Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Высшая математика»

В. И. Вальковская, В. И. Лашкевич

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

ПОСОБИЕ
по дисциплине «Математика» для студентов инженерно-технических специальностей заочной формы обучения

Электронный аналог печатного издания

Гомель 2010

УДК 517.3(075.8)
ББК 22я73
В16

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом заочного факультета ГГТУ им. П. О. Сухого (*протокол № 3 от 27.11.2009 г.*)

Рецензент: зав. каф. «Физика» ГГТУ им. П. О. Сухого д-р физ.-мат. наук, проф. *П. А. Хило*

Вальковская, В. И.

В16 Интегральное исчисление функции одной переменной : пособие по дисциплине «Математика» для студентов инженер.-техн. специальностей заоч. формы обучения / В. И. Вальковская, В. И. Лашкевич. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2010. – 91 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: http://lib.gstu.local. – Загл. с титул. экрана.

ISBN 978-985-420-959-3.

Содержит основные понятия, определения, формулы и доказательства наиболее важных теорем из раздела «Интегрирование». Приведены задачи и примеры их решения.

Для студентов инженерно-технических специальностей заочной формы обучения.

УДК 517.3(075.8)
ББК 22я73

ISBN 978-985-420-959-3

ГЛАВА 1
НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1.1. Первообразная и неопределенный интеграл

Рассмотрим следующую задачу: дана функция $f(x)$, требуется найти такую функцию $F(x)$, производная которой равна $f(x)$, т. е.

$$F'(x) = f(x).$$

Определение. Функция $F(x)$ называется первообразной от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, если во всех точках этого отрезка выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Пример. Найти первообразную от функции $f(x) = x^2$.

Из определения первообразной следует, что функция $F(x) = \frac{x^3}{3}$ является первообразной, т. к. $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$.

Легко видеть, что если для данной функции $f(x)$ существует первообразная, то эта первообразная не является единственной. Так, в предыдущем примере можно было взять в качестве первообразных функции $F(x) = \frac{x^3}{3} - 1$, $F(x) = \frac{x^3}{3} + 7$ или вообще $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$ (где C – произвольная постоянная), т. к. $\left(\frac{x^3}{3} + C\right)' = x^2$.

С другой стороны, можно доказать, что функциями вида $\frac{x^3}{3} + C$ исчерпываются все первообразные от функции x^2. Это следует из теоремы.

Теорема. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – две первообразные от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, то разность между ними равна постоянному числу.

Доказательство. В силу определения первообразной имеем:

$$\left.\begin{aligned} F_1'(x) &= f(x); \\ F_2'(x) &= f(x) \end{aligned}\right\} \qquad (1.1)$$

для всех $x \in [a,b]$.

Обозначим

$$F_1(x) - F_2(x) = \varphi(x). \tag{1.2}$$

Тогда на основании равенств (1.1):

$$F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

или

$$\varphi'(x) = [F_1'(x) - F_2'(x)] = 0$$

для всех $x \in [a,b]$.

Но из равенства $\varphi'(x) = 0$ следует, что $\varphi(x)$ есть постоянная.

Действительно, применим теорему Лагранжа к функции $\varphi(x)$, которая, очевидно, непрерывна и дифференцируема на отрезке $[a,b]$. Какова бы ни была точка x на отрезке $[a,b]$, в силу теоремы Лагранжа имеем

$$\varphi(x) - \varphi(a) = (x-a)\varphi'(\xi),$$

где $a < \xi < x$.

Так как $\varphi'(\xi) = 0$, то

$$\varphi(x) - \varphi(a) = 0 \text{ или } \varphi(x) = \varphi(a). \tag{1.3}$$

Таким образом, функция $\varphi(x)$ в любой точке x отрезка $[a,b]$ сохраняет значение $\varphi(a)$, а это значит, что функция $\varphi(x)$ является постоянной на отрезке $[a,b]$. Обозначая постоянную $\varphi(a)$ через C, из равенств (1.2) и (1.3) получим

$$F_1(x) - F_2(x) = C.$$

Из доказанной теоремы следует, что если для данной функции $f(x)$ найдена какая-нибудь одна первообразная $F(x)$, то любая другая первообразная для $f(x)$ имеет вид $F(x) + C$, где $C = \text{const}$.

Определение. Если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, то выражение $F(x) + C$ называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ и обозначается $\int f(x)dx$.

Таким образом, по определению

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

если $F'(x) = f(x)$.

При этом функцию $f(x)$ называют подынтегральной функцией, $f(x)dx$ – подынтегральным выражением, знак $\int$ – знаком интеграла. Следовательно, неопределенный интеграл представляет собой семейство функций $y = F(x) + C$.

С геометрической точки зрения неопределенный интеграл представляет совокупность кривых, каждая из которых получается путем сдвига одной из прямых параллельно самой себе вверх или вниз, т. е. вдоль оси Oy.

Возникает вопрос: для всякой ли функции $f(x)$ существуют первообразные? Оказывается, что не для всякой, но если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то для этой функции существует первообразная.

Нахождение первообразной для данной функции $f(x)$ называется интегрированием функции $f(x)$.

Из определения 2 следует:

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т. е. если $F'(x) = f(x)$, то и

$$\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x) + C\right)' = f(x). \qquad (1.4)$$

Последнее равенство нужно понимать в том смысле, что производная от любой первообразной равна подынтегральной функции.

2. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx. \qquad (1.5)$$

3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

§ 1.2. Некоторые свойства неопределенного интеграла

Теорема. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы двух или нескольких функций равен алгебраической сумме их интегралов:

$$\int [f_1(x)+f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx. \tag{1.6}$$

Для доказательства найдем производные от левой и правой частей этого равенства. На основании равенства (1.4) находим:

$$\left(\int [f_1(x)+f_2(x)]dx\right)' = f_1(x)+f_2(x);$$

$$\left(\int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx\right)' = \left(\int f_1(x)dx\right)' + \left(\int f_2(x)dx\right)' = f_1(x)+f_2(x).$$

Таким образом, производные от левой и правой частей равенства (1.6) равны между собой, т. е. производная от любой первообразной, стоящая в левой части, равняется производной от любой функции, стоящей в правой части равенства. Следовательно, любая функция, стоящая в левой части равенства (1.6), отличается от любой функции, стоящей в правой части равенства (1.6), на постоянное число. В этом случае и понимается равенство (1.6).

Теорема. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т. е. если $a = \text{const}$, то

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx. \tag{1.7}$$

Для доказательства равенства (1.7) найдем производные от левой и правой его частей:

$$\left(\int af(x)dx\right)' = af(x);$$

$$\left(a\int f(x)dx\right)' = a\left(\int f(x)dx\right)' = af(x).$$

Производные от правой и левой частей равны, следовательно, как и в равенстве (1.6), разность двух любых функций, стоящих слева и справа, есть постоянная. В этом смысле и следует понимать равенство (1.7).

При вычислении неопределенных интегралов полезно иметь в виду следующие правила:

1. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то

$$\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + C. \tag{1.8}$$

Действительно, дифференцируя левую и правую части равенства (1.8), получим:

$$\left(\int f(ax)dx\right)' = f(ax);$$

$$\left(\frac{1}{a}F(ax)\right)' = \frac{1}{a}\left(F(ax)\right)_x' = \frac{1}{a}F'(ax)\cdot a = F'(ax) = f(ax).$$

Производные от правой и левой частей равны, что и требовалось доказать.

2. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то

$$\int f(x+b)dx = F(x+b) + C. \tag{1.9}$$

3. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C. \tag{1.10}$$

Равенства (1.9) и (1.10) доказываются дифференцированием правой и левой частей равенств.

§ 1.3. Таблица интегралов

Прежде чем приступить к изложению методов интегрирования, приведем таблицу интегралов от простейших функций:

1. $\int Cdx = 0$, C – const.

2. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C.$

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

4. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

5. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

8. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C.$

9. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C.$

10. $\int e^x dx = e^x + C.$

11. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$

12. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$

13. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg} x + C.$

14. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C.$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.$

Пример 1. Вычислить интеграл:

$$\int\left(3x^4 - 7\sin x + 5\sqrt{x} + \frac{10}{x}\right)dx = \int 3x^4 dx - \int 7\sin x dx + \int 5\sqrt{x} dx +$$

$$+\int \frac{10}{x}dx = 3\int x^4 dx - 7\int \sin x dx + 5\int x^{\frac{1}{2}} dx + 10\int \frac{dx}{x} = 3\frac{x^5}{5} +$$

$$+7\cos x + 5\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3/2} + 10\ln|x| + C = \frac{3}{5}x^5 + 7\cos x + \frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}} + 10\ln|x| + C.$$

Пример 2. Вычислить интеграл:

$$\int\left(\frac{3}{\sqrt[3]{x^5}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}+x\cdot\sqrt[4]{x}+5^x\right)dx=\int\left(3\cdot x^{-\frac{5}{3}}+2x^{-\frac{1}{2}}+x^{\frac{5}{4}}+5^x\right)dx=$$

$$=3\int x^{-\frac{5}{3}}dx+2\int x^{-\frac{1}{2}}dx+\int x^{\frac{5}{4}}dx+\int 5^x dx=$$

$$=\frac{3x^{-\frac{2}{3}}}{-2/3}+\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{1/2}+\frac{x^{\frac{9}{4}}}{9/4}+\frac{5^x}{\ln 5}+C=-\frac{9}{2}x^{-\frac{2}{3}}+4x^{\frac{1}{2}}+\frac{4}{9}x^{\frac{9}{4}}+\frac{5^x}{\ln 5}+C=$$

$$=-\frac{9}{2\cdot\sqrt[3]{x^2}}+4\sqrt{x}+\frac{4}{9}\cdot\sqrt[4]{x^9}+\frac{5^x}{\ln 5}+C.$$

Пример 3. Вычислить интеграл:

$$\int\frac{(x-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}}dx=\int\frac{x\sqrt{x}-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx=\int x^{7/6}dx-\int x^{1/6}dx=$$

$$=\frac{6}{13}x^{13/6}-\frac{6}{7}x^{7/6}+C.$$

Пример 4. Вычислить интеграл:

$$\int\left(1+\sqrt{x}\right)^4 dx=\int\left(1+4\sqrt{x}+6x+4x\sqrt{x}+x^2\right)dx=\int dx+4\int x^{1/2}dx+$$

$$+6\int xdx+4\int x^{3/2}dx+\int x^2dx=x+\frac{4x^{3/2}}{3/2}+6\frac{x^2}{2}+4\frac{x^{5/2}}{5/2}+\frac{x^3}{3}+C=$$

$$=x+\frac{8}{3}x^{3/2}+3x^2+\frac{8}{5}x^{5/2}+\frac{x^3}{3}+C.$$

§ 1.4. Интегрирование методом замены переменного или способом подстановки

В основе этого метода лежит следующее простое замечание: если известно, что

$$\int f(x)dx=F(x)+C,$$

то тогда

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C.$$

Здесь функции $f(x)$, $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$ – непрерывные функции своих аргументов.

Это прямо вытекает из правила дифференцирования сложной функции:

$$\left[F(\varphi(t))\right]' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t),$$

если учесть, что $F'(x) = f(x)$.

Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x)dx$. Причем непосредственно подобрать первообразную для функции $f(x)$ мы не можем, но нам известно, что она существует.

Сделаем замену переменного в подынтегральном выражении, положив

$$x = \varphi(t), \tag{1.11}$$

где $\varphi(t)$ – непрерывная функция с непрерывной производной, имеющая обратную функцию $t = \psi(x)$.

Тогда $dx = \varphi'(t)dt$. В этом случае имеет место равенство

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \tag{1.12}$$

После интегрирования в правой части равенства вместо t подставим его выражение через x.

Функцию $x = \varphi(t)$ следует выбирать так, чтобы можно было вычислить неопределенный интеграл, стоящий в правой части равенства (1.12).

Иногда при интегрировании целесообразно подбирать замену переменного не в виде $x = \varphi(t)$, а $t = \psi(x)$.

Пусть нам необходимо вычислить интеграл, имеющий вид:

$$\int \frac{\psi'(x)dx}{\psi(x)}.$$

Положим $\psi(x) = t$, тогда $\psi'(x)dx = dt$ и

$$\int \frac{\psi'(x)dx}{\psi(x)} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\psi(x)| + C.$$

Пример 1. Вычислить интеграл:

$$\int e^{x^2} x dx = \left| \begin{array}{c} t = x^2 \\ dt = 2x dx \\ x dx = \dfrac{dt}{2} \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

Пример 2. Вычислить интеграл:

$$\int \frac{x dx}{1 + x^2} = \left| \begin{array}{c} 1 + x^2 = t \\ 2x dx = dt \\ x dx = \dfrac{dt}{2} \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln|1 + x^2| + C.$$

Пример 3. Вычислить интеграл:

$$\int \frac{x dx}{1 + x^4} = \left| \begin{array}{c} x^2 = t \\ 2x dx = dt \\ x dx = \dfrac{dt}{2} \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2 + C.$$

Пример 4. Вычислить интеграл:

$$\int \sqrt[3]{\sin x} \cdot \cos x dx = \int \sin^{\frac{1}{3}} x \cos x dx = \left| \begin{array}{c} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right| =$$

$$= \int t^{\frac{1}{3}} dt = \frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4}\sin^{\frac{4}{3}} x + C.$$

Пример 5. Вычислить интеграл:

$$\int \frac{\ln x dx}{x} = \left| \begin{array}{c} \ln x = t \\ \dfrac{1}{x} dx = dt \end{array} \right| = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C.$$

Пример 6. Вычислить интеграл:

$$\int \frac{\cos x dx}{1+\sin^2 x} = \left| \begin{array}{c} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg} \sin x + C.$$

Пример 7. Вычислить интеграл:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \left| \begin{array}{c} x = a \sin t \\ dx = a \cos t dt \\ t = \arcsin \dfrac{x}{a} \end{array} \right| = \int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} \cdot a \cos t dt =$$

$$= a \int \sqrt{a^2 (1 - \sin^2 t)} \cos t dt = a^2 \int \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot \cos t dt = a^2 \int \cos^2 t dt =$$

$$= a^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{a^2}{2} \left[\int dt + \int \cos 2t dt \right] = \frac{a^2}{2} \left[t + \frac{1}{2} \int \cos 2t d 2t \right] =$$

$$= \frac{a^2}{2} \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t \right] + C = \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{4} \sin 2t + C =$$

$$= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

Здесь

$$\frac{a^2}{4} \sin 2t = \frac{a}{2} \sin t \cos t \cdot a = \frac{1}{2} x \cdot \sqrt{a^2 - x^2},$$

т. к. $\sin 2t = 2 \sin t \cos t$, $a \sin t = x$, $a \cos t = \sqrt{a^2 - x^2}$.

Пример 8. Вычислить интеграл:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2} \arcsin x} = \int \frac{d(\arcsin x)}{\arcsin x} = | \arcsin x = t | = \int \frac{dt}{t} =$$

$$= \ln |t| + C = \ln |\arcsin x| + C.$$

Пример 9. Вычислить интеграл:

$$\int \frac{\operatorname{arctg}^7 x dx}{1 + x^2} = \int \operatorname{arctg}^7 x d(\operatorname{arctg} x) = | \operatorname{arctg} x = t | =$$

$$= \int t^7 dt = \frac{t^8}{8} + C = \frac{\operatorname{arctg}^8 x}{8} + C.$$

Метод замены переменных является одним из основных методов вычисления неопределенных интегралов. Даже в тех случаях, когда мы интегрируем каким-либо другим методом, часто приходится в промежуточных вычислениях прибегать к замене переменных. Успех интегрирования зависит от того, сумеем ли мы подобать такую удачную замену переменных, которая бы упростила данный интеграл.

§ 1.5. Интегралы от некоторых функций, содержащих квадратный трехчлен

1. Рассмотрим интеграл

$$Y_1 = \int \frac{dx}{ax^2 + dx + c}.$$

Преобразуем предварительно трехчлен, стоящий в знаменателе, представив его в виде суммы или разности квадратов:

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = a\left[x^2 + 2\cdot\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] =$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2\right],$$

где $k^2 = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}$.

Знак «+» или «–» берется в зависимости от того, будет ли выражение, стоящее слева, положительным или отрицательным, т. е. будут ли корни трехчлена $ax^2 + bx + c$ комплексными или действительными.

Таким образом, интеграл Y_1 примет вид:

$$Y_1 = \int \frac{dx}{ax^2 + dx + c} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2}.$$

Сделаем в последнем интеграле замену переменного:

$$x + \frac{b}{2a} = t, \quad dx = dt.$$

Тогда получим:

$$Y_1 = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2 \pm k^2} = \frac{1}{a}\left[\begin{array}{l} \displaystyle\int \frac{dt}{t^2 + k^2} = \frac{1}{k} arctg \frac{t}{k} + C; \\ \displaystyle\int \frac{dt}{t^2 - k^2} = \frac{1}{2k} \ln\left|\frac{k-t}{k+t}\right| + C. \end{array}\right.$$

Пример 1. Вычислить интеграл

$$\int \frac{dx}{2x^2 + 8x + 20}.$$

Решение

$$\int \frac{dx}{2x^2 + 8x + 20} = \left|\begin{array}{c} 2x^2 + 8x + 20 = 2(x^2 + 4x + 10) = \\ = 2\left[x^2 + 2 \cdot 2x + 4 + 6\right] = 2\left[(x+2)^2 + 6\right] \end{array}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+2)^2 + (\sqrt{6})^2} = \left|\begin{array}{l} x + 2 = t \\ dx = dt \end{array}\right| = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2 + (\sqrt{6})^2} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{6}} + C = \frac{1}{2\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{\sqrt{6}} + C.$$

2. Рассмотрим интеграл

$$Y_2 = \int \frac{Ax + B}{ax^2 + dx + c} dx.$$

Проведем тождественное преобразование подынтегральной функции:

$$Y_2 = \int \frac{Ax + B}{ax^2 + dx + c} dx = \left|\begin{array}{l} ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{c}{a} - \dfrac{b^2}{4a^2}\right] \\ \left(ax^2 + bx + c\right)' = 2ax + b \end{array}\right| =$$

$$= \int \frac{\frac{A}{2a}\left(2ax + b\right) + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)}{ax^2 + bx + c} dx.$$

Последний интеграл представим в виде суммы двух интегралов. Вынося постоянные множители за знак интегралов, получим

$$Y_2 = \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

Второй интеграл есть интеграл Y_1, вычислять который мы умеем. В первом интеграле сделаем замену переменного:

$$ax^2+bx+c=t, \ \ (2ax+b)dx = dt.$$

Следовательно,

$$\int \frac{(2ax+b)}{ax^2+bx+c}dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|ax^2+bx+c| + C.$$

Таким образом, окончательно получаем

$$Y_2 = \frac{A}{2a}\ln|ax^2+bc+c| + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)Y_1.$$

Пример 2. Вычислить интеграл

$$\int \frac{x+3}{x^2-2x-5}dx.$$

Решение

$$\int \frac{x+3}{x^2-2x-5}dx = \begin{vmatrix} x^2-2x-5 = x^2-2x+1-1-5 = \\ = (x-1)^2 - 6 \\ \left(x^2-2x-5\right)' = 2x-2 \end{vmatrix} =$$

$$= \int \frac{\frac{1}{2}(2x-2)+1+3}{x^2-2x-5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x-5}dx + 4\int \frac{dx}{x^2-2x-5} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2-2x-5\right)}{x^2-2x-5} + 4\int \frac{dx}{(x-1)^2-6} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x-5\right| + \frac{4}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{6}-(x-1)}{\sqrt{6}+(x-1)}\right| + C.$$

3. Рассмотрим интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

С помощью преобразований, рассмотренных в п. 1, этот интеграл сводится, в зависимости от знака a, к табличным интегралам вида:

– при $a>0$:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}}, \qquad \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}} = \ln\left|t+\sqrt{t^2 \pm k^2}\right| + C;$$

– при $a<0$:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{k^2 - t^2}}, \qquad \int \frac{dt}{\sqrt{k^2 - t^2}} = \arcsin\frac{t}{k} + C.$$

Пример 3. Вычислить $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+3x+7}}.$

Решение

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+3x+7}} = \left| \begin{array}{l} 2x^2+3x+7 = 2\left(x^2+\frac{3}{2}x+\frac{7}{2}\right) = \\ = 2\left(x^2+\frac{6}{4}x+\frac{9}{16}-\frac{9}{16}+\frac{7}{2}\right) = \\ = 2\left[\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{47}{16}\right] \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{2\left[\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{47}}{4}\right)^2\right]}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{47}}{4}\right)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|x+\frac{3}{4}+\sqrt{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{47}{16}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\ln\left|4x+3+2\sqrt{4\left(x^2+\frac{3}{2}x+\frac{7}{2}\right)}\right| - \ln 4\right\} + C.$$

4. Интеграл вида $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ вычисляется с помощью следующих преобразований, аналогичных тем, которые были рассмотрены в п. 2:

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \left| \begin{array}{l} ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right] \\ \left(ax^2+bx+c\right)' = 2ax+b \end{array} \right| =$$

$$\int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx +$$

$$+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Применив к первому из полученных интервалов подстановку $ax^2+bx+c=t$, $(2ax+b)dx = dt$, получим

$$\int \frac{(2ax+b)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int t^{-1/2}dt = 2t^{1/2}+C = 2\sqrt{ax^2+bx+c}+C.$$

Второй интеграл был рассмотрен в п. 3 настоящего параграфа.

Пример 4. Вычислить $\int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx.$

Решение

$$\int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx = \left| \begin{array}{l} x^2+4x+10 = x^2+4x+4+6 = \\ = (x+2)^2+6 \\ \left(x^2+4x+10\right)' = 2x+4 \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\frac{5}{2}(2x+4)+(3-10)}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx = \frac{5}{2}\int \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx - 7\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+10}} =$$

$$=\frac{5}{2}\int\frac{d\left(x^2+4x+10\right)}{\sqrt{x^2+4x+10}}-7\int\frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+6}}=$$

$$=\frac{5}{2}\int\left(x^2+4x+10\right)^{-\frac{1}{2}}d\left(x^2+4x+10\right)-7\int\frac{d(x+2)}{\sqrt{(x+2)^2+6}}=$$

$$=\frac{5}{2}\cdot 2\left(x^2+4x+10\right)^{\frac{1}{2}}-7\ln\left|x+2+\sqrt{(x+2)^2+6}\right|+C=$$

$$=5\sqrt{x^2+4x+10}-7\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+10}\right|+C.$$

§ 1.6. Интегрирование по частям

Пусть u и v – две функции от x, имеющие непрерывные производные $u'(x)$, $v'(x)$.

Тогда по правилу дифференцирования произведения uv имеем:

$$d(uv)=udv+vdu \qquad \text{или} \qquad udv=d(uv)-vdu.$$

Отсюда, интегрируя, получаем:

$$\int udv=\int d(uv)-\int vdu \qquad \text{или} \qquad \int udv=uv-\int vdu. \qquad (1.13)$$

Последняя формула называется формулой интегрирования по частям. Эта формула чаще всего применяется к интегрированию выражений, которые можно так представить в виде произведения двух сомножителей u и dv, чтобы нахождение функции v по ее дифференциалу dv и вычисление интеграла $\int vdu$ составляли в совокупности задачу более простую, чем непосредственное вычисление интеграла $\int udv$.

Есть целые классы интегралов, например, интегралы вида:

$$\int x^k\sin bxdx; \qquad \int x^k e^{bx}dx;$$

$$\int x^k\cos bxdx; \qquad \int x^k\ln xdx,$$

и некоторые интегралы, содержащие обратные тригонометрические функции, которые вычисляются именно с помощью интегрирования по частям.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int x\cos x dx$.

Решение

$$\int x\cos x dx = \begin{vmatrix} u = x, \quad du = dx, \\ dv = \cos x dx, \quad \int dv = \int \cos x dx \\ v = \sin x \end{vmatrix} =$$

$$= x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C.$$

Пример 2. Найти $\int \operatorname{arctg} x dx$.

Решение

$$\int \operatorname{arctg} x dx = \begin{vmatrix} u = \operatorname{arctg} x, \quad du = \dfrac{1}{1+x^2}dx \\ dv = dx, \ \int dv = \int dx \\ v = x \end{vmatrix} =$$

$$= x\operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2}dx = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + C.$$

Пример 3. Вычислить $\int x^2 e^x dx$.

Решение

$$\int x^2 e^x dx = \begin{vmatrix} u = x^2, \quad du = 2xdx \\ e^x dx = dv \\ \int e^x dx = \int dv, \quad e^x = v \end{vmatrix} = e^x x^2 - 2\int xe^x dx =$$

$$= x^2 e^x - 2\begin{vmatrix} u = x, \quad du = dx \\ e^x dx = dv, \quad e^x = v \end{vmatrix} = x^2 e^x - 2\left(e^x x - \int e^x dx\right) =$$

$$= x^2 e^x - 2e^x x + 2e^x + C.$$

В данном примере правило интегрирования по частям пришлось применить двукратно.

Так же, повторным применением этого правила, вычисляются интегралы:

$$\int P(x)e^{ax}dx\,;\ \int P(x)\sin bx dx\,;\ \int P(x)\cos bx dx,$$

где $P(x)$ – целый относительно x многочлен.

Пример 4. Вычислить $\int\left(x^2+7x-5\right)\cos 2x dx$.

Решение

$$\int\left(x^2+7x-5\right)\cos 2x dx=\left|\begin{array}{l} u=x^2+7x-5,\quad du=\left(2x+7\right)dx \\ dv=\cos 2x dx,\quad \int dv=\int\cos 2x dx \\ v=\dfrac{\sin 2x}{2} \end{array}\right|=$$

$$=\left(x^2+7x-5\right)\frac{\sin 2x}{2}-\frac{1}{2}\int\left(2x+7\right)\sin 2x dx=\left(x^2+7x-5\right)\frac{\sin 2x}{2}-$$

$$-\frac{1}{2}\left|\begin{array}{l} 2x+7=u,\quad du=2dx \\ dv=\sin 2x dx,\quad \int dv=\int\sin 2x dx \\ v=-\dfrac{\cos 2x}{2} \end{array}\right|=\left(x^2+7x-5\right)\frac{\sin 2x}{2}-$$

$$-\frac{1}{2}\left(-\left(2x+7\right)\frac{\cos 2x}{2}+\frac{2}{2}\int\cos 2x dx\right)=$$

$$=\left(x^2+7x-5\right)\frac{\sin 2x}{2}+\left(2x+7\right)\frac{\cos 2x}{4}-\frac{\sin 2x}{4}+C=$$

$$=\left(2x^2+14x-11\right)\frac{\sin 2x}{4}+\left(2x+7\right)\frac{\cos 2x}{4}+C.$$

Пример 5. Вычислить $\int e^{ax}\cos bx dx$.

Решение

$$\int e^{ax}\cos bx dx=\left|\begin{array}{l} u=e^{ax},\quad du=ae^{ax}dx \\ dv=\cos bx dx,\quad \int dv=\int\cos bx dx \\ v=\dfrac{\sin bx}{b} \end{array}\right|=e^{ax}\,\frac{\sin bx}{b}-$$

$$-\frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bxdx = e^{ax}\frac{\sin bx}{b} - \frac{a}{b}\left|\begin{array}{l} u = e^{ax}, \quad du = ae^{ax}dx \\ dv = \sin bxdx, \ \int dv = \int \sin bxdx \\ v = -\dfrac{\cos bx}{b} \end{array}\right| =$$

$$= e^{ax}\frac{\sin bx}{b} - \frac{a}{b}\left(-e^{ax}\frac{\cos bx}{b} + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bxdx\right) =$$

$$= e^{ax}\frac{\sin bx}{b} + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bxdx .$$

Таким образом, имеем:

$$\int e^{ax}\cos bxdx = e^{ax}\frac{\sin bx}{b} + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bxdx .$$

Из последнего равенства имеем:

$$\int e^{ax}\cos bxdx + \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bxdx = e^{ax}\left(\frac{\sin bx}{b} + \frac{a}{b^2}\cos bx\right);$$

$$\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)\int e^{ax}\cos bxdx = e^{ax}\left(\frac{b\sin bx + a\cos bx}{b^2}\right);$$

$$\left(\frac{b^2 + a^2}{b^2}\right)\int e^{ax}\cos bxdx = e^{ax}\left(\frac{b\sin bx + a\cos bx}{b^2}\right),$$

откуда

$$\int e^{ax}\cos bxdx = \frac{e^{ax}\left(\dfrac{b\sin bx + a\cos bx}{b^2}\right)}{\dfrac{b^2 + a^2}{b^2}} = \frac{e^{ax}\left(b\sin bx + a\cos bx\right)}{a^2 + b^2}.$$

Аналогично можно найти

$$\int e^{ax}\sin bxdx = \frac{e^{ax}\left(a\sin bx - b\cos bx\right)}{a^2 + b^2} + C.$$

§ 1.7. Рациональные дроби. Простейшие рациональные дроби и их интегрирование

Всякую рациональную функцию можно представить в виде рациональной дроби, т. е. в виде отношения двух многочленов:

$$\frac{Q(x)}{f(x)}=\frac{b_0x^m+b_1x^{m-1}+b_2x^{m-2}+\ldots+b_m}{a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n}.$$

Не ограничивая общность рассуждения, будем предполагать, что эти многочлены не имеют общих корней.

Определение. Если степень числителя ниже степени знаменателя, то дробь называется правильной, в противном случае дробь называется неправильной.

Если дробь неправильная, то, разделив числитель на знаменатель (по правилу деления многочленов), можно представить данную дробь в виде суммы многочлена и некоторой правильной дроби:

$$\frac{Q(x)}{f(x)}=M(x)+\frac{F(x)}{f(x)},$$

где $M(x)$ – многочлен; $\dfrac{F(x)}{f(x)}$ – правильная дробь.

Пример 1. Дана неправильная рациональная дробь

$$\frac{x^4-3x^3+2x^2-3x+7}{x^2+3x+1}.$$

Представить данную дробь в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби.

Решение

Разделим числитель на знаменатель:

$$\begin{array}{r|l}
-\,\begin{array}{r} x^4-3x^3+2x^2-3x+7 \\ x^4+3x^3+x^2 \end{array} & \begin{array}{l} x^2+3x+1 \\ \hline x^2-6x+19 \end{array} \\
\hline
-\,\begin{array}{r} -6x^3+x^2-3x+7 \\ -6x^3-18x^2-6x \end{array} & \\
\hline
-\,\begin{array}{r} 19x^2+3x+7 \\ 19x^2+57x+19 \end{array} & \\
\hline
-54x-12 &
\end{array}$$

Получим

$$\frac{x^4-3x^3+2x^2-3x+7}{x^2+3x+1}=x^2-6x+19-\frac{54x+12}{x^2+3x+1}.$$

Так как интегрирование многочленов не представляет затруднение, то основная трудность при интегрировании рациональных дробей заключается в интегрировании правильных рациональных дробей.

Определение. Правильные рациональные дроби вида:

I. $\frac{A}{x-a}$.

II. $\frac{A}{(x-a)^k}$, k – целое число ≥ 2.

III. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$ (корни знаменателя комплексные числа, т. е. $\frac{p^2}{4}-q<0$).

IV. $\frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k}$ (k – целое положительное число ≥ 2, корни знаменателя комплексные числа) называются простейшими дробями I, II, III и IV типов.

Интегрирование простейших дробей I, II, III типа не составляет труда:

$$\text{I. } \int\frac{A}{x-a}dx=A\int\frac{dx}{x-a}=A\ln|x-a|+C.$$

$$\text{II. } \int\frac{A}{(x-a)^k}dx=A\int(x-a)^{-k}dx=\frac{A(x-a)^{-k+1}}{1-k}+C=\frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}}+C.$$

$$\text{III. } \int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\int\frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q}dx=\frac{A}{2}\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}dx+$$

$$+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q}=\frac{A}{2}\int\frac{d\left(x^2+px+q\right)}{x^2+px+q}+$$

$$+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\cdot\int\frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}=$$

$$=\frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+\frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

Более сложных вычислений требует интегрирование простейших дробей IV типа.

Пусть дан интеграл такого типа:

$$\int\frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx=\int\frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{\left(x^2+px+q\right)^k}=$$

$$=\frac{A}{2}\int\frac{2x+p}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^k}=$$

$$=\frac{A}{2}\int\left(x^2+px+q\right)^{-k}d\left(x^2+px+q\right)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)Y_k=$$

$$=\frac{A}{2}\frac{\left(x^2+px+q\right)^{-k+1}}{1-k}+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)Y_k=$$

$$=\frac{A}{2}\frac{1}{(1-k)\left(x^2+px+q\right)^{k-1}}+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)Y_k,$$

где $Y_k=\int\frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^k}$.

Рассмотрим Y_k, для этого запишем его в виде:

$$Y_k=\int\frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^k}=\int\frac{dt}{\left(t^2+m^2\right)^k},$$

полагая $x+\frac{p}{2}=t$, $dx=dt$, $q-\frac{p^2}{4}=m^2$ (по предположению корни знаменателя комплексные, т. е. $q-\frac{p^2}{4}>0$).

$$Y_k=\int\frac{dt}{\left(t^2+m^2\right)^k}=\frac{1}{m^2}\int\frac{\left(t^2+m^2\right)-t^2}{\left(t^2+m^2\right)^k}dt=\frac{1}{m^2}\int\frac{t^2+m^2}{\left(t^2+m^2\right)^k}dt-$$

$$-\frac{1}{m^2}\int\frac{t^2dt}{\left(t^2+m^2\right)^k}=\frac{1}{m^2}\int\frac{dt}{\left(t^2+m^2\right)^{k-1}}-\frac{1}{m^2}\int\frac{t^2dt}{\left(t^2+m^2\right)^k}. \qquad (1.14)$$

Преобразуем последний интеграл:

$$\int\frac{t^2dt}{\left(t^2+m^2\right)^k}=\int\frac{t\cdot tdt}{\left(t^2+m^2\right)^k}=\frac{1}{2}\int\frac{td\left(t^2+m^2\right)}{\left(t^2+m^2\right)^k}=$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{1}{(k-1)}\int td\left(\frac{1}{\left(t^2+m^2\right)^{k-1}}\right).$$

Интегрируя по частям, будем иметь

$$\int\frac{t^2dt}{\left(t^2+m^2\right)^k}=-\frac{1}{2(k-1)}\left[t\cdot\frac{1}{\left(t^2+m^2\right)^{k-1}}-\int\frac{dt}{\left(t^2+m^2\right)^{k-1}}\right].$$

Подставляя это выражение в равенство (1.14), получим

$$Y_k=\int\frac{dt}{\left(t^2+m^2\right)^k}=\frac{1}{m^2}\int\frac{dt}{\left(t^2+m^2\right)^{k-1}}+\frac{1}{2m^2(k-1)}\left[\frac{t}{\left(t^2+m^2\right)^{k-1}}-\right.$$

$$\left.-\int\frac{dt}{\left(t^2+m^2\right)^{k-1}}\right]=\frac{t}{2m^2(k-1)\left(t^2+m^2\right)^{k-1}}+\frac{2k-3}{2m^2(k-1)}\int\frac{dt}{\left(t^2+m^2\right)^{k-1}}.$$

В правой части содержится интеграл того же типа, что Y_k, но показатель степени знаменателя подынтегральной функции на единицу ниже $(k-1)$, т. е. мы выразили Y_k через Y_{k-1}. Продолжая идти тем же путем, дойдем до известного интеграла

$$Y_1=\int\frac{dt}{t^2+m^2}=\frac{1}{m}\operatorname{arctg}\frac{t}{m}+C.$$

Подставляя вместо t и m их значения, получим выражение интеграла IV через x, A, B, p, q.

Пример 2. Вычислить $\int \frac{x-1}{\left(x^2+2x+3\right)^2}dx$.

Решение

$$\int \frac{x-1}{\left(x^2+2x+3\right)^2}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)+(-1-1)}{\left(x^2+2x+3\right)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{\left(x^2+2x+3\right)^2}dx -$$

$$-2\int \frac{dx}{\left(x^2+2x+3\right)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2+2x+3\right)}{\left(x^2+2x+3\right)^2} - 2\int \frac{dx}{\left(x^2+2x+3\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(x^2+2x+3\right)^{-2} d\left(x^2+2x+3\right) - 2\int \frac{dx}{\left((x+1)^2+2\right)^2} =$$

$$= -\frac{1}{2\left(x^2+2x+3\right)} - 2Y_1.$$

$$Y_1 = \int \frac{dx}{\left((x+1)^2+2\right)^2} = \left| \begin{array}{c} \text{Сделаем подстановку} \\ x+1=t; \quad dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{\left(t^2+2\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{t^2+2-t^2}{\left(t^2+2\right)^2}dt = \frac{1}{2}\int \frac{t^2+2}{\left(t^2+2\right)^2}dt - \frac{1}{2}\int \frac{t^2}{\left(t^2+2\right)^2}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+2} - \frac{1}{2}\int \frac{t\cdot t}{\left(t^2+2\right)^2}dt = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+\left(\sqrt{2}\right)^2} - \frac{1}{4}\int \frac{td\left(t^2+2\right)}{\left(t^2+2\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4}\int td\left(\frac{1}{t^2+2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4}\frac{t}{t^2+2} - \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2+2} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{t}{4\left(t^2+2\right)} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + \frac{x+1}{4\left(x^2+2x+3\right)} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}};$$

$$\int \frac{x-1}{\left(x^2+2x+3\right)^2}dx = -\frac{1}{2\left(x^2+2x+3\right)} - 2\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4}\frac{x+1}{\left(x^2+2x+3\right)} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + C =$$

$$= -\frac{x+2}{2\left(x^2+2x+3\right)} - \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$$

§ 1.8. Разложение рациональной дроби на простейшие

Пусть нам дана правильная рациональная дробь $\frac{F(x)}{f(x)}$. Предполагаем, что коэффициенты входящих в нее многочленов – действительные числа и что данная дробь несократимая. Тогда справедлива теорема.

Теорема. Пусть $x = a$ – корень знаменателя кратности k, т. е. $f(x) = (x-a)^k f_1(x)$, где $f_1(a) \neq 0$, тогда данную правильную дробь $\frac{F(x)}{f(x)}$ можно представить в виде суммы двух других правильных дробей следующим образом:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{F_1(x)}{(x-a)^{k-1} f_1(x)}, \tag{1.15}$$

где A – не равная нулю постоянная; $F_1(x)$ – многочлен, степень которого ниже степени знаменателя $(x-a)^{k-1} f_1(x)$.

Следствие. К правильной рациональной дроби $\frac{F_1(x)}{(x-a)^{k-1} f_1(x)}$, входящей в равенство (1.15), можно применить аналогичные рассуждения.

Таким образом, если знаменатель имеет корень $x = a$ кратности k, то можно написать

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{A_1}{(x-a)^{k-1}} + \ldots + \frac{A_{k-1}}{x-a} + \frac{F_k(x)}{f_1(x)},$$

где $\frac{F_k(x)}{f_1(x)}$ – правильная несократимая дробь. К ней также можно применить данную теорему, если $f_1(x)$ имеет другие действительные корни.

Рассмотрим случай комплексных корней знаменателя. Следует отметить, что комплексные корни многочлена с действительными коэффициентами всегда попарно сопряжены.

В разложении многочлена на действительные множители каждой паре комплексных корней многочлена соответствует выражение вида $x^2 + px + q$. Если же комплексные корни имеют кратность n, то им соответствует выражение $(x^2 + px + q)^n$.

Теорема. Если $f(x) = \left(x^2 + px + q\right)^n \varphi_1(x)$, где многочлен $\varphi_1(x)$ не делится на $x^2 + px + q$, то правильную рациональную дробь $\dfrac{F(x)}{f(x)}$ можно представить в виде суммы двух других правильных дробей следующим образом:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n} + \frac{\Phi_1(x)}{(x^2 + px + q)^{n-1}\varphi_1(x)}, \tag{1.16}$$

где $\Phi_1(x)$ – многочлен, степень которого ниже степени многочлена $(x^2 + px + q)^{n-1}\varphi_1(x)$.

Применяя к правильной дроби $\dfrac{F(x)}{f(x)}$ результаты теорем 1 и 2, можно выделить последовательно все простейшие дроби, соответствующие всем корням знаменателя $f(x)$.

Таким образом, если

$$f(x) = (x-a)^\alpha \ \ldots \ (x-b)^\beta \left(x^2 + px + q\right)^n \ \ldots \ \left(x^2 + px + q\right)^m,$$

то дробь $\dfrac{F(x)}{f(x)}$ может быть представлена в виде:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-2}} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)} +$$

$$+ \ldots +$$

$$+ \frac{B}{(x-b)^\beta} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \frac{B_2}{(x-b)^{\beta-2}} + \ldots + \frac{B_{\beta-1}}{(x-b)} +$$

$$+ \ldots +$$

$$+\frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^n}+\frac{M_1x+N_1}{\left(x^2+px+q\right)^{n-1}}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+px+q\right)^{n-2}}+\ldots+\frac{M_{n-1}x+N_{n-1}}{x^2+px+q}+$$

$$+\ldots.+$$

$$+\frac{Cx+D}{\left(x^2+px+q\right)^m}+\frac{C_1x+D_1}{\left(x^2+px+q\right)^{m-1}}+\frac{C_2x+D_2}{\left(x^2+px+q\right)^{m-2}}+\ldots+$$

$$+\frac{C_{m-1}x+D_{m-1}}{x^2+px+q}. \qquad (1.17)$$

Коэффициенты $A, A_1, ..., B, B_1, ...$ можно определить из следующих соображений: написанное равенство (1.17) есть тождество, поэтому, приведя дроби к общему знаменателю, получаем тождественные многочлены в числителях справа и слева. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему уравнений для определения неизвестных коэффициентов $A, A_1, ..., B, B_1, ...$ Этот метод нахождения коэффициентов называется методом неизвестных коэффициентов.

Наряду с этим для определения коэффициентов можно воспользоваться следующим замечанием: так как многочлены, получившиеся в правой и левой частях равенства, после приведения к общему знаменателю должны быть тождественно равны, то их значения равны при любых частных значениях x. Придавая x частные значения, получим уравнения для определения неизвестных коэффициентов, входящих в равенство (1.17).

Исходя из вышеизложенного, можно сделать вывод, что всякая правильная рациональная дробь представляется в виде суммы простейших рациональных дробей.

Пример. Пусть требуется разложить дробь $\dfrac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}$ на простейшие.

Решение

На основании формулы (1.17) имеем:

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}=\frac{A}{(x+1)^3}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{x-2}.$$

Приводим к общему знаменателю:

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}=\frac{A(x-2)+B(x+1)(x-2)+C(x+1)^2(x-2)+D(x+1)^3}{(x+1)^3(x-2)},$$

приравниваем числители:

$$x^2+2=A(x-2)+B\left(x^2-x-2\right)+C\left(x^3-3x-2\right)+D\left(x^3+3x^2+3x+1\right)$$

или

$$x^2+2=(C+D)x^3+(B+3D)x^2+(A-B-3C+3D)x+(-2A-2B-2C+D).$$

Приравнивая коэффициенты при x^3, x^2, x, x^0, получаем систему уравнений для определения коэффициентов:

$$\begin{array}{c|l} x^3 & C+D=0, \\ x^2 & B+3D=1, \\ x & A-B-3C+3D=0, \\ x^0 & -2A-2B-2C+D=2. \end{array}$$

Решая эту систему, найдем: $A=-1$, $B=\frac{1}{3}$, $C=-\frac{2}{9}$, $D=\frac{2}{9}$.

В результате получаем разложение

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}=-\frac{1}{(x+1)^3}+\frac{1}{3(x+1)^2}-\frac{2}{9(x+1)}+\frac{2}{9(x-2)}.$$

§ 1.9. Интегрирование рациональных дробей

Пусть требуется вычислить интеграл от рациональной дроби, т. е. интеграл $\int\frac{Q(x)}{f(x)}dx$.

Если данная дробь неправильная, то мы представляем ее в виде суммы некоторого многочлена $M(x)$ и правильной рациональной дроби $\frac{F(x)}{f(x)}$, которую представляем в виде суммы простейших дробей.

Таким образом, интегрирование всякой рациональной дроби сводится к интегрированию многочлена и нескольких простейших дробей.

Вид простейших дробей определяется корнями знаменателя $f(x)$. Здесь возможны случаи:

Случай 1. Корни знаменателя действительные и различные, т. е. $f(x)=(x-a)(x-b)...(x-d)$.

В этом случае дробь $\dfrac{F(x)}{f(x)}$ разлагается на простейшие дроби I типа:

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\ ...\ +\frac{D}{x-d}.$$

Тогда

$$\int\frac{Q(x)}{f(x)}dx=\int\frac{A}{x-a}dx+\int\frac{B}{x-b}dx+...+\int\frac{D}{x-d}dx=$$

$$=A\ln|x-a|+B\ln|x-b|+...+D\ln|x-d|+C.$$

Пример 1. Вычислить $\displaystyle\int\frac{x+1}{x(x-1)(x+2)}dx$.

Решение

Разложим подынтегральную дробь на простейшие:

$$\frac{x+1}{x(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}=$$

$$=\frac{A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-1)}{x(x-1)(x+2)}=$$

$$=\frac{A(x^2+x-2)+B(x^2+2x)+C(x^2-x)}{x(x-1)(x+2)};$$

$$\begin{array}{l|l} x^2 & A+B+C=0, \\ x & A+2B-C=1, \\ x^0 & -2A=1. \end{array}$$

Найдем A, B, C. $A=-\dfrac{1}{2}$; $B=\dfrac{2}{3}$; $C=-\dfrac{1}{6}$.

Тогда

$$\int \frac{x+1}{x(x-1)(x+2)}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x+2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|x| + \frac{2}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln|x+2| + C.$$

Случай 2. Корни знаменателя действительные, причем некоторые из них кратные:

$$f(x) = (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta} \ldots (x-d)^{S}.$$

В этом случае дробь $\dfrac{F(x)}{f(x)}$ разлагается на простейшие дроби I и II типов.

Пример 2. Найти $\int \dfrac{x^2+1}{(x+1)^2(x+2)}dx$.

Решение

Разложим подынтегральную дробь на простейшие:

$$\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x+2)} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2} =$$

$$= \frac{A(x+2) + B(x+1)(x+2) + C(x+1)^2}{(x+1)^2(x+2)} =$$

$$= \frac{A(x+2) + B(x^2+3x+2) + C(x^2+2x+1)}{(x+1)^2(x+2)} =$$

$$= \frac{x^2(B+C) + x(A+3B+2C) + 2A+2B+C}{(x+1)^2(x+2)};$$

$$\begin{array}{c|l} x^2 & B+C=1, \\ x & A+3B+2C=0, \\ x^0 & 2A+2B+C=1. \end{array}$$

Найдем A, B, C. $A = -\dfrac{14}{5}$; $B = \dfrac{4}{5}$; $C = \dfrac{1}{5}$.

Следовательно,

$$\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x+2)}dx = -\frac{14}{5}\int \frac{dx}{(x+1)^2} + \frac{4}{5}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x+2} =$$

$$= \frac{14}{5(x+1)} + \frac{4}{5}\ln|x+1| + \frac{1}{5}\ln|x+2| + C.$$

Случай 3. Среди корней знаменателя есть комплексные неповторяющиеся (т. е. различные):

$$f(x) = (x^2 + px + q)\,...\,(x^2 + lx + s)(x-a)^{\alpha}\,...\,(x-d)^{S}.$$

В этом случае дробь $\dfrac{F(x)}{f(x)}$ разлагается на простейшие дроби I, II и III типов.

Пример 3. Требуется вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{xdx}{(x^2+1)(x-1)}$.

Решение

Разложим подынтегральную дробь на простейшие:

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1} = \frac{(Ax+B)(x-1)+C(x^2+1)}{(x^2+1)(x-1)} =$$

$$= \frac{Ax^2 + Bx - Ax - B + Cx^2 + C}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{x^2(A+C) + x(B-A) - B + C}{(x^2+1)(x-1)}.$$

Следовательно,

$$x = x^2(A+C) + x(B-A) - B + C;$$

$$\begin{array}{c|l} x^2 & A+C=0, \\ x & B-A=1, \\ x^0 & -B+C=0. \end{array}$$

Отсюда $A = -\dfrac{1}{2}$; $B = \dfrac{1}{2}$; $C = \dfrac{1}{2}$.

Тогда

$$\int \frac{x}{(x^2+1)(x-1)}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{x-1}{x^2+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} = -\frac{1}{2}\int \frac{xdx}{x^2+1} +$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}=-\frac{1}{4}\ln|x^2+1|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\ln|x-1|+C.$$

Случай 4. Среди корней знаменателя есть комплексные кратные, т. е.

$$f(x)=(x^2+px+q)^n\ \ldots\ (x^2+lx+s)^m(x-a)^\alpha\ \ldots\ (x-d)^\beta.$$

В этом случае разложение дроби $\frac{F(x)}{f(x)}$ будет содержать простейшие дроби I, II, III и IV типов.

Пример 4. Требуется вычислить интеграл

$$\int\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}dx.$$

Решение

Разложим подынтегральную дробь на простейшие:

$$\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}=\frac{Ax+B}{(x^2+2x+3)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+3}+\frac{E}{x+1}=$$

$$=\frac{(Ax+B)(x+1)+(Cx+D)(x^2+2x+3)(x+1)+E(x^2+2x+3)^2}{(x^2+2x+3)^2(x+1)},$$

откуда

$$x^4+4x^3+11x^2+12x+8=(Ax+B)(x+1)+(Cx+D)(x^2+2x+3)(x+1)+$$

$$+E(x^2+2x+3)^2=Ax^2+x(A+B)+B+Cx^4+x^3(D+3C)+$$

$$+x^2(5C+3D)+x(5D+3C)+3D+E(x^4+4x^3+10x^2+12x+9);$$

$$\begin{array}{c|l}
x^4 & C+E=1,\\
x^3 & D+3C+4E=4,\\
x^2 & A+5C+3D+10E=11,\\
x & B+A+5D+3C+12E=12,\\
x^0 & B+3D+9E=8.
\end{array}$$

Находим коэффициенты A, B, C, D, E. $A=1$; $B=-1$; $C=0$; $D=0$; $E=1$.

Таким образом, получаем

$$\int \frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}dx = \int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}dx + \int \frac{dx}{x+1} =$$

$$= -\frac{x+2}{2(x^2+2x+3)} - \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + \ln|x+1| + C.$$

Первый интеграл, стоящий справа был, рассмотрен в примере § 7.

Из всего вышеизложенного следует, что интеграл от любой рациональной функции может быть выражен через элементарные функции в конечном виде:

1) через логарифмы – в случае простейших дробей I типа;

2) через рациональные функции – в случае простейших дробей II типа;

3) через логарифмы и арктангенсы – в случае простейших дробей III типа;

4) через рациональные функции и арктангенсы – в случае простейших дробей IV типа.

§ 1.10. Интегралы от иррациональных выражений

Рассмотрим иррациональные функции, интегралы от которых с помощью подстановок приводятся к интегралам от рациональных функций.

1. Рассмотрим интеграл $\int R\left(x, x^{m/n}, ..., x^{r/s}\right)dx$, где R – рациональная функция своих аргументов.

Пусть k – общий знаменатель дробей $m/n, ..., r/s$. Сделаем подстановку $x = t^k$, $dx = kt^{k-1}dt$. Тогда каждая дробная степень x выразится через целую степень t и, следовательно, подынтегральная функция преобразуется в рациональную функцию от t.

Пример 1. Найти $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}dx$.

Решение

Представим интеграл в виде $\int \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{2}}}dx$. Наименьшим кратным знаменателей дробей $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}$ является 6. Сделаем подстановку $x = t^6$, $dx = 6x^5dt$, $t = \sqrt[6]{x}$:

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{(t^6)^{1/3}}{(t^6)^{2/3}-(t^6)^{1/2}}\,6t^5dt = 6\int \frac{t^2}{t^4-t^3}\,t^5dt =$$

$$= 6\int \frac{t^7}{t^3(t-1)}\,dt = 6\int \frac{t^4}{t-1}\,dt\,.$$

Выделим целую часть $\dfrac{t^4}{(t-1)}$:

$$\begin{array}{l|l}
\;\;t^4 & t-1 \\ \cline{2-2}
-\underline{t^4-t^3} & t^3+t^2+t+1 \\
\qquad t^3 & \\
\quad -\underline{t^3-t^2} & \\
\qquad\quad t^2 & \\
\qquad -\underline{t^2-t} & \\
\qquad\qquad t & \\
\qquad\quad -\underline{t-1} & \\
\qquad\qquad\; 1 &
\end{array}$$

Тогда

$$6\int \frac{t^4}{t-1}\,dt = 6\int\left(t^3+t^2+t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt =$$

$$= 6\left(\frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+t+\ln|t-1|\right)+C =$$

$$= 6\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{4}+\frac{\sqrt{x}}{3}+\frac{\sqrt[3]{x}}{2}+\sqrt[6]{x}+\ln|\sqrt[6]{x}-1|\right)+C.$$

2. Рассмотрим теперь интеграл вида:

$$\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m/n},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r/s}\right)dx.$$

Этот интеграл сводится к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки

$$\frac{ax+b}{cx+d}=t^k, \qquad (1.18)$$

где k – общий знаменатель дробей $m/n, ..., r/s$.

Из выражения (1.18) следует определить x, а по найденному значению x определить его дифференциал dx.

Отметим, что частный случай рассматриваемого интеграла получается тогда, когда вместо дроби $\frac{ax+b}{cx+d}$ подынтегральная функция содержит дробные степени линейной функции от x.

В этом случае рационализация достигается подстановкой $ax+b=y^t$, где t имеет указанное выше значение.

Пример 2. Найти $\int \frac{x^4}{\sqrt{x-1}}dx$.

Решение

Данный интеграл перепишем в виде: $\int \frac{x^4}{(x-1)^{1/2}}dx$.

Сделаем подстановку:

$$x-1=t^2,\ \ x=t^2+1,\ \ dx=2tdt,\ \ t=\sqrt{x-1}.$$

Тогда

$$\int \frac{x^4}{(x-1)^{1/2}}dx=\int \frac{\left(t^2+1\right)^4}{t}2tdt=2\int \left(t^2+1\right)^4 dt=$$

$$=2\int \left(t^8+4t^6+6t^4+4t^2+1\right)dt=2\left(\frac{t^9}{9}+\frac{4}{7}t^7+\frac{6}{5}t^5+\frac{4}{3}t^3+t\right)+C=$$

$$=2\left[\frac{1}{9}(x-1)^4\sqrt{x-1}+\frac{4}{7}(x-1)^3\sqrt{x-1}+\frac{6}{5}(x-1)^2\sqrt{x-1}+\right.$$

$$\left.+\frac{4}{3}(x-1)\sqrt{x-1}+\sqrt{x-1}\right]+C=2\sqrt{x-1}\left[\frac{1}{9}(x-1)^4+\frac{4}{7}(x-1)^3+\right.$$

$$\left.+\frac{6}{5}(x-1)^2+\frac{4}{3}(x-1)+1\right]+C.$$

Пример 3. Найти $\int \frac{x^2dx}{(5x+2)\sqrt{5x+2}}$.

Решение

$$\int \frac{x^2dx}{(5x+2)^{3/2}} = \left| \begin{array}{c} 5x+2=t^2 \\ x=\dfrac{t^2-2}{5} \qquad dx=\dfrac{2}{5}tdt \\ t=\sqrt{5x+2} \end{array} \right| = \int \frac{\left(\dfrac{t^2-2}{5}\right)^2}{t^3}\frac{2}{5}tdt =$$

$$= \frac{2}{125}\int \frac{(t^2-2)^2}{t^2}dt = \frac{2}{125}\int \frac{(t^4-4t^2+4)}{t^2}dt = \frac{2}{125}\int\left(t^2-4+\frac{4}{t^2}\right)dt =$$

$$= \frac{2}{125}\left(\frac{t^3}{3}-4t-\frac{4}{t}\right)+C = \frac{2}{125}\left[\frac{(5x+2)\sqrt{5x+2}}{3}-\right.$$

$$\left.-4\sqrt{5x+2}-\frac{4}{\sqrt{5x+2}}\right]+C = \frac{2}{125}\sqrt{5x+2}\left[\frac{5x+2}{3}-4-\frac{4}{5x+2}\right]+C.$$

Пример 4. Найти $\int \frac{\sqrt{x+2}+3}{\sqrt{x+2}-4}dx$.

Решение

$$\int \frac{(x+2)^{1/2}+3}{(x+2)^{1/2}-4}dx = \left| \begin{array}{c} x+2=t^2 \\ x=t^2-2 \qquad dx=2tdt \\ t=\sqrt{x+2} \end{array} \right| = \int \frac{t+3}{t-4}2tdt =$$

$$= 2\int \frac{t^2+3t}{t-4}dt = 2\int\left(t+7+\frac{28}{t-4}\right)dt = 2\left(\frac{t^2}{2}+7t+28\ln|t-4|\right)+C =$$

$$= 2\left(\frac{x+2}{2}+7\sqrt{x+2}+28\ln|\sqrt{x+2}-4|\right)+C.$$

Пример 5. Найти $\int \sqrt{\frac{5-3x}{4+7x}}dx.$

Решение

Подстановка $\frac{5-3x}{4+7x}=t^2$ приведет к интегрированию рациональной функции. Из указанной подстановки определим x, а потом dx:

$$5-3x=t^2(4+7x); \quad 5-3x=4t^2+7t^2x; \quad x=\frac{5-4t^2}{7t^2+3};$$

$$dx=\frac{-8t(7t^2+3)-14t(5-4t^2)}{(7t^2+3)^2}=\frac{-94t}{(7t^2+3)^2}\,dt.$$

Поэтому

$$\int\sqrt{\frac{5-3x}{4+7x}}dx=-\int t\frac{94t}{(7t^2+3)^2}\,dt=-94\int\frac{t^2}{(7t^2+3)^2}=-94\int\frac{t\cdot tdt}{(7t^2+3)^2}=$$

$$=-94\left|\begin{array}{c}\int udv=uv-\int vdu\\ u=t, \quad du=dt\\ dv=\dfrac{tdt}{(7t^2+3)^2};\ v=-\dfrac{1}{14(7t^2+3)}\end{array}\right|=$$

$$=-94\left(-\frac{t}{14(7t^2+3)}+\frac{1}{14}\int\frac{dt}{7t^2+3}\right)=$$

$$=-94\left(-\frac{1}{14}\frac{t}{(7t^2+3)}+\frac{1}{14}\cdot\frac{1}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}t\right)+C=$$

$$=\frac{47}{7}\cdot\frac{t}{7t^2+3}-\frac{47\sqrt{21}}{147}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{7}{3}}t+C=$$

$$=\frac{\sqrt{(5-3x)(4+7x)}}{7}-\frac{47\sqrt{21}}{147}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{7}{3}}\sqrt{\frac{5-3x}{4+7x}}\right)+C.$$

§ 1.11. Интегралы вида $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$. Подстановки Эйлера

Рассмотрим интеграл

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx, \tag{1.19}$$

где $a\neq 0$.

Такой интеграл приводится к интегралу от рациональной функции нового переменного с помощью следующих подстановок Эйлера:

1. Первая подстановка Эйлера

Если $a > 0$, то полагаем

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x + t.$$

Перед корнем $\sqrt{a}$ возьмем для определенности знак плюс. Тогда

$$ax^2+bx+c = ax^2 + 2\sqrt{a}xt + t^2.$$

Найдем $x = \dfrac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t}$, следовательно, dx тоже будет рационально выражаться через t. Тогда

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x + t = \sqrt{a}\frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t} + t,$$

т. е. $\sqrt{ax^2+bx+c}$ – рациональная функция от t.

Так как $\sqrt{ax^2+bx+c}$, x, dx выражаются рационально через t, то, следовательно, интеграл (1.19) преобразуется в интеграл от рациональной функции относительно переменной t.

Пример 1. Требуется вычислить интеграл $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+10}}$.

Решение

Так как здесь $a = 1 > 0$, то полагаем $\sqrt{x^2+10} = -x + t$, тогда $x^2+10 = x^2 - 2xt + t^2$. Откуда $x = \dfrac{t^2-10}{2t}$, следовательно,

$$dx = \frac{2t\cdot 2t - 2(t^2-10)}{4t^2}dt = \frac{4t^2-2t^2+20}{4t^2}dt =$$

$$= \frac{2t^2+20}{4t^2}dt = \frac{t^2+10}{2t^2}dt;$$

$$\sqrt{x^2+10} = -x + t = -\frac{t^2-10}{2t} + t = \frac{-t^2+10+2t^2}{2t} = \frac{t^2+10}{2t}.$$

Возвращаясь к исходному интегралу, получаем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+10}} = \int \frac{\frac{t^2+10}{2t^2}}{\frac{t^2+10}{2t}}dt = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x+\sqrt{x^2+10}| + C.$$

2. Вторая подстановка Эйлера

Если $c > 0$, то полагаем

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c},$$

тогда (перед $\sqrt{c}$ для определенности возьмем знак «+»)

$$ax^2+bx+c = x^2t^2 + 2xt\sqrt{c} + c.$$

Отсюда x определяется как рациональная функция от t:

$$x = \frac{2\sqrt{c}t - b}{a-t^2}.$$

Так как dx и $\sqrt{ax^2+bx+c}$ тоже выражаются рационально через t, то, подставляя значения x, $\sqrt{ax^2+bx+c}$ и dx в интеграл $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$, мы сведем его к интегралу от рациональной функции от t.

Пример 2. Необходимо вычислить интеграл

$$\int \frac{\left(1-\sqrt{1+x+x^2}\right)^2}{x^2\sqrt{1+x+x^2}}dx.$$

Решение

Полагаем $\sqrt{1+x+x^2} = xt+1$. Тогда $1+x+x^2 = x^2t^2+2xt+1$, откуда $x = \frac{2t-1}{1-t^2}$; $dx = \frac{2t^2-2t+2}{(1-t^2)^2}dt$; $\sqrt{1+x+x^2} = xt+1 = \frac{t^2-t+1}{1-t^2}$; $1-\sqrt{1+x+x^2} = \frac{-2t^2+t}{1-t^2}$.

Подставляя полученные выражения в исходный интеграл, находим:

$$\int \frac{\left(1-\sqrt{1+x+x^2}\right)^2}{x^2\sqrt{1+x+x^2}}dx = \int \frac{\left(-2t^2+t\right)^2\left(1-t^2\right)^2\left(1-t^2\right)\left(2t^2-2t+2\right)}{\left(1-t^2\right)^2(2t-1)^2\left(t^2-t+1\right)\left(1-t^2\right)^2}dt =$$

$$= 2\int \frac{t^2}{1-t^2}dt = -2\int \frac{-t^2+1-1}{1-t^2}dt = -2\left(\int \frac{1-t^2}{1-t^2}dt - \int \frac{dt}{1-t^2}\right) =$$

$$= -2t + \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = -\frac{2\left(\sqrt{1+x+x^2}-1\right)}{x} + \ln\left|\frac{x+\sqrt{1+x+x^2}-1}{x-\sqrt{1+x+x^2}+1}\right| + C =$$

$$= -\frac{2\left(\sqrt{1+x+x^2}-1\right)}{x} + \ln\left|2x+2\sqrt{1+x+x^2}+1\right| + C.$$

3. Третья подстановка Эйлера

Пусть α и β – действительные корни трехчлена ax^2+bx+c. Полагаем

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)t.$$

Так как $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$, то:

$$\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = (x-\alpha)t;$$

$$a(x-\alpha)(x-\beta) = (x-\alpha)^2 t^2;$$

$$a(x-\beta) = (x-\alpha)t^2.$$

Отсюда находим x как рациональную функцию от t:

$$x = \frac{a\beta - \alpha t^2}{a-t^2}.$$

Так как dx и $\sqrt{ax^2+bx+c}$ тоже рационально зависят от t, то данный интеграл преобразуется в интеграл от рациональной функции от t.

Замечание. Третья подстановка Эйлера применима не только при $a<0$, но и при $a>0$ – лишь бы многочлен ax^2+bx+c имел два действительных корня.

Пример 3. Требуется вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}}$.

Решение

Так как $x^2+3x-4 = (x+4)(x-1)$, то полагаем

$$\sqrt{x^2+3x-4}=\sqrt{(x+4)(x-1)}=(x+4)t.$$

Тогда

$$(x+4)(x-1)=(x+4)^2t^2;$$

$$x-1=(x+4)t^2, \quad x=\frac{1+4t^2}{1-t^2}; \quad dx=\frac{10t}{(1-t^2)^2}dt;$$

$$\sqrt{(x+4)(x-1)}=\left(\frac{1+4t^2}{1-t^2}+4\right)t=\frac{5t}{1-t^2}.$$

Возвращаясь к исходному интегралу, получаем

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}}=\int\frac{10t(1-t^2)}{(1-t^2)^2 5t}dt=2\int\frac{dt}{1-t^2}=\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=$$

$$=\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{x-1}{x+4}}}{1-\sqrt{\frac{x-1}{x+4}}}\right|+C=\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}}\right|+C.$$

§ 1.12. Интегрирование биномиальных дифференциалов

Биномиальными называются дифференциалы вида:

$$x^m\left(a+bx^n\right)^p dx,$$

где a, b – любые не равные нулю постоянные, а показатели m, n, p – рациональные числа.

Чебышев П. Л. доказал, что только в трех случаях $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ может быть выражен через алгебраические, логарифмические и обратные круговые функции:

1) p – целое число, которое может быть положительным, отрицательным или равным нулю. В этом случае применяется подстановка

$$x=y^s,$$

где s – общее наименьшее кратное дробей m и n.

В этом случае вычисление интеграла сводится к интегрированию суммы степенных функций;

2) $\dfrac{m+1}{n}$ – целое число. Здесь следует применить подстановку: $a+bx^n=y^s$, где s – знаменатель дроби p;

3) $\dfrac{m+1}{n}+p$ – целое число. В этом случае применяют подстановку $ax^{-n}+b=y^s$, где s – знаменатель дроби p.

Других случаев интегрируемости биномиальных дифференциалов нет. Интересно отметить, что они были известны еще Ньютону, а Эйлер указал приведенные выше подстановки. Однако только Чебышев П. Л. доказал, что эти случаи интегрируемости являются единственными и что в других случаях интеграл не может быть выражен при помощи элементарных функций.

Пример 1. Найти $\int \dfrac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

Решение

Перепишем данный интеграл в виде:

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx=\int \frac{\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}}dx=\int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}dx,$$

где $m=-\dfrac{1}{2}$; $n=\dfrac{1}{4}$; $p=\dfrac{1}{3}$.

Составим выражение: $\dfrac{m+1}{n}=\dfrac{-1/2+1}{1/4}=\dfrac{1/2}{1/4}=2$ – целое число.

Следовательно, здесь мы имеем второй случай интегрируемости. Применим подстановку $1+x^{\frac{1}{4}}=y^3$:

$$\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}=y;\quad x^{\frac{1}{4}}=y^3-1;\quad x=\left(y^3-1\right)^4;$$

$$x^{-\frac{1}{2}}=\left[\left(y^3-1\right)^4\right]^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\left(y^3-1\right)^2};\quad dx=4\left(y^3-1\right)^3 3y^2dy.$$

Тогда

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+x^{\frac{1}{4}}}}{\sqrt{x}}dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}dx = \int \frac{1}{\left(y^3-1\right)^2}\,y12\left(y^3-1\right)^3 y^2 dy =$$

$$= 12\int y^3\left(y^3-1\right)dy = 12\int\left(y^6-y^3\right)dy =$$

$$= 12\left(\frac{y^7}{7}-\frac{y^4}{4}\right)+C = 12y^4\left(\frac{y^3}{7}-\frac{1}{4}\right)+C.$$

Возвращаясь к старой переменной, при помощи равенства $y=\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}$ получим

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx = 12\left(1+\sqrt[4]{x}\right)\cdot\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\left(\frac{1+\sqrt[4]{x}}{7}-\frac{1}{4}\right)+C.$$

Пример 2. Найти $\int\sqrt{x(3+4x^3)}dx$.

Решение

$$\int\sqrt{x(3+4x^3)}dx = \int x^{1/2}(3+4x^3)^{1/2}dx,$$

где $m=\frac{1}{2}$; $n=3$; $p=\frac{1}{2}$.

Составим выражение: $\frac{m+1}{n}+p=\frac{1/2+1}{3}+1/2=\frac{3/2}{3}+\frac{1}{2}=1$ – целое число. Имеем третий случай интегрируемости. Сделаем подстановку

$$3x^{-3}+4=y^2.$$

Подынтегральную функцию $x^{\frac{1}{2}}(3+4x^3)^{\frac{1}{2}}$ можно представить в виде:

$$x^{\frac{1}{2}}(3+4x^3)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}}\left(x^3\left(\frac{3}{x^3}+4\right)\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{3}{2}}\left(3x^{-3}+4\right)^{\frac{1}{2}} = x^2\left(3x^{-3}+4\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Из подстановки следует:

$$3x^{-3} = y^2 - 4\,; \quad x^{-3} = \frac{y^2 - 4}{3}\,;$$

а $x^3 = \dfrac{3}{y^2 - 4}$;

$$3x^2 dx = -\frac{3 \cdot 2ydy}{(y^2 - 4)^2} \quad \text{или} \quad x^2 dx = -\frac{2ydy}{(y^2 - 4)^2}\,.$$

Тогда интеграл преобразуется к виду:

$$\int x^{1/2}(3 + 4x^3)^{1/2}\,dx = \int x^2\left(3x^{-3} + 4\right)^{1/2} dx = -\int \frac{(y^2)^{1/2}\,2ydy}{(y^2 - 4)^2} =$$

$$= -2\int \frac{y^2 dy}{(y^2 - 4)^2} = -2\int \frac{y \cdot ydy}{(y^2 - 4)^2} = \left| \begin{array}{c} \int udv = uv - \int vdu \\ u = y, \quad du = dy \\ dv = \dfrac{y}{(y^2 - 4)^2}\,dy \quad v = -\dfrac{1}{2(y^2 - 4)} \end{array} \right| =$$

$$= -2\left[-\frac{y}{2(y^2 - 4)} + \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y^2 - 4} \right] = \frac{y}{y^2 - 4} - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{y - 2}{y + 2}\right| + C.$$

Возвращаемся к старой переменной x:

$$y = \sqrt{\frac{3}{x^3} + 4} = \sqrt{\frac{3 + 4x^3}{x^3}} = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{3 + 4x^3}{x}}\,.$$

Тогда

$$\int \sqrt{x(3 + 4x^3)}\,dx = \frac{x^{3/2}\sqrt{3 + 4x^3}}{3} - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{3 + 4x^3}{x}} - 2}{\dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{3 + 4x^3}{x}} + 2}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{3}x^{3/2}\sqrt{3 + 4x^3} - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{3 + 4x^3} - 2x^{3/2}}{\sqrt{3 + 4x^3} + 2x^{3/2}}\right| + C\,.$$

§ 1.13. Интегрирование некоторых классов тригонометрических функций

1. Рассмотрим интеграл вида:

$$\int R(\sin x, \cos x)dx. \tag{1.20}$$

Покажем, что этот интеграл с помощью подстановки

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$$

всегда сводится к интегралу от рациональной функции. Выразим $\sin x$ и $\cos x$ через $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ и, следовательно, через t:

$$\sin x = \frac{2\sin x/2 \cos x/2}{1} = \frac{2\sin x/2 \cos x/2}{\sin^2 x/2 + \cos^2 x/2} = \frac{2\dfrac{\sin x/2}{\cos x/2}}{1 + \dfrac{\sin^2 x/2}{\cos^2 x/2}} =$$

$$= \frac{2\operatorname{tg} x/2}{1 + \operatorname{tg}^2 x/2} = \frac{2t}{1+t^2};$$

$$\cos x = \frac{\cos^2 x/2 - \sin^2 x/2}{1} = \frac{\cos^2 x/2 - \sin^2 x/2}{\cos^2 x/2 + \sin^2 x/2} = \frac{1 - \dfrac{\sin^2 x/2}{\cos^2 x/2}}{1 + \dfrac{\sin^2 x/2}{\cos^2 x/2}} =$$

$$= \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x/2}{1 + \operatorname{tg}^2 x/2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Далее $x = 2\operatorname{arctg} t$; $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$.

Таким образом, $\sin x$, $\cos x$ и dx выражаются рационально через t. Так как рациональная функция от рациональных функций есть функция рациональная, то, подставляя полученные выражения в интеграл (1.20), получим интеграл от рациональной функции:

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Данная подстановка называется универсальной тригонометрической подстановкой.

Пример 1. Найти $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$.

Решение

Применим универсальную подстановку $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Поэтому

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^3} = \frac{1}{4}\int \frac{\left(1+t^2\right)^3}{(1+t^2)\cdot t^3}dt = \frac{1}{4}\int \frac{\left(1+t^2\right)^2 dt}{t^3} =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1+2t^2+t^4}{t^3}dt = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t^3}+\frac{2}{t}+t\right)dt =$$

$$= \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2t^2}+2\ln|t|+\frac{t^2}{2}\right)+C = -\frac{1}{8\operatorname{tg}^2 x/2}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg} x/2\right|+\frac{1}{8}\operatorname{tg}^2 x/2 + C.$$

2. Если интеграл имеет вид: $\int R(\sin x)\cos x dx$, то подстановка $\sin x = t$, $\cos x dx = dt$ приводит к интегралу вида $\int R(t)dt$.

Пример 2. Вычислить интеграл $\int \sin x \cos x dx.$

Решение

$$\int \sin x \cos x dx = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\sin^2 x}{2} + C.$$

3. Если интеграл имеет вид: $\int R(\cos x)\sin x dx$, то он приводится к интегралу от рациональной функции заменой $\cos x = t$, $\sin x dx = -dt$.

Пример 3. Вычислить $\int \cos^2 x \sin x dx$.

Решение

Сделаем замену $\cos x = t$, тогда $\sin x dx = -dt$:

$$\int \cos^2 x \sin x dx = -\int t^2 dt = -\frac{t^3}{3} + C = -\frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

4. Рассмотрим интеграл вида:

$$\int \sin^m x \cos^n x dx. \tag{1.21}$$

Интегралы этого вида вычисляются особенно просто в четырех случаях.

Случай 1. Показатель степени sin m – нечетное положительное число $m = 2k + 1$. В этом случае подынтегральное выражение преобразовываем так: из $\sin^m x = \sin^{2k+1} x$ выделим первую степень синуса и получим:

$$\sin^{2k+1} x = \sin^{2k} x \sin x = (\sin^2 x)^k \sin x = (1 - \cos^2 x)^k \sin x.$$

Подынтегральное выражение в этом случае имеет вид:

$$\sin^m x \cos^n x dx = (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x \sin x dx.$$

Теперь применяем подстановку

$$\cos x = z,$$

тогда

$$-\sin x dx = dz$$

и

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x \sin x dx = -\int (1 - z^2)^k z^n dz,$$

и вопрос сводится к интегрированию суммы степенных функций.

Пример 4. Найти $\int \sin^3 x \cos^2 x dx.$

Решение

$$\int \sin^3 x \cos^2 x dx = \int \sin^2 x \sin x \cos^2 x dx = \int (1 - \cos^2 x) \cos^2 x \sin x dx =$$

$$= -\int (1 - z^2) z^2 dz = -\int (z^2 - z^4) dz = -\left(\frac{z^3}{3} - \frac{z^5}{5}\right) + C =$$

$$= -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + C.$$

Случай 2. Показатель степени cos n – нечетное положительное число $n = 2k + 1$.

Тогда

$$\cos^n x = \cos^{2k+1} x = \cos^{2k} x\cos x = (\cos^2 x)^k \cos x = (1-\sin^2 x)^k \cos x.$$

Подынтегральное выражение в этом случае запишется следующим образом:

$$\sin^m x\cos^n xdx = \sin^m x(1-\sin^2 x)^k \cos xdx.$$

Применим подстановку $\sin x = z$, $\cos xdx = dz$, тогда

$$\sin^m x\cos^n xdx = z^m(1-z^2)^k dz,$$

и вопрос опять сведется к интегрированию суммы степенных функций.

Пример 5. Найти $\int\cos^9 xdx$.

Решение

$$\int\cos^9 xdx = \int\cos^8 x\cos xdx = \int(\cos^2 x)^4\cos xdx = \int(1-\sin^2 x)^4\cos xdx =$$

$$= \int(1-z^2)^4 dz = \int(1-4z^2+6z^4-4z^6+z^8)dz =$$

$$= z - \frac{4z^3}{3} + \frac{6z^5}{5} - \frac{4z^7}{7} + \frac{z^9}{9} + C = \sin x - \frac{4}{3}\sin^3 x + \frac{6}{5}\sin^5 x -$$

$$-\frac{4}{7}\sin^7 x + \frac{1}{9}\sin^9 x + C.$$

В указанных случаях вычисление $\int\cos^n x\sin^m xdx$ сводится к интегрированию многочленов.

Пример 6. Найти $\int\sin^4 x\cos^3 xdx$.

Решение

$$\int\sin^4 x\cos^2 x\cos xdx = \int\sin^4 x(1-\sin^2 x)\cos xdx = \int z^4(1-z^2)dz =$$

$$= \int(z^4 - z^6)dz = \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + C = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + C.$$

Пример 7. Найти $\int\frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$.

Решение

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx = \int \frac{\sin^2 x \sin x dx}{\cos^4 x} = \int \frac{(1-\cos^2 x)\sin x dx}{\cos^4 x} =$$

$$= \int \left(\frac{1}{\cos^4 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \right) \sin x dx = -\int \left(\frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^2} \right) dz =$$

$$= -\int \left(z^{-4} - z^{-2} \right) dz = -\left(\frac{z^{-3}}{-3} + z^{-1} \right) + C = \frac{1}{3z^3} - \frac{1}{z} + C = \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C.$$

Случай 3. Сумма $m+n$ показателей степени синуса и косинуса в интеграле (1.21) – четное отрицательное число $m+n=-2k$ ($k>0$ и целое).

В этом случае подынтегральная функция может иметь два вида:

1) подынтегральная функция – дробь, в числителе которой находится степень синуса, а в знаменателе – степень косинуса (или наоборот), причем показатели степени или оба четные, или оба нечетные, т. е. они одинаковой четности. Так как $m+n$ – отрицательное число, то отсюда следует, что степень знаменателя больше степени числителя;

2) подынтегральная функция – дробь, числитель которой постоянная величина, а знаменатель – произведение степеней синуса и косинуса одинаковой четности.

В рассматриваемом случае любая из подстановок $\operatorname{tg} x = z$ или $\operatorname{ctg} x = z$ преобразует подынтегральную функцию в многочлен или в многочлен, сложенный с целыми отрицательными степенями новой переменной. Если подынтегральная функция имеет первый из разобранных видов, а в числителе находится степень $\sin x$, более удобной подстановкой является $\operatorname{tg} x = z$, если же в числителе находится степень $\cos x$, рациональнее применить подстановку $\operatorname{ctg} x = z$. Дроби второго типа с помощью подстановок $\operatorname{tg} x = z$ или $\operatorname{ctg} x = z$ приводятся к интегрированию степенных функций.

Применяя подстановку $\operatorname{tg} x = z$, следует учесть, что:

$$dx = \frac{dz}{1+z^2}; \quad \sin x = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}; \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}.$$

Если же применяется подстановка $\operatorname{ctg} x = z$, то: $dx = -\dfrac{dz}{1+z^2}$; $\sin x = \dfrac{1}{\sqrt{1+z^2}}$; $\cos x = \dfrac{z}{\sqrt{1+z^2}}$.

Пример 8. Найти $\displaystyle\int \frac{\sin^4 x}{\cos^8 x} dx$.

Решение

Здесь $m = 4$, $n = -8$, $m + n = -4$ – четное отрицательное число. Так как в числителе находится степень синуса, то удобнее применить подстановку $\operatorname{tg} x = z$. В этом случае имеем

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^8 x} dx = \int \frac{\dfrac{z^4}{\left(\sqrt{1+z^2}\right)^4}}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+z^2}}\right)^8} \frac{dz}{1+z^2} = \int \frac{z^4 \left(1+z^2\right)^4}{\left(1+z^2\right)^2 \left(1+z^2\right)} dz =$$

$$= \int z^4 \left(1+z^2\right) dz = \int \left(z^4 + z^6\right) dz = \frac{z^5}{5} + \frac{z^7}{7} + C = \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + \frac{\operatorname{tg}^7 x}{7} + C.$$

Пример 9. Найти $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\sin^9 x} dx.$

Решение

Здесь $n = 3$, $m = -9$, $m + n = -6$ – четное отрицательное число. В числителе степень косинуса, удобно применить подстановку $\operatorname{ctg} x = z$:

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^9 x} dx = \int \frac{\dfrac{z^3}{\left(\sqrt{1+z^2}\right)^3}}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+z^2}}\right)^9} \frac{dz}{1+z^2} = -\int \frac{z^3 \left(1+z^2\right)^{9/2}}{\left(1+z^2\right)^{3/2} \left(1+z^2\right)} dz =$$

$$= -\int z^3 \left(1+z^2\right)^2 dz = -\int z^3 \left(1 + 2z^2 + z^4\right) dz = -\int \left(z^3 + 2z^5 + z^7\right) dz =$$

$$= -\left(\frac{z^4}{4} + \frac{2z^6}{6} + \frac{z^8}{8}\right) + C = \left(\frac{\operatorname{ctg}^4 x}{4} + \frac{\operatorname{ctg}^6 x}{3} + \frac{\operatorname{ctg}^8 x}{8}\right) + C.$$

Пример 10. Найти $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x} dx.$

Решение

Здесь $m = -3$, $n = -5$, $m + n = -8$ – четное отрицательное число. Для вычисления этого интеграла можно применять любую из подстановок: $\operatorname{tg} x = z$ или $\operatorname{ctg} x = z$. Остановимся на подстановке $\operatorname{tg} x = z$:

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x} dx = \int \frac{1}{\frac{z^3}{\left(\sqrt{1+z^2}\right)^3} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\right)^5} \frac{dz}{1+z^2} =$$

$$= \int \frac{\left(1+z^2\right)^{3/2}\left(1+z^2\right)^{5/2}}{z^3\left(1+z^2\right)} dz = \int \frac{\left(1+z^2\right)^3}{z^3} dz = \int \frac{1+3z^2+3z^4+z^6}{z^3} dz =$$

$$= \int \left(\frac{1}{z^3} + \frac{3}{z} + 3z + z^3\right) dz = -\frac{1}{2z^2} + 3\ln|z| + \frac{3}{2}z^2 + \frac{z^4}{4} + C =$$

$$= -\frac{1}{2\operatorname{tg}^2 x} + 3\ln|\operatorname{tg} x| + \frac{3}{2}\operatorname{tg}^2 x + \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + C.$$

Случай 4. Сумма показателей степени синуса и косинуса равна нулю: $m + n = 0$, причем предполагается, что m и n целые числа. Таким образом, показатели степени синуса и косинуса равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку, а подынтегральное выражение имеет один из видов:

1) $\frac{\sin^m x}{\cos^m x} = \operatorname{tg}^m x, \quad m > 0;$

2) $\frac{\cos^n x}{\sin^n x} = \operatorname{ctg}^n x, \quad n > 0,$

т. е. рассматриваются следующие интегралы:

$$\int \operatorname{tg}^m x dx \quad \text{или} \quad \int \operatorname{ctg}^n x dx.$$

К интегралу $\int \operatorname{tg}^m x dx$ применим подстановку: $\operatorname{tg} x = z$, $dx = \frac{dz}{1+z^2}$, которая приведет к интегралу вида: $\int \frac{z^m dz}{1+z^2}$; а к интегралу $\int \operatorname{ctg}^n x dx$

применяем подстановку: $\operatorname{ctg} x = z$, $dx = -\dfrac{dz}{1+z^2}$, которая приведет его к интегралу вида: $-\int \dfrac{z^n}{1+z^2} dz$.

Пример 11. Найти $\int \operatorname{tg}^5 x dx$.

Решение

$$\int \operatorname{tg}^5 x dx = \int \frac{z^5}{1+z^2} dz = \left| \begin{array}{l|l} -\; z^5 & z^2+1 \\ \quad \underline{z^5+z^3} & \overline{z^3 - z} \\ \quad -\; -z^3 & \\ \qquad \underline{-z^3 - z} & \\ \qquad\qquad z & \end{array} \right| =$$

$$= \int \left(z^3 - z + \frac{z}{1+z^2} \right) dz = \frac{z^4}{4} - \frac{z^2}{2} + \frac{1}{2} \ln \left| 1+z^2 \right| + C =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \frac{1}{2} \ln \left| 1 + \operatorname{tg}^2 x \right| + C.$$

Пример 12. Найти $\int \operatorname{ctg}^4 x dx$.

Решение

$$\int \operatorname{ctg}^4 x dx = -\int \frac{z^4}{1+z^2} dz = \left| \begin{array}{l|l} -\; z^4 & z^2+1 \\ \quad \underline{z^4+z^2} & \overline{z^2 - 1} \\ \quad -\; -z^2 & \\ \qquad \underline{-z^2 - 1} & \\ \qquad\qquad 1 & \end{array} \right| =$$

$$= -\int \left(z^2 - 1 + \frac{1}{1+z^2} \right) dz = -\left(\frac{z^3}{3} - z + \operatorname{arctg} z \right) + C =$$

$$= -\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} + \operatorname{ctg} x - \operatorname{arctg} \operatorname{ctg} x + C.$$

5. Рассмотрим $\int \sin^m x \cos^n x dx$, где m и n – числа неотрицательные и четные. Положим $m = 2p$, $n = 2q$. Используем формулы, известные из тригонометрии:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}; \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}. \tag{1.22}$$

Подставляя формулы (1.22) в интеграл (1.21), получим

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int \sin^{2p} x \cos^{2q} x dx = \int \left(\sin^2 x\right)^p \left(\cos^2 x\right)^q dx =$$

$$= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^p \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^q dx.$$

Возводя в степень и раскрывая скобки, получим члены, содержащие $\cos 2x$ в нечетных и четных степенях. Члены с нечетными степенями интегрируются как указано в случае 3 (второй вид). Четные показатели степеней снова понижаем по формулам (1.22). Продолжая так, дойдем до членов вида $\int \cos kx dx$, которые легко интегрируются.

Пример 13. $\int \sin^4 x \cos^4 x dx$.

Решение

$$\int \sin^4 x \cos^4 x dx = \int \frac{(2\sin x \cos x)^4}{16} dx = \frac{1}{16}\int \sin^4 2x dx =$$

$$= \frac{1}{16}\int \left(\sin^2 2x\right)^2 dx = \frac{1}{16}\int \left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{64}\int \left(1 - 2\cos 4x + \cos^2 4x\right) dx = \frac{1}{64}\int \left(1 - 2\cos 4x + \frac{1+\cos 8x}{2}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{64}\left(x - \frac{2\sin 4x}{4} + \frac{x}{2} + \frac{\sin 8x}{2\cdot 8}\right) + C = \frac{1}{64}\left(\frac{3}{2}x - \frac{\sin 4x}{2} + \frac{\sin 8x}{16}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{128}\left(3x - \sin 4x + \frac{\sin 8x}{8}\right) + C.$$

6. Рассмотрим интегралы вида:

$$\int \cos mx \cos nx dx; \quad \int \sin mx \cos nx dx; \quad \int \sin mx \sin nx dx.$$

Они берутся при помощи следующих формул $(m \neq n)$:

$$\cos mx \cos nx = \frac{\cos(m+n)x + \cos(m-n)x}{2};$$

$$\sin mx \cos nx = \frac{\sin(m+n)x + \sin(m-n)x}{2};$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x}{2}.$$

Пример 14. Вычислить $\int \sin 5x \cdot \sin 3x dx$.

Решение

$$\int \sin 5x \cdot \sin 3x dx = \frac{1}{2}\int (\cos 2x - \cos 8x) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 8x}{8}\right) + C = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 8x + C.$$

§ 1.14. Интегрирование некоторых иррациональных функций с помощью тригонометрических подстановок

Рассмотрим интеграл вида:

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx, \tag{1.23}$$

где $a \neq 0$; $c - \frac{b^2}{4a} \neq 0$ (в случае $a = 0$ интеграл имеет вид 2 § 10, при $c - \frac{b^2}{4a} \neq 0$ выражение $ax^2+bx+c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$, и мы имеем дело с рациональной функцией, если $a > 0$, при $a < 0$ функция $\sqrt{ax^2+bx+c}$ не определена ни при каком значении x).

Преобразуем интеграл (1.23) к интегралу вида:

$$\int \overline{R}(\sin z, \cos z)dz. \tag{1.24}$$

Произведем преобразование трехчлена, стоящего под корнем:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right).$$

Сделаем замену переменного, положив $x+\frac{b}{2a}=t$, $dx=dt$. Тогда

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{at^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)}.$$

Рассмотрим все возможные случаи:

1. Пусть $a>0$; $c-\frac{b^2}{4a}>0$. Введем обозначения: $a=m^2$, $c-\frac{b^2}{4a}=n^2$.

В этом случае будем иметь

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{m^2t^2+n^2}.$$

2. Пусть $a>0$; $c-\frac{b^2}{4a}<0$. Тогда $a=m^2$; $c-\frac{b^2}{4a}=-n^2$. Следовательно,

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{m^2t^2-n^2}.$$

3. Пусть $a<0$; $c-\frac{b^2}{4a}>0$. Тогда $a=-m^2$; $c-\frac{b^2}{4a}=n^2$. Следовательно,

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{n^2-m^2t^2}.$$

4. Пусть $a<0$, $c-\frac{b^2}{4a}<0$. В этом случае $\sqrt{ax^2+bx+c}$ есть комплексное число при любом значении x.

Таким образом, интеграл (1.23) преобразуется к одному из следующих типов интегралов:

I. $\int R\left(t,\sqrt{m^2t^2+n^2}\right)dt.$ (1.25)

II. $\int R\left(t,\sqrt{m^2t^2-n^2}\right)dt.$ (1.26)

III. $\int R\left(t,\sqrt{n^2-m^2t^2}\right)dt.$ (1.27)

Очевидно, что интеграл (1.25) приводится к интегралу вида (1.24) с помощью подстановки

$$t = \frac{n}{m}\operatorname{tg} z. \tag{1.28}$$

Интеграл (1.26) приводится к виду (1.24) с помощью подстановки

$$t = \frac{n}{m}\sec z = \frac{n}{m\cos z}. \tag{1.29}$$

Интеграл (1.27) приводится к виду (1.24) с помощью подстановки

$$t = \frac{n}{m}\sin t. \tag{1.30}$$

Пример 1. Найти интеграл $\int \frac{dx}{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}}$.

Решение

Выражение, стоящее под корнем, имеет вид (1.25). Применим подстановку (1.28):

$$x = 3\operatorname{tg} y; \quad dx = \frac{3}{\cos^2 y}dy;$$

$$x^2 + 9 = 9\operatorname{tg}^2 y + 9 = 9(\operatorname{tg}^2 y + 1) = \frac{9}{\cos^2 y}.$$

Поэтому $\sqrt{x^2+9} = \frac{3}{\cos y}$.

Возвращаясь к интегралу, имеем:

$$\int \frac{dx}{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}} = \int \frac{\frac{3}{\cos^2 y}dy}{\frac{9}{\cos^2 y}\frac{3}{\cos y}} = \frac{1}{9}\int \cos y dy = \frac{1}{9}\sin y + C.$$

Для того чтобы возвратиться к первоначальной переменной x, найдем $\sin y$ через x. Из подстановки:

$$x = 3\operatorname{tg} y; \ \operatorname{tg} y = \frac{x}{3};$$

$$\sin y = \operatorname{tg} y \cdot \cos y = \frac{\operatorname{tg} y}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 y}} = \frac{\frac{x}{3}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{9}}} = \frac{x}{\sqrt{9+x^2}}.$$

Поэтому окончательно

$$\int \frac{dx}{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}} = \frac{1}{9}\frac{x}{\sqrt{9+x^2}} + C.$$

Пример 2. Найти $\int \frac{dx}{(x^5-5)\sqrt{x^2-5}}$.

Решение

Подкоренное выражение имеет вид (1.26). Подстановка (1.29) должна уничтожить иррациональность подынтегрального выражения. Полагаем:

$$x = \frac{\sqrt{5}}{\cos t}, \quad dx = \frac{\sqrt{5}}{\cos t}\operatorname{tg} t dt;$$

$$x^2 - 5 = \frac{5}{\cos^2 t} - 5 = 5\left(\frac{1}{\cos^2 t} - 1\right) - 5\left(\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}\right) = 5\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = 5\operatorname{tg}^2 t;$$

$$\sqrt{x^2-5} = \sqrt{5}\operatorname{tg} t.$$

Тогда

$$\int \frac{dx}{(x^5-5)\sqrt{x^2-5}} = \int \frac{\frac{\sqrt{5}}{\cos t}\operatorname{tg} t dt}{5\operatorname{tg}^2 t\sqrt{5}\operatorname{tg} t} =$$

$$= \frac{1}{5}\int \frac{\frac{1}{\cos t}}{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}} dt = \frac{1}{5}\int \frac{\cos t}{\sin^2 t} dt = -\frac{1}{5}\frac{1}{\sin t} + C.$$

Из подстановки $x = \frac{\sqrt{5}}{\cos t}$ следует, что

$$\cos t = \frac{\sqrt{5}}{x};\;\; \cos^2 t = \frac{5}{x^2};\;\; \sin^2 t = 1 - \frac{5}{x^2} = \frac{x^2-5}{x^2};\;\; \sin t = \frac{\sqrt{x^2-5}}{x},$$

а потому окончательно

$$\int \frac{dx}{(x^5-5)\sqrt{x^2-5}} = -\frac{1}{5}\frac{x}{\sqrt{x^2-5}} + C.$$

Пример 3. Найти $\int \frac{dx}{(2-x^2)\sqrt{2-x^2}}$.

Решение

Подкоренное выражение имеет вид (1.27) ($n^2 = 2$, $n = \sqrt{2}$). Применяем подстановку (1.30):

$$x = \sqrt{2}\sin t;\;\; dx = \sqrt{2}\cos t dt;$$

$$2 - x^2 = 2 - 2\sin^2 t = 2(1-\sin^2 t) = 2\cos^2 t;\;\; \sqrt{2-x^2} = \sqrt{2}\cos t.$$

Тогда

$$\int \frac{dx}{(2-x^2)\sqrt{2-x^2}} = \int \frac{\sqrt{2}\cos t dt}{2\cos^2 t\sqrt{2}\cos t} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{2} tgt + C.$$

Возвращаемся к прежней переменной x. Из подстановки $x = \sqrt{2}\sin t$:

$$\sin t = \frac{x}{\sqrt{2}};\quad \cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-\frac{x^2}{2}} = \sqrt{\frac{2-x^2}{2}} = \frac{\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{2}};$$

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{\frac{x}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{2}}} = \frac{x}{\sqrt{2-x^2}}.$$

Окончательно имеем

$$\int \frac{dx}{(2-x^2)\sqrt{2-x^2}} = \frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{2-x^2}} + C.$$

ГЛАВА 2
ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 2.1. Интегральные суммы и интегрируемость

К понятию определенного интеграла приводят различные физические задачи. В качестве примера рассмотрим задачу о вычислении пути, пройденного материальной точкой, движущейся вдоль оси OX, если известна ее скорость как функция времени $v = f(t)$.

Для решения задачи разобьем промежуток времени $[a,b]$ с помощью точек $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$ на n малых промежутков так, что на каждом промежутке $[t_{k-1}, t_k]$ скорость мало меняется, поэтому скорость на этом промежутке можно приближенно считать постоянной, равной, например, $f(t_k)$. Тогда путь, пройденный материальной точкой за время $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$, будет приближенно равен $f(t_k)\Delta t_k$. А весь путь, пройденный точкой за время $\Delta t = b - a$, приближенно равен

$$S \approx \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta t_k . \tag{2.1}$$

При уменьшении всех промежутков Δt_k мы будем получать все более точное значение пути. Точное значение пути получится, если перейти в сумме (2.1) к пределу при стремлении всех Δt_k к нулю:

$$S = \lim_{\Delta t_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta t_k . \tag{2.2}$$

Предел (2.2) называют определенным интегралом от функции $f(t)$ в пределах от a до b и обозначают символом

$$S = \int_a^b f(t)dt .$$

Дадим теперь формальное определение определенного интеграла. Пусть на сегменте $[a,b]$ задана функция $f(x)$. Разобьем сегмент произвольно с помощью точек $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ на n частичных сегментов. Обозначим через $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ длины этих сегментов. Возьмем произвольно на каждом сегменте по точке ξ_i и составим сумму

$$I(x_i,\xi_i)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\,. \qquad (2.3)$$

Выражение (2.3) называется интегральной суммой функции $f(x)$, соответствующей данному разбиению сегмента на части и данному выбору промежуточных точек ξ_i. Обозначим через Δ максимальную длину частичных сегментов для данного разбиения.

Определение определенного интеграла. Если существует предел интегральных сумм (2.3) при $\Delta\to 0$, и этот предел не зависит от способа разбиения сегмента на части и от выбора промежуточных точек ξ_i, то этот предел называется определенным интегралом функции $f(x)$ по сегменту $[a,b]$ и обозначается символом

$$\lim_{\Delta\to 0} I(x_i,\xi_i)=\int_a^b f(x)dx\,. \qquad (2.4)$$

Сама функция $f(x)$ в этом случае называется интегрируемой (по Риману) или собственно интегрируемой на сегменте $[a,b]$.

Пример интегрируемой функции. Докажем, что функция $f(x)=c$ интегрируема на любом сегменте. Действительно, $f(\xi_i)=c$ при любом выборе промежуточных точек, то для любого разбиения сегмента $[a,b]$:

$$I(x_i,\xi_i)=c\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=c(b-a); \qquad \lim_{\Delta\to 0} I(x_i,\xi_i)=c(b-a)\,.$$

Таким образом, функция $f(x)=c$ интегрируема и

$$\int_a^b c\,dx=c(b-a). \qquad (2.5)$$

Очевидно, что интегрируемыми являются лишь функции, ограниченные на сегменте $[a,b]$. Если функция $f(x)$ не ограничена на сегменте $[a,b]$, то она не ограничена по крайней мере на одном частичном сегменте любого разбиения, например, на сегменте $[x_{k-1},\,x_k]$. Слагаемое $f(\xi_k)\Delta x_k$ в интегральной сумме за счет выбора промежуточной точки ξ_k может быть сделано сколь угодно большим. А это означает, что интегральные суммы не ограничены и, следовательно, не имеют конечного предела. Не каждая ограниченная функция интегрируема.

Пример ограниченной, но неинтегрируемой функции. Рассмотрим функцию $f(x)=1$, если x рациональное число и $f(x)=0$, если x – иррациональное число. Покажем, что эта функция не интегрируема на любом сегменте $[a,b]$. Действительно, для любого разбиения сегмента, если промежуточные точки ξ_i выбрать рациональными, то все интегральные суммы будут иметь вид: $I(x_i,\xi_i)=b-a$, если же промежуточные точки ξ_i выбрать иррациональными, то интегральные суммы будут равны нулю. Поэтому не существует предела интегральных сумм и эта функция не интегрируема.

Возьмем произвольное разбиение сегмента $[a,b]$. Обозначим через M_i и m_i точную верхнюю и точную нижнюю грани функции $f(x)$ на сегменте $[x_{i-1},x_i]$ и составим следующие суммы:

$$S=\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i; \quad s=\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i. \tag{2.6}$$

Суммы (2.6) называют соответственно верхней и нижней интегральными суммами функции $f(x)$ для данного разбиения сегмента $[a,b]$. Имеет место теорема, которую мы приведем без доказательства.

Теорема (необходимое и достаточное условие интегрируемости). Для того чтобы ограниченная на сегменте $[a,b]$ функция $f(x)$ была интегрируемой, на этом сегменте необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ нашлось такое разбиение сегмента $[a,b]$, для которого

$$S-s<\varepsilon. \tag{2.7}$$

Если ввести число $\varpi_i=M_i-m_i$, которое называется колебанием функции на сегменте $[x_{i-1},x_i]$, то условие интегрируемости запишется следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n}\varpi_i\Delta x_i<\varepsilon.$$

Для дальнейшего рассмотрения классов интегрируемых функций введем одно важное понятие.

§ 2.2. Равномерная непрерывность функции на множестве

Определение. Функция $f(x)$ называется равномерно непрерывной на множестве $\{x\}$, если для любого положительного числа ε можно указать такое положительное число δ, зависящее только от ε, что для любых двух точек x' и x'' множества $\{x\}$, удовлетворяющих условию

$$|x'' - x'| < \delta, \tag{2.8}$$

будет выполняться неравенство

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon. \tag{2.9}$$

Пример. Докажем, что функция $f(x) = \sqrt{x}$ равномерно непрерывна на полупрямой $x \geq 1$. Пусть x' и x'' две любые точки, принадлежащие полупрямой. Применив к сегменту $[x', x'']$ формулу Лагранжа, получим

$$|f(x'') - f(x')| = \frac{1}{2\sqrt{\xi}}|x'' - x'| < \frac{1}{2}|x'' - x'|, \text{ т. к. } \xi > 1.$$

Следовательно, если по заданному $\varepsilon > 0$ выбрать δ, удовлетворяющее условию $0 < \delta \leq 2\varepsilon$, то при выполнении (2.8) будет выполняться (2.9). Следовательно функция $f(x) = \sqrt{x}$ равномерно непрерывна на полупрямой $x \geq 1$. Из равномерной непрерывности функции на множестве $\{x\}$ следует непрерывность функции на этом множестве. Из непрерывности не следует равномерная непрерывность на произвольном множестве. Имеет место теорема.

Теорема (теорема о равномерной непрерывности). Непрерывная на сегменте $[a,b]$ функция $f(x)$ равномерно непрерывна на этом сегменте.

Следствие. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a,b]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что на каждом принадлежащем сегменту $[a,b]$ частичном сегменте $[c,d]$, длина которого меньше δ, колебание функции ϖ на этом сегменте будет меньше, чем ε.

§ 2.3. Классы интегрируемых функций

Теорема (интегрируемость непрерывной функции). Непрерывная на сегменте $[a,b]$ функция интегрируема на этом сегменте.

Доказательство. Согласно следствию из предыдущей теоремы для положительного числа $\frac{\varepsilon}{b-a}$ найдется такое $\delta > 0$, что при разбиении сегмента на части, длины которых $\Delta x_i < \delta$, колебания ϖ_i функции на всех частичных сегментах будут меньше, чем $\frac{\varepsilon}{b-a}$. Следовательно,

$$S - s = \sum_{i=1}^{n} \varpi \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \varepsilon.$$

Последнее неравенство означает, что функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a,b]$.

Интегрируемыми могут быть и разрывные функции.

Теорема (интегрирование некоторых разрывных функций). Пусть функция $f(x)$ определена и ограничена на сегменте $[a,b]$, тогда, если для любого положительного ε можно указать конечное число интервалов, покрывающих все точки разрыва этой функции и имеющих общую сумму длин меньше, чем ε, функция $f(x)$ интегрируема на сегменте.

Следствие. Кусочно-непрерывная на сегменте $[a,b]$ функция интегрируема на этом сегменте.

Функция $f(x)$, монотонная на сегменте $[a,b]$, интегрируема на этом сегменте.

Доказательство. Докажем теорему для невозрастающей функции. Пусть ε любое положительное число. Разобьем сегмент $[a,b]$ на n одинаковых частей: $\Delta x_i = (b-a)/n$, выберем n достаточно большим, чтобы $\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{f(a)-f(b)}$. Оценим для этого разбиения разность

$$S - s = \sum_{i=1}^{n} \varpi_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{f(a)-f(b)} \sum_{i=1}^{n} \varpi_i .$$

Так как для невозрастающей функции $\sum_{ш=1}^{n} \varpi_i = f(a) - f(b)$, то $S - s < \varepsilon$.

Теорема доказана.

Пример. Вычислить, исходя из определения, определенный интеграл $\int_0^1 x dx$. Так как функция $f(x) = x$ непрерывна на сегменте $[0,1]$, то интеграл существует. Разобьем сегмент $[0,1]$ на n одинаковых частей: $\Delta x_i = \frac{1}{n}$; $x_i = \frac{i}{n}$. Промежуточные точки выберем $\xi_i = x_i$ и выпишем для данного разбиения интегральную сумму

$$I(x_i, \xi_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2n}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$, то $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$.

§ 2.4. Свойства определенного интеграла. Оценки интегралов. Формула среднего значения

Свойства определенных интегралов:

1. Интеграл с одинаковыми пределами равен нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

2. При перестановке пределов меняется знак:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

3. Если функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a,b]$, то она интегрируема на любом сегменте $[c,d]$, принадлежащем сегменту $[a,b]$.

4. Если функция интегрируема на сегментах $[a,c]$ и $[c,b]$, то она интегрируема и на сегменте $[a,b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

5. Если две функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на сегменте $[a,b]$, то функции $f(x)\pm g(x)$ и $f(x)g(x)$ также интегрируемы на этом сегменте, причем

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx.$$

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a,b]$ и неотрицательна этом сегменте, тогда

$$\int_a^b f(x)dx\geq 0. \tag{2.10}$$

Если $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a,b]$ и $f(x)\geq m$, то

$$\int_a^b f(x)dx\geq m(b-a). \tag{2.11}$$

Действительно, если применить к функции $g(x)=f(x)-m\geq 0$ оценку (2.10), то получим оценку (2.11).

Если две функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на сегменте $[a,b]$ и $f(x)\geq g(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx\geq\int_a^b g(x)dx. \tag{2.12}$$

Если функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a,b]$, то и функция $|f(x)|$ также интегрируема на этом сегменте и

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leq\int_a^b |f(x)|dx. \tag{2.13}$$

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a,b]$, а M и m – точная верхняя и нижняя грани функции на сегменте $[a,b]$, тогда

$$m(b-a)\leq\int_a^b f(x)dx\leq M(b-a). \tag{2.14}$$

Справедливость (2.14) вытекает из предыдущих оценок. Обозначим через μ число $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$, заключенное между m и M, тогда:

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a); \qquad m \le \mu \le M. \tag{2.15}$$

Эта формула называется первой формулой среднего значения. Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a,b]$, то она согласно теореме Вейерштрасса достигает на этом сегменте своего наибольшего и наименьшего значения: $f(x_1) = M$, $f(x_2) = m$. Следовательно, согласно теореме о прохождении непрерывной функции через промежуточное значение μ на сегменте $[x_1, x_2]$, а следовательно, и на сегменте $[a,b]$ найдется точка ξ такая, что $f(\xi) = \mu$. Формула (2.15) в этом случае примет вид:

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a). \tag{2.16}$$

§ 2.5. Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона–Лейбница

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на любом сегменте, содержащемся на интервале (a,b). Возьмем на интервале (a,b) фиксированную точку c и произвольную точку x. Функция $f(x)$ будет интегрируема на сегменте $[c,x]$. Следовательно, на интервале (a,b) определена функция

$$F(x) = \int_c^x f(t)dt. \tag{2.17}$$

Функцию (2.17) называют интегралом с переменным верхним пределом.

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на интервале (a,b), то для нее на этом интервале существует первообразная, одной из которых является функция (2.17).

Доказательство. Рассмотрим приращение функции $F(x)$ в точке x, вызванное приращением аргумента Δx:

$$\Delta F = F(x+\Delta x) - F(x) = \int_c^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_c^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt. \qquad (2.18)$$

Применяя к интегралу формулу среднего значения, получим

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(\xi)\cdot\Delta x, \qquad (2.19)$$

где число ξ заключено между x и $x+\Delta x$. Подставляя (2.19) в (2.18), получим

$$\Delta F = f(\xi)\Delta x. \qquad (2.20)$$

Поделив обе части (2.20) на Δx, имеем

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = f(\xi). \qquad (2.21)$$

Из непрерывности функции $f(x)$ следует, что $f(\xi) \to f(x)$ при $\Delta x \to 0$, поэтому существует предел левой части (5.5), который по определению равен $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = f(x)$. Таким образом, переходя в (2.21) к пределу при $\Delta x \to 0$, получим, что $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in (a,b)$. Что и требовалось доказать.

Замечание 1. Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a,b]$, то в качестве нижнего предела в формуле (2.17) можно взять число a.

Замечание 2. Производная от интеграла равна подынтегральной функции

$$\frac{d}{dx}\left[\int_c^x f(t)dt\right] = f(x). \qquad (2.22)$$

Получим теперь основную формулу интегрального исчисления. Так как все первообразные отличаются друг от друга на постоянную, то любая первообразная непрерывной функции $f(x)$ имеет вид:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt + C. \qquad (2.23)$$

Так как $\Phi(a) = C$, $\Phi(b) = \int_a^b f(x)dx$, то из этих равенств следует

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a). \tag{2.24}$$

Это и есть основная формула интегрального исчисления, которая называется формулой Ньютона–Лейбница. Если ввести символ $\Phi(x)\Big|_a^b = \Phi(b) - \Phi(a)$, то формула (2.24) примет вид:

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(x)\Big|_a^b = \Phi(b) - \Phi(a). \tag{2.25}$$

Рассмотрим несколько примеров:

$$\int_1^2 4x^3 dx = x^4\Big|_1^2 = 2^4 - 1 = 15;$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x dx = -\frac{1}{3}\cos 3x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} =$$

$$= -\frac{1}{3}(\cos\frac{\pi}{6} - \cos 0) = \frac{1}{6}.$$

§ 2.6. Замена переменной под знаком определенного интеграла. Формула интегрирования по частям

Для вычисления многих определенных интегралов полезно заменить переменную интегрирования при помощи подстановки $x = g(t)$ в другой интеграл с новой переменной интегрирования t. Имеет место теорема.

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a,b]$, а сегмент $[a,b]$ является множеством значений функции $x = g(t)$, определенной на сегменте $[\alpha,\beta]$ и имеющей на этом сегменте непрерывную производную $g'(t)$, причем, $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$, то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[g(t)]g'(t)dt \qquad (2.26)$$

Доказательство. Так как функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a,b]$, то имеет место формула (2.24), где $\Phi(x)$ – некоторая первообразная функции $f(x)$. Из условия теоремы следует, что сложная функция $\Phi(g(t))$ дифференцируема на сегменте $[\alpha,\beta]$. Дифференцируя ее, получим

$$\frac{d}{dt}[\Phi(g(t))] = \Phi'(g(t)) \cdot g'(t), \qquad (2.27)$$

где $\Phi'(g(t)) = \Phi'(x) = f(x) = f(g(t))$ при $x = g(t)$. Подставляя $\Phi'(g(t))$ в правую часть (2.27), получим

$$\frac{d}{dt}[\Phi(g(t))] = f(g(t)) \cdot g'(t). \qquad (2.28)$$

Из (2.28) следует, что функция $\Phi(g(t))$ является первообразной для функции $f(g(t))g'(t)$ на сегменте $[\alpha,\beta]$. Следовательно, согласно формуле (2.24)

$$\int_\alpha^\beta f(g(t)) \cdot g'(t)dt = \Phi(g(\beta)) - \Phi(g(\alpha)) = \Phi(b) - \Phi(a). \qquad (2.29)$$

Из (2.24) и (2.29) следует справедливость формулы (2.26), что и требовалось доказать.

Пример 1

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \left\{x = \sin t,\ dx = \cos t dt,\ \sqrt{1-x^2} = \cos t,\ t_1 = 0,\ t_2 = \frac{\pi}{2}\right\} =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \left.\frac{1}{2}(t + \frac{1}{2}\sin 2t)\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

$$\int_1^4 \cos\sqrt{x}\frac{dx}{2\sqrt{x}} = \left\{x = t^2,\ dx = 2tdt,\ t_1 = 1,\ t_2 = 2\right\} = \int_1^2 \sin t dt =$$

$$= -\cos t\Big|_1^2 = \cos 1 - \cos 2;$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x} = \left\{ tg\frac{x}{2} = t,\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ dx = \frac{2dt}{1+t^2},\ t_1 = 0,\ t_2 = 1 \right\} =$$

$$= 2\int_0^1 \frac{dt}{t^2+3} = \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{t}{\sqrt{3}}\Big|_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Получим формулу интегрирования по частям для определенного интеграла.

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы на сегменте $[a,b]$, а их производные непрерывны на этом сегменте. Обозначим $F(x) = u(x)v(x)$. Дифференцируя, получим $F'(x) = u'v + v'u$. Интегрируя обе части этого равенства и используя формулу Ньютона–Лейбница, имеем

$$uv\Big|_a^b = \int_a^b u'vdx + \int_a^b v'udx,$$

откуда

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu. \qquad (2.30)$$

Это и есть формула интегрирования по частям для определенного интеграла.

Пример 2

$$\int_0^1 xe^x dx = \{u = x, \quad dv = e^x dx, \quad du = dx, \quad v = e^x\} = xe^x\Big|_0^1 - e^x\Big|_0^1 = 1;$$

$$\int_1^2 x\ln x dx = \{u = \ln x, \quad dv = xdx, \quad du = \frac{dx}{x}, \quad v = \frac{x^2}{2}\} = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^2 -$$

$$-\frac{1}{2}\int_1^2 xdx = 2\ln 2 - \frac{3}{4}.$$

§ 2.7. Геометрические приложения определенного интеграла

2.7.1. Длина дуги кривой

Кривая на плоскости может быть задана явно уравнением $y = f(x)$ $(a \le x \le b)$ и уравнениями: $x = x(t)$, $y = y(t)$; $\alpha \le t \le \beta$. Кроме того, кривая может быть задана и неявно.

Пусть на плоскости задана простая кривая L от точки A до точки B. Разобьем кривую L с помощью точек $A = M_0, M_1, M_2, \dots M_n = B$ на n частей, возникающую при этом ломаную $M_0 M_1 M_2 \dots M_n$ будем называть ломаной, вписанной в данную кривую и отвечающей данному разбиению кривой L на части. Если обозначить через l_i длину $M_{i-1}M_i$, то длина всей ломаной будет равна $L_n = \sum\limits_{i=1}^{n} l_i$. Обозначим через $\{L_n\}$ множество всех длин ломаных, вписанных в данную кривую.

Определение. Если множество $\{L_n\}$ длин вписанных в кривую L ломаных ограничено, то кривая называется спрямляемой, а точная верхняя грань множества $\{L_n\}$ называется длиной дуги кривой L.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на сегменте $[a,b]$, а ее производная непрерывна на этом сегменте, то кривая L, определяемая уравнением $y = f(x)$ $(a \le x \le b)$, спрямляема, и ее длина находится по формуле

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx. \tag{2.31}$$

Доказательство. Разобьем сегмент $[a,b]$ с помощью точек $a = x_0 < x_2 < \dots < x_n = b$ на n частей и образуем ломаную с вершинами в точках $M_i(x_i, f(x_i))$. Длина звена ломаной $M_{i-1}M_i$ равна

$$l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}\ ,$$

где $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$.

Длина L_n всей ломаной будет равна

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}. \tag{2.32}$$

Применим к функции $f(x)$ на сегменте $[x_{i-1}, x_i]$ формулу Лагранжа

$$\Delta y_i = \dot{f}(\xi_i)\Delta x_i, \tag{2.33}$$

где $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$.

Подставляя (2.33) в (2.32), получим

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}\,\Delta x_i. \tag{2.34}$$

Так как выражение (2.34) представляет интегральную сумму непрерывной функции $\sqrt{1+(f'(x))^2}$, то при $\lambda = \max \Delta x_i \to 0$ предел интегральной суммы (2.34) равен интегралу, стоящему в правой части формулы (2.31).

Пример 1. Найти длину дуги полукубической параболы $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ $(0 \le x \le 2)$. Находим производную $y' = \sqrt{x}$ и подставляем ее в формулу (2.31), получим

$$L = \int_0^2 \sqrt{1+x}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{(1+x)^3}\Big|_0^2 = \frac{2}{3}(3\sqrt{3}-1).$$

В случае, когда кривая задана параметрически, имеет место теорема.

Теорема. Если функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ имеют на сегменте $[\alpha, \beta]$ непрерывные производные, то кривая L, задаваемая этими уравнениями, спрямляема, и длина дуги кривой находится по формуле

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt. \tag{2.35}$$

Пример 2. Вычислить длину дуги циклоиды:

$$x = a(t - \sin t);\ y = a(1-\cos t);\qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

Находим производные:

$$x'(t) = a(1-\cos t);\qquad y'(t) = a\sin t;\qquad (x'(t))^2 + (y'(t))^2 = 4a^2\sin^2\frac{t}{2}.$$

Подставляя эти выражения в формулу (2.35), получим

$$L = \int_0^{2\pi} 2a\sin\frac{t}{2}dt = -4a\cos\frac{t}{2}\Bigg|_0^{2\pi} = 8a.$$

Если кривая задана в полярных координатах: $r = r(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$ и функция $r = r(\varphi)$ имеет на сегменте $[\alpha, \beta]$ непрерывную производную, то длина дуги кривой находится по формуле

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2}\,d\varphi. \qquad (2.36)$$

Действительно, в этом случае параметрические уравнения кривой имеет вид:

$$x = r(\varphi)\cos\varphi; \qquad y = r(\varphi)\sin\varphi.$$

Дифференцируя эти функции, получим:

$$x'(\varphi) = r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi; \qquad y'(\varphi) = r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi.$$

Имеем $(x'(\varphi))^2 + (y'(\varphi))^2 = (r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2$. Подставляя это выражение в (2.35), получим для длины дуги кривой формулу (2.36).

Пример 3. Найти всю длину кардиоиды $r = a(1+\cos\varphi)$.

$$r'(\varphi) = -a\sin\varphi, \text{ то } (r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2 = 4a^2\cos^2\frac{\varphi}{2}$$

и

$$L = 4a\int_0^\pi \cos\frac{\varphi}{2}d\varphi = 8a\sin\frac{\varphi}{2}\Bigg|_0^\pi = 8a.$$

2.7.2. Площадь плоской фигуры

Плоской фигурой Q будем называть часть плоскости, ограниченной простой замкнутой кривой L. Кривую L называют границей фигуры Q. Если все точки некоторого многоугольника принадлежат фигуре Q, то такой многоугольник называется вписанным в фигуру Q. Если все точки плоской фигуры и ее границы принадлежат некоторому многоугольнику, то такой многоугольник называется описанным возле фигуры. Обозначим $\{S_i\}$ и $\{S_d\}$ – числовые множества площадей всех вписанных в фигуру и описанных возле фигуры многоугольников. Очевидно, что первое множество ограничено сверху, а второе – снизу. Обозначим $\underline{S}$ и $\overline{S}$ – точную верхнюю и нижнюю грани множеств $\{S_i\}$ и $\{S_d\}$. Числа $\underline{S}$ и $\overline{S}$ называют нижней и верхней площадью фигуры. Очевидно, что $\underline{S} \le \overline{S}$.

Определение. Плоская фигура называется квадрируемой, если ее верхняя площадь совпадает с нижней площадью. $S = \underline{S} = \overline{S}$ называется площадью фигуры.

Теорема. Для того чтобы плоская фигура была квадрируемой, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлись такие вписанный в фигуру и описанный возле фигуры многоугольники, что для этих многоугольников разность их площадей была меньше, чем ε:

$$S_d - S_i < \varepsilon. \tag{2.37}$$

Площадь криволинейной трапеции

Плоская фигура, ограниченная сверху графиком непрерывной и неотрицательной функции $f(x)$, снизу – осью OX, а слева и справа – прямыми $x = a$ и $x = b$, называется криволинейной трапецией. Докажем, что криволинейная трапеция является квадрируемой фигурой и найдем ее площадь.

Доказательство. Так как функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a,b]$, то она интегрируема на этом сегменте. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое разбиение сегмента на части, что разность между верхней и нижней интегральными суммами данного разбиения будет меньше, чем ε: $S - s < \varepsilon$.

Так как в данном случае верхняя интегральная сумма $S = S_d$, нижняя интегральная сумма $s = S_i$, где S_d и S_i – площади ступенчатых фигур описанной возле криволинейной трапеции и вписанной в нее, то для данного разбиения сегмента $[a,b]$ выполнено необходимое и достаточное условие квадрируемости плоской фигуры: $S_d - S_i < \varepsilon$. Так как предел верхней и нижней интегральных сумм при $\Delta = \max \Delta x_i \to 0$ равен $\int_a^b f(x)dx$ и $s \le \mathrm{S} \le S$, то

$$S = \int_a^b f(x)dx. \tag{2.38}$$

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = -x^2 + 2x$ и осью OX. Парабола пересекает ось OX в точках $x = 0$ и $x = 2$. Вершина параболы находится в точке $M(1;1)$.

$$S=\int_0^2(-x^2+2x)dx=(-\frac{x^3}{3}+x^2)\Big|_0^2=-\frac{8}{3}+4=\frac{4}{3}.$$

Замечание 1. Если функция $f(x)$ непрерывна и неположительна на сегменте $[a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx \le 0$, поэтому площадь криволинейной трапеции в этом случае равна $S=\left|\int_a^b f(x)dx\right|$.

Замечание 2. Площадь криволинейной фигуры, ограниченной сверху и снизу соответственно непрерывными кривыми $y=f_1(x)$ и $f_2(x)$, слева и справа – прямыми $x=a$ и $x=b$, определяется формулой

$$S=\int_a^b\left[f_1(x)-f_2(x)\right]dx. \qquad (2.39)$$

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=8x-x^2$ и $y=x+6$. Совместно решая данные уравнения, находим две точки пересечения линий: $A(1;7)$, $B(6;12)$.

Искомая фигура изображена на рис. 2.1. Площадь этой фигуры находим по формуле

$$S=\int_1^6(8x-x^2-x-6)dx=\left[\frac{7}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-6x\right]\Big|_1^6=20\frac{5}{6}.$$

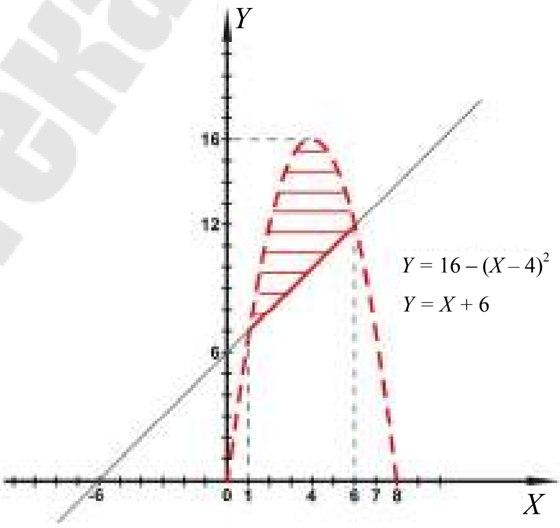

Рис. 2.1

Замечание 3. Если кривая, ограничивающая фигуру сверху, задана параметрическими уравнениями:

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad \alpha \le t \le \beta,$$

и функции $x(t)$ и $y(t)$ имеют на сегменте $[\alpha, \beta]$ непрерывные производные, то площадь криволинейной трапеции находится по формуле

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \cdot x'(t) dt. \tag{2.40}$$

Пример 3. Найти площадь, ограниченную одной аркой циклоиды: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ и осью OX (рис. 2.2).

По формуле (2.40) находим

$$S = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)a(1-\cos t)dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2 dt =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)dt = a^2 (t - 2\sin t)\Big|_0^{2\pi} + \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2t)dt =$$

$$= 2\pi a^2 + \frac{a^2}{2}(t + \frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_0^{2\pi} = 3\pi a^2.$$

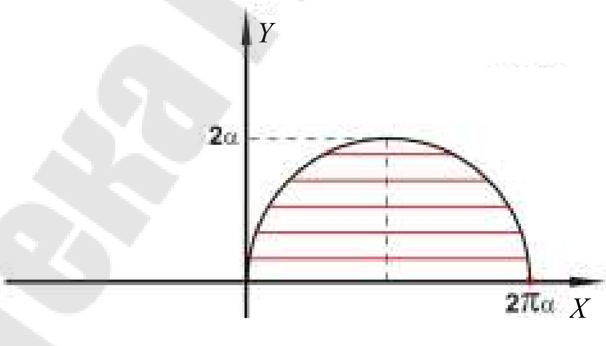

Рис. 2.2

Площадь криволинейного сектора

Пусть кривая L задана в полярной системе координат уравнением $r = r(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$. Функция $r(\varphi)$ непрерывна и неотрицательна на сегменте $[\alpha, \beta]$. Плоская фигура, ограниченная кривой L и двумя лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, называется криволинейным сектором (рис. 2.3).

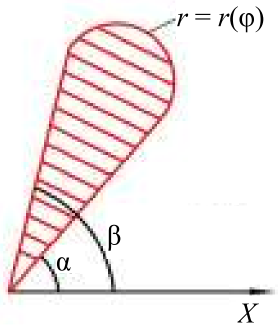

Рис. 2.3

Теорема. Криволинейный сектор является квадрируемой фигурой и его площадь находится по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi. \tag{2.41}$$

Доказательство. Разобьем сегмент $[\alpha, \beta]$ с помощью точек $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \ldots < \varphi_n = \beta$ на n частей. Пусть M_i и m_i – наибольшее и наименьшее значения функции $r(\varphi)$ на сегменте $[\varphi_{i-1}, \varphi_i]$. Для каждого частичного сегмента построим круговые секторы радиусов M_i и m_i.

Мы получим описанную около криволинейного сектора и вписанную в него веерообразные фигуры (рис. 2.4). Площади этих фигур соответственно равны:

$$S_d = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} M_i{}^2 \Delta\varphi_i;$$

$$S_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1} m_i{}^2.$$

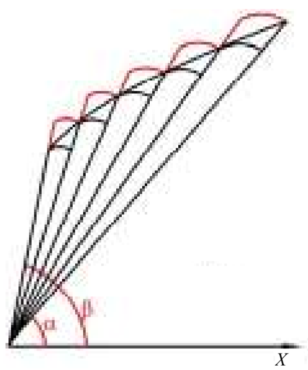

Рис. 2.4

Эти суммы являются соответственно верхней и нижней интегральными суммами для функции $\frac{1}{2}r^2(\varphi)$ для данного разбиения сегмента $[\alpha,\beta]$: $S_d = S, S_i = s$. Так как функция $\frac{1}{2}r^2(\varphi)$ непрерывна, а следовательно, и интегрируема на сегменте $[\alpha,\beta]$, то для любого $\varepsilon > 0$

$$S - s = S_d - S_i < \varepsilon.$$

Из последнего неравенства следует квадрируемость криволинейного сектора. А так как

$$S_i \le \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi \le S_d, \qquad (2.42)$$

то из (2.42) вытекает справедливость формулы (2.41).

Замечание. Площадь криволинейного сегмента (рис. 2.5) находится по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left[r_2^{\,2}(\varphi) - r_1^{\,2}(\varphi)\right]d\varphi. \qquad (2.43)$$

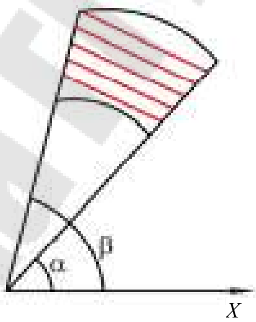

Рис. 2.5

Пример 4. Вычислить площадь, ограниченную кардиоидой $r = a(1+\cos\varphi)$ (рис. 2.6).

$$S = \int_0^{\pi} a^2(1+\cos\varphi)^2 d\varphi = a^2\int_0^{\pi}(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)d\varphi = a^2(\varphi+2\sin\varphi)\Big|_0^{\pi} +$$

$$+\frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos 2\varphi)d\varphi = \pi a^2 + \frac{a^2}{2}(\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi)\Big|_0^{\pi} = \frac{3\pi a^2}{2}.$$

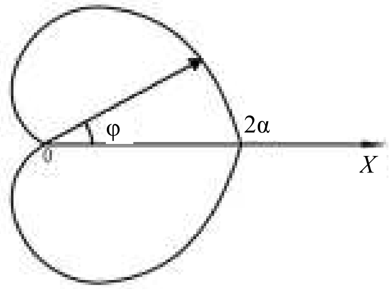

Рис. 2.6

2.7.3. Объемы тел и площади поверхностей

Пусть задано некоторое тело T. Многогранник называется вписанным в тело T, если каждая его точка принадлежит телу T. Многогранник называется описанным возле тела T, если все точки тела принадлежат многограннику. Обозначим $\{V_i\}$ и $\{V_d\}$ – числовые множества объемов всех многогранников, вписанных в тело и описанных возле него. Очевидно, что первое множество ограничено сверху, а второе – снизу. Точная верхняя грань первого множества и точная нижняя грань второго множества, числа $\underline{V}$ и $\overline{V}$, называются соответственно нижним и верхним объемами тела T.

Определение. Тело T называется кубируемым, если $\underline{V} = \overline{V}$. Число $V = \underline{V} = \overline{V}$ называется объемом тела T.

Имеет место следующая теорема.

Теорема. Для того чтобы тело T было кубируемым необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлись такой вписанный в тело многогранник и такой описанный вокруг тела многогранник, что разность их объемов была бы меньше, чем ε:

$$V_d - V_i < \varepsilon. \tag{2.44}$$

Используя эту теорему, можно доказать кубируемость некоторых классов тел.

Теорема. Прямой цилиндр, основанием которого является квадрируемая фигура Q, является кубируемым телом и его объем равен

$$V = Sh, \tag{2.45}$$

где S – площадь фигуры Q; h – высота цилиндра.

Доказательство. Так как фигура Q квадрируема, то найдутся такие вписанный в фигуру и описанный возле фигуры многоугольники, что разность между их площадями будет сколь угодно малой:

$$S_d - S_i < \frac{\varepsilon}{h}.$$

Объемы вписанной в цилиндр и описанной возле цилиндра призм высотой h будут равны: $V_d = S_d h$, $V_i = S_i h$. А их разность $V_d - V_i = h(S_d - S_i) < \varepsilon$.

Следовательно, согласно предыдущей теореме цилиндр является кубируемым телом.

А так как $V_i \le Sh \le V_d$, то объем цилиндра равен $V = Sh$.

Следствие. Кубируемым является также ступенчатое тело, составленное из прямых цилиндров, лежащих друг на друге.

Замечание. Если разность между объемами двух ступенчатых тел, одно из которых вписано в тело T, а другое описано возле этого тела, будет сколь угодно малой: $V_d - V_i < \varepsilon$, то тело T кубируемо.

Пусть теперь требуется найти объем тела, ограниченного некоторой поверхностью и плоскостями $x = a$ и $x = b$. Пусть сечение тела любой плоскостью $x = X$ представляет собой квадрируемую фигуру, площадь которой является некоторой непрерывной функцией $S(x)$.

Разобьем сегмент $[a,b]$ на n частичных сегментов $[x_{i-1}, x_i]$. Пусть M_i и m_i – точная верхняя и нижняя грани функции $S(x)$ на сегменте. Впишем в наше тело ступенчатое тело, состоящее из цилиндров с площадью оснований m_i и высотами $h_i = \Delta x_i$, и опишем возле тела ступенчатое тело, составленное из цилиндров с площадью оснований M_i и высотами $h_i = \Delta x_i$. Объемы этих тел равны:

$$V_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i; \qquad V_d = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i. \tag{2.46}$$

Очевидно, выражения (2.46) представляют собой нижнюю и верхнюю интегральные суммы для функции $S(x)$. Так как эта функция интегрируема, то разность указанных сумм для данного разбиения сегмента $[a,b]$ будет меньше любого положительного числа ε. Следовательно, наше тело кубируемо.

Так как предел указанных сумм равен $\int_a^b S(x)dx$, то и объем тела равен

$$V = \int_a^b S(x)dx. \tag{2.47}$$

Пример 1. Найти объем тела, ограниченного поверхностью: $xa = y^2 + z^2$ и плоскостью $x = a$ $(a > 0)$ (рис. 2.7).

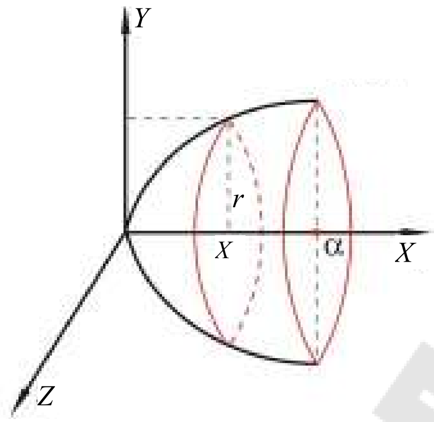

Рис. 2.7

Сечением эллиптического параболоида, перпендикулярным оси OX точке x, является круг радиуса $r = \sqrt{ax}$. Следовательно, площадь сечения равна

$$S(x) = \pi ax.$$

По формуле (2.47) находим объем тела:

$$V = \int_0^a \pi ax dx = \left.\frac{\pi ax^2}{2}\right|_0^a = \frac{\pi a^3}{2}.$$

Если тело T получено вращением непрерывной линии $y = f(x)$, $a \le x \le b$ вокруг оси OX и линия не пересекает ось OX на данном участке, то сечением данного тела плоскостью, перпендикулярной оси OX, является круг радиуса $r = f(x)$ (рис. 2.8).

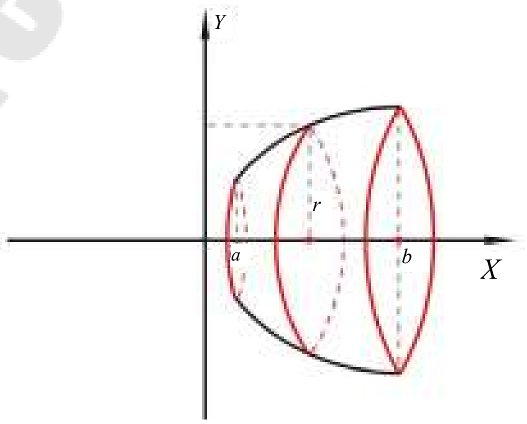

Рис. 2.8

Следовательно, в этом случае $S(x) = \pi y^2$ и согласно (2.47) объем тела вращения будет равен

$$V = \int_a^b y^2 dx. \tag{2.48}$$

Если же тело получено вращением линии вокруг оси OY (рис. 2.9), то формула для объема тела вращения имеет вид:

$$V = \int_c^d x^2 dy. \tag{2.49}$$

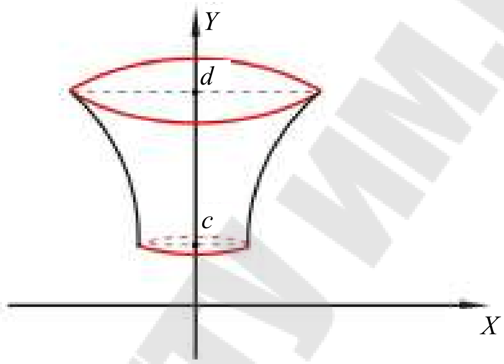

Рис. 2.9

Пример 2. Найти объем тела, образованного вращением параболы $y^2 = 2px, \quad 0 \le x \le a$ вокруг оси OX (рис. 2.10).

По формуле (2.48) находим

$$V = \pi \int_0^a 2pxdx = \pi p x^2 \Big|_0^a = \pi p a^2.$$

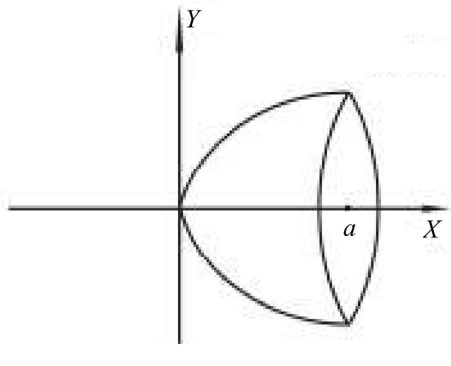

Рис. 2.10

В заключение параграфа приведем нестрогий вывод формулы площади поверхности, образованной вращением дуги AB плоской кривой L вокруг оси OX (рис. 8). Пусть кривая L задана уравнением $y = f(x), x \in [a,b]$ и функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a,b]$. Дифференциал площади этой поверхности равен площади боковой поверхности усеченного круглого конуса с образующей dl и радиусами оснований y и $y + dy$:

$$ds = \pi(2y + dy)dl \approx 2\pi y dl. \tag{2.50}$$

Согласно (2.50), с учетом того, что $dl = \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\,dx,$ площадь поверхности вращения будет равна

$$S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\,dx. \tag{2.51}$$

Пример 3. Найти площадь поверхности, образованной вращением параболы $y^2 = 2px, \quad 0 \le x \le a$ вокруг оси OX (рис. 2.9).

Находим производную: $y'(x) = \sqrt{\dfrac{p}{2x}}, \quad 1 + \left[y'(x)\right]^2 = \dfrac{p + 2x}{2x}$. Подставляя в формулу (2.51), получим

$$S = 2\pi\int_0^a \sqrt{2px}\sqrt{\frac{p + 2x}{2x}}dx = 2\pi\sqrt{p}\int_0^a \sqrt{p + 2x}\,dx = \frac{2\pi\sqrt{p}}{3}\sqrt{(p + 2x)^3}\Big|_0^a =$$

$$\frac{2\pi\sqrt{p}}{3}\left[\sqrt{(p + 2a)^3} - \sqrt{p^3}\right].$$

При вращении дуги AB кривой L, заданной уравнением $x = g(y),\ y \in [c,d]$, вокруг оси OY (рис. 2.9) площадь поверхности вращения находится по формуле

$$S = 2\pi\int_c^d g(y)\sqrt{1 + \left[g'(y)\right]^2}\,dy. \tag{2.52}$$

Если поверхность получается вращением вокруг оси OX кривой, определяемой уравнениями: $x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [\alpha, \beta]$, то, осуществляя в формуле (2.51) замену переменных под знаком определенного интеграла, получим для площади поверхности выражение

$$S = 2\pi\int_{\alpha}^{\beta} y(t)\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt. \qquad (2.53)$$

Пример 4. Найти площадь поверхности, образованной вращением арки циклоиды вокруг оси OX. Для циклоиды $(x')^2 + (y')^2 = 4a^2 \sin^2 t$. Подставляя это выражение в формулу (2.53), получим

$$S = 2\pi\int_0^{2\pi} 2a\sin\frac{t}{2}\cdot a(1-\cos t)dt = 4\pi a^2\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt - 4\pi a^2\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\cos t dt =$$

$$-8\pi a^2\cos\frac{t}{2}\Bigg|_0^{2\pi} - 4\pi a^2\left[\cos\frac{t}{2} - \frac{1}{3}\cos\frac{3t}{2}\right]\Bigg|_0^{2\pi} = 16\pi a^2 + \frac{16\pi a^2}{3} = \frac{64\pi a^2}{3}.$$

§ 2.8. Физические приложения определенного интеграла

2.8.1. Масса, центр масс и момент инерции неоднородного стержня

Пусть $\rho(x)$ – линейная плотность неоднородного стержня, расположенного на сегменте $[a,b]$ оси OX. Разобьем сегмент на n частей и возьмем на каждом сегменте $[x_{i-1}, x_i]$ по точке ξ_i. Выражение $\rho(\xi_i)\Delta x_i \approx m_i$ – массе участка стержня Δx_i. А масса всего стержня будет приближенно равна

$$M \approx \sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i)\Delta x_i. \qquad (2.54)$$

Определим массу стержня как предел сумм (2.54) при $\Delta = \max \Delta x_i \to 0.$ Имеем

$$M = \int_a^b \rho(x)dx. \qquad (2.55)$$

Координата центра масс стержня находится по формуле

$$\overline{X} = \frac{\int_a^b \rho(x)x dx}{\int_a^b \rho(x)dx}. \qquad (2.56)$$

Пример. Найти координату центра масс неоднородного стержня длиной l, на котором сосредоточены массы с линейной плотностью $\rho(x) = kx.$ Найти момент инерции стержня относительно оси, проходящей перпендикулярно стержню через начало координат.

Находим массу стержня:

$$M = \int_o^l kxdx = \frac{kx^2}{2}\bigg|_o^l = \frac{kl^2}{2.} \text{ и } \int_0^l kx^2 dx = \frac{kx^3}{3}\bigg|_0^l = \frac{kl^3}{3}.$$

По формуле (2.56) находим координату центра масс:

$$\overline{X} = \frac{kl^3}{3} : \frac{kl^2}{2} = \frac{2l}{3}.$$

Момент инерции неоднородного стержня относительно оси, проходящей перпендикулярно стержню на расстоянии, равном c от его начала (точка $x = 0$), равен

$$J = \int_0^l \rho(x)(x-c)^2 dx. \tag{2.57}$$

Согласно выражению (2.57) имеем ($c = 0$):

$$J = k\int_0^l x^3 dx = \frac{kx^4}{4} = \frac{kl^4}{4} = \frac{3Ml^2}{4}.$$

2.8.2. Работа переменной силы

Пусть под действием переменной силы $F = F(x)$, направленной вдоль оси OX, движется материальная точка. Найдем работу, которую совершает эта сила при перемещении тела вдоль оси OX из точки a в точку b. Для этого разобьем весь путь на n частей. Выберем на каждом участке $[x_{i-1}, x_i]$ по точке ξ_i, тогда работа силы на этом участке будет приближенно равна $F(\xi_i)\Delta x_i$.

А работа силы на всем участке пути приближенно равна

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta x_i.$$

Определим работу переменной силы $F(x)$ на участке пути $[a,b]$ как

$$A = \int_a^b F(x)dx. \qquad (2.58)$$

Пример. Определить работу, которую совершает гравитационное поле земли при подъеме ракеты массой m с поверхности земли на высоту H.

Сила, действующая со стороны земли на тело массы m, находится по известной формуле закона всемирного тяготения

$$F(x) = -\frac{\gamma m M}{x^2},$$

где γ – константа; M – масса Земли; x – расстояние до центра Земли.

По формуле (2.58) находим работу:

$$A = -\gamma m M \int_R^{R+H} \frac{dx}{x^2} = \gamma m M \cdot \frac{1}{x}\Bigg|_R^{R+H} = \gamma m M\left[\frac{1}{R+H} - \frac{1}{R}\right] = -\frac{\gamma m M H}{R(R+H)}.$$

Так как $\dfrac{\gamma M}{R^2} = g$ – ускорение свободного падении, то работу можно представить в виде:

$$A = -\frac{mgRH}{R+H}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Фихтенгольц, Г. М. Основы математического анализа : в 2 т. / Г. М. Фихтенгольц. – Москва : Наука, 1968. – Т. 1. – 440 с.

2. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление : в 2 т. / Н. С. Пискунов. – Москва : Наука, 1978. – Т. 1. – 450 с.

3. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. / Г. М. Фихтенгольц. – Москва : Наука, 1966. – Т. 2. – 710 с.

4. Ляшко, И. И. Справочное пособие по математическому анализу : в 2 ч. Ч. 2 / И. И. Ляшко, А. К. Боярчук, Я. Г. Гай. – Киев : Вища шк., 1978. – 696 с.

5. Ильин, В. А. Основы математического анализа : в 2 т. / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – Москва : Наука, 1982. – Т. 1. – 616 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное электронное издание комбинированного распространения

Учебное издание

Вальковская Валентина Ивановна
Лашкевич Василий Иванович

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Пособие по дисциплине «Математика» для студентов инженерно-технических специальностей заочной формы обучения

Электронный аналог печатного издания

Редактор *М. В. Аникеенко*
Компьютерная верстка *В. В. Вороник*

Подписано в печать 18.10.10.
Формат 60x84/$_{16.}$ Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Ризография. Усл. печ. л. 5,35. Уч.-изд. л. 5,01.
Изд. № 274.
E-mail: ic@gstu.by
http://www.gstu.by

Издатель и полиграфическое исполнение:
Издательский центр учреждения образования
«Гомельский государственный технический университет
имени П. О. Сухого».
ЛИ № 02330/0549424 от 08.04.2009 г.
246746, г. Гомель, пр. Октября, 48.