Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Высшая математика»

Л. Д. Корсун, А. В. Емелин, В. В. Кондратюк

СПЕЦИАЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И ФУНКЦИИ

ПРАКТИКУМ
по одноименному курсу
для подготовки к тестированию
для студентов специальности
1-36 04 02 «Промышленная электроника»
заочной формы обучения

Гомель 2015

УДК 517(075.8)
ББК 22.16я73
К69

Рекомендовано научно-методическим советом
факультета автоматизированных и информационных систем
ГГТУ им. П. О. Сухого
(*протокол № 12 от 30.06.2014 г.*)

Рецензент: зав. каф. «Промышленная электроника» ГГТУ им. П. О. Сухого
канд. техн. наук, доц. *Ю. В. Крышнев*

Корсун, Л. Д.
К69 Специальные математические методы и функции : практикум по одноим. курсу для подготовки к тестированию для студентов специальности 1-36 04 02 «Промышленная электроника» заоч. формы обучения / Л. Д. Корсун, А. В. Емелин, В. В. Кондратюк. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2015. – 51 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: http://library.gstu.by. – Загл. с титул. экрана.

Рассмотрены основные положения дисциплины «Специальные математические методы и функции» и методы решения задач с их использованием. Содержатся краткие теоретические сведения по каждой теме с большим количеством примеров.

Для студентов специальности 1-36 04 02 «Промышленная электроника» заочной формы обучения.

УДК 517(075.8)
ББК 22.16я73

1. Метрические пространства

Все мы из жизненного опыта знаем, что в слова «расстояние между пунктами A и B» вкладывается разный смысл в зависимости от ситуации. Лётчик это расстояние скорее всего будет измерять вдоль прямой, автомобилист будет считать расстоянием длину пути из A в В вдоль шоссейных дорог (не обязательно прямолинейных), а турист проложит свой маршрут в соответствии с ландшафтом.

В математике часто рассматриваются множества, между элементами которых определено расстояние (метрика). Существует много разных способов определить расстояние в разных множествах. Например, можно измерять расстояние не только между точками на плоскости, но и между кривыми, множествами, функциями.

Определение: Множество M называется ***метрическим пространством***, если каждой паре его элементов x и y поставлено в соответствие неотрицательное число $\rho(x, y)$.

Число $\rho(x, y)$ называется ***метрикой*** или ***расстоянием*** между элементами x и y и удовлетворяет аксиомам:

1) *Аксиома тождества.* Расстояние между элементами x и y равно нулю тогда и только тогда, когда элементы x и y совпадают:

$$\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y .$$

2) *Аксиома симметрии.* Нам должно быть все равно, измерять ли расстояние от элемента x к элементу y или, наоборот, от y к x. Расстояние от этого не изменится:

$$\rho(x, y) = \rho(y, x) \quad \forall x, y \in M .$$

3) *Аксиома треугольника.* Для произвольных элементов $x,$ y и z выполняется так называемое *неравенство треугольника* а именно

$$\rho(x, y) \le \rho(x, z) + \rho(z, y) \quad \forall x, y, z \in M$$

(для обычного расстояния между точками это хорошо известно из геометрии).

Для проверки аксиом метрики полезны следующие неравенства:

1) $|x + y| \le |x| + |y|$ – неравенство треугольника для модуля;

2) $|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \le |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$;

3) $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \le \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2$ – неравенство Коши-Буняковского;

4) $\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \le \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{1/q}$, где $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ – неравенство Гёльдера;

5) $\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{1/p}$, где $p > 1$ – неравенство Минковского;

6) $\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}$;

7) $\left(\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx\right) \le \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx$ – неравенство Шварца.

Таблица основных метрических пространств

Обозначение пространства	Элементы пространства	Формулы для метрик
$\boldsymbol{R}_2^n$	$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$	$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$
$\boldsymbol{R}_1^n$	$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$	$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \lvert x_k - y_k \rvert$
$\boldsymbol{R}_\infty^n$	$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$	$\rho(x, y) = \max_k \lvert x_k - y_k \rvert$
$\boldsymbol{R}_2^\infty$	$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,)$, $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty$	$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (x_k - y_k)^2}$
$\boldsymbol{R}_1^\infty$	$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,)$, $\sum_{k=1}^{\infty} \lvert x_k \rvert < \infty$	$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \lvert x_k - y_k \rvert$
$\boldsymbol{R}_\infty^\infty$	$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,)$, $\lvert x_k \rvert \le M$ для $\forall\, k$	$\rho(x, y) = \sup_k \lvert x_k \rvert$

$\boldsymbol{C}_2[a,b]$	Функция $f(x)$, непрерывная на $[a,b]$	$\rho(f,g)=\sqrt{\int\limits_a^b (f(x)-g(x))^2\,dx}$
$\boldsymbol{C}_1[a,b]$	Функция $f(x)$, непрерывная на $[a,b]$	$\rho(f,g)=\int\limits_a^b \lvert f(x)-g(x)\rvert dx$
$\boldsymbol{C}[a,b]$	Функция $f(x)$, непрерывная на $[a,b]$	$\rho(f,g)=\max\limits_{[a,b]}\lvert f(x)-g(x)\rvert$
$\boldsymbol{D}^n[a,b]$	Функция $f(x)$, непрерывная на $[a,b]$ вместе со своими производными до n-го порядка	$\rho(f,g)=\max\limits_{[a,b]}\left\lvert f^{(k)}(x)-g^{(k)}(x)\right\rvert$, $k=\overline{1,n}$

Решение типовых задач

<u>Пример 1.</u> Является ли метрикой на прямой ($M=\mathbb{R}$) следующая функция: $\rho(x,y)=|2^x-2^y|$?

Решение.

Так как $\rho(x,y)$ определяется через модуль, следовательно, $\rho(x,y)\ge 0$.

Проверим аксиомы метрики.

1) Покажем, что из того, что $\rho(x,y)=0$ следует, что $x=y$: пусть $\rho(x,y)=0$, тогда

$$|2^x-2^y|=0 \quad\Leftrightarrow\quad 2^x-2^y=0 \quad\Leftrightarrow\quad 2^x=2^y \quad\Leftrightarrow\quad x=y.$$

И обратно, покажем, что если $x=y$, то $\rho(x,y)=0$:

пусть $x=y$, тогда $\rho(x,y)=\rho(x,x)=|2^x-2^x|=0$.

Аксиома тождества выполняется.

2) $\rho(x,y)=|2^x-2^y|=|2^y-2^x| \;\Rightarrow\; \rho(x,y)=\rho(y,x)$.

Аксиома симметрии выполняется.

3) Проверим выполнение аксиомы треугольника. Пусть z – любое число. Тогда $\rho(x,y)=|2^x-2^y|=|2^x-2^z+2^z-2^y|\le|2^x-2^z|$

$$+|2^z-2^y|=\rho(x,z)+\rho(z,y).$$

Аксиома выполняется.

Ответ: $\rho(x,y)=|2^x-2^y|$ – метрика. ▲

Пример 2. Пусть $M = \mathbb{R}$ и $\rho(x, y) = |x^4 - y^4|$. Является ли $\rho(x, y)$ метрикой?

Решение.

Проверим выполнение аксиомы 1.

Пусть $\rho(x, y) = 0$, т.е. $|x^4 - y^4| = 0 \Leftrightarrow x^4 - y^4 = 0 \Leftrightarrow x^4 = y^4$. Но из этого равенства не следует, что $x = y$. Действительно, пусть $x = 1$, $y = -1$. Тогда $x^4 = 1^4 = 1$, $y^4 = (-1)^4 = 1 \Rightarrow x^4 = y^4$, но $x \neq y$. Следовательно, аксиома 1 не выполняется и $\rho(x, y) = |x^4 - y^4|$ не является метрикой.

Ответ: $\rho(x, y) = |x^4 - y^4|$ не является метрикой. ▲

Пример 3. Пусть $M = \mathbb{R}$ и $\rho(x, y) = |\sin(x - y)|$. Является ли $\rho(x, y)$ метрикой?

Решение.

Проверим выполнение аксиомы 1. Пусть

$\rho(x, y) = 0$, т.е. $|\sin(x - y)| = 0 \quad \Rightarrow \quad x - y = \pi n,\ n \in Z$.

Но из этого равенства не следует, что $x = y$ ($x = y + \pi n,\ n \in Z$). Следовательно, аксиома 1 не выполняется и $\rho(x, y) = |\sin(x - y)|$ не является метрикой.

Ответ: $\rho(x, y) = |\sin(x - y)|$ не является метрикой. ▲

Пример 4. Пусть $M = \mathbb{R}$ и $\rho(x, y) = (4x^2 + y^2)|x^3 - y^3|$. Является ли $\rho(x, y)$ метрикой?

Решение.

1) Пусть $\rho(x, y) = 0$, т.е. $(4x^2 + y^2)|x^3 - y^3| = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x^2 + y^2 = 0 \\ x^3 - y^3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, y = 0 \\ x = y \end{array}\right. \Leftrightarrow x = y.$$

И обратно, покажем, что если $x = y$, то $\rho(x, y) = 0$:

пусть $x = y$, следовательно, $\rho(x, y) = (4x^2 + x^2)|x^3 - x^3| = 0$.

Аксиома выполняется.

2) $\rho(x,y) = (4x^2 + y^2)\,|\,x^3 - y^3\,|$, $\rho(y,x) = (4y^2 + x^2)\,|\,y^3 - x^3\,|$, при этом

$$(4x^2 + y^2)\,|\,x^3 - y^3\,| \neq (4y^2 + x^2)\,|\,y^3 - x^3\,| \text{ для } \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Аксиома симметрии не выполняется. Следовательно, функция не является метрикой.

Ответ: $\rho(x,y) = (4x^2 + y^2)\,|\,x^3 - y^3\,|$ не является метрикой. ▲

Пример 5. Найти расстояние между функциями $f(x) = x^2$ и $g(x) = 4x - 3$ в метриках пространств:

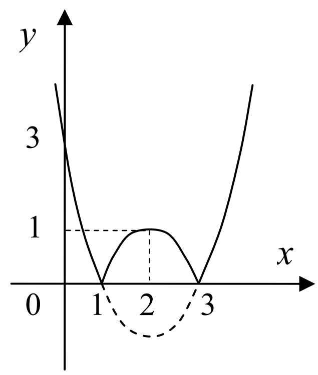
а) $\boldsymbol{C}[0,2]$; б) $\boldsymbol{C}_1[0,2]$; в) $\boldsymbol{D}^1[0,2]$.

Решение.

а) В пространстве $\boldsymbol{C}[0,2]$ метрика задается как

$$\rho(f,g) = \max_{[0,2]} |f(x) - g(x)| = \max_{[0,2]} |x^2 - 4x + 3|.$$

Построим график функции $y = |x^2 - 4x + 3|$. Для этого сначала построим график параболы $y = x^2 - 4x + 3$. Парабола пересекает ось Ox в точках $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$, а ось Oy в точке $y = 3$, вершина находится в точке с координатами $(2,-1)$, ветви направлены вверх.



$$\rho(f,g) = \max_{[0,2]} |x^2 - 4x + 3| = 3.$$

б) В пространстве $\boldsymbol{C}_1[0,2]$ метрика задается как

$$\rho(f,g) = \int_0^2 |f(x) - g(x)|\,dx = \int_0^2 |x^2 - 4x + 3|\,dx =$$

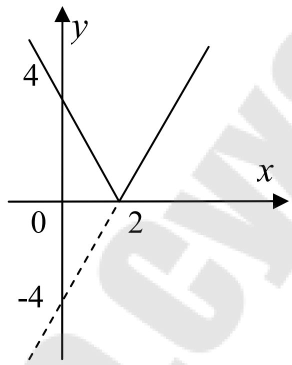
(учитывая, как раскрывается модуль)

$$= \int_0^1 (x^2 - 4x + 3)\,dx - \int_1^2 (x^2 - 4x + 3)\,dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right)\Bigg|_0^1 - \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right)\Bigg|_1^2 = 2\left(\frac{1}{3} - 2 + 3\right) - \left(\frac{8}{3} - 8 + 6\right) = 2.$$

в) В пространстве $\boldsymbol{D}^1[0,2]$ метрика задается как

$$\rho(f,g)=\max_{[0,2]}\left|f'(x)-g'(x)\right|=\max_{[0,2]}\left|2x-4\right|.$$



Построим график функции $y=|2x-4|$.
Тогда

$$\rho(f,g)=\max_{[0,2]}|2x-4|=4.$$

Ответ: а) $\rho(f,g)=3$; б) $\rho(f,g)=2$; в) $\rho(f,g)=4$. ▲

ЗАДАНИЯ

1. Являются ли метриками на прямой ($M=\mathbb{R}$) следующие функции:

1) $\rho(x,y)=\left|x^3-y^3\right|$.
2) $\rho(x,y)=\left|x^2-y^2\right|$.
3) $\rho(x,y)=\left|\cos(x-y)\right|$.
4) $\rho(x,y)=(x^2+2y^2)\left|x-y\right|$.
5) $\rho(x,y)=\left|e^x-e^y\right|$.
6) $\rho(x,y)=\sin^2(x-y)$.
7) $\rho(x,y)=\sqrt{|x-y|}$.
8) $\rho(x,y)=\sqrt[3]{|x^2-y^2|}$.

2. Найти расстояние между функциями $f(x)=x^2$ и $g(x)=3x-2$ в метриках пространств:
а) $\boldsymbol{C}[1,3]$; б) $\boldsymbol{C}_1[1,3]$; в) $\boldsymbol{D}^1[1,3]$.

3. Найти расстояние между функциями $f(x)=1-x^2$ и $g(x)=2x-4$ в метриках пространств:
а) $\boldsymbol{C}[0,4]$; б) $\boldsymbol{C}_1[0,4]$; в) $\boldsymbol{D}^1[0,4]$.

4. Найти расстояние между функциями $f(x)=x^2+2$ и $g(x)=2-3x$ в метриках пространств:
а) $\boldsymbol{C}[-1,2]$; б) $\boldsymbol{C}_1[-1,2]$; в) $\boldsymbol{D}^1[-1,2]$.

2. Линейное пространство. Базис линейного пространства

Линейным пространством V над полем действительных или комплексных чисел $\lambda \in \boldsymbol{R}(\boldsymbol{C})$ называется непустое множество, любой паре элементов которого f и q при помощи операций сложения и умножения на числе λ ставятся в соответствие единственные элементы $f+q \in V$ и $\lambda f \in V$ со свойствами:

V1: $f+g=g+f$ (коммутативность)
V2: $f+(g+h)=(f+g)+h$ (ассоциативность)
V3: $f+0=f$ (существование элемента 0)
V4: $f+(-f)=0$ (существование элемента $-f$)
V5: $\lambda(\mu f)=(\lambda\mu)f$ (ассоциативность)
V6: $\lambda+(f+g)=\lambda f+\lambda g$ (дистрибутивность)
V7: $(\lambda+\mu)f=\lambda f+\mu f$ (дистрибутивность)
V8: $1\cdot f=f$

Элементы линейного пространства V называются ***векторами***. Часто линейное пространство V называют ***векторным пространством***.

Линейно независимой называется система векторов $\{f_k\}$, $k=\overline{1,n}$, если их линейная комбинация обращается в 0 только при нулевых коэффициентах:

$$\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2+\ldots+\lambda_n f_n=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0.$$

В противном случае система называется ***линейно зависимой***.

Базисом линейного пространства V размерности $\dim V=n$ называется любая совокупность n линейно независимых векторов.

Координатами вектора g в базисе $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ называются координаты λ_k, $k=\overline{1,n}$ разложения вектора g по базису $\{f_k\}$:

$$g=\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2+\ldots+\lambda_n f_n.$$

ЗАДАНИЯ

1. Является ли линейным пространство: а) пустое множество $\varnothing$; б) множество, состоящее из одного нулевого элемента.

2. Существует ли линейное пространство, состоящее только из двух элементов?

3. Являются ли линейными пространствами над полем $\boldsymbol{R}$ множества: а) рациональных чисел; б) иррациональных чисел?

4. Является ли линейным пространством множество квадратных матриц порядка n?

5. Установить, являются ли линейными подпространствами заданные множества векторов в n мерном векторном пространстве V, и если являются, то найти их размерность:

а) множество векторов, все координаты которых равны между собой;

б) множество векторов, первая координата которых равна 0;

в) множество векторов, сумма координат которых равна 0;

г) множество векторов плоскости, параллельных между собой.

6. Найти размерность и базис линейной оболочки заданной системы столбцов:

а) $\bar{c}_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \end{Vmatrix}$, $\bar{c}_2 = \begin{Vmatrix} -1 \\ 6 \end{Vmatrix}$, $\bar{c}_3 = \begin{Vmatrix} -1 \\ 1 \end{Vmatrix}$;

б) $\bar{c}_1 = \begin{Vmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{Vmatrix}$, $\bar{c}_2 = \begin{Vmatrix} -3 \\ 6 \\ -15 \end{Vmatrix}$, $\bar{c}_3 = \begin{Vmatrix} 0 \\ -4 \\ 15 \end{Vmatrix}$.

7. Найти размерность и базис линейной оболочки системы многочленов: $P_1(t) = (1+t)^3$; $P_2(t) = t^3$; $P_3(t) = 1$; $P_4(t) = t + t^2$.

8. Показать, что многочлены $\left\{1, t-2, (t-2)^2, \ldots, (t-2)^5\right\}$ образуют базис в пространстве многочленов степени не выше 5 и найти координаты заданных многочленов в этом базисе:

а) $g(t) = 4 - t + 2t^2 - t^5$;

б) $g(t) = 3 + 2t^2 - 3t^3 + 4t^4$;

в) $g(t) = 7t + 2t^2 - t^4 + 2t^5$;

г) $g(t) = 4 - 2t^2 + 3t^4$;

д) $g(t) = t + 5t^3 - 2t^5$.

3. Нормированные линейные пространства. Евклидовы пространства. Ортогональные системы векторов

Нормой элемента f линейного пространства V называется действительное число $\| f \|$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $\| f \| = 0 \Leftrightarrow f = 0$;
2) $\| \lambda f \| = |\lambda| \cdot \| f \|$ для $\forall \lambda \in \boldsymbol{R}(\boldsymbol{C})$;
3) $\| f + g \| \le \| f \| + \| g \|$ для $\forall f, g \in V$.

<u>Нормированным</u> линейным пространством называется линейное пространство с введенной в ней нормой $\| \bullet \|$.

Всякое нормированное пространство является метрическим. Метрика вводится по формуле

$$\rho(f, g) = \| f - g \|.$$

Таблица основных нормированных пространств

Обозначение пространства	Элементы пространств	Формулы для норм
$\boldsymbol{R}_2^n$	$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$	$\|x\| = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2}$
$\boldsymbol{R}_1^n$	$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$	$\|x\| = \sum\limits_{k=1}^{n} \lvert x_k \rvert$
$\boldsymbol{R}_\infty^n$	$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$	$\|x\| = \max\limits_k \lvert x_k \rvert$
$\boldsymbol{R}_2^\infty$	$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,)$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty$	$\|x\| = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^2}$
$\boldsymbol{R}_1^\infty$	$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,)$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lvert x_k \rvert < \infty$	$\|x\| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lvert x_k \rvert$
$\boldsymbol{R}_\infty^\infty$	$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,)$, $\lvert x_k \rvert \le M$	$\|x\| = \sup\limits_k \lvert x_k \rvert$

$\boldsymbol{C}_2[a,b]$	непрерывная на $[a,b]$ функции	$\|x\| = \sqrt{\int\limits_a^b f^2(x)dx}$
$\boldsymbol{C}_1[a,b]$	непрерывная на $[a,b]$ функции	$\|x\| = \int\limits_a^b \|f(x)\|dx$
$\boldsymbol{C}[a,b]$	непрерывная на $[a,b]$ функции	$\|x\| = \max\limits_{[a,b]} \|f(x)\|,\ x \in [a,b]$
$\boldsymbol{D}^n[a,b]$	непрерывная вместе со своими производными до n-го порядка функция	$\|x\| = \max\limits_{[a,b]} \|f^{(k)}(x)\|,$ $k = \overline{1,n}$

Пусть V – действительное линейное пространство. ***Скалярным произведением*** называется функционал, удовлетворяющий следующим свойствам:

1. $\forall x \in V \quad (x,x) \geq 0$, причем $(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. $(x+y,z) = (x,z)+(y,z)$;
3. $(x,y) = (y,x)$;
4. $(\lambda x, y) = \lambda(x,y)$, $\qquad \forall x,y,z \in V$ и $\lambda \in \mathbb{R}$.

Линейное пространство V, наделенное скалярным произведением называется ***евклидовым пространством***.

Всякое евклидово пространство является нормированным с ***нормой***: $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$. Например:

1) Для точек пространства $\mathbb{R}^n$ $\quad x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ скалярное произведение можно определить как $(x,y) = x_1 \cdot y_1 + \ + x_2 \cdot y_2 + ... + x_n \cdot y_n$.

2) Для функций, непрерывных на $[a,b]$, скалярное произведение вводится по формуле

$$(f,g) = \int\limits_a^b f(x) \cdot g(x)dx.$$

Два элемента x и y евклидова пространства E называются ***ортогональными***, если их скалярное произведение равно 0.

Система ненулевых векторов $s = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \in E$ называется ***ортонормированной***, если

1) все векторы системы взаимно ортогональны друг другу, т.е. $(x_i, x_j) = 0$, $i \neq j$.

2) нормы их равны 1, т.е. $\|x_k\| = 1$, $k = 1, ..., n$.

Решение типовых задач

<u>Пример 1.</u> В пространстве многочленов степени не выше 2 со скалярным произведением $(p, q) = \int\limits_{-1}^{1} p(t)q(t)dt$ проверить, образует ли ортогональный базис система многочленов $\left\{1;\, 2t;\, t^2 - \frac{1}{3}\right\}$. Найти норму $g_2 = 2t$.

Решение.

Пусть $g_1 = 1,\, g_2 = 2t,\, g_3 = t^2 - \frac{1}{3}$.

$$(g_1, g_2) = \int\limits_{-1}^{1} 1 \cdot 2t\, dt = t^2 \Big|_{-1}^{1} = 1 - (-1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad g_1 \perp g_2.$$

$$(g_1, g_3) = \int\limits_{-1}^{1} 1 \cdot \left(t^2 - \frac{1}{3}\right) dt = \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = 0 \quad \Rightarrow \quad g_1 \perp g_3.$$

$$(g_2, g_3) = \int\limits_{-1}^{1} 2t \cdot \left(t^2 - \frac{1}{3}\right) dt = \left(\frac{2t^4}{4} - \frac{t^2}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = 0 \quad \Rightarrow \quad g_2 \perp g_3.$$

$$(g_2, g_2) = \int\limits_{-1}^{1} (2t)^2\, dt = \left(\frac{4t^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{8}{3} \quad \Rightarrow \quad \|g_2\| = \sqrt{(g_2, g_2)} = \sqrt{\frac{8}{3}}.$$

Ответ: система многочленов является ортогональной и $\|g_2\| = \sqrt{\frac{8}{3}}$. ▲

Пример 2. Исходя из системы векторов арифметического пространства, с заданным скалярным произведением, с помощью процесса ортогонализации построить ортонормированный базис

$$a=(1,0,1),\quad b=(2,1,0),\quad c=(0,1,1),$$
$$(x,y)=2x_1y_1+x_2y_2-x_1y_2-y_1x_2+x_3y_3.$$

Решение.

1) Проверим, является ли система векторов $\{a,b,c\}$ линейно-независимой. Для этого рассмотрим равенство $\alpha_1 a+\alpha_2 b+\alpha_3 c=0$.

Так как $\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=3\neq 0$, все $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$, следовательно, система векторов линейно независима и образует базис.

2) Составим ортогональную систему векторов $\{f_1,f_2,f_3\}$ следующим образом.

Пусть $f_1=a$, $f_2=b+\lambda\cdot f_1$, где $\lambda=-\dfrac{(b,f_1)}{(f_1,f_1)}$.

$$(b,f_1)=2\cdot 2\cdot 1+1\cdot 0-2\cdot 0-1\cdot 1+0\cdot 1=3,$$
$$(f_1,f_1)=2\cdot 1\cdot 1+0\cdot 0+1\cdot 1-2\cdot 1\cdot 0=3,$$
$$\lambda=-\frac{3}{3}=-1.$$

Тогда $f_2=(2,1,0)+(-1)\cdot(1,0,1)=(2,1,0)+(-1,0,-1)=(1,1,-1)$.

Проверка ортогональности векторов f_1 и f_2:

$$(f_1,f_2)=2\cdot 1\cdot 1+0\cdot 1-1-1=0\Rightarrow f_1\perp f_2,$$
$$f_3=c+\lambda_1\cdot f_1+\lambda_2\cdot f_2,\quad \text{где}\quad \lambda_1=-\frac{(c,f_1)}{(f_1,f_1)},\ \lambda_2=-\frac{(c,f_2)}{(f_2,f_2)},$$
$$(c,f_1)=2\cdot 0\cdot 1+1\cdot 0+1\cdot 1-0\cdot 0-1\cdot 1=0,$$
$$\lambda_1=-\frac{0}{3}=0,$$
$$(c,f_2)=2\cdot 0\cdot 1+1\cdot 1+(-1)\cdot 1-0\cdot 1-1\cdot 1=-1,$$
$$(f_2,f_2)=2\cdot 1\cdot 1+1\cdot 1+(-1)\cdot(-1)-1\cdot 1-1\cdot 1=2,$$
$$\lambda_2=-\frac{-1}{2}=\frac{1}{2},$$
$$f_3=(0,1,1)+0\cdot(1,0,1)+\frac{1}{2}(1,1,-1)=(0,1,1)+\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right).$$

Проверка на ортогональность:

$$(f_2, f_3) = 2\cdot\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} - 0 = 0 \Rightarrow f_2 \perp f_3,$$

$$(f_1, f_3) = 2\cdot 1\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{3}{2} - \frac{1}{2} - \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow f_1 \perp f_3.$$

Итак, получили систему ортогональных векторов. Пронормируем полученные векторы:

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{(f_1, f_1)}}\cdot f_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot(1,0,1) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{(f_2, f_2)}}\cdot f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(1,1,-1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$e_3 = \frac{1}{\sqrt{(f_3, f_3)}}\cdot f_3 = \frac{1}{\sqrt{6/4}}\cdot\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{3}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

Искомая ортонормированная система векторов:

$$e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right);\ e_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right);\ e_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{3}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right).\ \blacktriangle$$

Замечание: В случае, когда исходная система векторов задана в ортонормированном базисе, скалярное произведение вычисляется следующим образом:

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

Пример 3. В пространстве многочленов степени не выше 2 со скалярным произведением $(p, q) = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt$ построить ортогональный базис, применив процесс ортогонализации к системе многочленов $\{1; 2t-3; t^2+1\}$.

Решение.

Пусть $g_1 = 1$, $g_2 = 2t - 3$, $g_3 = t^2 + 1$. Положим

$$f_1 = 1;\ f_2 = g_2 + \lambda\cdot f_1, \text{ где } \lambda = -\frac{(g_2, f_1)}{(f_1, f_1)}.$$

$$(f_1, f_1) = \int_{-1}^{1} 1\cdot 1\cdot dt = t\Big|_{-1}^{1} = 1 - (-1) = 2.$$

$$(g_2, f_1) = \int_{-1}^{1} (2t-3)\cdot 1\,dt = (t^2 - 3t)\Big|_{-1}^{1} = 1^2 - 3\cdot 1 - ((-1)^2 - 3\cdot(-1)) = -6.$$

$$\lambda = -\frac{-6}{2} = 3; \quad f_2 = 2t - 3 + 3 = 2t.$$

$$(f_1, f_2) = \int_{-1}^{1} 1\cdot 2t\,dt = 2\cdot\frac{t^2}{2}\Big|_{-1}^{1} = 1 - (-1)^2 = 0 \Rightarrow f_1 \perp f_2.$$

$$f_3 = g_3 + \lambda_1\cdot f_1 + \lambda_2\cdot f_2, \quad \text{где } \lambda_1 = -\frac{(g_3, f_1)}{(f_1, f_1)},\ \lambda_2 = -\frac{(g_3, f_2)}{(f_2, f_2)}.$$

$$(g_3, f_1) = \int_{-1}^{1} (t^2+1)\cdot 1dt = \left(\frac{t^3}{3} + t\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{3} + 1 - \left(\frac{(-1)^3}{3} - 1\right) =$$

$$= \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{3} + 1 = \frac{8}{3}.$$

$$(g_3, f_2) = \int_{-1}^{1} (t^2+1)\cdot 2t\,dt = \int_{-1}^{1} (2t^3 + 2t)dt = \left(\frac{2t^4}{4} + \frac{2t^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = 0.$$

$$(f_2, f_2) = \int_{-1}^{1} 2t\cdot 2t\,dt = \frac{4t^3}{3}\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{4}{3}(1^3 - (-1)^3) = \frac{8}{3}.$$

Тогда

$$\lambda_1 = -\frac{\frac{8}{3}}{2} = -\frac{4}{3}; \quad \lambda_2 = -\frac{0}{\frac{8}{3}} = 0$$

$$f_3 = t^2 + 1 - \frac{4}{3}\cdot 1 + 0\cdot 2t = t^2 + 1 - \frac{4}{3} = t^2 - \frac{1}{3}.$$

Проверка на ортогональность:

$$(f_1, f_3) = \int_{-1}^{1} 1\cdot\left(t^2 - \frac{1}{3}\right)dt = \left(\frac{t^3}{3} - \frac{1}{3}t\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{3}(1 + 1 - (1+1)) = 0.$$

$$(f_2, f_3) = \int_{-1}^{1} 2t\cdot\left(t^2 - \frac{1}{3}\right)dt = 2\int_{-1}^{1}\left(t^3 - \frac{t}{3}\right)dt = 2\cdot\left(\frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = 0.$$

Искомая ортогональная система: $f_1 = 1$, $f_2 = 2t$, $f_3 = t^2 - \frac{1}{3}$.

Ответ: $f_1 = 1$, $f_2 = 2t$, $f_3 = t^2 - \frac{1}{3}$. ▲

ЗАДАНИЯ

1. Проверить, образует ли система векторов ортогональный базис, если $(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$. Найти нормы векторов.

a) $a = (1,1,-1)$, $b = (-4,0,5)$, $c = (3,-1,-4)$,
b) $a = (1,1,2)$, $b = (-1,0,2)$, $c = (0,-1,-4)$.

2. В пространстве многочленов степени не выше 2 со скалярным произведением $(p,q) = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt$ проверить, образует ли ортогональный базис система многочленов $\{1; t; 6t^2 - 2\}$. Найти норму $g_3 = 6t^2 - 2$. Найти нормы векторов.

3. Система векторов задана в ортонормированном базисе евклидова пространства своими координатами. При помощи процесса ортогонализации построить ортонормированный базис.

a) $a = (1,1,-1)$, $b = (-4,0,5)$, $c = (-8,2,0)$.
b) $a = (3,-1,-2)$, $b = (4,0,-1)$, $c = (5,1,0)$.
c) $a = (1,0,-1)$, $b = (3,1,0)$, $c = (4,1,2)$.

4. Исходя из системы векторов арифметического пространства, с заданным скалярным произведением, с помощью процесса ортогонализации построить ортонормированный базис.

a) $a = (2,1,1)$, $b = (0,1,-2)$, $c = (-1,1,3)$,
$(x, y) = x_1 \cdot y_1 - 2x_1 y_2 - 2x_2 y_1 + 5x_2 y_2$.
b) $a = (1,3,-1)$, $b = (1,0,2)$, $c = (-1,2,1)$,
$(x, y) = 4 \cdot x_1 \cdot y_1 - 2x_1 y_2 - 2x_2 y_1 + 4x_2 y_2$.

5. В пространстве многочленов степени не выше 2 со скалярным произведением $(p,q) = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt$ построить ортогональный базис, применив процесс ортогонализации к системе многочленов:

a) $\{1, t + 2, 2t^2\}$.

b) $\left\{1, 2t+1, t^2+1\right\}$.

c) $\left\{1, 2t+3, 2t^2-1\right\}$.

d) $\left\{1, 3t-1, t^2+2\right\}$.

4. Линейные операторы

Определение: Пусть V и W два линейных пространства. Тогда всякое отображение A, сопоставляющее каждому элементу $f \in V$ единственный элемент $g = Af \in W$, называется ***оператором***, действующим из V в W.

Оператор A называется линейным, если

1. $A(x+y) = Ax + Ay$ для любых $x, y \in V$
2. $A(\lambda x) = \lambda Ax$ для любых $x \in V$, $\lambda \in R$.

Пусть E – комплексное векторное пространство.

Определение: Комплексное число λ называется ***собственным значением*** оператора A, если существует ненулевой элемент $u \in E$, такой, что

$$Au = \lambda u. \tag{1}$$

Всякий вектор u, удовлетворяющий соотношению (1) называется ***собственным вектором*** оператора A, соответствующим собственному значению λ.

В конечномерных пространствах всякий линейный оператор задается матрицей. При этом уравнение (1) эквивалентно системе линейных уравнений

$$(A - \lambda I)u = 0, \tag{2}$$

где I – единичная матрица.

Для того, чтобы система (2) имела ненулевые решения, она должна быть вырожденной, а значит,

$$\det(A - \lambda I) = 0. \tag{3}$$

Уравнение (3) называется ***характеристическим уравнением*** и имеет n корней.

Каждому собственному вектору соответствует единственное собственное значение, но существует бесконечное множество векторов для заданного собственного значения.

Решение типовых задач

Пример 1. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей A:

$$A=\begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Решение.

Найдем собственные значения линейного оператора. Характеристическое уравнение $\det(A-\lambda I)=0$ имеет вид

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} \text{ или } (\lambda+2)(\lambda^2-12\lambda+32)=0.$$

Корнями этого уравнения являются $\lambda_1=8$, $\lambda_2=4$, $\lambda_3=-2$. Обозначим через $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ координаты собственного вектора u_1 с собственным значением $\lambda_1=8$. Тогда из системы (2)

$$\begin{bmatrix} 6-8 & 0 & 2 \\ 0 & -2-8 & 0 \\ 2 & 0 & 6-8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ или } \begin{cases} -2\alpha_1+2\alpha_3=0, \\ -10\alpha_2=0, \\ 2\alpha_1-2\alpha_3=0. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим $\alpha_1=\alpha_3=c$, $c\in\mathbb{R}$, $\alpha_2=0$. Таким образом, собственный вектор $u_1=(c,0,c)$, $\forall c\in\mathbb{R}$, $c\neq 0$.

Аналогично находим собственные векторы $u_2=(t,0,-t)$, $\forall t\in\mathbb{R}$, $t\neq 0$ и $u_3=(0,l,0)$, $\forall l\in\mathbb{R}$ матрицы А с собственными значениями $\lambda_2=4$ и $\lambda_3=-2$.

Ответ: Множество собственных векторов: $u_1=(c,0,c)$, $u_2=(t,0,-t)$, $u_3=(0,l,0)$, $\forall c,t,l\in\mathbb{R}$. ▲

Пример 2. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей A:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Решение.

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 4 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \quad \text{или} \quad (2-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 8) = 0.$$

Корнями этого уравнения являются $\lambda_{1,2} = 2$ кратности $m = 2$ и $\lambda_3 = 4$.

Найдем собственный вектор $u_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ с собственным значением $\lambda_{1,2} = 2$. Система (2) примет вид:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 4\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0, \\ -\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \alpha_3 = c$, $c \in \mathbb{R}$. Тогда собственный вектор $u_1 = (0, c, c)$, $\forall c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$.

При $\lambda_3 = 4$ система (2) примет вид

$$\begin{cases} -2\alpha_1 = 0 \\ -4\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Откуда находим, что $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = k$, $\alpha_3 = -k$, $k \in \mathbb{R}$ и собственный вектор $u_2 = (0, k, -k)$ $\forall k \in \mathbb{R}$.

Ответ: Множество собственных векторов: $u_1 = (0, c, c)$, $u_2 = (0, k, -k)$, $\forall c, k \in \mathbb{R}$. ▲

ЗАДАНИЯ

1. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей A:

а) $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. б) $A=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

в) $A=\begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$. г) $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

5. Ортогональные полиномы

I. Тригонометрическая система

Рассмотрим гильбертово пространство $L_2[-\pi,\pi]$, т.е. пространство функций с интегрируемым квадратом. Тригонометрическая система функций

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}},\ \ldots\right\}$$

образует полную ортонормированную систему, т.е. ортонормированный базис, в пространстве функций $L_2[-\pi,\pi]$. Соответствующий ряд Фурье имеет вид:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

где

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$$

и сходится по норме пространства $L_2[-\pi,\pi]$ к функции $f(x)$.

II. Системы многочленов

Рассмотрим совокупность одночленов $\{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$, определяющую систему всех многочленов. Эта система линейно независима и полная на отрезке $[-1;1]$. Однако, она не ортонормированная, а значит, не образует ортонормированный базис.

Систему многочленов можно ортонормировать по отношению к скалярному произведению пространства $L_2(a,b)$ с весовой функцией $w(x)$:

$$(f, g) = \int_a^b f(x) g(x) w(x) dx .$$

Тогда условие ортонормированности многочленов $\{\varphi_n\}$ в пространстве $L_2(a,b)$ имеет вид:

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x) w(x) dx = \delta_{nm} .$$

Выбирая соответствующую весовую функцию $w(x)$ и проводя процедуру ортогонализации системы одночленов $\{1, x, x^2, \ldots\}$, мы приходим к следующим системам многочленов:

Многочлены	Весовая функция $w(x)$	Пространство функций $L_2(a,b)$	Многочлены низших степеней
Лагерра $L_n(x)$	e^{-x}	$L_2[0,\infty)$	$L_0(x)=1,\quad L_1(x)=1-x,$ $L_2(x)=1-2x+\frac{1}{2}x^2,$ $L_3(x)=1-3x+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3,$ $L_4(x)=1-4x+3x^3+\frac{1}{24}x^4, \ldots$
Лежандра $P_n(x)$	1	$L_2[-1,1]$	$P_0(x)=1,\quad P_1(x)=x,$ $P_2(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2},$ $P_3(x)=\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x,$ $P_4(x)=\frac{35}{8}x^4-\frac{15}{4}x^2+\frac{3}{8}, \ldots$
Чебышева $T_n(x)$ $\left(T_0^*(x)=\frac{T_0(x)}{\sqrt{\pi}},\ T_n^*(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}T_n(x)\right)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$L_2[-1,1]$	$T_0(x)=1,\quad T_1(x)=x,$ $T_2(x)=2x^2-1,$ $T_3(x)=4x^3-3x,$ $T_4(x)=4x^4-8x^2+1, \ldots$
Эрмита $H_n(x)$	e^{-x^2}	$L_2(-\infty,+\infty)$	$H_0(x)=1,\quad H_1(x)=2x,$ $H_2(x)=4x^2-2,$ $H_3(x)=8x^3-12x,$ $H_4(x)=16x^4-48x^2+12, \ldots$

Многочлены	Основные формулы
Лежандра $P_n(x)$	Формула Родрига: $P_n(x)=\frac{1}{n!2^n}\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right]$; $\frac{1}{\sqrt{1+\rho^2-2\rho x}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\rho^n P_n(x)$ - производящая функция.
Чебышева $T_n(x)$	$T_n(x)=\cos(n\arccos x)$; $T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x)$; $\left\{T_0^*(x),T_n^*(x)\right\}=\left\{\frac{T_0(x)}{\sqrt{\pi}};\sqrt{\frac{2}{\pi}}T_n(x),\ (n\geq 1)\right\}$ - ортонормированная система многочленов Чебышева первого рода.
Эрмита $H_n(x)$	$H_n(x)=\frac{1}{\sqrt{n!\,2^n\cdot\sqrt{\pi}}}(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$; $H_n^*(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$; $e^{2xt-t^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{H_n^*(x)}{n!}t^n$ - производящая функция.
Лагерра $L_n(x)$	$L_n(x)=\frac{(-1)^n}{n!}e^x\frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right)$; $(n+1)L_{n+1}(x)+(x-2n-1)L_n(x)+nL_{n-1}(x)=0$; $\frac{e^{\frac{xt}{t-1}}}{1-t}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}L_n(x)\cdot t^n$ - производящая функция.

Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ – некоторая ортонормированная система многочленов в пространстве $L_2(a,b)$. Тогда ***ряд Фурье*** для функции $f(x)$ имеет вид

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\varphi_n,$$

где числа a_n называются ***коэффициентами Фурье*** в пространстве $L_2(a,b)$ и вычисляются по формуле:

$$a_n = \left(f(x), \varphi_n\right) = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)w(x)dx.$$

Многочлены	Весовая функция $w(x)$	Простран-ство $L_2(a,b)$	Ряд Фурье для функции $f(x)$ и его коэффициенты в $L_2(a,b)$
Лежандра $P_n(x)$	1	$L_2[-1,1]$	$f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$, $a_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx.$
Чебышева $T_n(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$L_2[-1,1]$	$f(x) = \sum\limits_{0}^{\infty} a_n T_n^*(x)$, $a_n = \int_{-1}^{1} f(x)T_n^*(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$
Эрмита $H_n(x)$	e^{-x^2}	$L_2(-\infty,+\infty)$	$f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n H_n(x)$, $a_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)H_n(t)e^{-t^2}dt.$
Лагерра $L_n(x)$	e^{-x}	$L_2[0,\infty)$	$f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n L_n(x)$, $a_n = \int_{0}^{+\infty} f(t)L_n(t)e^{-t}dt.$

ЗАДАНИЯ

1. Разложить в пространстве $L_2[-\pi,\pi]$ функцию $y = x + \pi$ в тригонометрический ряд Фурье.

2. Разложить в пространстве $L_2[-\pi,\pi]$ функцию $y = 2 - x$ в тригонометрический ряд Фурье.

3. Получить несколько первых многочленов Лежандра, используя формулу Родрига.

4. Найти несколько первых членов ряда Фурье относительно системы многочленов Лежандра для функции $f(x) = |x|$ на $[-1,1]$.

5. Найти шесть первых многочленов Чебышева, используя рекуррентную формулу $T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x)$, где $T_n(x)=\cos[n\arccos x]$.

6. Доказать ортогональность многочленов Чебышева $T_2(x)$ и $T_3(x)$.

7. Для функции $f(x)=\begin{cases}0, & -1<x<0,\\ 1, & 0<x<1\end{cases}$ найти несколько первых членов ряда Фурье относительно системы многочленов Чебышева.

8. Для функции $f(x)=\begin{cases}-1, & -1<x<0,\\ x, & 0<x<1\end{cases}$ найти несколько первых членов ряда Фурье относительно системы многочленов Чебышева.

9. Получить четыре первых многочлена Эрмита, используя формулу Родрига для многочленов Эрмита.

10. Найти несколько первых членов ряда Фурье относительно системы многочленов Эрмита для функции $f(x)=e^{-5x^2}$ при $x\in R$.

11. Получить четыре первых многочлена Лагерра, используя формулу Родрига для многочленов Лагерра.

12. Получить четыре первых многочлена Лагерра, используя производящую функцию многочленов Лагерра.

13. Найти несколько первых членов ряда Фурье относительно системы многочленов Эрмита для функции $f(x)=e^{-7x}$ при $x>0$.

6. Интеграл Фурье. Преобразование Фурье

Если $f(x)$ – абсолютно интегрируемая на всей числовой оси функция, т.е. функция, удовлетворяющая условию

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx<+\infty,$$

то ее ***интеграл Фурье*** имеет вид

$$\int_0^{+\infty}[a(\lambda)\cos\lambda x+b(\lambda)\sin\lambda x]d\lambda, \tag{1}$$

где введены обозначения

$$a(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda t dt\,,\quad b(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda t dt\,. \qquad (2)$$

Интеграл Фурье (1) равен $f(x)$ в каждой точке непрерывности функции $f(x)$.

В случае, когда функция $f(x)$ четная, коэффициенты (2) имеют вид

$$a(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} f(t)\cos\lambda t dt,\quad b(\lambda)=0\,. \qquad (3)$$

В случае нечетной функции $f(x)$:

$$a(\lambda)=0,\quad b(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} f(t)\sin\lambda t dt. \qquad (4)$$

Преобразованием Фурье функции $f(x)$ будем называть функцию $g(\lambda)=F[f(x)]$, определенную формулой

$$g(\lambda)=F[f(x)]=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx\,. \qquad (5)$$

Обратное преобразование Фурье имеет вид:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda\,.$$

В зависимости от того, является ли $f(x)$ четной или нечетной, ее преобразование Фурье записывается в различной форме.

1) $f(x)$ – четная, тогда

$$g(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)(\cos\lambda x+i\sin\lambda x)dx=2\int\limits_{0}^{+\infty} f(x)\cos\lambda x dx\,.$$

Этот интеграл известен как косинус-преобразование Фурье.

2) $f(x)$ – нечетная, тогда

$$g(\lambda)=2i\int\limits_{0}^{+\infty} f(x)\sin\lambda x dx$$ – синус-преобразование Фурье.

Свойства преобразования Фурье

I. Преобразование Фурье $F[f(x)]$ абсолютно интегрируемой функции $f(x)$ есть ограниченная непрерывная функция, которая стремится к нулю при $|\lambda| \to \infty$.

II. Если $f^{(k-1)}(x)$ непрерывна на каждом конечном интервале и $f,..., f^{(k)} \in L_1(-\infty;\infty)$, то

$$F[f^{(k)}(x)] = (i\lambda)^k F[f(x)]. \qquad (6)$$

III. Если функции $f(x)$, $xf(x),\ldots, x^k f(x)$ абсолютно интегрируемы,

то $$\frac{d^k}{d\lambda^k} F[f(x)] = F[(-ix)^k f(x)]. \qquad (7)$$

Решение типовых задач

<u>Пример 1.</u> Представить интегралом Фурье следующую функцию:

$$f(x) = \begin{cases} 2-|x|, & |x| \le 2, \\ 0, & |x| > 2. \end{cases}$$

Решение.

Так как функция $f(x)$ – четная, то

$$b(\lambda) = 0, \qquad a(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t)\cos\lambda t dt = \frac{2}{\pi}\int_0^2 (2-t)\cos\lambda t dt.$$

Интегрируя по частям, находим:

$$a(\lambda) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{2-t}{\lambda}\sin\lambda t\Big|_0^2 + \frac{1}{\lambda}\int_0^2 \sin\lambda t dt\right] = \frac{-2}{\pi\lambda^2}\cos\lambda t\Big|_0^2 =$$

$$= -\frac{2}{\pi\lambda^2}(\cos 2\lambda - 1) = \frac{2(1-\cos 2\lambda)}{\pi\lambda^2}.$$

Интеграл Фурье примет вид: $\displaystyle f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{2(1-\cos 2\lambda)}{\pi\lambda^2}\cos\lambda x d\lambda.$

Ответ: $f(x) = \dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^2 \dfrac{1-\cos 2\lambda}{\lambda^2}\cos\lambda x d\lambda$. ▲

<u>Пример 2.</u> Найти преобразование Фурье функции

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 2}.$$

Решение.

Преобразование Фурье функции $f(x)$ имеет вид

$$g(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 2} e^{-i\lambda x} dx.$$

При вычислении интеграла нам понадобится ***лемма Жордана***:

Если $f(z)$ в верхней полуплоскости и на вещественной оси удовлетворяет условию: $f(z) \to 0$ при $z \to \infty$ и $m > 0$, то при $R \to +\infty$ $\int\limits_{C_R} f(z)e^{imz}dz \to 0$, где C_R есть полуокружность с центром в начале координат и радиусом R, находящаяся в верхней полуплоскости.

Тогда $\lambda = -|\lambda|$ – должно быть отрицательным и

$$g(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} + \int\limits_{C_R \to 0} = \oint\limits_C \frac{e^{i|\lambda|z}}{z^2 + 2z + 2} dz,$$

где C – замкнутый контур в верхней полуплоскости.

Функция $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 2z + 2}$ имеет в верхней полуплоскости полюс первого порядка $z_0 = -1 - i$. Тогда

$$g(\lambda) = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=z}\left[\frac{e^{i|\lambda|z}}{z^2 + 2z + z}\right] = 2\pi i \left.\frac{e^{i|\lambda|z}}{2z + 2}\right|_{z=-1+i} =$$

$$= 2\pi i \frac{e^{i|\lambda|(-1+i)}}{-2 + 2i + 2} = \pi e^{-i|\lambda| - |\lambda|} = \pi e^{-|\lambda|(1+i)}.$$

Ответ: $\pi e^{-|\lambda|(1+i)}$. ▲

Пример 3. Найти преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x}, & |x| \le 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Решение.

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx = \int_{-1}^{1} e^{2x} e^{-i\lambda x} dx = \int_{-1}^{1} e^{(2-i\lambda)x} dx =$$

$$= \frac{1}{2-i\lambda} e^{(2-i\lambda)x} \Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{2-i\lambda} \left(e^{2-i\lambda} - e^{-(2-i\lambda)} \right) = \frac{2\,\mathrm{sh}(2-i\lambda)}{2-i\lambda}.$$

Ответ: $\dfrac{2\,\mathrm{sh}(2-i\lambda)}{2-i\lambda}$. ▲

Пример 4. Найти преобразование Фурье функции

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2+2x+2} \right).$$

Решение.

Используем свойство II и результат Примера 2:

$$F\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2+2x+2} \right) \right] = i\lambda F\left[\frac{1}{x^2+2x+2} \right] = i\lambda \pi e^{-|\lambda|(1+i)}.$$

Ответ: $i\lambda \pi e^{-|\lambda|(1+i)}$. ▲

ЗАДАНИЯ

1. Представить функцию $f(x)$ интегралом Фурье:

a) $f(x) = \begin{cases} 2x, & -2 \le x \le 0, \\ 0, & x < -2, x > 0. \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \le 3, \\ 0, & |x| > 3. \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| \le \pi/2, \\ 0, & |x| > \pi/2. \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2, & |x| \le 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases}\cos 2x, & |x|\le \pi,\\ 0, & |x|>\pi.\end{cases}$ f) $f(x)=\begin{cases}3x^2, & |x|\le 1/2,\\ 0, & |x|>1/2.\end{cases}$

2. Найти преобразование Фурье функции $f(x)$:

a) $f(x)=\begin{cases}e^{-3x}, & |x|\le 2,\\ 0, & |x|>2.\end{cases}$ e) $f(x)=\begin{cases}x+1, & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$

b) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+5}$. f) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+4}$.

c) $f(x)=\begin{cases}e^{4x}, & |x|\le 4,\\ 0, & |x|>4.\end{cases}$ g) $f(x)=\begin{cases}xe^{-x}, & |x|\le 3,\\ 0, & |x|>3.\end{cases}$

d) $f(x)=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x^2+4}\right)$. h) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+9}$.

7. Дискретное преобразование Лапласа и z-преобразование

Пусть $f(t)$ – комплекснозначная функция действительного аргумента *f*, определенного для $t\ge 0$.

Определение. Дискретным преобразованием Лапласа (изображением) решетчатой функции f_n называется функция $D\{f_n\}$ комплексного переменного *p*, которая определяется как

$$D\{f_n\}=\sum_{n=0}^{\infty} e^{-np} f_n . \qquad (1)$$

Выполним замену $z=e^p$. Тогда ряд (1) примет вид

$$F^*(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} \equiv z\{f_n\}. \qquad (2)$$

Такой переход от функции f_n к функции $F^*(z)$ по формуле (2) называется ***z-преобразованием*** и обозначается

$$f_n \stackrel{\bullet}{-} F^*(z). \qquad (3)$$

z-преобразование будем обозначать как $f_n \stackrel{\bullet}{-} F^*(z)$

Таблица соответствия для z-преобразований

№	f_n	$F^*(z)$
1	1	$\dfrac{z}{z-1}$
2	$(-1)^n$	$\dfrac{z}{z+1}$
3	n	$\dfrac{z}{(z-1)^2}$
4	n^2	$\dfrac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
5	a^n	$\dfrac{z}{z-a}$
6	na^{n-1}	$\dfrac{z}{(z-a)^2}$
7	C_n^k	$\dfrac{z}{(z-1)^{k+1}}$
8	$a^n \sin n\tau$	$\dfrac{az\sin\tau}{z^2-2az\cos\tau+a^2}$
9	$a^n \cos n\tau$	$\dfrac{z(z-a\cos\tau)}{z^2-2az\cos\tau+a^2}$
10	$a^n \operatorname{sh} n\tau$	$\dfrac{az\operatorname{sh}\tau}{z^2-2az\operatorname{ch}\tau+a^2}$
11	$a^n \operatorname{ch} n\tau$	$\dfrac{z(z-a\operatorname{ch}\tau)}{z^2-2az\operatorname{ch}\tau+a^2}$
12	$T_n(x)=\cos(n\arccos x)$	$\dfrac{z(z-x)}{z^2-2xz+1}$
13	$\dfrac{a^n}{n!}$	$e^{a/z}$

Некоторые свойства z-преобразования

I. *Линейность.* Если $f_n \doteq F^*(z)$ и $g_n \doteq G^*(z)$, то для любых комплексных постоянных α и β

$$\alpha f(n)+\beta g(n) \doteq \alpha F^*(n)+\beta G^*(n).$$

II. *Теорема запаздывания* (первая теорема смещения).

Если $f_n \doteq F^*(z)$, то для любого целого $k>0$ справедливо преобразование

$$f_{n-k} \stackrel{\bullet}{-} z^{-k} F^*(z),\ k = 1,2,...$$

III. _Теорема опережения_ (вторая теорема смещения).

Если $f_n \stackrel{\bullet}{-} F^*(z)$, то для любого целого $k > 0$ справедливо преобразование

$$f_{n+k} \stackrel{\bullet}{-} z^k \left[F^*(z) - \sum_{m=0}^{k-1} f_m z^{-m} \right].$$

IV. _Изображение суммы._

Если $f_n \stackrel{\bullet}{-} F^*(z)$, то $\sum\limits_{m=0}^{n-1} f_m \stackrel{\bullet}{-} \dfrac{1}{z-1} F^*(z)$.

Для того, чтобы по известному изображению $F^*(z)$ найти оригинал f_n можно:

1) воспользоваться таблицей, после разбиения дроби $F^*(z)$ на сумму простейших дробей;

2) в случае, когда $F^*(z)$ есть правильная рациональная дробь относительно z, функцию f_n можно найти по формуле

$$f_n = \sum_{i=1}^{k} \underset{z_i}{res}\left(F^*(z) z^{n-1} \right),$$

где сумма берется по всем полюсам функции $F^*(z)$.

Решение разностных уравнений

Разностью первого порядка решетчатой функции f_n называется величина, обозначаемая как Δf_n, и равная $\Delta f_n = f_{n+1} - f_n$.

Разностью второго порядка $\Delta^2 f_n$ называется величина, определяемая как $\Delta^2 f_n = \Delta f_{n+1} - \Delta f_n$.

Разностью k-го порядка $\Delta^k f_n$ называется величина

$$\Delta^k f_n = \Delta^{k-1} f_{n+1} - \Delta^{k-1} f_n.$$

$$\Delta^k f_n = \sum_{m=0}^{k} (-1)^m C_k^m f_{n+k-m}, \quad \text{где} \quad C_k^m = \frac{k!}{m!(k-m)!}.$$

ТЕОРЕМА (о z-преобразовании разности). Пусть $f_n \risingdotseq F^*(z)$. Тогда z-преобразование разностей равны

$$\Delta f_n = f_{n+1} \risingdotseq (z-1)F^*(z) - zf_0,$$

$$\Delta^k f_n = f_{n+k} \risingdotseq (z-1)^k F^*(z) - z\sum_{m=0}^{k-1}(z-1)^{k-m-1}\left(\Delta^m f_0\right).$$

Уравнение вида

$$F\left(n, f_n, f_{n+1}, \ldots, f_{n+k}\right) = 0,$$

где $f(n) \equiv f_n$ – решетчатая функция, называется разностным уравнением k-го порядка.

Замечание. Далее в задачах для решетчатой функции будет использоваться обозначение x_n ($f_n \equiv x_n$).

Рассмотрим процедуру решения линейного неоднородного разностного уравнения:

$$a_0 x_{n+k} + a_1 x_{n+k-1} + \ldots + a_k x_n = \varphi(n).$$

1) Применяем к обеим частям уравнения дискретное преобразование Лапласа

$$x_n \risingdotseq X^*(z), \qquad \varphi(n) \risingdotseq \Phi^*(z)$$

и, учитывая, что

$$x_{n+1} \risingdotseq z\left(X^*(z) - x_0\right) - z,$$

$$x_{n+2} \risingdotseq z^2\left(X^*(z) - x_0 - x_1 z^{-1}\right),$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

получим линейное алгебраическое уравнение относительно изображения $X^*(z)$.

2) Разрешив полученное уравнение относительно $X^*(z)$, возвращаемся назад к оригиналу – последовательности. Общее решение будет содержать неопределенные константы $x_0, x_1, \ldots x_{k-1}$, которые фиксируются, исходя из начальных условий.

Решение типовых задач

Пример 1. Пользуясь определением, найти изображение $F^*(z)$ для функции $f_n = e^{\alpha n}$.

Решение.

$$F^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\alpha n} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{\alpha} z^{-1}\right)^n = \frac{1}{1 - \dfrac{e^{\alpha}}{z}} = \frac{z}{z - e^{\alpha}} \quad \text{при} \quad |z| > e^{\operatorname{Re}\alpha}. \ \blacktriangle$$

Пример 2. Пользуясь определением, найти изображение $F^*(z)$ для функции $f_n = \sin n$.

Решение.

$$\sin n = \frac{e^{in} - e^{-in}}{zi}; \quad e^{in} \doteq \sum_{n=0}^{\infty} (z^{-1} e^{i})^n = \frac{1}{1 - z^{-1} e^{i}} = \frac{z}{z - e^{i}}; \quad e^{-in} \doteq \frac{z}{z - e^{-i}}.$$

Тогда

$$\sin n \doteq \frac{1}{2i}\left[\frac{z}{z - e^{i}} - \frac{z}{z - e^{-i}}\right] = \frac{z}{2i} \cdot \frac{e^{i} - e^{-i}}{\left(z - e^{i}\right)\left(z - e^{-i}\right)} = \frac{z \sin 1}{z^2 + 2z\cos 1 + 1}.$$

Ответ: $\sin n \doteq \dfrac{z \sin 1}{z^2 + 2z\cos 1 + 1}$. ▲

Пример 3. Найти оригинал для изображения $F^*(z) = \dfrac{3z^2 - z}{(z+1)^4}$.

Решение.

Точка $z_0 = -1$ является полюсом четвертого порядка для функции $F^*(z)$. Тогда оригинал

$$f_n = \operatorname*{res}_{z_0=-1} F^*(z) z^{n-1} = \operatorname*{res}_{z_0=-1} \frac{(3z^2 - z) z^{n-1}}{(z+1)^4} = \operatorname*{res}_{z_0=-1} \frac{3z^{n+1} - z^n}{(z+1)^4} =$$

$$= \frac{1}{3!} \lim_{z \to -1} \frac{d^3}{dz^3} \left(\frac{3z^{n+1} - z^n}{(z+1)^4} \cdot (z+1)^4 \right) = \frac{1}{6} \lim_{z \to -1} (3z^{n+1} - z^n)''' =$$

$$= \frac{1}{6} \lim_{z \to -1} (3(n+1) z^n - n z^{n-1})'' = \frac{1}{6} \lim_{z \to -1} (3(n+1) n z^{n-1} - n(n-1) z^{n-2})' =$$

$$= \frac{1}{6} \lim_{z \to -1} n(n-1) \cdot \left(3(n+1) z^{n-2} - (n-2) z^{n-3}\right) = \frac{(-1)^n}{6} n(n-1) \cdot (4n+1).$$

Ответ: $f_n = \dfrac{(-1)^n}{6} n(n-1)(4n+1)$. ▲

Пример 4. Найти оригинал для изображения $F^*(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z-2)^2}$.

Решение.

Вынесем z в числителе изображения $F^*(z)$ за скобки:

$$F^*(z) = z \cdot \left(\frac{1}{(z-1)(z-2)^2} \right)$$

и разобьем дробь в скобках на сумму простейших дробей:

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)^2} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2} + \frac{C}{(z-2)^2} =$$

$$= \frac{A(z-2)^2 + B(z-1)(z-2) + C(z-1)}{(z-1)(z-2)^2}.$$

После чего приравняем числители начальной и конечной дроби:

$$1 = A(z-2)^2 + B(z-1)(z-2) + C(z-1).$$

Подставляя в полученное равенство различные значения переменной z, найдем неизвестные коэффициенты A, B, C:

$$z = 2: \quad 1 = C;$$

$$z = 1: \quad 1 = A;$$

$$z = 0: \quad 1 = 4A + 2B - C, \quad B = -1.$$

Тогда

$$F^*(z) = z \cdot \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2} + \frac{1}{(z-2)^2} \right) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-2} + \frac{z}{(z-2)^2}.$$

Оригинал находим из таблицы: $f_n = 1 - 2^n + n \cdot 2^{n-1}$.

Ответ: $f_n = 1 - 2^n + n \cdot 2^{n-1}$. ▲

Пример 5. С помощью дискретного преобразования Лапласа решить линейное разностное уравнение

$$x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = 0; \quad x_0 = 1, \quad x_1 = -1.$$

Решение.

Способ 1. Пусть $x_n \risingdotseq X^*(z)$, тогда

$$x_{n+1} \risingdotseq z\left(X^*(z) - x_0\right) = z\left(X^*(z) - 1\right) = zX^*(z) - z,$$

$$x_{n+2} \doteq z^2\left(X^*(z) - x_0 - x_1 z^{-1}\right) = z^2 X^*(z) - z^2 + z.$$

Применяя к обеим частям уравнения дискретное преобразование Лапласа, получим операторное уравнение

$$z^2 X^*(z) - z^2 + z - 6zX^*(z) + 6z + 9X^*(z) = 0,$$

откуда

$$(z-3)^2 X^*(z) - z^2 + 7z = 0.$$

Выразим функцию $X^*(z)$:

$$X^*(z) = \frac{z(z-3) - 4z}{(z-3)^2} = \frac{z}{z-3} - 4 \cdot \frac{z}{(z-3)^2}.$$

Так как $\frac{z}{z-3} \doteq 3^n$, $\quad \frac{z}{(z-3)^2} \doteq n3^n$; то

$$x_n = 3^n - 4n3^{n-1} = 3^{n-1}(3-4n).$$

Способ 2. Используем для определения функции x_n формулу:

$$x_n = \sum_{i=1}^{k} \underset{z_i}{res}\left(X^*(z) z^{n-1}\right) = \underset{z=3}{res}\left(\frac{z^2 - 7z}{(z-3)^2} z^{n-1}\right) = \lim_{z \to 3} \frac{d}{dz}\left(\frac{z^{n+1} - 7z^n}{(z-3)^2}(z-3)^2\right) =$$

$$\lim_{z \to 3}\left((n+1)z^n - 7nz^{n-1}\right) = n3^n + 3^n - 7n3^{n-1} = 3^{n-1}(3-4n).$$

Ответ: $x_n = 3^{n-1}(3-4n)$. ▲

<u>Пример 6.</u> С помощью дискретного преобразования Лапласа решить линейное разностное уравнение

$$x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 5^n, \; x_0 = 0, \quad x_1 = 1.$$

Решение.

Способ 1. Пусть $x_n \doteq X^*(z)$, тогда

$$x_{n+1} \doteq z\left(X^*(z) - x_0\right), \qquad x_{n+2} \doteq z^2\left(X^*(z) - x_0 - x_1 z^{-1}\right), \quad 5^n \doteq \frac{z}{z-5}.$$

Имеем

$$z^2 X^*(z) - z - 4zX^*(z) + 4X^*(z) = \frac{z}{z-5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (z-2)^2 X^*(z) - z = \frac{z}{z-5} \quad \Rightarrow X^*(z) = \frac{z^2-4z}{(z-5)(z-2)^2}.$$

Разложим функцию $X^*(z)$ на слагаемые следующим образом

$$\frac{z^2-4z}{(z-5)(z-2)^2} = z \cdot \frac{z-4}{(z-5)(z-2)^2} = \frac{1}{9}\frac{z}{z-5} - \frac{1}{9}\frac{z}{z-2} + \frac{2}{3}\frac{z}{(z-2)^2}.$$

Так как $\frac{z}{z-2} \overset{\bullet}{-} 2^n$, $\frac{z}{(z-2)^2} \overset{\bullet}{-} n \cdot 2^{n-1}$, $\frac{z}{z-5} \overset{\bullet}{-} 5^n$, то

$$x_n = \frac{1}{9}\left(5^n - 2^n\right) + \frac{2}{3} n \cdot 2^{n-1}.$$

Способ 2. Используем для определения функции x_n формулу

$$x_n = \sum_{i=1}^{k} \underset{z_i}{res}\left(X^*(z) z^{n-1}\right) = \underset{z=2}{res}\left(\frac{z^{n+1}-4z^n}{(z-5)(z-2)^2}\right) + \underset{z=5}{res}\left(\frac{z^{n+1}-4z^n}{(z-5)(z-2)^2}\right) =$$

$$= \lim_{z\to 2} \frac{d}{dz}\left(\frac{z^{n+1}-4z^n}{(z-5)(z-2)^2}(z-2)^2\right) + \lim_{z\to 5}\left(\frac{z^{n+1}-4z^n}{(z-5)(z-2)^2}(z-5)\right) =$$

$$= \lim_{z\to 2} \frac{((n+1)z^n - 4nz^{n-1})(z-5) - \left(z^{n+1}-4z^n\right)}{(z-5)^2} + \frac{5^{n+1} - 4\cdot 5^n}{9} =$$

$$= \frac{((n+1)2^n - 4n2^{n-1})(-3) - \left(2^{n+1} - 4\cdot 2^n\right)}{9} + \frac{5^n}{9} = \frac{1}{9}\left(5^n - 2^n\right) + \frac{2}{3} n \cdot 2^{n-1}.$$

Ответ: $x_n = \frac{1}{9}\left(5^n - 2^n\right) + \frac{2}{3} n \cdot 2^{n-1}$.▲

Пример 7. С помощью дискретного преобразования Лапласа решить линейное разностное уравнение

$$x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 3^n,\ x_0 = 1, \quad x_1 = 0.$$

Решение.

Способ 1. Пусть $x_n \overset{\bullet}{-} X^*(z)$, тогда

$$x_{n+1} \risingdotseq z\left(X^*(z)-x_0\right)=zX^*(z)-z\,,$$

$$x_{n+2} \risingdotseq z^2\left(X^*(z)-x_0-x_1z^{-1}\right)=z^2X^*(z)-z^2, \quad 3^n \risingdotseq \frac{z}{z-3}\,.$$

Подставляем в уравнение:

$$z^2X^*(z)-z^2-5zX^*(z)+5z+6X^*(z)=\frac{z}{z-3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left(z^2-5z+6\right)X^*(z)=\frac{z}{z-3}+z^2-5z \qquad \Rightarrow X^*(z)=\frac{z^3-8z^2+16z}{(z-2)(z-3)^2}\,.$$

Разложим функцию $X^*(z)$ на слагаемые следующим образом

$$\frac{z^3-8z^2+16z}{(z-2)(z-3)^2}=z\cdot\frac{z^2-8z+16}{(z-2)(z-3)^2}=\frac{-3z}{z-3}+\frac{z}{(z-3)^2}+\frac{4z}{z-2}\,.$$

Из таблиц находим оригинал: $x_n=-3^{n+1}+n\cdot 3^{n-1}+4\cdot 2^n$.

Способ 2. Используем для определения функции x_n формулу

$$x_n=\sum_{i=1}^{k}\underset{z_i}{res}\left(X^*(z)z^{n-1}\right)=\underset{z=3}{res}\left(\frac{(z-4)^2z^n}{(z-2)(z-3)^2}\right)+\underset{z=2}{res}\left(\frac{(z-4)^2z^n}{(z-2)(z-3)^2}\right)=$$

$$=\lim_{z\to 3}\frac{d}{dz}\left(\frac{(z-4)^2z^n}{(z-2)(z-3)^2}(z-3)^2\right)+\lim_{z\to 2}\left(\frac{(z-4)^2z^n}{(z-2)(z-3)^2}(z-2)\right)=$$

$$=\lim_{z\to 3}\frac{(2(z-4)z^n+(z-4)^2nz^{n-1})(z-2)-(z-4)^2z^n}{(z-2)^2}+\frac{4\cdot 2^n}{1}=$$

$$=\frac{2(-1)3^n+n3^{n-1}-3^n}{1}+\frac{4\cdot 2^n}{1}=-3^{n+1}+n\cdot 3^{n-1}+4\cdot 2^n.$$

Ответ: $x_n=-3^{n+1}+n\cdot 3^{n-1}+4\cdot 2^n$. ▲

ЗАДАНИЯ.

1. Пользуясь определением, найти изображение $F^*(z)$ для следующих функций:

а) $f_n = e^{-n}$.

б) $f_n = e^{\alpha n}$.

в) $f_n = n^2$.

2. Найти оригиналы для следующих изображений:

а) $F^*(z) = \dfrac{z}{(z-3)^2}$. б) $F^*(z) = \dfrac{z}{z^2+1}$.

3. С помощью дискретного преобразования Лапласа решить линейное разностное уравнение

1. $x_{n+2} - 8x_{n+1} + 16x_n = 2^n, \quad x_0 = 1, \quad x_1 = 1.$
2. $x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 4^n, \quad x_0 = 1, \quad x_1 = 0.$
3. $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 5x_n = 3^n, \quad x_0 = 1, \quad x_1 = 1.$
4. $x_{n+2} + 4x_{n+1} + 3x_n = n, \quad x_0 = 1, \quad x_1 = 1.$
5. $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 8^n, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = 1.$
6. $x_{n+2} - 2x_{n+1} = 5^n, \quad x_0 = 1, \quad x_1 = 0.$
7. $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 5x_n = (-1)^n, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = -1.$
8. $x_{n+2} - 4x_n = 5^n, \quad x_0 = -1, \quad x_1 = 2.$
9. $x_{n+2} + 8x_{n+1} + 16x_n = 3, \quad x_0 = 1, \quad x_1 = 0.$
10. $x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 6^n, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = 0.$
11. $x_{n+2} + x_n = (-1)^n, \quad x_0 = 1, \quad x_1 = 1.$
12. $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 3x_n = n, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = 0.$
13. $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = 2, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = 1.$

8. Вариационное исчисление

Определение. Если каждой функции $y(x)$ из некоторого множества поставлено в соответствие некоторое число J, то говорят, что на этом множестве задан ***функционал*** $J(y) = J[y]$.

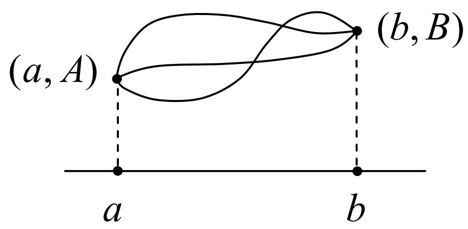
Приведем примеры функционалов:

1. Длина плоской кривой, заданной уравнением $y = y(x)$, $a \le x \le b$:

$$J[y] = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}dx.$$

2. Стоимость проезда по дорогам, имеющим вид кривых, соединяющих пункты A и B.

Простейшая задача вариационного исчисления ставится так: среди всех функций $y(x)$, найти ту, которая доставляет экстремум функционалу $J[y]$. Эта кривая удовлетворяет уравнению Эйлера



$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0,$$

$$y(a) = A, \quad y(b) = B.$$

(Здесь $F_y = \dfrac{\partial F}{\partial y}$; $F_{y'} = \dfrac{\partial F}{\partial y'}$).

Данная краевая задача может иметь единственное решение, может иметь множество решений или не иметь ни одного.

Решение типовых задач

Пример 1. Найти экстремали функционала

$$J(y) = \int_1^0 (y'^2 + 2yy' + y^2)dx, \quad y(1) = 1, \quad y(2) = 0.$$

Решение.

$$F(x, y, y') = y'^2 + 2yy' + y^2.$$

Найдем частные производные функции $F(x, y, y')$:

$$F_y = 2y' + 2y, \; F_{y'} = 2y' + 2y.$$

Уравнение Эйлера примет вид

$$2y' + 2y - \frac{d}{dx}(2y' + 2y) = 0,$$

$$2y' + 2y - 2y'' - 2y' = 0 \quad \text{или} \quad y'' - y = 0.$$

Получили линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}.$$

Определим константы C_1 и C_2 исходя из граничных условий:

$$\begin{cases} y(1) = C_1 e + C_2 e^{-1}, \\ y(2) = C_1 e^{2} + C_2 e^{-2} = 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$C_1 = -\frac{1e^{-2}}{2\,\mathrm{sh}\,1}; \; C_2 = -\frac{1e^{2}}{2\,\mathrm{sh}\,1}.$$

Тогда

$$y(x) = \frac{1}{2\,\mathrm{sh}\,1}\left(-e^{-2+x} + e^{2-x}\right) = \frac{\mathrm{sh}(2-x)}{\mathrm{sh}\,1}$$ – единственная экстремаль.

Ответ: $y(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(2-x)}{\mathrm{sh}\,1}$. ▲

Пример 2. Найти все экстремали функционала $J[y]$, удовлетворяющие указанным граничным условиям:

$$J[y] = \int_{0}^{\pi/2} ((y')^2 + 2y\sin x)dx; \quad y(0) = 0; \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.$$

Решение.

Экстремали функционала $J[y]$ являются интегральными кривыми уравнения Эйлера. Находим производные:

$$F_y = 2\sin x, \;\; F_{y'} = 2y', \;\; \frac{d}{dx}F_{y'} = 2y''.$$

Уравнение Эйлера имеет вид

$$2\sin x - 2y'' = 0,$$

$$y'' = \sin x, \qquad y' = -\cos x + C_1, \qquad y = -\sin x + C_1 x + C_2.$$

Используя граничные условия, находим:

$$\begin{cases} C_2 = 0, \\ -1 + C_1 \dfrac{\pi}{2} = 2. \end{cases}$$

Откуда $C_1 = 6/\pi$. Следовательно, экстремали данного функционала имеют вид: $y = -\sin x + \frac{6}{\pi}x$.

Ответ: $y = -\sin x + \frac{6}{\pi}x$. ▲

<u>Пример 3.</u> Найти экстремали функционала

$$J(y) = \int_1^e (xy'^2 + yy')dx, \quad y(1) = 0, \quad y(e) = 1.$$

Решение.

$$F(x, y, y') = xy'^2 + yy'.$$

Найдем частные производные функции $F(x, y, y')$:

$$F_y = y', \; F_{y'} = 2xy' + y.$$

Уравнение Эйлера примет вид

$$y' - \frac{d}{dx}(2xy' + y) = 0,$$

$$y' - 2y' - 2xy'' - y' = 0 \quad \text{или} \quad xy'' + y' = 0.$$

Получили дифференциальное уравнение второго порядка, не содержащее y и допускающее понижение порядка.

Сделаем замену: $y' = p, \quad y'' = p'$.

Тогда уравнение примет вид: $xp' + p = 0$.

Откуда

$$x\frac{dp}{dx} = -p, \quad \int\frac{dp}{p} = -\int\frac{dx}{x}, \quad \ln|p| = -\ln|x| + \ln|C_1|, \quad p = \frac{C_1}{x}.$$

Тогда $y = \int\frac{C_1}{x}dx + C_2 = C_1\ln x + C_2$.

Определим константы C_1 и C_2 исходя из граничных условий:

$$\begin{cases} y(1) = C_1\ln 1 + C_2 = C_2 = 0, \\ y(e) = C_1\ln e + 0 = 1, \quad C_1 = 1. \end{cases}$$

Следовательно, $y = \ln x$ - единственная экстремаль.

Ответ: $y(x) = \ln x$. ▲

ЗАДАНИЯ

Найти все экстремали функционала $J[y]$, удовлетворяющие указанным граничным условиям:

1. $J[y] = \int_0^{2\pi} (y'^2 - y^2)dx$; $y(0) = 1$; $y(2\pi) = 1$.

2. $J[y] = \int_0^{\pi/8} (y^2 + 2yy' - 16y^2)dx$; $y(0) = 0$; $y(\pi/8) = 1$.

3. $J[y] = \int_0^{1} (xy' + y'^2)dx$; $y(0) = 0$; $y(1) = 2$.

4. $J[y] = \int_0^{1} (12xy - y'^2)dx$; $y(0) = 0$; $y(1) = 1$.

5. $J[y] = \int_0^{\pi} (y^2 - y'^2 - 12y\sin 4x)dx$; $y(0) = 0$; $y(\pi) = 2$.

6. $J[y] = \int_0^{1} (y^2 - y'^2 - ye^{2x})dx$; $y(0) = 0$; $y(1) = 1$.

ТИПОВЫЕ ТЕСТЫ

ТЕСТ
Вариант 1

1. Является ли метрикой на множестве действительных чисел **R** следующая функция: а) $\rho(x,y) = x^3 - y^3$; б) $\rho(x,y) = |4^x - 4^y|$.

2. Проверить, какие из векторов $\overline{e_1} = (1,-2,1)$, $\overline{e_2} = (2,1,0)$, $\overline{e_3} = (3,2,1)$ ортогональны, если скалярное произведение задано:
$\overline{x} \cdot \overline{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$. Найти норму вектора $\overline{e_1}$.

3. В пространстве функций, непрерывных на $[-1,1]$: $(p,q) = \int\limits_{-1}^{1} p(t)q(t)dt.$

Проверить ортогональность функций $f_1 = t$ и $f_2 = t^2 - 3t.$
Найти норму $|f_1|$.

4. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей A: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & 3 \end{bmatrix}.$

5. Получить несколько первых многочленов Лежандра, используя формулу Родрига.

6. Найти изображение $F^*(z)$ для функции $4 \cdot 3^n - 5$.

7. С помощью дискретного преобразования Лапласа решить линейное разностное уравнение: $x_{n+1} - 4x_n = 3^n$, $x_0 = 1$.

8. Найти экстремали функционала:

$$J[y] = \int\limits_0^1 (y'^2 + 9y^2 + 4yy')dx; \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$$

9. Представить функцию $f(x)$ интегралом Фурье:

$$f(x) = \begin{cases} 2, & если \quad 0 \le x \le 4, \\ -3, & если \quad -1 \le x \le 0, \\ 0, & если \quad x < -1, x > 4. \end{cases}$$

ТЕСТ
Вариант 2

1. Является ли метрикой на множестве действительных чисел **R** следующая функция: а) $\rho(x,y)=|3x-3y|$; б) $\rho(x,y)=|2^{\sin x}-2^{\sin y}|$.

2. Проверить, какие из векторов $\overline{e_1}=(4,-1,3)$, $\overline{e_2}=(-1,2,2)$, $\overline{e_3}=(0,1,-1)$ ортогональны, если скалярное произведение задано:
$\overline{x}\cdot\overline{y}=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$. Найти норму вектора $\overline{e_2}$.

3. В пространстве функций, непрерывных на $[-1,1]$: $(p,q)=\int\limits_{-1}^{1}p(t)q(t)dt.$

Проверить ортогональность функций $f_1=t-4$ и $f_2=t^2$.
Найти норму $|f_2|$.

4. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей A: $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 6 & -3 & 4\end{bmatrix}$.

5. Найти изображение $F^*(z)$ для функции $2^n-(-1)^n$.

6. С помощью дискретного преобразования Лапласа решить линейное разностное уравнение: $x_{n+1}+2x_n=5^n$, $x_0=-1$.

7. Найти экстремали функционала:
$$J[y]=\int\limits_0^{\pi}(y'^2-9y^2+6yy')dx;\quad y(0)=0,\quad y(\pi)=1.$$

8. Представить функцию $f(x)$ интегралом Фурье:
$$f(x)=\begin{cases}1, & если\quad 0\le x\le 2,\\ -1, & если\quad -1\le x\le 0,\\ 0, & если\quad x<-1,\ x>2.\end{cases}$$

9. Для функции $f(x)=\begin{cases}0, & -1<x<0,\\ 1, & 0<x<1\end{cases}$ найти несколько первых членов ряда Фурье относительно системы многочленов Чебышева.

РЕШЕНИЕ ТИПОВОГО ТЕСТА

Вариант 3

1. Является ли метрикой на множестве действительных чисел $\mathbb{R}$ следующая функция: а) $\rho(x,y) = |\cos(x^2 - y^2)|$; б) $\rho(x,y) = \sqrt{|x^3 - y^3|}$?

Решение.

а) Проверим выполнение аксиомы 1. Пусть $\rho(x,y) = 0$, т.е.

$$\rho(x,y) = |\cos(x^2 - y^2)| = 0 \quad \Rightarrow \; x^2 - y^2 = \pi + 2\pi k,\, k \in \mathbb{Z}.$$

Из этого равенства не следует, что $x = y$ $\left(x = \pm\sqrt{y^2 + \pi + 2\pi k},\, k \in \mathbb{Z}\right)$. Следовательно, аксиома 1 не выполняется и $\rho(x,y)$ не является метрикой.

б) Проверим выполнение аксиомы 1. Пусть $\rho(x,y) = 0$, т.е.

$$\sqrt{|x^3 - y^3|} = 0 \Leftrightarrow x^3 - y^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y.$$

Пусть $x = y$, $\Rightarrow$ $\rho(x,y) = \sqrt{|x^3 - x^3|} = 0$. Аксиома выполняется.

Аксиома 2: $\rho(x,y) = \sqrt{|x^3 - y^3|}$, $\rho(y,x) = \sqrt{|y^3 - x^3|}$, при этом $\sqrt{|x^3 - y^3|} = \sqrt{|y^3 - x^3|}$ для $\forall x, y \in \mathbb{R}$. $\rho(x,y) = \rho(y,x)$. Аксиома симметрии выполняется.

Проверим выполнение аксиомы 3. Пусть z – любое число. Тогда

$$\rho(x,y) = |x^3 - y^3| = |x^3 - z^3 + z^3 - y^3| \le |x^3 - z^3| +$$
$$+ |z^3 - y^3| = \rho(x,z) + \rho(z,y).$$

Аксиома выполняется.

Ответ: а) $\rho(x,y) = |\cos(x^2 - y^2)|$ не является метрикой. ▲

б) $\rho(x,y) = \sqrt{|x^3 - y^3|}$ является метрикой. ▲

2. Проверить, какие из векторов $\overline{e_1} = (1,-2,1)$, $\overline{e_2} = (2,1,0)$, $\overline{e_3} = (3,2,1)$ ортогональны, если скалярное произведение задано: $\overline{x} \cdot \overline{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$. Найти норму вектора $\overline{e_1}$.

Решение.

Проверка ортогональности векторов:

$$(\overline{e_1}, \overline{e_2}) = 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \overline{e_1} \perp \overline{e_2},$$
$$(\overline{e_1}, \overline{e_3}) = 1 \cdot 3 - 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \overline{e_1} \perp \overline{e_2},$$

$$(\overline{e_1},\overline{e_2}) = 1\cdot 2 - 2\cdot 1 + 1\cdot 0 = 0 \Rightarrow \overline{e_1} \perp \overline{e_2},$$
$$(\overline{e_1},\overline{e_1}) = 1\cdot 1 - 2\cdot(-2) + 1\cdot 1 = 6 \quad \Rightarrow \quad \|\overline{e_1}\| = \sqrt{6}.$$

Ответ: Векторы $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$, $\overline{e_3}$ попарно ортогональны.

Норма вектора $\overline{e_1}$: $\|\overline{e_1}\| = \sqrt{6}$. ▲

3. В пространстве функций, непрерывных на $[-1,1]$ задано скалярное произведение: $(p,q) = \int\limits_{-1}^{1} p(t)q(t)dt.$ Проверить ортогональность функций $f_1 = t$ и $f_2 = t^2 - 3$. Найти норму $\|f_1\|$.

Решение.

Найдем скалярное произведение:

$$(f_1, f_2) = \int\limits_{-1}^{1} t\cdot(t^2-3)dt = \int\limits_{-1}^{1}(t^3-3t)dt = \left.\frac{t^4}{4}\right|_{-1}^{1} - 3\cdot\left.\frac{t^2}{2}\right|_{-1}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 0.$$

Следовательно, функции f_1 и f_2 ортогональны.

$$(f_1, f_1) = \int\limits_{-1}^{1} t\cdot t\,dt = \int\limits_{-1}^{1} t^2 dt = \left.\frac{t^3}{3}\right|_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}.$$ Тогда норма $\|f_1\| = \sqrt{\frac{2}{3}}.$

Ответ: Функции f_1 и f_2 ортогональны. Норма $\|f_1\| = \sqrt{\frac{2}{3}}.$ ▲

4. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & 2 \end{bmatrix}.$

Решение.

Найдем собственные значения линейного оператора. Характеристическое уравнение $\det(A - \lambda I) = 0$ имеет вид

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 5 & -4 & 2-\lambda \end{vmatrix} \quad \text{или} \quad (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = 0.$$

Корнями этого уравнения являются $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 1$. Обозначим через $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ координаты собственного вектора u_1 с собственным значением $\lambda_1 = 2$. Найдем решения системы:

$$\begin{bmatrix} 2-2 & -1 & 0 \\ 0 & 2-2 & 0 \\ 5 & -4 & 2-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ или } \begin{cases} 0\alpha_1 - \alpha_2 + 0\alpha_3 = 0, \\ 5\alpha_1 - 4\alpha_2 + 0\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим $\alpha_3 = c$, $c \in R$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$. Таким образом, собственный вектор $u_1 = (0{,}0{,}c)$, $\forall c \in R$, $c \neq 0$.

Аналогично находим собственные векторы $u_2 = (t,-t,9t)$, $\forall t \in R$, $t \neq 0$ и $u_3 = (l,l,-l)$, $\forall l \in R$ матрицы A с собственными значениями соответственно $\lambda_2 = 3$ и $\lambda_3 = 1$.

Ответ: Множество собственных векторов: $u_1 = (0{,}0{,}c)$, $u_2 = (t,-t,9t)$, $u_3 = (l,l,-l)$, $\forall c,t,l \in R$. ▲

5. Получить несколько первых многочленов Лежандра, используя формулу Родрига.

Решение.

По формуле Родрига $P_n(x) = \dfrac{1}{n!\,2^n} \dfrac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right]$ находим:

$$P_0(x) = \frac{1}{0!\,2^0} = 1, \qquad P_1(x) = \frac{1}{1!\,2^1}\frac{d}{dx}\left[\left(x^2-1\right)^1\right] = \frac{1}{2}2x = x,$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2!\,2^2}\frac{d^2}{dx^2}\left[\left(x^2-1\right)^2\right] = \frac{1}{8}\left(x^4 - 2x^2 + 1\right)'' = \frac{1}{8}\left(4x^3 - 4x\right)' = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}.$$

Ответ: $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}$. ▲

6. Найти изображение $F^*(z)$ для функции $4 \cdot 3^n - 5$.

Решение.

Из таблиц: $1 \stackrel{\bullet}{-} \dfrac{z}{z-1}$, $3^n \stackrel{\bullet}{-} \dfrac{z}{z-3}$. По свойству линейности:

$$4 \cdot 3^n - 5 \cdot 1 \stackrel{\bullet}{-} 4 \cdot \frac{z}{z-3} - 5 \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{11z - z^2}{(z-3)(z-1)}.$$ ▲

7. С помощью дискретного преобразования Лапласа решить линейное разностное уравнение: $x_{n+1} - 4x_n = 3^n$, $\quad x_0 = 1$.

Решение.

Пусть $x_n \overset{\bullet}{-} X^*(z)$, $x_{n+1} \overset{\bullet}{-} z\big(X^*(z) - x_0\big) = zX^*(z) - z$, $3^n \overset{\bullet}{-} \dfrac{z}{z-3}$.

Подставляем в уравнение:

$$zX^*(z) - z - 4X^*(z) = \frac{z}{z-3},$$

$$(z-4)X^*(z) = \frac{z}{z-3} + z \quad \Rightarrow \quad X^*(z) = \frac{z^2 - 2z}{(z-3)(z-4)}.$$

Разложим функцию $X^*(z)$ на слагаемые следующим образом

$$\frac{z^2 - 2z}{(z-3)(z-4)} = z \cdot \frac{z-2}{(z-3)(z-4)} = z \cdot \left(\frac{-1}{z-3} + \frac{2}{z-4} \right) = \frac{-z}{z-3} + \frac{2z}{z-4}.$$

Из таблиц находим оригинал: $x_n = -3^n + 2 \cdot 4^n$.

Ответ: $x_n = -3^n + 2 \cdot 4^n$. ▲

8. Найти экстремали функционала:

$$J[y] = \int_0^1 (y'^2 + 9y^2 + 4yy')dx; \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$$

Решение.

$$F(x, y, y') = y'^2 + 9y^2 + 4yy'.$$

Найдем частные производные функции $F(x, y, y')$:

$$F_y = 18y + 4y', \; F_{y'} = 2y' + 4y.$$

Уравнение Эйлера примет вид $\quad 18y + 4y' - \dfrac{d}{dx}(2y' + 4y) = 0$,

$$4y' + 18y - 2y'' - 4y' = 0 \quad \text{или} \quad y'' - 9y = 0.$$

Получили линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}.$$

Определим константы C_1 и C_2 исходя из граничных условий:

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 = 0, \\ y(1) = C_1 e^3 + C_2 e^{-3} = 1. \end{cases}$$

$$C_1 = \frac{1}{2\operatorname{sh} 3};\ C_2 = -\frac{1}{2\operatorname{sh} 3}.$$

Тогда $y(x) = \frac{1}{2\operatorname{sh} 3}\left(e^{3x} - e^{-3x}\right) = \frac{\operatorname{sh} 3x}{\operatorname{sh} 3}$ – единственная экстремаль. ▲

9. Представить функцию $f(x)$ интегралом Фурье:

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{если} \quad 0 \le x \le 4, \\ -3, & \text{если} \quad -1 \le x \le 0, \\ 0, & \text{если} \quad x < -1,\ x > 4. \end{cases}$$

Решение.

Найдем коэффициенты:

$$a(\lambda) = \int_{-\infty}^{-1} 0 \cdot \cos \lambda t dt + \int_{-1}^{0} (-3) \cos \lambda t dt + \int_{0}^{4} 2 \cdot \cos \lambda t dt + \int_{4}^{\infty} 0 \cdot \cos \lambda t dt =$$

$$= -\frac{3}{\lambda} \sin \lambda t \Big|_{-1}^{0} + \frac{2}{\lambda} \sin \lambda t \Big|_{0}^{4} = \frac{3}{\lambda} \sin(-\lambda) + \frac{2}{\lambda} \sin 4\lambda = \frac{2\sin 4\lambda - 3\sin \lambda}{\lambda}.$$

$$b(\lambda) = \int_{-\infty}^{-1} 0 \cdot \sin \lambda t dt + \int_{-1}^{0} (-3) \sin \lambda t dt + \int_{0}^{4} 2 \cdot \sin \lambda t dt + \int_{4}^{\infty} 0 \cdot \sin \lambda t dt =$$

$$= \frac{3}{\lambda} \cos \lambda t \Big|_{-1}^{0} - \frac{2}{\lambda} \cos \lambda t \Big|_{0}^{4} = \frac{3}{\lambda} - \frac{3}{\lambda} \cos(-\lambda) - \frac{2}{\lambda} \cos 4\lambda + \frac{2}{\lambda} =$$

$$= \frac{5 - 2\cos 4\lambda - 3\cos \lambda}{\lambda}.$$

Интеграл Фурье примет вид: $\int_{0}^{+\infty} [a(\lambda) \cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda =$

$$= \int_{0}^{+\infty} \left[\frac{2\sin 4\lambda - 3\sin \lambda}{\lambda} \cdot \cos \lambda x + \frac{5 - 2\cos 4\lambda - 3\cos \lambda}{\lambda} \cdot \sin \lambda x \right] d\lambda.$$ ▲

ЛИТЕРАТУРА

1. Специальные математические методы и функции: учебно-методическое пособие по одноименной дисциплине для студентов специальности 1-36 04 02 «Промышленная электроника» днев. и заоч. форм обучения./ А. А. Бабич, Л. Д. Корсун, А. В. Емелин. – Гомель: ГГТУ им. П. О. Сухого, 2010. – 195 с.
2. Методические указания к контрольным заданиям по курсу «Специальные математические методы и функции» для студентов заочной формы обучения специальности 1-36 04 02 «Промышленная электроника»/ А. А. Бабич, Л. Д. Корсун, А. В. Емелин. – Гомель: ГГТУ им. П. О. Сухого, 2011. – 53 с.
3. Специальные математические методы и функции: электронный учебно-методический комплекс дисциплины/ А. А. Бабич, Л. Д. Корсун, А. В. Емелин. – Гомель: ГГТУ им. П. О. Сухого, 2012. – 195 с.
4. Деч, Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и z-преобразования/ Г. Деч. – Москва : Наука, 1971. – 288 с.
5. Краснов, М.Л. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. Учеб. пособие для втузов./ М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко - М.: Наука, 1981. – 302с.
6. Краснов, М.Л. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям: Учеб. пособие для втузов./ М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко - М.: Наука, 1981.
7. Ефимов, А. В. Сборник задач по математике для втузов.: Учебное пособие. / В. А. Болгов, А. В. Ефимов, А. Ф. Каракулин и др./ под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. – Москва : Наука, 1986. – Ч.2. Специальные разделы математического анализа. – 386 с.
8. Ефимов, А. В. Сборник задач по математике для втузов. : Учебное пособие/ Э. А. Вуколов, А. В. Ефимов, В. Н. Земсков и др./ под. Ред. А.В. Ефимова. – Москва : Наука, 1990. – Ч.4. Методы оптимизации. Уравнения в частных производных. Интегральные уравнения – 304 с.
9. Коллатц, Л. Задачи на собственные значения с техническими приложениями./ Л. Коллатц. – Москва: Наука, 1968. – 504 с.

Корсун Лидия Дмитриевна
Емелин Анатолий Владимирович
Кондратюк Валерия Вячеславовна

СПЕЦИАЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И ФУНКЦИИ

**Практикум
по одноименному курсу
для подготовки к тестированию
для студентов специальности
1-36 04 02 «Промышленная электроника»
заочной формы обучения**

Подписано к размещению в электронную библиотеку
ГГТУ им. П. О. Сухого в качестве электронного
учебно-методического документа 28.09.15.
Рег. № 142Е.
http://www.gstu.by