одно отделение получит газеты с опозданием;

в) не более одного отделения получат газеты с опозданием;

г) хотя бы одно отделение получит газеты с опозданием.

Решение

Обозначим события:

A_1 – «в первое отделение газеты доставлены вовремя»,

A_2 – «во второе отделение газеты доставлены вовремя»,

A_3 – «в третье отделение газеты доставлены вовремя».

Вероятности событий A_1, A_2, A_3 по условию соответственно равны $P(A_1) = p_1 = 0{,}95$, $P(A_2) = p_2 = 0{,}9$, $P(A_3) = p_3 = 0{,}8$.

а) найдем вероятность события A – «все отделения получат газеты вовремя». События A_1, A_2 и A_3 являются независимыми, а

значит, согласно теореме умножения, вероятность того, что все три отделения получат газеты вовремя, вычисляется по формуле (1.15):
$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = p_1 p_2 p_3 = 0{,}95 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}8 = 0{,}684$.

б) обозначим через $\overline{p}_1, \overline{p}_2, \overline{p}_3$ вероятности соответствующих противоположных событий $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$ и $\overline{A}_3$. Тогда
$\overline{p}_1 = 1 - 0{,}95 = 0{,}05,$
$\overline{p}_2 = 1 - 0{,}9 = 0{,}1,$
$\overline{p}_3 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$.

Событие B – «только одно отделение получит газеты с опозданием» может произойти в следующих случаях:

1) первое отделение получило газеты с опозданием, а второе и третье – вовремя (событие $\overline{A}_1 A_2 A_3$);

2) первое и третье отделения получили газеты вовремя, а второе – с опозданием (событие $A_1 \overline{A}_2 A_3$);

3) первое и второе отделения получили газеты вовремя, а третье – нет (событие $A_1 A_2 \overline{A}_3$);

События, описанные в пунктах 1), 2) и 3) являются несовместными, значит, для них применима теорема сложения (1.11):
$P(B) = P(\overline{A}_1 A_2 A_3) + P(A_1 \overline{A}_2 A_3) + P(A_1 A_2 \overline{A}_3)$.

Т.к. множители в каждой скобке – независимые события, то можно применить теорему умножения (1.15):
$$P(B) = P(\overline{A}_1 A_2 A_3) + P(A_1 \overline{A}_2 A_3) + P(A_1 A_2 \overline{A}_3) = \overline{p}_1 p_2 p_3 + p_1 \overline{p}_2 p_3 + p_1 p_2 \overline{p}_3 =$$
$$= 0{,}05 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}8 + 0{,}95 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}8 + 0{,}95 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}2 = 0{,}283.$$

в) событие C – «не более одного отделения получат газеты с опозданием» состоит в том, что газеты с опозданием получит одно почтовое отделение или меньше (т.е., ни одного). Значит, $B = \overline{A}_1 A_2 A_3 + A_1 \overline{A}_2 A_3 + A_1 A_2 \overline{A}_3 + A_1 A_2 A_3$.

Тогда
$P(C) = \overline{p}_1 p_2 p_3 + p_1 \overline{p}_2 p_3 + p_1 p_2 \overline{p}_3 + p_1 p_2 p_3 = 0{,}283 + 0{,}684 = 0{,}967$.

г) событие D – «хотя бы одно отделение получит газеты с опозданием» произойдет, если газеты несвоевременно получат одно, или два, или все три отделения.

Рассмотрим противоположное событие $\overline{D}$ – «все отделения получат газеты вовремя». Его вероятность найдена в пункте а) и равна $P(A) = P(\overline{D}) = 0{,}684$. Так как $P(D) + P(\overline{D}) = 1$, то $P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 1 - 0{,}684 = 0{,}316$.

Ответ: а) 0,684; б) 0,383; в) 0,967; г) 0,316.

1.7. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Пусть события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ образуют полную группу. Тогда для любого события A имеет место *формула полной вероятности*:

$$\boxed{P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k) \cdot P(A / H_k).} \tag{1.16}$$

События $H_1, H_2, \ldots, H_n$ в этой формуле обычно называют *гипотезами*.

Следствием формулы полной вероятности является *формула Байеса* (или *формула переоценки гипотез*):

$$\boxed{P(H_k / A) = \frac{P(H_k) \cdot P(A / H_k)}{P(A)}.} \tag{1.17}$$

Формула Байеса позволяет переоценить вероятности гипотез H_k, принятых до опыта, по результатам уже проведенного опыта, т.е. найти условные вероятности $P(H_k / A)$.

Пример 1.8. Имеются две группы студентов, состоящие из 20 и 25 человек. Свободно владеют английским языком 12 студентов из первой группы и 15 из второй группы. Какова вероятность того, что случайным образом выбранный из двух групп студент свободно владеет английским языком?

Решение

Пусть событие A – «случайно выбранный студент владеет английским языком».

Очевидно, что вероятность этого события будет зависеть от нескольких факторов: во-первых, от того, какая часть студентов каждой группы владеет английским языком, во-вторых, от того, сколько студентов учатся в каждой группе. Поэтому для решения задачи применим формулу полной вероятности (1.16):

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k) \cdot P(A / H_k).$$

Определим гипотезы (их здесь будет две) H_1, H_2:

H_1 – «выбран студент из первой группы»,

H_2 – «выбран студент из второй группы», Вычислим $P(H_1)$, $P(H_2)$, $P(A/H_1)$, $P(A/H_2)$.

Итак, $P(H_1)$ – это вероятность того, что случайно выбран студент из первой группы. Найдем эту вероятность по формуле классической вероятности:

$$P(H_1)=\frac{m}{n}=\frac{20}{20+25}=\frac{20}{45}=\frac{4}{9}.$$

Аналогично, $P(H_2)=\frac{m}{n}=\frac{25}{20+25}=\frac{25}{45}=\frac{5}{9}$.

Найдем $P(A/H_1)$ и $P(A/H_2)$ – вероятности того, что случайно выбранный студент владеет английским языком при условии, что он из первой группы или из второй группы соответственно. По условию задачи имеем

$$P(A/H_1)=\frac{12}{20},\ P(A/H_2)=\frac{15}{25}.$$

Подставим все значения в формулу полной вероятности. Получим

$$P(A)=\sum_{k=1}^{2}P(H_k)\cdot P(A/H_k)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)=$$

$$=\frac{4}{9}\cdot\frac{12}{20}+\frac{5}{9}\cdot\frac{15}{25}=\frac{3}{5}=0{,}6.$$

Ответ: 0,6.

Пример 1.9. На склад поступили электроутюги: 50% с первого завода, 20% со второго и 30% с третьего завода. Среди продукции первого завода 90% выдерживают трехлетний гарантийный срок, со второго и третьего завода – 95%. Взятый наугад со склада утюг выдержал трехлетний гарантийный срок. Какова вероятность того, что этот утюг поступил с первого завода?

Решение

В данной задаче по уже известному результату опыта (утюг выдержал гарантийный срок) требуется переоценить вероятность одной из гипотез (утюг изготовлен первым заводом), а значит, необходимо применить формулу Байеса (1.17):

$$P(H_k/A)=\frac{P(H_k)\cdot P(A/H_k)}{P(A)}$$

Итак, событие A – «утюг выдержал гарантийный срок».

Гипотезы:

H_1 – «утюг изготовлен первым заводом»,

H_2 – «утюг изготовлен вторым заводом»,

H_3 – «утюг изготовлен третьим заводом».

Вероятности гипотез H_1, H_2, H_3 и $P(A/H_1)$, $P(A/H_2)$, $P(A/H_3)$ (вероятности того, что утюг выдержит гарантийный срок, при условии, что он изготовлен 1-ым, 2-ым, 3-им заводами соответственно) найдём из условия задачи:

$P(H_1) = 50\% = 0,5$ $\quad P(A/H_1) = 90\% = 0,9$

$P(H_2) = 20\% = 0,2$ $\quad P(A/H_2) = 95\% = 0,95$

$P(H_3) = 30\% = 0,3$ $\quad P(A/H_3) = 95\% = 0,95$

Вероятность $P(A)$ вычислим по формуле полной вероятности (1.16):

$$P(A) = \sum_{k=1}^{3} P(H_k)\cdot P(A/H_k) = P(H_1)\cdot P(A/H_1) + P(H_2)\cdot P(A/H_2) +$$
$$+ P(H_3)\cdot P(A/H_3) = 0,5\cdot 0,9 + 0,2\cdot 0,95 + 0,3\cdot 0,95 = 0,925.$$

Искомую вероятность $P(H_1/A)$ найдем по формуле Байеса:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{0,5\cdot 0,9}{0,925} \approx 0,486.$$

Ответ: $0,486$.

1.8. Повторение испытаний. Схема Бернулли

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых может произойти событие A с одной и той же вероятностью p или противоположное ему событие с вероятностью $q = 1 - p$. Тогда вероятность того, что в n испытаниях событие случится ровно m раз вычисляется по *формуле Бернулли*:

$$\boxed{P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m},} \qquad (1.18)$$

где C_n^m – число сочетаний из n по m, $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

Пример 1.10. Для стрелка, выполняющего упражнение в тире, вероятность попасть в «яблочко» при одном выстреле не зависит от результатов предшествующих выстрелов и равна 0,25. Спортсмен сделал семь выстрелов. Найти:

а) вероятность ровно одного попадания;

б) вероятность не менее трех попаданий;

в) вероятность хотя бы одного попадания;

г) наивероятнейшее число попаданий и соответствующую этому числу вероятность.

Решение

Производится 5 независимых испытаний, причем вероятность успеха (т.е. попадания в «яблочко») не меняется от испытания к испытанию, следовательно, можно применить формулу Бернулли (1.18):

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m},$$

где $q = 1 - p$, $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

а) имеем: $n = 5$, $m = 1$, $p = 0{,}25$, $q = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$. По формуле Бернулли получим:

$$P_5(1) = C_5^1 \cdot 0{,}25^1 \cdot 0{,}75^{5-1} = \frac{5!}{1!\,(5-1)!} 0{,}25 \cdot 0{,}75^4 = \frac{5!}{4!} \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}3164 = 0{,}3955.$$

б) «не менее трех попаданий» – это значит «три или больше», т.е. три, или четыре, или пять попаданий. Значит, применить формулу Бернулли придется три раза и, кроме того, потребуется теорема сложения вероятностей для нескольких несовместных событий.

Итак, $P_5(3 \le m \le 5) = P_5(3) + P_5(4) + P_5(5) =$

$$= C_5^3 \cdot 0{,}25^3 \cdot 0{,}75^2 + C_5^4 \cdot 0{,}25^4 \cdot 0{,}75^1 + C_5^5 \cdot 0{,}25^5 \cdot 0{,}75^0 =$$

$$= \frac{5!}{3!\,2!} \cdot 0{,}25^3 \cdot 0{,}75^2 + \frac{5!}{4!\,1!} \cdot 0{,}25^4 \cdot 0{,}75 + \frac{5!}{5!\,0!} \cdot 0{,}25^5 \cdot 1 = 10 \cdot 0{,}25^3 \cdot 0{,}75^2 +$$

$$+ 5 \cdot 0{,}25^4 \cdot 0{,}75 + 0{,}25^5 \approx 0{,}0879 + 0{,}0146 + 0{,}00098 \approx 0{,}1035.$$

в) найдем вероятность хотя бы одного попадания в цель. «Хотя бы одно попадание» – это 1, или 2, или 3, или 4, или 5 попаданий, т.е. формулу Бернулли пришлось бы применить пять раз. Такой подход достаточно трудоемкий и длительный, поэтому *задачи со словами «хотя бы»* следует решать от противного, используя понятие противоположного события. В данном случае, противоположным к событию A – «хотя бы одно попадание» будет событие $\overline{A}$ – «ни одного попадания».

Найдем соответствующую вероятность, т.е. применим формулу Бернулли при $n = 5$, $m = 0$, $p = 0{,}25$, $q = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$.

Получим

$$P_5(0) = C_5^0 \cdot 0{,}25^0 \cdot 0{,}75^5 = \frac{5!}{0!\,(5-0)!} \cdot 0{,}75^5 = 1 \cdot 0{,}75^5 \approx 0{,}2373.$$

Учитывая, что $P(A) + P(\overline{A}) = 1$, получим

$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0{,}2373 = 0{,}7627$.

г) *наивероятнейшее число попаданий* m_0 найдем по формуле

$$np - q \le m_0 \le np + p. \qquad (1.19)$$

Подставим в формулу (1.19) значения $n = 5$, $p = 0{,}25$, $q = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$ и получим

$$5 \cdot 0{,}25 - 0{,}75 \le m_0 \le 5 \cdot 0{,}25 + 0{,}25.$$

Окончательно имеем $0{,}5 \le m_0 \le 1{,}5$.

Т.к. m_0 должно быть целым числом, а единственное целое число, удовлетворяющее данному неравенству, это единица, то $m_0 = 1$. Соответствующую вероятность мы уже вычислили в пункте а), она равна $P_5(1) = 0{,}3955$.

Ответ: а) 0,3955; б) 0,1035; в) 0,7627; г) $m_0 = 1$, $P_5(1) = 0{,}3955$.

1.9. Теорема Пуассона

Непосредственное применение формулы Бернулли при большом числе испытаний связано с громоздкими вычислениями. Поэтому при большом n вместо формулы Бернулли используют, как правило, приближенные формулы Пуассона и Муавра-Лапласа.

Теорема. Если число испытаний n достаточно велико, а вероятность p достаточно мала, причем их произведение $\text{л} = np$ не мало и не велико (обычно достаточно условия $p < 0{,}1$, $npq < 10$), то вероятность появления события m раз в n испытаниях можно найти по формуле Пуассона:

$$\boxed{P_n(m) \approx \frac{\text{л}^m e^{-\text{л}}}{m!}.} \qquad (1.20)$$

Пример 1.11. Завод отправил на базу 5000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равна 0,0002. Какова вероятность того, что на базу приедут три негодных изделия?

Решение

По условию $n = 5000$, $p = 0{,}0002$, $m = 3$. Так как n слишком велико, а p очень мало, то удобно воспользоваться формулой Пуассона (1.20).

Вычислим $л = np = 5000 \cdot 0{,}0002 = 1$. Тогда

$$P_{5000}(3) \approx \frac{1^3 e^{-1}}{3!} = \frac{1}{6e} \approx 0{,}0617.$$

Ответ: 0,0617.

1.10. Теоремы Муавра-Лапласа

Локальная теорема Муавра-Лапласа. Если число испытаний n достаточно велико, а вероятности p и q не очень близки к нулю (обычно достаточно условия $n > 100$, $npq > 20$), то вероятность $P_n(m)$ того, что в n испытаниях событие произойдет ровно m раз, можно приближенно найти по *локальной формуле Муавра-Лапласа*:

$$\boxed{P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x),} \qquad (1.21)$$

где $x = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}}$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2р}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ – функция Гаусса.

Значения функции Гаусса приведены в специальных таблицах (см. приложение 1). Пользуясь таблицей, необходимо учитывать некоторые свойства функции $\varphi(x)$:

1. $\varphi(x)$– четная функция, т.е. $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

2. $\varphi(x)$ монотонно убывает при положительных значениях x, причем при $x \to \infty$ $\varphi(x) \to 0$. Практически можно считать, что уже при $x > 5$ функция $\varphi(x) \approx 0$.

Пример 1.12. Вероятность того, что водитель автомобиля не пристегнут ремнем безопасности, составляет $0{,}4$. Какова вероятность того, что из 75 водителей, остановленных автоинспектором, пристегнуты 60 водителей?

Решение

По условию, $n = 75$, $m = 65$, $q = 0{,}4$, $p = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$.

Найдем $np = 75 \cdot 0{,}6 = 45$, $npq = 75 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 18$,

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{60 - 45}{\sqrt{18}} \approx 3{,}54.$$

По таблице находим $\varphi(3{,}54) = 0{,}0008$.

Таким образом, $P_{400}(80) = \dfrac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{18}} \cdot 0{,}0008 \approx 0{,}0002$.

Ответ: 0,0002.

Интегральная теорема Муавра-Лапласа. Если число испытаний n велико, а вероятности p и q не очень близки к нулю, то вероятность $P_n(m_1 \le m \le m_2)$ того, что событие появится в n испытаниях не менее m_1 и не более m_2 раз, можно приближенно найти по *интегральной формуле Муавра-Лапласа*:

$$\boxed{P_n(m_1 \le m \le m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),} \tag{1.22}$$

где $x_1 = \dfrac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \dfrac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$, $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$.

Функция $\Phi(x)$ называется *стандартной функцией Лапласа* и ее значения также можно найти в соответствующей таблице (см. приложение 2). При использовании таблицы полезно знать некоторые свойства функции Лапласа:

1. $\Phi(x)$ – нечетная функция, т.е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

2. $\Phi(0) = 0$.

3. $\Phi(x)$ монотонно возрастает, причем при $x \to \infty$ $\Phi(x) \to 0{,}5$. Практически можно считать, что при $x > 5$ функция $\Phi(x) \approx 0{,}5$.

Пример 1.13. Монета подбрасывается 200 раз. Найти вероятность того, что герб появится не менее 95 и не более 105 раз.

Решение

По условию, $n = 200$, $p = 0{,}5$, $q = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$.

Найдем $np = 200 \cdot 0{,}5 = 100$, $npq = 200 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 50$,

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{95 - 100}{\sqrt{50}} = \frac{-5}{\sqrt{50}} \approx -0{,}71,$$

$$x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{105 - 10}{\sqrt{50}} = \frac{50}{\sqrt{50}} = 0{,}71.$$

По таблице значений функции Лапласа находим

$\Phi(0{,}71) = 0{,}2611$; $\Phi(-0{,}71) = -\Phi(0{,}71) = -0{,}2611$.

Таким образом,

$P_{400}(95 \le m \le 105) = \Phi(0{,}71) - \Phi(-0{,}71) = 0{,}2611 - (-0{,}2611) = 0{,}5222$.

Ответ: 0,5222.

2. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Случайной величиной называют величину, которая в результате опыта принимает одно значение из множества возможных, заранее неизвестное и зависящее от случая. Обозначают случайные величины (сокращенно СВ) обычно строчными буквами (X, Y, Z), а принимаемые ими значения – малыми буквами ($x_1, x_2, \ldots$).

Примеры случайных величин:

СВ X – число очков, появляющихся при бросании игральной кости;

СВ Y – количество студентов на лекции;

СВ Z – время безотказной работы прибора.

Случайная величина, принимающая конечное или счетное множество значений (отдельных, изолированных друг от друга), называется *дискретной* (ДСВ). Если же множество возможных значений СВ несчетно (т.е. величина может принимать любые значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка), то такая величина называется *непрерывной* (НСВ). Случайные величины X и Y из приведенного выше примера являются дискретными, а СВ Z – непрерывной случайной величиной.

Для полного описания СВ недостаточно лишь знания ее возможных значений, необходимо знать еще вероятности этих значений. Любое правило (таблица, функция, график), позволяющее находить вероятности отдельных значений случайной величины или множества этих значений, называется *законом распределения случайной величины* (говорят, что «СВ подчиняется данному закону распределения»). Универсальным способом задания закона распределения вероятностей, пригодным как для дискретных, так и для непрерывных случайных величин, является ее *функция распределения*, обозначаемая $F_X(x)$ (или просто $F(x)$).

2.1. Функция распределения и ее свойства

Определение. *Функцией распределения СВ X* (дискретной или непрерывной) называется функция действительной переменной x, определяемая равенством:

$$\boxed{F(x) = P(X < x),} \tag{2.1}$$

где $P(X < x)$ – вероятность того, что СВ X примет значение, меньшее чем x.

Геометрически это означает следующее: $F(x)$ есть вероятность того, что точка, изображающая СВ X лежит левее точки x (рис.2).

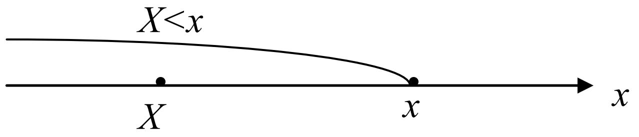


Рис. 2

Свойства функции распределения:

1. $F(x)$ ограничена, т.е.

$$0 \le F(x) \le 1.$$

2. Т.к. $X < -\infty$ – невозможное событие, а $X < +\infty$ – достоверное событие, то

$$F(-\infty) = 0, \; F(+\infty) = 1.$$

3. $F(x)$ – неубывающая функция, т.е. если $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \le F(x_2)$.

4. $F(x)$ непрерывна слева, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} F(x) = F(x_0)$.

5. Вероятность попадания СВ X на полуинтервал $[\alpha;\beta)$ равна приращению ее функции распределения на этом промежутке, т.е.

$$\boxed{P(\alpha \le X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).} \qquad (2.2)$$

2.2. Дискретные случайные величины

Рассмотрим подробнее дискретные случайные величины и их основные характеристики.

1. Закон распределения ДСВ

Закон распределения ДСВ удобно задавать в виде таблицы:

X	x_1	x_2	…	x_n	…
P	p_1	p_2	…	p_n	…

где первая строка содержит все возможные значения СВ (обычно в порядке возрастания), а вторая – соответствующие им вероятности. Такую таблицу называют *рядом распределения* ДСВ X.

Замечание. Так как события $\{X = x_1\}, \{X = x_2\}, \ldots$ несовместны и образуют полную группу, то $\sum_i p_i = 1$.

Пример 2.1. В денежной лотерее выпущено 100 билетов. Разыгрывается один выигрыш в 50$ и 10 выигрышей по 1$. Построить ряд распределения случайной величины X – стоимости возможного выигрыша для владельца одного билета.

Решение

Можно выиграть 50$ (в одном случае из ста), 1$ (в десяти случаях) или не выиграть ничего (в остальных 89 случаях), следовательно, СВ X может принимать следующие значения: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 50$. Найдем вероятности появления x_1, x_2, x_3.

$$p_1 = \frac{89}{100} = 0{,}89;\ p_2 = \frac{10}{100} = 0{,}1;\ p_3 = \frac{1}{100} = 0{,}01.$$

Запишем *ряд распределения*

X	0	1	50
P	0,89	0,1	0,01

Контроль: $p_1 + p_2 + p_3 = 0{,}89 + 0{,}1 + 0{,}01 = 1$.

2. Функция распределения ДСВ

Напомним, что функция распределения является универсальной характеристикой как НСВ, так и ДСВ и определяется равенством (2.1), но для ДСВ это равенство может быть записано в следующем виде:

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} P(X < x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i) = \sum_{x_i < x} p_i \text{, т.е.}$$

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p_i\ . \tag{2.3}$$

Закон распределения полностью характеризует случайную величину. Однако при решении многих практических задач достаточно знать лишь некоторые числовые параметры, характеризующие отдельные существенные свойства закона распределения СВ. Важнейшими числовыми характеристиками являются:

– характеристики положения: математическое ожидание (центр распределения СВ), мода, медиана;

– характеристики рассеяния: дисперсия (отклонение значений СВ от ее центра), среднее квадратическое отклонение.

3. Математическое ожидание ДСВ

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называют сумму произведений значений случайной величины на их вероятности:

$$\boxed{M[X]=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i\,.} \tag{2.4}$$

Математическое ожидание $M[X]$ имеет ту же размерность, что и СВ X. Вероятностный смысл математического ожидания состоит в том, что оно является *средним значением случайной величины.*

Разность между случайной величиной и ее математическим ожиданием $X-M[X]$ называют *отклонением*.

4. Дисперсия случайной величины

Дисперсией случайной величины называется математическое ожидание квадрата ее отклонения:

$$D[X]=M\left[(X-M[X])^2\right].$$

Вычисление дисперсии по определению весьма громоздко, поэтому используют формулу

$$D[X]=M\left[X^2\right]-(M[X])^2. \tag{2.5}$$

Для дискретной СВ эту формулу можно переписать в виде:

$$\boxed{D[X]=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i-(M[X])^2.} \tag{2.6}$$

Дисперсия характеризует *степень разброса* СВ относительно своего математического ожидания.

Дисперсия $D[X]$ имеет размерность квадрата СВ X, что не очень удобно. Поэтому используют еще одну числовую характеристику – среднее квадратическое отклонение, – имеющее ту же размерность, что и сама случайная величина X.

5. Среднее квадратическое отклонение СВ

Средним квадратическим отклонением случайной величины X называют квадратный корень из дисперсии:

$$\boxed{\sigma[X]=\sqrt{D[X]}.} \tag{2.7}$$

Рассмотрим пример на нахождение всех описанных характеристик дискретной случайной величины.

Пример 2.2. Вероятность отказа прибора за время испытания равна 0,3. Испытано 3 прибора. Случайная величина X – количество отказавших приборов. Найти: а) закон распределения СВ X; б) функцию распределения $F(X)$; в) математическое ожидание $M[X]$; г) дисперсию $D[X]$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma[X]$.

Решение

а) СВ X (количество отказавших приборов из трех испытанных) может принимать четыре значения: 0, 1, 2 и 3. Составим ряд распределения, предварительно вычислив вероятности p_0 (0 приборов отказали), p_1 (отказал один прибор), p_2 и p_3. Т.к. производится n независимых испытаний и вероятность отказа не меняется от испытания к испытанию, то воспользуемся формулой Бернулли (1.18):

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m},$$

где $q = 1 - p$.

По условию задачи $p = 0{,}3$, $q = 0{,}7$, $n = 3$. Следовательно,

$$p_0 = P_3(0) = C_3^0 \cdot 0{,}3^0 \cdot 0{,}7^3 = \frac{3!}{0!\,3!} \cdot 0{,}343 = 0{,}343,$$

$$p_1 = P_3(1) = C_3^1 \cdot 0{,}3^1 \cdot 0{,}7^2 = \frac{3!}{1!\,2!} \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}49 = 0{,}441,$$

$$p_2 = P_3(2) = C_3^2 \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}7^1 = \frac{3!}{2!\,1!} \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}7 = 0{,}189,$$

$$p_3 = P_3(3) = C_3^3 \cdot 0{,}3^3 \cdot 0{,}7^0 = \frac{3!}{3!\,0!} \cdot 0{,}027 \cdot 1 = 0{,}027.$$

Запишем ряд распределения:

X_i	0	1	2	3
p_i	0,343	0,441	0,189	0,027

б) для построения функции распределения $F(X)$ воспользуемся формулой (2.2):

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} p_i .$$

При $x \le 0$: $F(x) = 0$ – вероятность того, что меньше нуля приборов отказали;

При $0 < x \le 1$: $F(x) = p_0 = 0{,}343$ – вероятность того, что меньше одного прибора отказали (т.е. ноль приборов);

При $1 < x \le 2$: $F(x) = p_0 + p_1 = 0{,}343 + 0{,}441 = 0{,}784$ – вероятность того, что меньше двух приборов отказали (т.е. ноль или один прибор);

При $2 < x \le 3$: $F(x) = p_0 + p_1 + p_2 = 0{,}343 + 0{,}441 + 0{,}189 = 0{,}973$.

При $x > 3$:

$F(x) = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 0{,}343 + 0{,}441 + 0{,}189 + 0{,}027 = 1$.

Запишем функцию распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x \le 0, \\ 0{,}343, \text{ при } 0 < x \le 1 \\ 0{,}784, \text{ при } 1 < x \le 2 \\ 0{,}973, \text{ при } 2 < x \le 3 \\ 1, \text{ при } x > 3 \end{cases}$$

в) математическое ожидание $M[X]$ вычислим по формуле (2.4):

$$M(x) = \sum_{i=1}^{4} x_i p_i = 0 \cdot 0{,}343 + 1 \cdot 0{,}441 + 2 \cdot 0{,}189 + 3 \cdot 0{,}027 = 0{,}9.$$

г) дисперсию $D[X]$ вычислим по формуле (2.6):

$$D[X] = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 p_i - (M[X])^2 = 0^2 \cdot 0{,}343 + 1^2 \cdot 0{,}441 + 2^2 \cdot 0{,}189 +$$

$$+ 3^2 \cdot 0{,}027 - 0{,}9^2 = 0{,}63.$$

Среднее квадратическое отклонение вычислим по формуле (2.7): $\sigma[X] = \sqrt{D[X]} = \sqrt{0{,}63} \approx 0{,}79$.

Ответ: $M(X) = 0{,}9$, $D(X) = 0{,}63$, $\sigma[X] \approx 0{,}79$.

2.3. Некоторые законы распределения дискретных случайных величин

1. ***Биномиальное распределение*** (распределение Бернулли)

Среди законов распределения ДСВ наиболее распространенным является биномиальное распределение.

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться либо не появиться. Вероятность наступления во всех событиях постоянна и равна p. В качестве СВ X рассмотрим число появлений события A в этих n испытаниях. ДСВ X имеет *биномиальное распределение* (или распределена по *биномиальному закону*), если она принимает значения $0, 1, \ldots, n$ с вероятностями, вычисляемыми по формуле Бернулли:

$$p_m = P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} ,$$

где $q = 1 - p$.

Ряд распределения СВ X, распределенной по биномиальному закону, имеет вид:

X	0	1	2	…	m	…	n
P	q^n	$C_n^1 pq^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	…	$C_n^m p^m q^{n-m}$	…	p^n

Можно показать, что математическое ожидание и дисперсия в этом случае могут быть вычислены по формулам:

$$M[X] = np$$
$$D[X] = npq .$$

2. ***Распределение Пуассона***

ДСВ X имеет *распределение Пуассона*, если ее возможные значения равны $0, 1, \ldots, m, \ldots$ (счетное множество значений), а соответствующие вероятности выражаются формулой Пуассона:

$$p_m = P(X = m) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} ,$$

где $m = 0, 1, 2, \ldots$, а λ – параметр.

Распределение Пуассона является предельным для биномиального, когда $n \to \infty$, а $p \to 0$ так, что $\lambda = np$ – постоянно.

Примерами случайных величин, распределенных по закону Пуассона, могут служить число вызовов на телефонной станции за время t; число опечаток в большом тексте; число бракованных деталей в большой партии и т.п. При этом считается, что события появляются независимо друг от друга с постоянной средней интенсивностью, характеризующейся параметром λ.

Вероятность появления m событий в течение промежутка времени t может быть найдена по формуле

$$P_t(m) = \frac{(t\lambda)^m}{k!} e^{-\lambda t} .$$

Можно показать, что в случае распределения Пуассона математическое ожидание и дисперсия численно равны между собой и совпадают с параметром λ, т.е.

$$M\left[X\right]=D\left[X\right]=\lambda .$$

В этом состоит отличительная особенность данного распределения, которая используется на практике: на основании опытных данных находят оценки для математического ожидания и дисперсии и, если они близки между собой, то есть основание считать, что СВ распределена по закону Пуассона.

Пример 2.3. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в одну минуту равно двум. Найти вероятность того, что за 5 минут поступит

а) 2 вызова;

б) менее двух вызовов;

в) не менее двух вызовов.

Решение

Исходя из вероятностного смысла математического ожидания, «среднее число вызовов» – это и есть математическое ожидание нашей случайной величины, т.е. $M\left[X\right]=2$ (за одну минуту). Так как число вызовов на телефонной станции за время t есть СВ, распределенная по закону Пуассона, то $\lambda = M[X]=2$, $t=5$, $\lambda t=10$.

а) воспользуемся формулой $P_t(m)=\dfrac{(t\lambda)^m}{k!}e^{-\lambda t}$:

$m=2$, $P_5(2)=\dfrac{(5\cdot 2)^2}{2!}e^{-5\cdot 2}=\dfrac{100}{2}e^{-10}=0{,}00225$.

б) «менее двух вызовов» – событие не наступило ни разу, либо наступило 1 раз, следовательно,

$P_5(m<2)=P_5(0)+P_5(1)=\dfrac{(10)^0}{0!}\cdot e^{-10}=e^{-10}+\dfrac{10}{1!}\cdot e^{-10}\approx 0{,}00495$.

в) событие «поступило не менее двух вызовов» противоположно событию «поступило менее двух вызовов», следовательно,
$P_5(m\geq 2)=1-P_5(m<2)=1-0{,}00495=0{,}99505$.

Ответ: а) 0,00225; б)0,00495; в) 0,99505.

3. ***Геометрическое распределение***

Дискретная СВ X имеет *геометрическое распределение*, если ее возможные значения равны $1, 2, 3, \ldots$, а соответствующие вероятности выражаются формулой:

$$p_m = P(X=m)=q^{m-1}p,$$

где $m=0, 1, 2, \ldots$

Геометрическое распределение имеет СВ X, равная числу опытов в схеме Бернулли, проведенной до первого успеха, если вероятность успеха в единичном опыте равна p. Примерами реальных случайных величин, распределенных по геометрическому закону, являются число выстрелов до первого попадания, число испытаний прибора до первого отказа, число бросаний монеты до первого выпадения решки и т.д.

Математическое ожидание и дисперсия геометрически распределенной случайной величины могут быть вычислены по формулам:

$$M[X]=\frac{1}{p},$$

$$D[X]=\frac{q}{p^2}.$$

Пример 2.4. Из орудия производится стрельба по цели до первого попадания. Вероятность попадания в цель $p=0{,}6$. Найти:

а) математическое ожидание и дисперсию случайной величины X – числа выстрелов до первого попадания;

б) вероятность того, что попадание произойдет при третьем выстреле.

Решение

а) $M[X]=\frac{1}{p}=\frac{1}{0{,}6}=\frac{5}{3}\approx 1{,}67$, $D[X]=\frac{q}{p^2}=\frac{0{,}4}{(0{,}6)^2}=\frac{1}{9}\approx 0{,}11$.

б) $p_3=P(X=3)=pq^2=0{,}6\cdot(0{,}4)^2=0{,}6\cdot 0{,}16=0{,}096$.

Ответ: а) 1,670; 0,11; б) 0,096.

2.4. Непрерывные случайные величины

Рассмотрим подробнее непрерывные случайные величины и их основные характеристики.

1. Функция распределения НСВ.

2. Плотность распределения вероятностей является важнейшей характеристикой непрерывной случайной величины наряду с функцией распределения.

Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины X называется производная ее функции распределения. Обозначается через $f(x)$ (или $p(x)$). Таким образом,

$$\boxed{f(x) = F'(x).} \qquad (2.8)$$

Плотность вероятности $f(x)$, как и функция распределения $F(x)$, является одной из форм закона распределения, но в отличие от функции распределения она существует только для *непрерывных случайных величин*.

Свойства плотности вероятности:

1. Плотность вероятности – неотрицательная функция, т.е.

$$f(x) \geq 0.$$

2. Вероятность попадания непрерывной случайной величины в промежуток $[a,b]$ равна определенному интегралу от ее плотности вероятности в пределах от a до b, т.е.

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx. \qquad (2.9)$$

Замечание. Напомним, что вероятность попадания случайной величины на отрезок можно вычислить и по другой формуле:

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a). \qquad (2.10)$$

3. Функция распределения непрерывной случайной величины может быть выражена через плотность вероятности по формуле:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt. \qquad (2.11)$$

4. *Условие нормировки*. Несобственный интеграл в бесконечных пределах от плотности вероятности непрерывной случайной величины равен единице:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1. \qquad (2.12)$$

Пример 2.5. Дана функция $y = \dfrac{C}{1+x^2}$. Найдите, при каком значении параметра C она является плотностью распределения некоторой случайной величины, и запишите функцию плотности распределения вероятностей.

Решение

Для нахождения параметра C воспользуемся условием нормировки (2.12). Вычислим соответствующий несобственный интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C}{1+x^2}dx = C\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = C\cdot \operatorname{arctg} x\Big|_{-\infty}^{+\infty} =$$

$$= \begin{bmatrix} arctg(-\infty) = -\dfrac{\pi}{2} \\ arctg(+\infty) = \dfrac{\pi}{2} \end{bmatrix} = C\cdot\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = C\cdot\pi.$$

Так как $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, то $C\cdot\pi = 1$, откуда $C = \frac{1}{\pi}$.

Тогда функция плотности распределения вероятностей примет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}.$$

Ответ: $C = \frac{1}{\pi}$, $f(x) = \frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}$.

Непрерывная случайная величина имеет те же числовые характеристики, что и дискретная.

3. *Математическим ожиданием* непрерывной случайной величины X с плотностью вероятности $f(x)$ называется число

$$\boxed{M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx.} \qquad (2.13)$$

4. *Дисперсией* случайной величины называется математическое ожидание квадрата ее отклонения:

$$D[X] = M\left[(X - M[X])^2\right] = M\left[X^2\right] - (M[X])^2.$$

Для непрерывной СВ эту формулу можно переписать в виде:

$$\boxed{D[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (M[X])^2.} \qquad (2.14)$$

5. *Средним квадратическим отклонением* СВ X называют квадратный корень из дисперсии

$$\boxed{\sigma[X] = \sqrt{D[X]}.} \qquad (2.15)$$

Пример 2.6. Задана функция распределения непрерывной случайной величины X

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 1,\\ \frac{1}{4}(x-1)^2, \text{ при } 1<x\le 3\\ 1, \text{ при } x>3\end{cases}$$

Найти: а) плотность распределения вероятности $f(x)$; б) математическое ожидание $M[X]$; в) дисперсию $D[X]$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma[X]$; г) вероятность попадания СВ X на отрезок $[2;4]$.

Решение

а) так как функция распределения $F(x)$ и плотность распределения вероятности $f(x)$ связаны соотношением (2.8), то

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 1,\\ \frac{1}{4}\cdot 2(x-1), \text{ при } 1<x\le 3,\\ 0, \text{ при } x>3\end{cases}=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 1,\\ \frac{1}{2}(x-1), \text{ при } 1<x\le 3,\\ 0, \text{ при } x>3\end{cases}$$

б) математическое ожидание $M[X]$ вычислим по формуле (2.13):

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)dx.$$

Т.к. плотность распределения $f(x)$ является кусочно-заданной функцией, то данный интеграл представим в виде суммы трех интегралов по соответствующим промежуткам.

$$M[X]=\int_{-\infty}^{1} x\cdot 0dx+\frac{1}{2}\int_{1}^{3} x(x-1)dx+\int_{3}^{+\infty} x\cdot 0dx=\frac{1}{2}\int_{1}^{3}\left(x^2-x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left.\frac{x^3}{3}\right|_1^3-\left.\frac{x^2}{2}\right|_1^3\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{3^3}{3}-\frac{1^3}{3}-\left(\frac{3^2}{2}-\frac{1^2}{2}\right)\right)=\frac{7}{3}\approx 2{,}33.$$

в) дисперсию $D[X]$ вычислим по формуле (2.14).

$$D[X]=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-\left(M[X]\right)^2=\frac{1}{2}\int\limits_{1}^{3} x^2(x-1)dx-\left(\frac{7}{3}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{1}^{3}\left(x^3-x^2\right)dx-\frac{49}{9}=\frac{1}{2}\left(\left.\frac{x^4}{4}\right|_1^3-\left.\frac{x^3}{3}\right|_1^3\right)-\frac{49}{9}\approx 0{,}18.$$

г) для нахождения вероятности попадания СВ X на отрезок [2;4] можно воспользоваться формулами (2.9) или (2.10):

$$P(2\le X\le 4)=F(4)-F(2)=1-\frac{1}{2}\cdot(2-1)^2=\frac{1}{2}=0{,}5.$$

Ответ: $M(X)\approx 2{,}33$, $D(X)\approx 0{,}18$, $P(2\le X\le 4)=0{,}5$.

2.5. Некоторые законы распределения непрерывных случайных величин

1. ***Равномерное распределение***

НСВ X имеет равномерное распределение на отрезке $[a;b]$, если ее плотность вероятности $f(x)$ постоянна на этом отрезке, а вне его равна нулю. Нетрудно показать, что равномерно распределенная случайная величина имеет плотность распределения

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & \text{при } x\in[a,b],\\ 0, & \text{при } x\notin[a,b].\end{cases}$$

График плотности распределения $f(x)$ имеет вид:

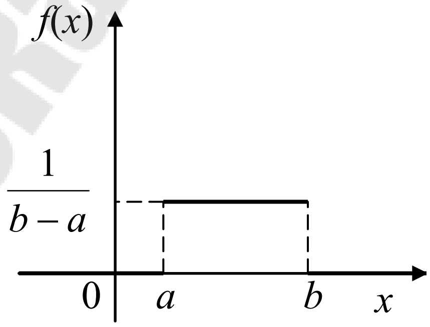


Рис.3

Можно показать, что математическое ожидание и дисперсия равномерного распределения будут равны соответственно:

$$M[X]=\frac{a+b}{2},$$

$$D[X]=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Как видим, математическое ожидание совпало с серединой отрезка.

Примерами равномерно распределенных случайных величин являются время ожидания транспорта, курсирующего с определенным интервалом, ошибка округления числа до целого и т.п.

Пример 2.7. Цена деления шкалы прибора равна 0,1. Показания прибора округляются до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при округлении будет сделана ошибка, не превышающая 0,01.

Решение

Очевидно, что ошибка, не превышающая 0,01, будет сделана, если СВ X – ошибка при округлении – попадет в промежуток $(0;0{,}01)$ или $(0{,}99;0{,}1)$. Вычислим вероятность попадания на отрезок по формуле (2.9):

$$P(a\le X\le b)=\int_a^b f(x)dx.$$

Т.к. ошибка округления равномерно распределена на отрезке $[0;0{,}1]$, то плотность распределения $f(x)$ имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{0{,}1}, & \text{при } x\in[0;0{,}1],\\ 0, & \text{при } x\notin[0;0{,}1]\end{cases}=\begin{cases}10, & \text{при } x\in[0;0{,}1],\\ 0, & \text{при } x\notin[0;0{,}1]\end{cases}$$

Тогда $P(0\le X\le 0{,}01)=\int_0^{0{,}01}10dx=10x\Big|_0^{0{,}01}=0{,}1.$

Вероятность попадания случайной величины на промежуток $(0{,}99;0{,}1)$ также будет равна 0,1. Таким образом, искомая вероятность равна $0{,}1+0{,}1=0{,}2$.

Ответ: 0,2.

2. ***Показательное распределение***

Показательным называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, которое описывается плотностью

$$f(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \lambda e^{-\lambda x} & x\geq 0\end{cases},$$

где λ – положительная величина.

Ниже изображены график плотности распределения случайной величины X, распределенной по показательному закону.

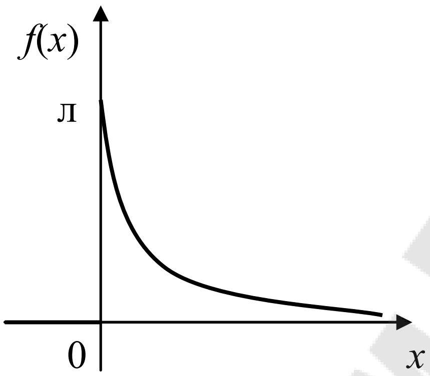


Рис.4

Функция распределения показательного закона имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1-e^{-\lambda x} & x\geq 0\end{cases}$$

Вероятность попадания распределенной по показательному закону СВ X в заданный интервал может быть найдена по формуле:

$$P(a<X<b)=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}.$$

Можно показать, что математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение показательного распределения вычисляются по формулам:

$$M[X]=\frac{1}{\lambda},$$

$$D[X]=\frac{1}{\lambda^2},$$

$$\sigma[X]=\frac{1}{\lambda}.$$

Показательное распределение используется в теории массового обслуживания. Примерами случайных величин, распределенных по показательному закону, являются продолжительность телефонного разговора; длительность безотказной работы прибора; время обслуживания технической системы и т.п. Показательное распределение применяется в *теории надежности*.

Пусть элемент начинает работать в момент времени t_0 и через промежуток времени длительностью t произошел отказ. Рассмотрим случайную величину T – время безотказной работы элемента.

Функция распределения $F(t) = P(T < t)$ – вероятность отказа за время длительностью t. Тогда, вероятность безотказной работы

$$R(t) = P(T > t) = 1 - F(t).$$

Функцией надежности $R(t)$ называют функцию, определяющую вероятность безотказной работы элемента за время длительностью t:

$$R(t) = P(T > t)$$

Так как часто время безотказной работы распределено по показательному закону, функция распределения которого при $t > 0$ имеет вид $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, то функция надежности имеет вид:

$$R(t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t}. \qquad (2.16)$$

Пример 2.8. Среднее время безотказной работы двигателя равно 1000 часов. Найти вероятность того, что двигатель проработает не менее 800 часов.

Решение

Время безотказной работы двигателя – случайная величина, распределенная по показательному закону с неизвестным параметром λ. Среднее время – это и есть математическое ожидание случайной величины, т.е. по условию $M[T] = 1000 = \dfrac{1}{\lambda}$, откуда $\lambda = 0{,}001$. Тогда вероятность безотказной работы вычислим по формуле:

$R(t) = P(T > t) = e^{-\lambda t}$.

$R(t) = P(T > 800) = e^{-0{,}001 \cdot 800} = \dfrac{1}{e^{0{,}8}} \approx 0{,}449$.

Ответ: 0,449.

3. Нормальное распределение

Нормальный закон распределения («закон Гаусса») наиболее часто встречается на практике. Главная его особенность состоит в том, что он является предельным законом, к которому приближаются при определенных условиях другие законы распределения.

Непрерывная СВ X имеет нормальное распределение с параметрами a и $\sigma > 0$, если ее плотность распределения имеет вид:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Можно показать, что математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины совпадают с параметрами нормального распределения:

$$M[X]=a,$$
$$D[X]=\sigma^2,$$
$$\sigma[X]=\sigma.$$

Нормальное распределение с параметрами $a=0$ и $\sigma=1$ называют *стандартным*. В этом случае плотность распределения имеет вид функции Гаусса или малой функции Лапласа:

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Нормальному распределению подчиняются ошибки измерений, величины износа деталей в механизмах, рост человек, величина шума в радиоприемном устройстве, колебания курса акций и т.п.

Проведя исследование функции плотности распределения $f(x)$ – найдя асимптоты, точки экстремума и перегиба, промежутки монотонности, выпуклости и т.д. – можно построить кривую распределения (ее называют *нормальной кривой*, или *кривой Гаусса*).

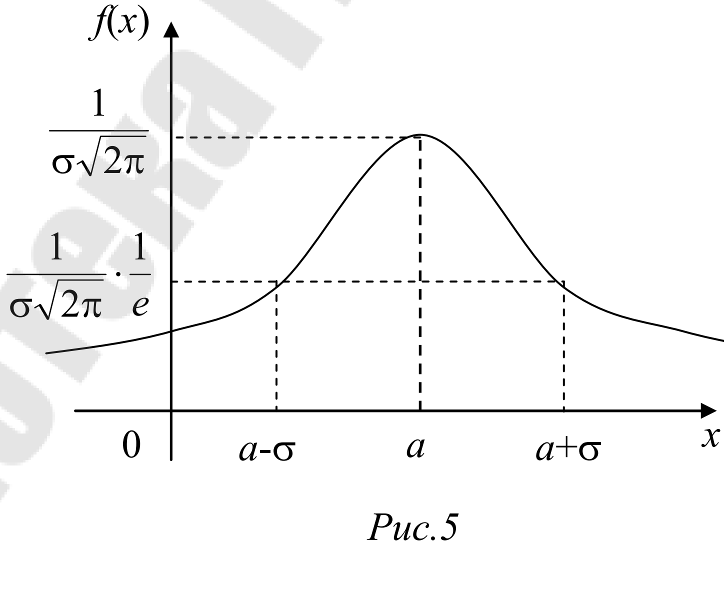


Рис.5

При этом параметр a характеризует положение кривой, а параметр σ – ее форму (чем меньше σ, тем более пологим получается график).

Вероятность попадания нормально распределенной СВ на промежуток $[\alpha;\beta]$ можно вычислить по формуле:

$$P(\alpha \le x \le \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

Здесь $\Phi(x)$ – функция Лапласа, значения которой можно найти в соответствующей таблице (см.приложение 2).

Из этой формулы можно вывести следующий результат, часто используемый при решении задач: вероятность того, что нормально распределенная СВ X отклонится от своего математического ожидания a менее, чем на заданное положительное число δ, равна $2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$, т.е.

$$P(|x - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Пример 2.9. Автомат изготавливает шарики. Шарик считается годным, если отклонение диаметра шарика от номинала по абсолютной величине меньше 0,7 мм. Считая, что случайная ошибка распределена равномерно со средним квадратическим отклонением $\sigma = 0{,}4$ мм, найти среднее количество годных шариков среди 100 изготовленных.

Решение

СВ X – отклонение диаметра шарика – нормально распределенная случайная величина с неизвестным математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением $\sigma = 0{,}4$.

Воспользуемся формулой:

$$P(|x - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

По условию задачи $\sigma = 0{,}4$, $\delta = 0{,}7$, следовательно,

$$P(|x - a| < 0{,}7) = 2\Phi\left(\frac{0{,}4}{0{,}7}\right) = 2\Phi(1{,}78) = 2 \cdot 0{,}4625 = 0{,}925.$$

Итак, вероятность того, что отклонение диаметра шарика от номинала по абсолютной величине не превысит 0,7 мм, равна 0,925. Следовательно, из 100 изготовленных шариков было бы 92,5 годных (в ответ записываем 92, учитывая, что количество шариков не может быть дробным).

Ответ: 92 шарика.

3. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Математическая статистика — раздел математики, в котором изучаются методы сбора, систематизации и обработки результатов наблюдений массовых случайных явлений для выявления существующих закономерностей. *Предметом* математической статистики является изучение случайных величин (или случайных событий, процессов) по результатам наблюдений. Полученные в результате наблюдения (опыта, эксперимента) данные сначала надо обработать:

1) упорядочить, представить в удобном для обозрения и анализа виде.

2) оценить, хотя бы приблизительно, *интересующие* нас *характеристики* наблюдаемой случайной величины. Например, дать оценку неизвестной вероятности события, оценку математического ожидания, оценку дисперсии случайной величины, оценку параметров распределения, вид которого неизвестен, и т.д.

3) проверить статистическую гипотезу, то есть решить вопрос о согласовании результатов оценивания с опытными данными. Например, выдвигается гипотеза, что наблюдаемая случайная величина подчиняется нормальному закону или случайное событие обладает данной вероятностью.

Одной из важнейших задач математической статистики является разработка методов, позволяющих по результатам обследования выборки (т. е. части исследуемой совокупности объектов) делать обоснованные выводы о распределении признака изучаемых объектов по всей совокупности.

Для обработки статистических данных созданы специальные программные пакеты (STADIA, SYSTAT, STAT-GRAPHICS и др.). Простейшие статистические функции имеются в программируемых калькуляторах и офисных программах (EXCEL).

Результаты исследования статистических данных методами математической статистики *используются для принятия решения*, т.е. для научных и практических выводов.

3.1. Генеральная совокупность и выборка

Пусть требуется изучить множество однородных объектов относительно некоторого качественного или количественного признака, характеризующего эти объекты. Например, если имеется партия деталей, то качественным признаком может служить стандартность детали, а количественным — контролируемый размер детали.

Если сплошное обследование невозможно, то из всей совокупности выбирают для изучения часть объектов.

Статистическая совокупность, из которой отбирают часть объектов, называется *генеральной совокупностью (случайной величиной X).* Множество объектов, случайно отобранных из генеральной совокупности ($x_1, x_2, \ldots, x_n$), называется *выборкой.*

Число объектов генеральной совокупности и выборки называется соответственно объемом генеральной совокупности и объемом выборки. Все объекты генеральной совокупности должны иметь одинаковую вероятность попасть в выборку, т. е. выбор должен производиться случайно

Пример 3.1. Плоды одного дерева (200 шт.) обследуют на наличие специфического для данного сорта вкуса. Для этого отбирают 10 шт. Здесь 200 — объем генеральной совокупности, а 10 — объем выборки.

3.2. Статистическое распределение выборки. Полигон. Гистограмма

Рассмотрим эксперимент, описание которого строится при помощи случайной величины *X.* Это означает, что однократный эксперимент дает нам возможность определить одно из возможных значений случайной величины X. Пусть в результате n экспериментов получен набор значений случайной величины X: $x_1, x_2, \ldots, x_k$. То есть, из генеральной совокупности извлечена выборка, причем x_1 наблюдалось n_1 раз, x_2 — n_2 раз, x_k — n_k раз и $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$ — объем выборки. Наблюдаемые значения $x_1, x_2, \ldots, x_k$ называются *вариантами,* а последовательность вариант, записанная в возрастающем порядке, — вариационным рядом. Числа наблюдений $n_1, n_2, \ldots, n_k$ называют *частотами,* а их отношения к объему выборки – *относительными частотами*:

$$\frac{n_1}{n} = p_1^*, \frac{n_2}{n} = p_2^*, \ldots, \frac{n_k}{n} = p_k^*. \qquad (3.1)$$

Отметим, что сумма относительных частот равна единице:

$$p_1^* + p_2^* + \ldots + p_k^* = \frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{n} + \ldots + \frac{n_k}{n} = 1.$$

Статистическим распределением выборки называют перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот. Статистическое распределение можно задать также в виде последовательности интервалов и соответствующих им частот (непрерывное распределение). В качестве частоты, соответствующей интервалу, принимают сумму частот вариант, попавших в этот интервал.

Для графического изображения статистического распределения используются *полигоны* и *гистограммы.*

Для построения полигона на оси Ox откладывают значения вариант $x_i, i = 1,...,k$, на оси Oy – значения частот $n_i, i = 1,...,k$ (относительных частот p_i^*). Точки соединяют ломаной.

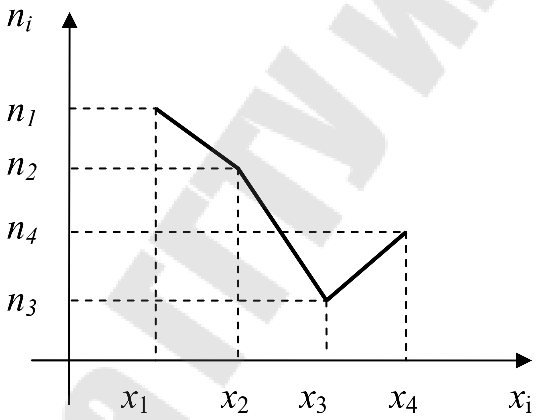


Рис.6

Полигоном обычно пользуются в случае небольшого количества вариант. В случае большого количества вариант и в случае непрерывного распределения признака чаще строят гистограммы. Для этого интервал, в котором заключены все наблюдаемые значения признака, разбивают на несколько частичных интервалов длиной h и находят для каждого частичного интервала n_i — сумму частот вариант, попавших в i-й интервал. Затем на этих интервалах как на основаниях строят прямоугольники с высотами n_i/h (плотность частоты). Площадь i-го частичного прямоугольника равна n_i. Следовательно, площадь гистограммы равна сумме всех частот, т. е. объему выборки (или единице).

Пример 3.2. Построить гистограмму частот по данному распределению выборки объема $n = 100$:

Номер интервала	Частичный интервал	Сумма частот вариант интервала	Плотность частоты
i	$x_i - x_{i+1}$	n_i	n_i / h
1	1-5	10	2,5
2	5-9	20	5
3	9-13	50	12,5
4	13-17	12	3
5	17-21	8	2

Решение

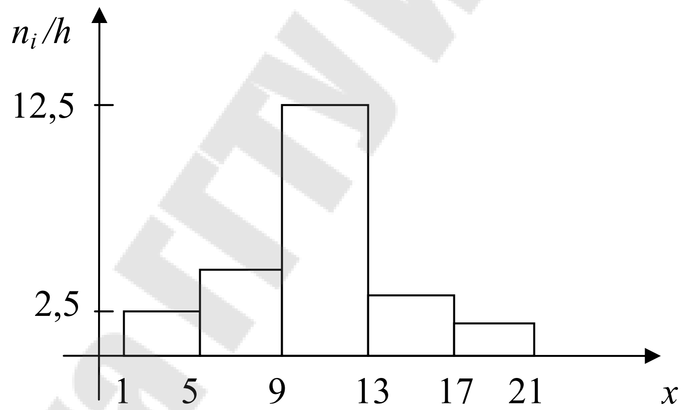


Рис.7

3.3. Оценки параметров генеральной совокупности по ее выборке

Пусть в эксперименте изучается случайная величина X и, из теоретических соображений, известен ее закон распределения. Естественно, возникает задача оценки (приближенного нахождения) параметров $и_i$, которыми определяется это распределение. Например, если известно, что случайная величина X распределена в генеральной совокупности нормально, то необходимо оценить, т. е. приближенно найти математическое ожидание a и среднее квадратическое отклонение σ, так как эти два параметра полностью определяют нормальное распределение.

Обычно в распоряжении исследователя имеются лишь данные выборки генеральной совокупности, например $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, полученные в результате n наблюдений (здесь и далее наблюдения предполагаются независимыми). Через эти данные и выражают оцениваемый параметр.

1. Числовые характеристики выборки. *Выборочной средней* $\overline{x}_{\text{в}}$ называется среднее арифметическое всех значений выборки. Если все значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ выборки объема n различны, то

$$\overline{x}_{\text{в}} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i. \tag{3.2}$$

Если же значения выборки $x_1, x_2, \ldots, x_k$ имеют соответственно частоты $n_1, n_2, \ldots, n_k$, причем $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, то

$$\overline{x}_{\text{в}} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_k n_k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i^*. \tag{3.3}$$

Для того чтобы охарактеризовать рассеяние наблюдаемых значений количественного признака выборки вокруг своего среднего значения $\overline{x}_{\text{в}}$, вводят выборочную дисперсию.

Выборочной дисперсией $D_{\text{в}}$ называется среднее арифметическое квадратов отклонений наблюдаемых значений признака X от выборочной средней $\overline{x}_{\text{в}}$.

Если все значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ признака выборки объема n различны, то

$$D_{\text{в}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}_{\text{в}})^2. \tag{3.4}$$

Если же значения признака $x_1, x_2, \ldots, x_k$ имеют соответственно частоты $n_1, n_2, \ldots, n_k$, причем $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, то

$$D_{\text{в}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} (x_i - \overline{x}_{\text{в}})^2 \cdot n_i = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \overline{x}_{\text{в}})^2 \cdot p_i^*. \tag{3.5}$$

Можно показать, что $D_{\text{в}}$ может быть вычислена по формуле:

$$D_{\text{в}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^{\,2} \cdot n_i - (\overline{x}_{\text{в}})^2 = \overline{x^2} - (\overline{x})^2. \tag{3.6}$$

Выборочным средним квадратическим отклонением $\sigma_{\text{в}}$ называется квадратный корень из выборочной дисперсии:

$$\sigma_{\text{в}} = \sqrt{D_{\text{в}}}. \tag{3.7}$$

Особенность $\sigma_{\text{в}}$ состоит в том, что оно измеряется в тех же единицах, что и измеряемый признак.

Пример 3.3. Выборочным путем были получены следующие данные о массе 20 хомячков при рождении (в г): 30, 30, 25, 32, 30, 25, 33, 32, 29, 28, 27, 36, 31, 34, 30, 23, 28, 34, 36, 30. Найти выборочную среднюю $\overline{x}_{\text{в}}$ и выборочную дисперсию $D_{\text{в}}$.

Решение

Согласно формулам (3.2) и (3.5) имеем:

$$\overline{x}_{\text{в}} = \frac{1}{20}(23 + 25\cdot 2 + 27 + 28\cdot 2 + 29 + 30\cdot 5 + 31\cdot 2 +$$

$$+ 32\cdot 2 + 33 + 34 + 36\cdot 2) = 30.$$

$$D_{\text{в}} = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{11}(x_i - \overline{x}_{\text{в}})^2 \cdot n_i = \frac{1}{20}(7^2 + 5^2\cdot 2 + 3^2 + 2^2\cdot 2 +$$

$$+ 1 + 0 + 1\cdot 2 + 2^2\cdot 2 + 3^2 + 4^2 + 6^2\cdot 2) = 11{,}2.$$

$$\sigma_{\text{в}} = \sqrt{D_{\text{в}}} = \sqrt{11{,}2} \approx 3{,}35.$$

2. Оценки параметров распределения. Для оценки параметров распределения и$_i$ из данных выборки составляют выражения, которые должны служить оценками неизвестных параметров. Для того чтобы оценка $\tilde{\text{и}}$ давала хорошее приближение, она должна удовлетворять определенным требованиям: быть несмещенной и состоятельной.

Несмещенной называют оценку $\tilde{\text{и}}$, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру и:

$$\mathrm{M}(\tilde{\text{и}}) = \text{и},$$

в противном случае оценка называется *смещенной.*

Например, оценка $\overline{x}_{\text{в}}$ является несмещенной оценкой генеральной средней (математического ожидания), так как $M(\overline{x}_{\text{в}}) = M(X)$. Оценка $\sigma_{\text{в}}^2$ является смещенной оценкой генеральной дисперсии $D(X)$, так как $M(D_{\text{в}}) = M(\sigma_{\text{в}}^2) = \dfrac{n}{n-1} D(X)$.

Естественно в качестве приближенного неизвестного параметра брать несмещенные оценки, для того чтобы не делать систематической ошибки в сторону завышения или занижения.

Несмещенной оценкой генеральной дисперсии служит *исправленная выборочная дисперсия*:

$$s^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_{\text{в}} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_{\text{в}})^2.$$

Для оценки генерального среднего квадратического отклонения используют *исправленное среднее квадратическое отклонение*, которое равно квадратному корню из исправленной дисперсии:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_{\text{в}})^2}.$$

3. Метод моментов. Пусть изучается случайная величина X с математическим ожиданием $M(X)$ и дисперсией $D(X)$ и оба эти параметра неизвестны.

Точечной называют оценку, которая определяется одним числом. То есть точечная оценка характеристики генеральной совокупности — это число, определяемое по выборке.

Метод моментов для нахождения точечных оценок неизвестных параметров заданного распределения состоит *в приравнивании теоретических моментов распределения соответствующим эмпирическим моментам*, найденных по выборке.

Так, если распределение зависит от одного параметра и, то для нахождения его оценки $\tilde{\text{и}}$ надо решить относительно и одно уравнение:

$$M(X) = \bar{x}_{\text{в}}.$$

Если распределение зависит от двух параметров, то надо решить относительно и_1 и и_2 систему уравнений

$$\begin{cases} M(X) = \bar{x}_{\text{в}}, \\ D(X) = D_{\text{в}}. \end{cases} \tag{3.8}$$

Пример 3.4. Пусть СВ X имеет распределение Пуассона: $P(X = k) = \dfrac{\text{и}^k e^{-\text{и}}}{k!}$. Наблюдаемые значения $x_1 = 14$, $x_2 = 12$, $x_3 = 9$,

$x_4 = 8,\ \ x_5 = 15,\ \ x_6 = 7,\ \ x_7 = 11,\ \ x_8 = 8.$ Нужно оценить неизвестный параметр и с помощью метода моментов.

Решение

Известно, что математическое ожидание распределения Пуассона $M(X) = и$ (см. приложение 7). Для того чтобы найти оценку неизвестного параметра и, решим уравнение $M(X) = \overline{x}_в$. Для этого приравняем $M(X) = и$ и $\overline{x}_в$, вычисленное по формуле (3.2). Тогда оценка $и = \overline{x}_в = 9{,}25$.

4. Доверительные интервалы. Задачу интервального оценивания можно сформулировать так: по данным выборки построить числовой интервал $(\tilde{и}_1, \tilde{и}_2)$, относительно которого с заранее выбранной вероятностью γ можно сказать, что внутри этого интервала находится точное значение оцениваемого параметра

$P(\tilde{и} \in (\tilde{и}_1, \tilde{и}_2)) = \gamma = 1\text{-}\alpha$.

При этом интервал $(\tilde{и}_1, \tilde{и}_2)$ называется *доверительным интервалом*, γ – доверительной вероятностью или *надежностью*, а α – *уровнем значимости*.

Величина γ выбирается заранее, ее принято выбирать равной 0,9; 0,95; 0,99 или 0,999. Интервал $(\tilde{и}_1, \tilde{и}_2)$ часто выбирают симметричным относительно точечной оценки $\tilde{и}$.

Для оценки математического ожидания a нормально распределенной случайной величины X по выборочной средней $\overline{x}_в$ при *известном среднем квадратическом отклонении* σ генеральной совокупности служит доверительный интервал

$$\overline{x}_в - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x}_в + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \tag{3.9}$$

где $t\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \delta$ – точность оценки; n – объем выборки; t – такое значение аргумента функции Лапласа $\Phi(t)$ (см. приложение 2), при котором $\Phi(t) = \gamma / 2$. То есть

$$P\left(\overline{x}_в - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x}_в + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t) = \gamma.$$

Для оценки математического ожидания a нормально распределенной случайной величины X по выборочной средней $\overline{x}_в$

при *неизвестном среднем квадратическом отклонении* σ генеральной совокупности служит доверительный интервал

$$\overline{x}_{\text{в}} - t_{\gamma}\frac{s}{\sqrt{n}} < a < \overline{x}_{\text{в}} + t_{\gamma}\frac{s}{\sqrt{n}}, \tag{3.10}$$

где $t_{\gamma} = t(n, \gamma)$ – коэффициент Стьюдента, который находят по таблице по заданным n и γ (см. приложение 3); s – исправленное среднее квадратическое отклонение.

Пример 3.5. Найти доверительный интервал для оценки с надежностью $\gamma = 0{,}95$ неизвестного математического ожидания a нормально распределенного признака X генеральной совокупности, если объем выборки $n = 20$, выборочное среднее $\overline{x}_{\text{в}} = 30$, выборочная дисперсия $D_{\text{в}} = 11{,}2$.

Решение

Так как среднее квадратическое отклонение σ неизвестно, то для нахождения доверительного интервала воспользуемся формулой (3.10):

$$\overline{x}_{\text{в}} - t_{\gamma}\frac{s}{\sqrt{n}} < a < \overline{x}_{\text{в}} + t_{\gamma}\frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Найдем исправленное среднее квадратическое отклонение:

$$s = \sqrt{\frac{n}{n-1} \cdot D_{\text{в}}} = \sqrt{\frac{20}{19} \cdot 11{,}2} \approx 3{,}43.$$

Числа t_{γ} найдем по таблице критических точек распределения Стьюдента (см. приложение 3) при уровне значимости $\alpha = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$ и числе степеней свободы $k = n - 1 = 19$: $t_{\gamma} = 2{,}09$. Подставляя все значения в формулу (3.10), получим:

$$30 - 2{,}09 \cdot \frac{3{,}43}{\sqrt{20}} < a < 30 + 2{,}09 \cdot \frac{3{,}43}{\sqrt{20}}.$$

Окончательно имеем: $29{,}02 < a < 30{,}98$, т.е. с вероятностью 0,95 неизвестное математическое ожидание находится в интервале $(29{,}02;\, 30{,}98)$.

Ответ: $(29{,}02;\, 30{,}98)$.

3.4. Метод наименьших квадратов для линейной зависимости

Предположим, что произведен эксперимент, в результате которого зафиксировано n значений исследуемых переменных X и Y: (x_i, y_i) $(i = 1,2,...,n)$. Нанесем экспериментальные данные в виде точек в декартовой системе координат.

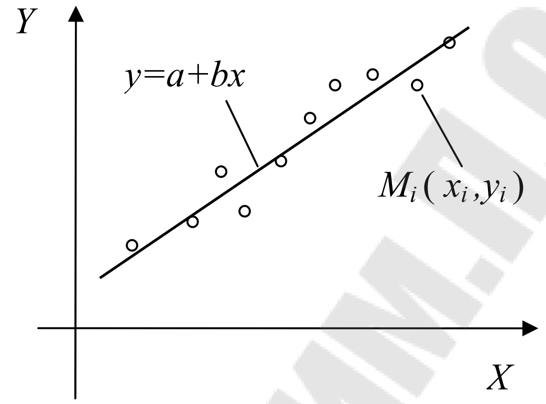


Рис.8

Пусть вид зависимости линейный: $y = a + bx$. Следующая задача экспериментатора – нахождение коэффициентов (параметров) a и b линейной эмпирической функции регрессии Y на X. Найдем эти коэффициенты *методом наименьших квадратов*.

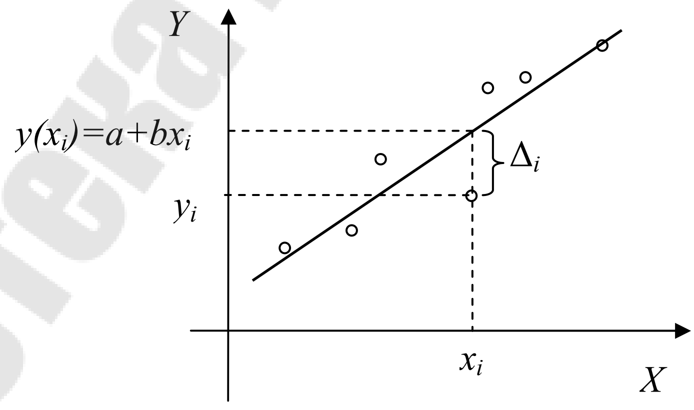


Рис.9

Построим функцию $S(a,b)=\sum_{i=1}^{n}\Delta_i^2=\sum_{i=1}^{n}(y(x_i)-y_i)^2$, равную сумме квадратов отклонений Δ_i^2 экспериментальных точек от искомой прямой $y=a+bx$:

$$S(a,b)=\sum_{i=1}^{n}(a+bx_i-y_i)^2.$$

Пусть параметры a и b будут такими, что функция $S(a,b)$ примет минимальное значение. Для этого приравняем частные производные функции $S(a,b)$ по переменным a и b к нулю:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial S}{\partial a}=0,\\ \dfrac{\partial S}{\partial b}=0.\end{cases}$$

Решая эту систему, находим параметры a и b.

<u>Последовательность действий</u>
<u>для определения вида зависимости</u> $y=a+bx$:

1) результаты прямых измерений x_i и y_i записываем в таблицу.
2) вычисляем средние значения:

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,\ \bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i,\ \overline{x^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2,\ \overline{y^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i^2,\ \overline{xy}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i.$$

3) вычисляем дисперсии: $D_x=\overline{x^2}-\bar{x}^2$, $D_y=\overline{y^2}-\bar{y}^2$.

4) находим оценки параметров: $b=\dfrac{\overline{xy}-\bar{x}\,\bar{y}}{D_x}$, $a=\bar{y}-b\bar{x}$.

5) степень зависимости между X и Y описывается с помощью коэффициента корреляции $r=\dfrac{\overline{xy}-\bar{x}\,\bar{y}}{\sqrt{D_x}\sqrt{D_y}}$. При этом:

а) если между переменными X и Y существует линейная положительная функциональная связь, то $r=1$;

б) если между переменными X и Y существует линейная отрицательная функциональная связь, то $r=-1$;

в) при отсутствии линейной зависимости между переменными X и Y коэффициент корреляции $r=0$.

Итак, чем ближе по модулю коэффициент корреляции к нулю, тем слабее зависимость X и Y.

Встроенная линейная регрессия имеется, например, в программируемых калькуляторах и офисных программах (EXCEL).

Пример 3.6. Найти уравнение прямой регрессии по четырем парам наблюдаемых значений (X, Y):

x_i	1	2	3	4
y_i	2	4	5	7

Решение

Вычислим:

$$\overline{x} = 2{,}5; \quad \overline{y} = 4{,}5; \quad \overline{x^2} = 7{,}5; \quad \overline{y^2} = 23{,}5; \quad \overline{xy} = 13{,}25.$$

$$\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y} = 2; \quad D_x = 1{,}25; \quad D_y = 3{,}25; \quad b = 1{,}6; \quad a = 0{,}5.$$

Следовательно, уравнение регрессии имеет вид: $y = 0{,}5 + 1{,}6x$.

Вычислим коэффициент корреляции: $r = \dfrac{2}{\sqrt{1{,}25}\sqrt{3{,}25}} \approx 0{,}99.$

Результат близок к единице, следовательно, между переменными X и Y действительно существует линейная положительная функциональная связь.

Задания для самостоятельного решения

1. В результате эксперимента получены данные:

18,5	20,3	18,9	20,5	18,9	19,6	20,4	19,6	18,9	20,1
19,8	19,6	19,8	20,1	21,3	19,3	20,1	20,4	19,8	20,5

Требуется:

1) записать значения результатов эксперимента в виде вариационного ряда;

2) построить полигон частот;

3) найти числовые характеристики выборки: $\overline{x}_{\text{в}}$, $D_{\text{в}}$ и исправленную дисперсию s^2;

4) считая, что генеральная совокупность, из которой извлечена выборка, имеет нормальное распределение, найти оценки параметров распределения с помощью метода моментов;

5) найти доверительный интервал для математического ожидания для доверительной вероятности $\gamma = 0{,}95$ (предполагаем, что

генеральная совокупность, из которой извлечена выборка, имеет нормальное распределение).

2. Найти уравнение прямой регрессии по парам наблюдаемых значений (X, Y):

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	2	3,5	3	5	4,8	6,1	5,5	7,4	4,2	8,2

Ответы.

1. 1) вариационный ряд:

18,5	18,9	18,9	18,9	19,3	19,6	19,6	19,6	19,8	19,8
19,8	20,1	20,1	20,1	20,3	20,4	20,4	20,5	20,5	21,3

2)

Значение варианты	18,5	18,9	19,3	19,6	19,8	20,1	20,3	20,4	20,5	21,3
Частота	1	3	1	3	3	3	1	2	2	1

3) $\overline{x}_{\text{в}} = 19{,}82$, $D_{\text{в}} = 0{,}3629$, $s^2 = 0{,}382$;

4) $a = 19{,}82$, $\sigma = 0{,}602$ (использовать формулы (3.8) и приложение 7);

5) $19{,}38 < a < 20{,}26$;

2. $y = 2{,}11 + 0{,}35x$

ВАРИАНТЫ ПРАКТИЧЕСКИХ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ

Вариант 1

1. Пять книг произвольным образом расставляются на книжной полке. Какова вероятность, что две фиксированные книги окажутся стоящими рядом?
2. Из коробки, содержащей 12 белых и 12 черных шашек, случайно выпали 4 шашки. Найдите вероятность того, что среди них поровну белых и черных шашек.
3. Детали проходят четыре операции обработки. На каждой из операций может возникнуть брак с вероятностями 0,2, 0,2, 0,2, 0,1 соответственно. Найти вероятность того, что брак возникнет не менее чем на двух операциях.
4. Из 30 ламп 12 принадлежат к первой партии, 8 – ко второй партии, остальные к третьей. В первой партии 4% брака, во второй – 3%, в третьей – 6%. Наудачу выбирается одна лампа. Определить вероятность того, что выбранная лампа – бракованная.
5. По статистике в книжный магазин заходит поровну мужчин и женщин. Найти вероятность того, что из десяти посетителей магазина, находящихся в зале в данный момент, трое мужчин.
6. Производятся испытания трех приборов на надежность. Вероятность выдержать испытания для одного прибора равна $1/4$. Случайная величина X – число приборов, не выдержавших испытания. Найти закон распределения СВ X и ее функцию распределения. Вычислить математическое ожидание $M[X]$, дисперсию $D[X]$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma[X]$. Построить график функции распределения $F(x)$.
7. Дана функция распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины X

$$F(x)=\begin{cases} 0, при\, x<0, \\ \dfrac{x^2}{4}, при\, 0\le x\le 2, \\ 1, при\, x>2. \end{cases}$$

Найти:

1) плотность распределения вероятностей $f(x)$;
2) математическое ожидание $M[X]$;
3) дисперсию $D[X]$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma[X]$;
4) вероятность попадания СВ X на отрезок $[-1;1]$.

Вариант 2

1. Найти вероятность того, что дни рождения 12 человек придутся на 12 разных месяцев года.
2. Из колоды в 36 карт наудачу выбирают 9 карт. Какова вероятность того, что будут выбраны три карты пиковой масти и шесть карт бубновой масти.
3. По мишени по одному разу стреляют три стрелка. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,6, для второго – 0,8, для третьего – 0,9. Найти вероятность ровно одного попадания в цель.
4. В магазине имеется 10 мобильных телефонов, для которых вероятность исправной работы в течение года равна 0,9, и 5 мобильных телефонов с аналогичной вероятностью 0,95. Найти вероятность того, что телефон, приобретенный в этом магазине, будет работать исправно.
5. Вероятность отказа каждого прибора при испытании равна 0,4. Что вероятнее ожидать: отказ двух приборов при испытании четырех или отказ трех приборов при испытании шести, если приборы испытываются независимо друг от друга?
6. Известно, что 20% жителей города Гомеля предпочитают добираться на работу личным автотранспортом. Случайно выбраны три человека. СВ X – число людей среди отобранных, предпочитающих добираться на личном автомобиле. Найти закон распределения СВ X и ее функцию распределения. Вычислить математическое ожидание $M[X]$, дисперсию $D[X]$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma[X]$. Построить график функции распределения $F(x)$.
7. Дана функция распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины X

$$F(x)=\begin{cases}0, при\ x<0,\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos x, при\ 0\le x\le \pi,\\ 1, при\ x>\pi.\end{cases}$$

Найти:

1) плотность распределения вероятностей $f(x)$;
2) математическое ожидание $M[X]$;
3) дисперсию $D[X]$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma[X]$;
4) вероятность попадания СВ Х на отрезок $[0;\pi]$.

Вариант 3

1. Определите вероятность того, что случайно выбранное целое число от 1 до 17 при возведении в квадрат дает число, оканчивающееся единицей.
2. Из колоды в 36 карт извлекают наугад 5 карт. Найти вероятность того, что в наборе будет два туза, две дамы и один король.
3. Первая лампочка перегорает с вероятностью 2/3, вторая – с вероятностью 3/5 независимо от первой. С какой вероятностью перегорит хотя бы одна лампочка?
4. Имеются 3 одинаковые урны. В первой находятся 4 белых и 6 черных шаров, во второй – 7 белых и 3 черных, в третьей – только черные. Наугад выбирается урна, наугад извлекается шар. Выбранный шар оказался черным. Какова вероятность того, что вынут шар из первой урны?
5. В горном районе создано 5 автоматических сейсмических станций. Каждая станция в течение года может выйти из строя с вероятностью 0,02. Какова вероятность того, что в течение года хотя бы одна станция потребует ремонта?
6. Владелец имеет три акции, по которым можно получить доход. Вероятность получения дохода по каждой акции равна 0,5, 0,6 и 0,8 соответственно. Случайная величина X – число акций, по которым можно получить доход. Найти закон распределения СВ X и ее функцию распределения. Вычислить математическое ожидание $M[X]$, дисперсию $D[X]$ и среднее квадратичное отклонение $\sigma[X]$. Построить график функции распределения $F(x)$.
7. Дана функция распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины X

$$F(x)=\begin{cases}0, \ \textit{при}\ x<0,\\ x^2, \ \textit{при}\ 0\le x\le 1,\\ 1, \ \textit{при}\ x>1.\end{cases}$$

Найти:

1) плотность распределения вероятностей $f(x)$;
2) математическое ожидание $M[X]$;
3) дисперсию $D[X]$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma[X]$;
4) вероятность попадания СВ X на отрезок [0;0,5].

Вариант 4

1. На клавиатуре телефона десять цифр от 0 до 9. Какова вероятность, что случайно нажатая цифра будет кратна двум?
2. В студенческом совете 6 второкурсников, 5 третьекурсников и 2 пятикурсника. Из членов совета наугад выбирается пять человек для уборки территории. Найти вероятность того, что будут выбраны 1 второкурсник, 2 третьекурсника и 2 пятикурсника.
3. В магазине установлены три платежных терминала. Каждый из них может быть исправен с вероятностями 0,9, 0,6 и 0,85 соответственно. Какова вероятность того, что два терминала исправны?
4. В группе 60% сотрудников – мужчины, остальные – женщины. Вероятность опоздать на работу для мужчины равна 0,25, для женщины – 0,1. Выбранный накануне наугад из списка сотрудник опоздал на работу. Какова вероятность, что это мужчина?
5. Контрольная работа состоит из 4 вопросов. На каждый вопрос приведено 5 ответов, один из которых правильный. Какова вероятность того, что при простом угадывании правильный ответ будет дан не менее чем на 3 вопроса?
6. Игральную кость подбрасывают до тех пор, пока не выпадут шесть очков, при этом более трех раз подбрасывать не разрешается. Случайная величина X – число подбрасываний. Найти закон распределения СВ X и ее функцию распределения. Вычислить математическое ожидание $M[X]$, дисперсию $D[X]$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma[X]$. Построить график функции распределения $F(x)$.
7. Дана функция распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины X

$$F(x)=\begin{cases}0, \ при\, x<2,\\ \dfrac{(x-2)^2}{4}, \ при\, 2\le x\le 4,\\ 1, \ при\, x>4.\end{cases}$$

Найти:

1) плотность распределения вероятностей $f(x)$;

2) математическое ожидание $M[X]$;

3) дисперсию $D[X]$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma[X]$;

4) вероятность попадания СВ X на отрезок $[1; 3,5]$.

Вариант 5

1. Имеется 12 карточек, на трех из которых написана буква А, еще на трех – П, на трех – Р, на трех – Т. Выбирают наугад одну за одной 7 карточек и выкладывают в ряд. Найти вероятность того, что получится слово АППАРАТ.
2. Из группы, содержащей 6 юношей и 9 девушек, выбрали 5 человек. Найдите вероятность того, что выбрано четыре девушки.
3. При обжиге тонкостенных деталей в одной печи качественная продукция получается с вероятностью 0,9, в другой печи – с вероятностью 0,95. С какой вероятностью из двух деталей, вышедших после обжига в разных печах, будет а) хотя бы одна качественная? б) одна качественная?
4. Для проверки усвоения лекционного материала в студенческой группе был случайным образом выбран студент, и ему был предложен тест по теме лекции. В этой студенческой группе 6 отличников, 7 хороших студентов и три средних студента. Было известно, что отличник справляется с тестом с вероятностью 0,85, хороший студент справляется с тестом с вероятностью 0,6, а средний студент – с вероятностью 0,3. Найти вероятность того, что случайно выбранный студент выполнил тест верно.
5. Вероятность того, что на некотором предприятии расход электроэнергии не превысит суточной нормы, равна 0,8. Какова вероятность того, что в течение пяти рабочих дней из семи не будет перерасхода электроэнергии?
6. Два предприятия выпускают одинаковый ассортимент товаров. Вероятность того, что изделие первого предприятия будет дефектным, равна 0,2, для второго предприятия – 0,15. С каждого предприятия взяли по одному изделию для контроля. СВ X – число дефектных изделий среди отобранных. Найти закон распределения СВ X и ее функцию распределения. Вычислить математическое ожидание $M[X]$, дисперсию $D[X]$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma[X]$. Построить график функции $F(x)$.
7. Дана функция распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины X

$$F(x)=\begin{cases}0, при\, x<2,\\ \dfrac{1}{19}(x^3-8), при\, 2\le x\le 3,\\ 1, при\, x>3.\end{cases}$$

Найти:

1) плотность распределения вероятностей $f(x)$;
2) математическое ожидание $M[X]$;
3) дисперсию $D[X]$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma[X]$;
4) вероятность попадания СВ X на отрезок $[2{,}5;5]$.

Указания к решению: № 1, 2. Использовать формулу классической вероятности и формулы приложения 5. № 3. Использовать теоремы сложения и умножения; №4. Использовать формулу полной вероятности или Байеса. №5. Использовать формулу Бернулли. № 6, 7. Использовать формулы из приложения 6.

Ответы: ВАРИАНТ 1. **1**. 0,4. **2**. $\approx 0{,}41$. **3**. $\approx 0{,}14$. **4**. 0,044. **5**. $\approx 0{,}117$. **6**. $M[X]=2{,}25$; $D[X]=0{,}5625$; $\sigma[X]=0{,}75$. **7**. $M[X]\approx 1{,}33$; $D[X]\approx 0{,}23$; $\sigma[X]\approx 0{,}48$; $P=0{,}25$. ВАРИАНТ 2. **1**. $\approx 0{,}00054$. **2**. $\approx 0{,}000075$. **3**. 0,116. **4**. $\approx 0{,}917$. **5**. $P_4(2)=0{,}3456$, $P_6(3)=0{,}2764$. **6**. $M[X]=0{,}6$; $D[X]=0{,}48$; $\sigma[X]\approx 0{,}69$. **7**. $M[X]\approx 1{,}57$; $D[X]\approx 1{,}467$; $\sigma[X]\approx 1{,}21$; $P=1$. ВАРИАНТ 3. **1**. $\approx 0{,}18$. **2**. $\approx 0{,}00038$. **3**. $\approx 0{,}867$. **4**. $\approx 0{,}316$. **5**. $\approx 0{,}097$. **6**. $M[X]=1{,}9$; $D[X]=0{,}65$; $\sigma[X]\approx 0{,}81$. **7**. $M[X]\approx 0{,}67$; $D[X]\approx 0{,}056$; $\sigma[X]\approx 0{,}24$; $P=0{,}1$. ВАРИАНТ 4. **1**. 0,4. **2**. $\approx 0{,}047$. **3**. 0,438. **4**. $\approx 0{,}79$. **5**. $\approx 0{,}06$. **6**. $M[X]\approx 2{,}528$; $D[X]\approx 0{,}58$; $\sigma[X]\approx 0{,}76$. **7**. $M[X]\approx 3{,}33$; $D[X]\approx 0{,}22$; $\sigma[X]\approx 0{,}47$; $P=0{,}3125$. ВАРИАНТ 5. **1**. $\approx 0{,}000081$. **2**. $\approx 0{,}252$. **3**. а) 0,14; б) 0,995. **4**. 0,6375. **5**. $\approx 0{,}275$. **6**. $M[X]=0{,}35$; $D[X]=0{,}2835$; $\sigma[X]\approx 0{,}54$. **7**. $M[X]\approx 2{,}566$; $D[X]\approx 0{,}079$; $\sigma[X]\approx 0{,}281$; $P=0{,}6$.

ВАРИАНТЫ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ

1. Чему равно число сочетаний из m по n без повторений?

а) $\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$; б) $\dfrac{n!}{(n-m)!}$; в) $\dfrac{m!}{n!(n-m)!}$; г) $\dfrac{m!}{n!}$.

2. Чему равно число перестановок из пяти элементов?

а) 100; б) 25; в) 10; г) 120.

3. Чему равно число размещений из трех элементов по два с повторениями?

а) $\dfrac{3!}{2!}$; б) 3^2; в) 2^3; г) $\dfrac{3!}{(3-2)!}$.

4. Если появление события A в данном опыте исключает появление события B в том же опыте, то события A и B называются:

а) невозможными; в) несовместными;
б) независимыми; г) элементарными.

5. Опыт состоит в подбрасывании двух монет. Событие A – «выпадение решки на первой монете» и событие $B=$ появление герба на второй монете». Данные события являются:

а) невозможными; в) несовместными;
б) независимыми; г) совместными.

6. Пусть A и B – независимые события. Тогда вероятность их одновременного появления равна:

а) $P(A)+P(B)$; б) $P(A)\cdot P(B)$; в) $\dfrac{P(A)}{P(B)}$; г) 0.

7. Вероятность произведения двух зависимых событий A и B вычисляется по формуле:

а) $\dfrac{P(A)}{P(B)}$; б) $P(A)\cdot P(B)$; в) $P(A)\cdot P(\overline{B})$; г) $P(A)\cdot P(B/A)$.

8. Пусть A и B – совместные события. Тогда вероятность события $A+B$ равна:

а) $P(A)+P(B)$; б) $P(A)\cdot P(B)$; в) 1; г) $P(A)+P(B)-P(AB)$.

9. Вероятность суммы трех несовместных событий A, B и C вычисляется по формуле:

а) $P(A)+P(B)+P(C)$; в) $P(A)\cdot P(B/A)\cdot P(C/AB)$;
б) $P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$; г) $P(AB)+P(BC)+P(AC)$.

10. Пусть производятся независимые испытания, в каждом из которых событие A может произойти с вероятностью p. Вероятность

того, что в n таких испытаниях событие появится m раз, вычисляется по формуле:

а) Байеса; б) Бернулли; в) полной вероятности; г) классической вероятности.

11. Математическое ожидание дискретной случайной величины вычисляется по формуле:

а) $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i$; б) $\int_{-\infty}^{+\infty} x_i f(x_i)dx$; в) $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$; г) $\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$.

12. Дисперсия дискретной случайной величины вычисляется по формуле:

а) $D[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (M[X])^2$; в) $D[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - (M[X])^2$;

б) $D[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx - (M[X])^2$; г) $D[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i - (M[X])^2$.

13. Математическое ожидание непрерывной случайной величины вычисляется по формуле:

а) $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i$; б) $\int_{-\infty}^{+\infty} x_i f(x_i)dx$; в) $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$; г) $\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$.

14. Дисперсия непрерывной случайной величины вычисляется по формуле:

а) $D[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (M[X])^2$; в) $D[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - (M[X])^2$;

б) $D[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx - (M[X])^2$; г) $D[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i - (M[X])^2$.

15. Величина, характеризующая степень разброса СВ от своего математического ожидания, называется

а) плотностью вероятности; б) дисперсией; в) функцией распределения; г) законом распределения.

16. Пусть $f(x)$ – плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины X. Какие из следующих утверждений справедливы?

а) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$; в) $P(a \le X \le b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$;

б) $f(x) \ge 0$; г) $f(-\infty) = 0,\ f(+\infty) = 1$.

17. Пусть $f(x)$ – плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины X, $F(x)$ – ее функция распределения. Какие из следующих утверждений справедливы?

а) $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$; в) $P(a \le X \le b) = \int\limits_{a}^{b} F(x)dx$;

б) $f(x) = F'(x)$; г) $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$.

18. Пусть $f(x)$ – плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины X, $F(x)$ – ее функция распределения. Какие из следующих утверждений справедливы?

а) $0 \le F(x) \le 1$; в) $P(a \le X \le b) = F(b) - F(a)$;

б) $0 \le f(x) \le 1$; г) $F(x)$ – нечетная функция.

19. Дан ряд распределения дискретной случайной величины X:

X_i	0	2	3	5
p_i	0,1	0,3	p_3	0,5

Чему равно p_3?

а) 0; б) 0,1; в) 0,2; г) 0,4.

20. Если случайная величина принимает значения $0, 1, \ldots, n$ с вероятностями, вычисляемыми по формуле Бернулли $p_m = P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$, то говорят, что она распределена

а) по показательному закону; в) по биномиальному закону;

б) по нормальному закону; г) равномерно.

21. Если случайная величина имеет распределение Пуассона с параметром λ, то ее математическое ожидание равно

а) λ; б) λ^2; в) $1/\lambda$; г) $1/\lambda^2$.

22. Если случайная величина распределена равномерно на отрезке [2;5], то ее плотность распределения имеет вид:

а) $f(x) = \begin{cases} 3, \text{ при } x \in [2,5], \\ 0, \quad \text{при } x \notin [2,5] \end{cases}$ в) $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ при } x \in [2,5], \\ 0, \quad \text{при } x \notin [2,5] \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{7}{2}, \text{ при } x \in [2,5], \\ 0, \quad \text{при } x \notin [2,5] \end{cases}$ г) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3}, \text{ при } x \in [2,5], \\ 0, \quad \text{при } x \notin [2,5] \end{cases}$

23. Случайная величина имеет нормальное распределение с параметрами $a = 3$, $\sigma = 2$. Ее плотность распределения вероятностей имеет вид:

а) $f(x)=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-2)^2}{18}}$ в) $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-3)^2}{4}}$

б) $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-3)^2}{8}}$ г) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-2)^2}{9}}$

24. Случайная величина X распределена по нормальному закону с плотностью распределения $f(x)=\frac{1}{5\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{50}}$. Чему равно математическое ожидание СВ X?

а) 1; б) 5; в) 25; г) 50.

25. Случайная величина X распределена по нормальному закону с плотностью распределения $f(x)=\frac{1}{5\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{50}}$. Чему равна дисперсия СВ X?

а) 1; б) 5; в) 25; г) 50.

Ответы: 1) а; 2) г; 3) б; 4) в; 5) б, г; 6) б; 7) г; 8) г; 9) а; 10) б; 11) г; 12) в; 13) в; 14) а; 15) б; 16) а, б, в; 17) а, б, г; 18) а, в; 19) б; 20) в; 21. а; 22) г; 23) б; 24) а; 25) в.

Приложение 1

Значения функции $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0395	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0148	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034

Приложение 2

Значения функции $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,60	0,2257	1,20	0,3849	1,80	0,4641
02	0080	62	2324	22	3888	82	4656
04	0160	64	2389	24	3925	84	4671
06	0239	66	2454	26	3962	86	4686
08	0319	68	2517	28	3997	88	4699
0,10	0398	0,70	2580	1,30	4032	1,90	4713
12	0478	72	2642	32	4066	92	4726
14	0557	74	2703	34	4099	94	4738
16	0636	76	2764	36	4131	96	4750
18	0714	78	2823	38	4162	98	4761
0,20	0793	0,80	2881	1,40	4192	2,00	4772
22	0871	82	2939	42	4222	05	4798
24	0948	84	2995	44	4251	10	4821
26	1026	86	3051	46	4279	15	4842
28	1103	88	3106	48	4306	20	4860
0,30	1179	0,90	3159	1,50	4332	2,25	4877
32	1255	92	3212	52	4357	30	4892
34	1331	94	3264	54	4382	35	4906
36	1406	96	3315	56	4406	40	4918
38	1480	98	3365	58	4429	45	4928
0,40	1554	1,00	3413	1,60	4452	2,50	4938
42	1628	02	3461	62	4474	60	4953
44	1700	04	3508	64	4495	70	4965
46	1772	06	3554	66	4515	80	4974
48	1844	08	3599	68	4535	2,90	4981
0,50	1915	1,10	3643	1,70	4554	3,00	4986
52	1985	12	3686	72	4573	20	4993
54	2054	14	3729	74	4591	40	4996
56	2123	16	3770	76	4608	60	4998
0,58	0,2190	1,18	0,3810	1,78	0,4625	3,80	0,4999

Приложение 3

Критические точки распределения Стъюдента

Число степеней свободы k	Уровень значимости α (двусторонняя критическая область)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,90
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,67	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,05	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29

Приложение 4

Основные формулы теории вероятностей

Название	Формула	Когда применяем
Число сочетаний из n по k	$C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, при этом $0! = 1$	для вычисления, сколькими способами из n различных объектов можно выбрать k штук
Классическая вероятность	$P(A) = \dfrac{m}{n}$	в условии задачи не заданы вероятности, а даны количества элементов, объектов и т.п.
Геометрическая вероятность	$P(A) = \dfrac{S_D}{S_\Omega}$	в задаче идет речь о времени, расстоянии и т.п. (в качестве S может быть не только площадь, но и длина, объем)
Теоремы сложения и умножения вероятностей	Несовместные события: $P(A+B) = P(A) + P(B)$ Независимые события: $P(A \cdot B) = P(A)P(B)$ Зависимые события: $P(A \cdot B) = P(A)P(B/A)$	в условии задачи даны вероятности однотипных событий (2 стрелка, 3 детали, 4 экзамена и т.п.)
Формула полной вероятности и Формула Байеса	$P(A) = \sum\limits_{k=1}^{n} P(H_k) \cdot P(A/H_k)$ и $P(H_k/A) = \dfrac{P(H_k) \cdot P(A/H_k)}{P(A)}$	искомая вероятность события A определяется несколькими факторами (выдвигаемыми гипотезами) и их условными вероятностями. В задачах на полную вероятность требуется вычислить вероятность события A, а в задачах на формулу Байеса требуется переоценить вероятность какой-либо гипотезы, если известно, что событие A произошло (например, «известно, что выбранный шар – белый; найти вероятность того, что он был взят из первой урны»)
Формула Бернулли	$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$	производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может произойти с одной и той же вероятностью p (монету подбрасывают 10 раз, игральную кость бросают 5 раз и т.п.)
Формула Пуассона	$P_n(m) \approx \dfrac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$	те же условия, что и для формулы Бернулли, но в случае, когда число испытаний n достаточно велико, а вероятность p достаточно мала, причем их произведение л $= np$ не мало и не велико (обычно достаточно условия $p < 0{,}1$, $npq < 10$)

Локальная формула Муавра-Лапласа	$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)$, $x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$	те же условия, что и для формулы Бернулли, но в случае, когда вероятности p и q не очень близки к нулю (обычно достаточно условия $n > 100$, $npq > 20$)
Интегральная формула Муавра-Лапласа	$P_n(m_1 \le m \le m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$ $x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$	те же условия, что и для локальной формулы Муавра-Лапласа, но в случае, когда надо вычислить вероятность нахождения значения в заданном промежутке

Приложение 5

Формулы комбинаторики

тип выборки	упорядоченная	неупорядоченная
без возвращения	$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$	$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$
с возвращением	$\overline{A}_n^m = n^m$	$\overline{C}_n^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}$

Приложение 6

Случайные величины

ДСВ (дискретная)	НСВ (непрерывная)
Характеристики	
Функция распределения $F(x) = P\{X < x\} = \sum_{x_i < x} p_i$	Функция распределения $F(x) = P\{X < x\} = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$
Ряд распределения: таблица вида X_i | X_0 | x_1 | x_2 | $\dots$ p_i | p_0 | p_1 | p_2 | $\dots$	Плотность распределения вероятностей $f(x) = F'(x)$
Математическое ожидание $M[x] = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$	Математическое ожидание $M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$
Дисперсия $D[x] = M[x^2] - (M[X])^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - (M[X])^2$	Дисперсия $D[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (M[X])^2$
Среднее квадратическое отклонение $у(X) = \sqrt{D(X)}$.	

Приложение 7

Основные законы распределения случайных величин

Название	Формула для вычисления соответствующей вероятности (для ДСВ) или плотность распределения (для НСВ)	Числовые характеристики (математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение)
Биномиальное распределение	$p_m = P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$	$M[X] = np,\ D[X] = npq$
Распределение Пуассона	$p_m = P(X = m) = \dfrac{л^m e^{-л}}{m!}$	$M[X] = D[X] = л$
Геометрическое распределение	$p_m = P(X = m) = q^{m-1} p$	$M[X] = \dfrac{1}{p},\ D[X] = \dfrac{q}{p^2}$
Равномерное распределение	$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, \text{ при } x \in [a,b], \\ 0, \quad \text{при } x \notin [a,b]. \end{cases}$	$M[X] = \dfrac{a+b}{2},\ D[X] = \dfrac{(b-a)^2}{12}$
Показательное распределение	$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$	$M[X] = \dfrac{1}{\lambda},\ D[X] = \dfrac{1}{\lambda^2},\ \sigma[X] = \dfrac{1}{\lambda}$
Нормальное распределение	$f(x) = \dfrac{1}{у\sqrt{2р}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2у^2}}$	$M[X] = a,\ у[X] = у,\ D[X] = у^2$

ЛИТЕРАТУРА

1. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистике / Д.Т. Письменный. – М.: Айрис-пресс, 2004. – 256 с.
2. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для ВТУЗов / В.Е. Гмурман. – М.: Высш.шк., 1977. – 479 с.
3. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учеб. пособие для ВТУЗов / В.Е. Гмурман. – М.: Высш.шк., 2004. – 400 с.
4. Гурский, Е.И. Руководство к решению задач по высшей математике: Учеб. пособие. В 2-х ч. / Е.И. Гурский, В.П. Домашов, В.К. Кравцов, А.П. Сильванович; Под общ. ред. Е.И. Гурского. – Мн.: Выш. шк., 1990. – 349 с.
5. Гурский, Е.И. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике / Е.Н. Гурский. – Мн.: Выш. шк., 1984. – 223 с.
6. Гусак, А.А. Справочник по высшей математике / А.А. Гусак, Г.М. Гусак, Е.А. Бричикова. – Мн.: ТетраСистемс, 2002. – 640 с.
7. Рябушко, А.П. Индивидуальные задания по высшей математике: Учеб. пособие. В 4-х ч.: ч.4 / А.П. Рябушко, В.В. Бархатов, В.В. Державец, И.Е. Юруть; Под общ. ред. А.П. Рябушко. – Мн.: Выш. шк., 2004. – 288 с.

Задорожнюк Мария Викторовна
Дегтярева Екатерина Александровна
Чеховская Анна Михайловна

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

ПРАКТИКУМ
по подготовке к тестированию для студентов специальностей 1-36 04 02 «Промышленная электроника» и 1-40 05 01 «Информационные системы и технологии (по направлениям)» заочной формы обучения

Подписано к размещению в электронную библиотеку
ГГТУ им. П. О. Сухого в качестве электронного
учебно-методического документа 22.12.15.

Рег. № 16Е.
http://www.gstu.by