Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Техническая механика»

О. Н. Шабловский, Д. Г. Кроль

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ПОСОБИЕ
для студентов инженерно-технических специальностей дневной и заочной форм обучения

Гомель 2010

УДК 531.011(075.8)
ББК 22.21я73
Ш13

Рекомендовано научно-методическим советом машиностроительного факультета ГГТУ им. П. О. Сухого (*протокол № 2 от 27.10.2009 г.*)

Рецензент: зав. каф. «Сельскохозяйственные машины» ГГТУ им. П. О. Сухого канд. техн. наук, доц. *В. Б. Попов*

Шабловский, О. Н.

Ш13 Аналитическая механика : пособие для студентов инженер.-техн. специальностей днев. и заоч. форм обучения / О. Н. Шабловский, Д. Г. Кроль. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2010. – 63 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: http://lib.gstu.local. – Загл. с титул. экрана.

Изложены основные теоретические сведения из аналитической механики. Представлены варианты заданий для составления уравнений Лагранжа второго рода.

Для студентов инженерно-технических специальностей дневной и заочной форм обучения.

УДК 531.011(075.8)
ББК 22.21я73

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

1.1. Свободные и несвободные материальные системы. Связи и их классификация

Совокупность материальных точек называется *системой материальных точек или материальной системой*, если движение каждой из них в отдельности зависит от движения и положения остальных точек. Это значит, что между точками материальной системы существуют силы взаимодействия.

Если каждая точка материальной системы может занять любое положение в пространстве и иметь любую скорость, то такую материальную систему называют *свободной*.

Если вследствие каких-либо ограничений (условий) точки и тела, составляющие материальную систему, не могут занять произвольного положения в пространстве и иметь произвольные скорости, то такая материальная система называется *несвободной*.

Подобно тому как силы, действующие на точки системы, подразделяют на силы внутренние и силы внешние, так и связи, наложенные на точки системы, можно подразделить на *связи внутренние* и *связи внешние*. Под внутренними связями понимают такие связи, которые будучи наложены на точки системы, не препятствуют системе свободно перемещаться после того, как она внезапно отвердеет. Связь, не обладающая этим свойством, называется внешней. Например, если две точки твердого тела соединены между собой нерастяжимым и невесомым стержнем, то такая связь будет внутренней. Таким образом твердое тело можно рассматривать как систему, подчиненную внутренним связям. Если же одна из точек твердого тела шарнирно закреплена, то в этом случае связь будет внешней.

Система, подчиненная одним лишь внутренним связям, является свободной, так как она может перемещаться как свободное твердое тело. Если же в числе связей, наложенных на точки системы, имеются внешние связи, то система является несвободной.

Ограничения (условия), которые не позволяют точкам материальной системы занимать произвольное положение в пространстве и иметь произвольные скорости, называются *связями*. Связь налагает ограничения на изменение координат и скоростей точек. Аналитически эти ограничения записываются в виде уравнений или неравенств.

Пусть материальная система состоит из n точек, а декартовыми координатами i-й точки будут $x_i, y_i, z_i (i = 1,2,...,n)$. Если на материальную систему будет наложена одна связь, то в общем случае аналитически это можно записать в виде:

$$f(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, ..., x_n, y_n, z_n, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, ..., \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n, t) \leq 0, \qquad (1.1)$$

где $\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i (i = 1,2,...,n)$ — проекции скорости i - й точки на оси декартовой системы координат; t — время. В случае знака равенства в выражении (1.1) связь называется *удерживающей*; если стоит знак неравенства, то связь называется *неудерживающей*.

Если уравнение удерживающей связи

$$f(x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, t) = 0 \qquad (1.2)$$

содержит явно время t, то связь называется *реономной* или *нестационарной.*

Если же уравнение связи не содержит времени (т.е. уравнение связи имеет вид

$$f(x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i) = 0 \qquad (1.3)$$

то связь называется *склерономной* или *стационарной.* Связь, накладывающая ограничения только на координаты точек системы, т. е. связь, уравнение которой не содержит производных от координат:

$$f(x_i, y_i, z_i, t) = 0 \qquad (1.4)$$

называется *геометрической* или *голономной*. Связь же, уравнение которой имеет вид (1.2), называется *кинематической*.

Если уравнение (1.2) кинематической связи путем интегрирования нельзя привести к виду (1.3), не содержащему производных, то эта связь называется *неголономной* или *неинтегрируемой*.

Материальная система, на которую наложены голономные связи, называется *голономной*, а материальная система с неголономными связями — *неголономной*.

Числом степеней свободы голономной материальной системы, называется число независимых параметров, полностью определяющих ее положение (конфигурацию), т. е. определяющих положение каждой точки системы.

Пусть на материальную систему, состоящую из n точек, наложено k связей вида (1.4). Это значит, что не все декартовы координаты точек системы независимы друг от друга. В самом деле, на $3n$ координат наложено k независимых уравнений связей. Решая эти уравнения связей относительно k каких-либо координат, мы выразим эти k координат через остальные $3n — k$. Эти $3n — k$ координат, которые могут принимать произвольные значения, и определяют положение точек системы. Таким образом, число степеней свободы будет равно

$$S = 3n - k$$

1.2. Виртуальные скорости. Виртуальные перемещения

Понятия о виртуальных скоростях и виртуальных перемещениях точек материальной системы являются одним из фундаментальных понятий аналитической механики. Введем сначала эти понятия на примере одной материальной точки.

Предположим, что материальная точка подчинена связи, уравнение которой имеет вид

$$f(x, y, z, t) = 0. \tag{1.5}$$

Пусть закон движения точки, обусловленный действующими на точку силами, будет

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \tag{1.6}$$

Подставляя закон (1.6) в уравнение связи (1.5), получим тождество

$$f[x(t), y(t), z(t), t] \equiv 0.$$

После дифференцирования этого тождества по времени будем иметь

$$\frac{\partial f}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\dot{z} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \tag{1.7}$$

Предположим, что в какой-либо фиксированный момент времени $t = t_0$ материальная точка имеет координаты x_0, y_0, z_0. Для этого момента времени условие (1.7) примет вид

$$(\frac{\partial f}{\partial x})_0 \dot{x} + (\frac{\partial f}{\partial y})_0 \dot{y} + (\frac{\partial f}{\partial z})_0 \dot{z} + (\frac{\partial f}{\partial t})_0 = 0 \tag{1.8}$$

где индекс 0 означает, что все четыре производные вычислены для значений x_0, y_0, z_0 и t_0. Производные $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, входящие в условие (1.8), также соответствуют моменту времени $t = t_0$. Выражение (1.8) представляет собой условие, которому должны удовлетворять в данный момент времени $t = t_0$ проекции $\dot{x} = v_x, \dot{y} = v_y, \dot{z} = v_z$ скорости точки

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{i} + \dot{z}\vec{k}.$$

Эту скорость называют *действительной* скоростью. Если связь стационарная, то ее уравнение имеет вид

$$f(x, y, z,) = 0$$

и условие (1.8) упрощается:

$$(\frac{\partial f}{\partial x})_0 \dot{x} + (\frac{\partial f}{\partial y})_0 \dot{y} + (\frac{\partial f}{\partial z})_0 \dot{z} = 0 \qquad (1.9)$$

Наряду с действительной скоростью точки введем в рассмотрение скорости.

$$\vec{\upsilon}^* = \dot{x}^*\vec{i} + \dot{y}^*\vec{i} + \dot{z}^*\vec{k} \qquad (1.10)$$

проекции которых в данный фиксированный момент времени удовлетворяют условию (1.9), т. е. тому же условию, которому удовлетворяют проекции действительной скорости при стационарной связи. Следовательно, если связь нестационарная, то введенные нами скорости υ^* представляют собой в данный момент времени кинематически возможные скорости точки при мгновенно остановленной связи, т. е. υ^*—это скорости, совместимые со связью, но не имеющие составляющих, обусловленных деформацией связи.

Такие скорости υ^* будем называть *виртуальными* скоростями.

Поясним сказанное на простом примере. Пусть материальная точка движется по какой-либо поверхности, которая в свою очередь перемещается в пространстве. Действительная скорость точки будет суммой двух составляющих: составляющей υ^*, расположенной в касательной плоскости, проведенной к точке поверхности, где находится в данный момент времени материальная точка, и определяемой уравнением (1.10), и составляющей, обусловленной перемещением поверхности. Виртуальные же скорости будут расположены только в касательной плоскости.

Из сравнений условий (1.8) и (1.9) вытекает, что в случае нестационарной связи, действительная скорость не совпадает с виртуальными скоростями. В случае же стационарной связи действительная скорость совпадает с одной из виртуальных скоростей.

Рассмотрим систему материальных точек, подчиненную k голономным нестационарным связям, описывающимся уравнениями

$$f(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, ..., x_n, y_n, z_n, t) = 0 \qquad (1.11)$$

Виртуальными скоростями такой системы называют скорости, проекции которых в данный момент времени удовлетворяют системе уравнений

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\dot{x}_i^* + \frac{\partial f_j}{\partial y_i}\dot{y}_i^* + \frac{\partial f_j}{\partial z_i}\dot{z}_i^*\right) = 0 \quad (j = 1,2,...,k) \qquad (1.12)$$

Проекции же действительных скоростей точек системы удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\dot{x}_i + \frac{\partial f_j}{\partial y_i}\dot{y}_i + \frac{\partial f_j}{\partial z_i}\dot{z}_i\right) + \frac{\partial f_j}{\partial t} = 0 \qquad (j = 1,2,...,k) \quad (1.13)$$

Это значит, что в случае нестационарных связей действительные скорости в общем случае не совпадают с виртуальными скоростями.

В случае стационарной связи уравнения (1.13) принимают вид

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\dot{x}_i + \frac{\partial f_j}{\partial y_i}\dot{y}_i + \frac{\partial f_j}{\partial z_i}\dot{z}_i\right) = 0 \quad (j = 1,2,...,k)$$

совпадающий с уравнениями (1.12), т. е. в этом случае действительные скорости совпадают с одной из систем виртуальных скоростей.

Действительным перемещением материальной точки называется вектор

$$d\vec{r} = \vec{v}dt\,.$$

Проекции этого вектора $dx = \dot{x}dt, dy = \dot{y}dt, dz = \dot{z}dz$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial t}dt = 0\,,$$

которое получается из уравнения (1.7) путем умножения его на dt.

Действительными перемещениями точек материальной системы называются векторы

$$d\vec{r}_i = \vec{v}_i \cdot dt = \dot{x}_i dt\vec{i} + \dot{y}_i dt\vec{j} + \dot{z}_i dt\vec{k}$$

Очевидно, что проекции этих векторов должны удовлетворять системе k уравнений

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}dx_i + \frac{\partial f_j}{\partial y_i}dy_i + \frac{\partial f_j}{\partial z_i}dz_i\right) + \frac{\partial f_j}{\partial t}dt = 0 \quad (j = 1,2,...,k) \qquad (1.14)$$

Перейдем к определению понятия виртуального перемещения. Предположим, что точка находится на поверхности $f(x, y, z, t) = 0$. Радиус-вектор $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ в фиксированный момент времени t определяет положение точки. Рассмотрим теперь множество бесконечно близких положений точки, допускаемых связью в этот фиксированный момент времени. Пусть эти бесконечно близкие положения определяются радиусом-вектором

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}(t) + \delta\vec{r} = (x + \delta x)\vec{i} + (y + \delta y)\vec{j} + (z + \delta z)\vec{k},$$

где $\delta x, \delta y, \delta z$ —проекции вектора $\delta\vec{r}$. Вектор

$$\vec{\delta r} = \delta x\vec{i} + \delta y\vec{j} + \delta z\vec{k}$$

представляет собой бесконечно малое приращение радиуса-вектора $\vec{r}(t)$ при мысленном перемещении точки из положения, определяемого радиусом-вектором $\vec{r}(t)$, в положение, определяемое радиусом-вектором $\vec{r}'(t)$. Этот вектор называется *вектором виртуального перемещения*. Вектор $\delta\vec{r}$ иначе называют *вариацией вектора* $\vec{r}$, а его проекции $\delta x, \delta y, \delta z$ - *вариациями координат*.

Виртуальными перемещениями точек материальной системы, подчиненной k связям вида (1.11), называют совокупность бесконечно малых векторов

$$\delta\vec{r}_i = \delta x_i\vec{i} + \delta y_i\vec{j} + \delta z_i\vec{k}$$

проекции которых удовлетворяют системе уравнений

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial f_j}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial f_j}{\partial z_i}\delta z_i\right) = 0 \quad (j = 1,2,...,k) \tag{1.15}$$

Отметим, что при стационарных связях в соответствии с условием (1.14), проекции действительных перемещений удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}dx_i + \frac{\partial f_j}{\partial y_i}dy_i + \frac{\partial f_j}{\partial z_i}dz_i\right) = 0 \quad (j = 1,2,...,k)$$

Это значит, что для стационарных связей действительные перемещения совпадают с одним из виртуальных перемещений.

1.3. Виртуальная работа. Признак идеальности связей

Если на точки материальной системы в данном положении и в фиксированный момент времени действует система сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, ..., \vec{F}_n$, а виртуальные перемещения точек системы равны $\delta\vec{r}_1, \delta\vec{r}_2, ..., \delta\vec{r}_n$, то *виртуальной работой* называется работа этих сил на виртуальных перемещениях системы, т. е.

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i,$$

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n}\left(X_i\delta x_i + Y_i\delta y_i + Z_i\delta z_i\right).$$

Определим понятие идеальных связей. *Идеальными связями* называются такие связи, для которых виртуальная работа реакций связей на любом виртуальном перемещении системы равна нулю, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{R}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0, \tag{1.16}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(R_{ix} \delta x_i + R_{iy} \delta y_i + R_{iz} \delta z_i \right) = 0 \tag{1.17}$$

где $\vec{R}_i$ — реакция связи, приложенная к i -й точке.

Воспользуемся условием (1.16) для выражения реакций связей, используя неопределенные множители Лагранжа.

Вспомним, что вариации координат $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ подчинены уравнениям (1.15).

Каждое из этих k уравнений умножим соответственно на неопределенные множители Лагранжа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$, которые могут быть функциями координат и времени:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_j \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f_j}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f_j}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0 \; \left(j = 1, 2, ..., k \right)$$

Полученные выражения сложим:

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\delta x_i \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} + \delta y_i \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial y_i} + \delta z_i \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial z_i} \right] = 0 \tag{1.18}$$

Вычтя теперь из соотношения (1.17) выражение (1.18), получим

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\delta x_i (R_{xi} - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}) + \delta y_i (R_{yi} - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial y_i}) + \delta z_i (R_{zi} - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial z_i}) \right] = 0 \tag{1.19}$$

Так как в силу уравнений (1.15) независимых вариаций координат будет $3n - k$, то выберем множители Лагранжа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ таким образом, чтобы коэффициенты при k вариациях координат обращались в нуль. Оставшиеся в выражении (1.19) $3n - k$ вариации координат будут независимы, и поэтому множители при них также должны быть равны нулю. Таким образом,

$$R_{xi} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \quad R_{yi} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial y_i}, \quad R_{zi} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial z_i}. \tag{1.20}$$

1.4. Обобщенные координаты. Обобщенные силы

Для определения положения материальной системы можно использовать другие независимые друг от друга параметры $q_1, q_2, ..., q_s$.

Эти параметры могут иметь различную размерность — это могут быть углы, длины дуг, площади и т. п. Все $3n$ декартовых координат можно выразить через введенные параметры $q_{1,} q_2,...,q_s$:

$$x_i = x_i(q_1, q_2,...,q_s,t), \quad y_i = y_i(q_1, q_2,...,q_s,t), \quad z_i = z_i(q_1, q_2,...,q_s,t),$$

$$(i = 1,2,...,n). \tag{1.21}$$

Эти функции обращают в тождество уравнения связей

$$f_i(x_i, y_i, z_i, t) = 0, \; (j = 1,2,...,k).$$

Будем предполагать, что любое положение материальной системы, совместимое со связями, однозначно определяется при помощи функций (1.21) некоторыми значениями параметров $q_{1,} q_2,...,q_s$. Эти независимые между собой параметры $q_{1,} q_2,...,q_s$ (s—число степеней свободы) называются *обобщенными координатами*.

Уравнения (1.21) могут быть записаны в векторной форме:

$$\vec{r}_i = x_i\vec{i} + y_i\vec{j} + z_i\vec{k} = \vec{r}_i(q_1, q_2, ..., q_s, t) \tag{1.22}$$

При наличии стационарных связей функции (1.22) можно выбрать так, чтобы они не содержали явно времени t, т. е. имели вид

$$x_i = x_i(q_1, q_2,...,q_s), \quad y_i = y_i(q_1, q_2,...,q_s), \quad z_i = z_i(q_1, q_2,...,q_s)$$

$$(i = 1,2,...,n) \tag{1.23}$$

При этом радиусы-векторы точек системы также будут функциями только обобщенных координат:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2,...,q_s) \qquad (i = 1,2,...,n).$$

Дифференциалы от функций (1.21), вычисленные в предположении, что время t фиксировано, имеют вид

$$\tilde{d}x_i = \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial x_i}{\partial q_m}\tilde{d}q_m, \quad \tilde{d}y_i = \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial y_i}{\partial q_m}\tilde{d}q_m, \quad \tilde{d}z_i = \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial z_i}{\partial q_m}\tilde{d}q_m.$$

Найдем дифференциалы при фиксированном t от тождеств, которые получаются из уравнений связей после подстановки в них функций (1.21):

$$f_j(x_i, y_i, z_i, t) = 0 \qquad (j = 1,2,...,k)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\tilde{d}x_i + \frac{\partial f_j}{\partial y_i}\tilde{d}y_i + \frac{\partial f_j}{\partial z_i}\tilde{d}z_i \right) = 0 \; (j = 1,2,...,k)$$

Полученные уравнения совпадают с уравнениями (1.15). Следовательно, дифференциалы $\tilde{d}x_i, \tilde{d}y_i, \tilde{d}z_i$ совпадают с вариациями координат $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$.

Таким образом, мы установили «рецептуру» вычисления вариаций координат. Как для стационарной связи, так и для нестационарной вариации координат будем вычислять по формулам

$$\delta x_i = \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial x_i}{\partial q_m} \delta q_m, \quad \delta y_i = \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial y_i}{\partial q_m} \delta q_m, \quad \delta z_i = \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial z_i}{\partial q_m} \delta q_m \tag{1.24}$$

Здесь

$$\delta q_m = \tilde{d} q_m \quad (m = 1,2,...,s)$$

называются *вариациями обобщенных координат*.

В соответствии с выражениями (1.22) и (1.24) для виртуальных перемещений будем иметь

$$\vec{\delta} r_i = \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_m} \delta q_m \tag{1.25}$$

Подставляя соотношение (1.25) в выражение для виртуальной работы

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i,$$

получим

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_m} \delta q_m .$$

Внося $\vec{F}_i$ под знак второй суммы и меняя порядок суммирования, будем иметь

$$\delta A = \sum_{m=1}^{s} \delta q_m \cdot \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_m}.$$

Суммы

$$Q_m = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_m} = \sum_{i=1}^{n} \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_m} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_m} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_m} \right) (m = 1,2,...,s) \tag{1.26}$$

называются *обобщенными силами*. Каждой обобщенной координате q_m соответствует своя обобщенная сила Q_m. Итак

$$\delta A = \sum_{m=1}^{s} Q_m \delta q_m = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + ... + Q_m \delta q_m. \tag{1.27}$$

Выражение (1.27) позволяет дать следующее определение обобщенных сил: *обобщенными силами называются коэффициенты при вариациях обобщенных координат в выражении для виртуальной работы*.

1.5. Принцип виртуальных перемещений

Пусть материальная система подчинена k голономным стационарным связям

$$f_j = (x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, ..., x_n, y_n, z_n) = 0 \qquad (j = 1,2,...,k)$$

Дифференциальные уравнения движения этой несвободной системы имеют вид

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i \qquad (i = 1,2,...,n) \qquad (1.28)$$

где i — номер точки, $\vec{a}_i$ - ее ускорение, m_i - масса, $\vec{F}_i$ и $\vec{R}_i$ соответственно равнодействующие всех активных сил и реакций связей, приложенных к i-й точке.

В положении равновесия материальной системы скорости и ускорения всех ее точек равны нулю, т. е.

$$\vec{v}_i = 0, \quad \vec{a}_i = 0 \quad (i = 1,2,...,n)$$

или, в соответствии с уравнениями (1.28),

$$\vec{v}_i = 0, \quad \vec{F}_i + \vec{R}_i = 0 \quad (i = 1,2,...,n)$$

Необходимым и достаточным условием равновесия голономной материальной системы, подчиненной только идеальным связям, является равенство нулю работы всех активных сил на любом виртуальном перемещении точек, материальной системы, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \qquad (1.29)$$

Кроме того, в соответствии с определением равновесия $\vec{v}_i(t_0) = 0$ $(i = 1,2,...,n)$ где t_0 —начальный момент времени.

Принцип виртуальных перемещений является вариационным принципом, поскольку здесь рассматривается не одна конфигурация системы, а совокупность возможных конфигураций, получаемых в результате виртуальных перемещений, допускаемых наложенными на точки системы связями.

Большим достоинством рассматриваемого принципа является то, что совокупность всех условий равновесия можно выразить с помощью *одного* уравнения, не входя в детали тех связей, которые наложены на точки системы. В формулировку принципа виртуальных перемещений не входят реакции связей, что избавляет от необходимости определять реакции связей. С другой стороны, с помощью принципа виртуальных перемещений можно весьма просто находить и реакции связей. Для этого следует воспользоваться принципом освобождаемости. Отбрасывая связь, мы заменяем ее действие реакцией связи, при этом, как уже отмечалось, увеличивается число степеней свободы системы. Рассматривая затем систему с освобожденной связью, сообщаем ей виртуальное перемещение. Пользуясь, далее, принципом виртуальных перемещений и приравнивая нулю сумму всех виртуальных работ, включая работу реакции связи, получаем одно уравнение, из которого может быть найдена искомая реакция связи.

Принцип виртуальных перемещений позволяет получить все условия равновесия. При этом следует подчеркнуть, что уравнений равновесия для системы может быть получено столько, сколько независимых виртуальных перемещений можно осуществить в системе. Другими словами, число условий равновесия, которые можно составить для системы, совпадает с числом ее степеней свободы.

Если наложенные на систему связи не идеальные, то непосредственно принцип виртуальных перемещений к таким системам неприменим. Однако в этом случае, например, при движении точек по негладким поверхностям, следует реакции разложить на нормальные составляющие и силы трения. Далее принять, что связи идеальные, а силы трения отнести к активным силам. Конечно, при этом следует учитывать условия равновесия при наличии трения.

В обобщенных координатах условие (1.29), в соответствии с равенством (1.27), имеет вид

$$Q_1\delta_1 + Q_2\delta_2 + \ldots + Q_s\delta_s = 0$$

Так как $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_s$ могут принимать любые значения независимо друг от друга, то полученное соотношение может быть выполнено, если все обобщенные силы, одновременно будут равны нулю т. е,

$$Q_m = 0 \quad (m = 1, 2, \ldots, s) \tag{1.30}$$

Следовательно, необходимым и достаточным условием существования положения равновесия голономной стационарной системы, подчиненной идеальным связям, является равенство нулю скоростей всех точек системы и равенство нулю всех обобщенных сил.

Если силы, действующие на точки голономной стационарной системы, консервативные, то выполняются соотношения

$$X_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_i}, \quad Y_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_i}, \quad Z_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial z_i},$$

где $\Pi = \Pi(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, ..., x_n, y_n, z_n)$ — потенциальная энергия.

В этом случае

$$Q_m = -\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial q_m} + \frac{\partial \Pi}{\partial y_i}\cdot\frac{\partial y_i}{\partial q_m} + \frac{\partial \Pi}{\partial z_i}\cdot\frac{\partial z_i}{\partial q_m}\right) = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_m} \quad (m = 1,2,...,s) \quad (1.31)$$

Таким образом, если силы консервативны, то обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате q_m, равна взятой с обратным знаком производной от потенциальной энергии по обобщенной координате. Условие (1.31) в этом случае запишется в виде

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_m} = 0 \qquad (m = 1,2,...,s)$$

Отсюда следует, что в положении равновесия потенциальная энергия системы имеет экстремальное значение.

1.6. Устойчивость состояния равновесия

Принцип виртуальных перемещений, рассмотренный в предыдущих параграфах, устанавливает необходимые и достаточные условия равновесия материальной системы. Но не каждое состояние равновесия можно реализовать практически. В самом деле, для сферического маятника, обобщенные силы равны

$$Q_1 = -Pl\sin\Theta, \; Q_2 = 0.$$

Условием равновесия будет $Pl\sin\Theta = 0$, откуда $\Theta = n\pi$. $(n = 0,1,...)$

Практически этому условию соответствуют два положения равновесия: нижнее при $\Theta = 0$ и верхнее при $\Theta = \pi$. Для положения равновесия при $\Theta = 0$ характерно то, что при сообщении маятнику достаточно малого отклонения от этого положения равновесия и достаточно малой скорости он будет довершать движения вблизи состояния равновесия. Для состояния же равновесия при $\Theta = \pi$ при сколь угодно малых отклонениях маятника от него и при сколь угодно малой начальной скорости маятник будет удаляться от этого положения равновесия.

Положения равновесия материальной системы, для которых небольшие отклонения от этих положений равновесия и небольшие начальные скорости точек системы не приводят к выходу материальной системы из достаточно малой окрестности положения равновесия, называются *устойчивыми.*

Если же сколь угодно малые отклонения системы от положения равновесия и сколь угодно малые начальные скорости приводят к возрастающему отклонению материальной системы от положения равновесия, то это положение равновесия называется *неустойчивым.*

Может существовать еще и так называемое безразличное положение равновесия характерное тем, что при выводе системы из этого положения она окажется в новом положении равновесия и не будет стремиться приблизиться к прежнему положению равновесия или удалиться от него. Примером такого положения равновесия может служить положение равновесия тяжелого шара на горизонтальной плоскости. А. М. Ляпунов дал строгое определение устойчивости состояния положения равновесия:

Устойчивым положением равновесия системы называется такое ее положение, когда при достаточно малом начальном отклонении от него и при достаточно малых начальных скоростях все точки системы, имея сколь угодно малые скорости, будут двигаться так, что все они не уйдут от своего равновесного положения далее наперед заданного расстояния, как бы оно мало ни было.

Приведем теперь достаточный признак устойчивости положения равновесия материальной системы в консервативном силовом поле, даваемый теоремой Лагранжа — Дирихле.

В теореме Лагранжа —Дирихле дается строгое доказательство того, что для любой материальной системы (в консервативном силовом поле) минимум потенциальной энергии является признаком устойчивого состояния равновесия. Приведем формулировку теоремы Лагранжа— Дирихле: *если для материальной системы, находящейся в консервативном силовом поле и подчиненной голономным идеальным стационарным связям, потенциальная энергия в положении равновесия системы имеет минимум, то это положение равновесия устойчиво.*

Отметим, что минимум потенциальной энергии обеспечивает выполнение условий равновесия, так как в положении равновесия потенциальная энергия имеет экстремальное значение.

Если заданными силами, действующими на систему с идеальными связями, будут только силы тяжести, то из теоремы Лагранжа — Дирихле следует: если центр тяжести системы занимает наинизшее положение, то это положение будет устойчивым положением равновесия (принцип Торричелли).

Если в положении равновесия потенциальная энергия не имеет минимума, то исследование устойчивости состояния равновесия становится очень сложной задачей.

Приведем формулировку одной из теорем Ляпунова: *если отсутствие минимума потенциальной энергии* П *в исследуемом положении равновесия обнаруживается уже по членам второго порядка (или вообще по членам наименьшего порядка) в разложении* $\Pi(q_1, q_2,...,q_s)$ *в ряд Тейлора, то равновесие неустойчиво.*

Разложим потенциальную энергию системы в ряд по степеням обобщенных координат. Это разложение начинается с членов не ниже второго порядка относительно координат, если за начало координат принято положение равновесия и потенциальная энергия в положении равновесия считается равной нулю:

$$\Pi = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1^2}\right)_0 q_1^2 + 2\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1 \partial q_2}\right)_0 q_1 q_2 + ... + \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_k^2}\right)_0 q_k^2\right] + ... \tag{1.32}$$

обозначим производные второго порядка потенциальной энергии, вычисленные в положении равновесия, через

$$c_{kj} = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_k \partial q_j}\right)_0 q_k q_j . \tag{1.33}$$

коэффициенты c_{kj} - постоянные числа. Теперь выражение для потенциальной энергии (1.32) примет вид:

$$\Pi = \frac{1}{2}\left[c_{11} q_1^2 + 2 c_{12} q_1 q_2 + ... + c_{nn} q_n^2\right] + ... \tag{1.34}$$

Если квадратичная форма

$$\Pi = \frac{1}{2}\left[c_{11} q_1^2 + 2 c_{12} q_1 q_2 + ... + c_{nn} q_n^2\right] \tag{1.35}$$

определенно положительна (положительна при всех значениях $q_1, q_2,..., q_n$ не равных нулю одновременно) то и полная потенциальная энергия будет при достаточно малых значениях $q_1, q_2,..., q_n$ определенно положительной. Это означает, что потенциальная энергия будет иметь в положении равновесия минимум.

Составим из коэффициентов c_{kj} матрицу

$$\left\|\begin{matrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{matrix}\right\| \tag{1.36}$$

Согласно выражения (1.33) $c_{kj} = c_{jk}$, т.е. матрица (1.36) симметрична.

Вычислим главные диагональные миноры матрицы (1.36)

$$\Delta_1 = c_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix},\ \dots,\ \Delta_n = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.37}$$

воспользуемся критерием Сильвестра: если все главные диагональные миноры $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n$ положительны

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, ..., \Delta_n > 0\ , \tag{1.38}$$

то квадратичная форма (1.34) определенно положительна. Если хотя бы один из главных диагональных миноров отрицателен, то квадратичная форма (1.34) может принимать отрицательные значения.

Для системы с одной степенью свободы критерий устойчивости принимает совсем простой вид:

$$c_{11} = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2}\right)_0 \begin{cases} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{cases} \tag{1.39}$$

2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

2.1. Уравнения Лагранжа первого рода

Рассмотрим систему n материальных точек, подчиненную k голономным идеальным связям. Дифференциальные уравнения движения точек материальной системы в координатной форме, в проекциях на оси декартовой системы координат имеют вид

$$m_i \ddot{x}_i = X_i + R_{xi}, \quad m_i \ddot{y}_i = Y_i + R_{yi}, \quad m_i \ddot{z}_i = Z_i + R_{zi}, \quad (i = 1,2,...,n) \tag{2.1}$$

где m_i— масса i-й точки, X_i, Y_i, Z_i — проекции равнодействующей активных сил, приложенных к i-й точке, R_{xi}, R_{yi}, R_{zi} — проекции равнодействующей реакций связей, действующих на i-ю точку.

Если активные силы заданы, то система уравнений (2.1) представляет собой систему $3n$ уравнений с $6n$ неизвестными: $3n$ координат x_i, y_i, z_i и $3n$ проекций реакций связей R_{xi}, R_{yi}, R_{zi}. Присоединяя к этим уравнениям k уравнений связи

$$f_j(x_i, y_i, z_i, t) = 0 \ \left(i = 1,2,...,k\right) \tag{2.2}$$

будем иметь уже $3n+k$ уравнений. Для получения остальных $3n$-k уравнений следует учесть характер связей.

Так как связи идеальные, то проекции реакций связей, в соответствии с формулами (1.19), запишутся в виде

$$R_{xi} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \quad R_{yi} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial y_i}, \quad R_{zi} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial z_i} \quad \left(i = 1,2,...,n\right) \tag{2.3}$$

Подставляя эти выражения в уравнения (2.1), получим

$$m_i \ddot{x}_i = X_i + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \quad m_i \ddot{y}_i = Y_i + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial y_i}, \quad m_i \ddot{z}_i = Z_i + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial z_i},$$

$$\left(i = 1,2,...,n\right) \tag{2.4}$$

Присоединяя к этим $3n$ уравнениям k уравнений связей (2.2),будем иметь $3n+k$ уравнений относительно $3n+k$ неизвестных координат x_i, y_i, z_i и множителей Лагранжа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$. После решения этой системы уравнений проекции реакций могут быть найдены по формулам (2.3).

Уравнения (2.4) называются *уравнениями Лагранжа первого рода*. Следует отметить, что практическое использование уравнений (2.4) в системах с большим количеством точек весьма затруднительно из-за большого числа уравнений.

2.2. Общее уравнение динамики. Уравнения Лагранжа второго рода

Общее уравнение динамики имеет вид [6, 7].

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\vec{F}_i + \vec{\Phi}_i\right) \cdot \delta r_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i\right) \cdot \delta r_i = 0 \tag{2.5}$$

В каждый момент движения материальной системы, подчиненной идеальным связям, виртуальная работа всех активных сил и сил *инерции на виртуальных перемещениях точек материальной системы равна нулю.*

Уравнение (2.5) и представляет собой общее уравнение динамики, или уравнение Даламбера—Лагранжа. Если X_i, Y_i, Z_i — проекции силы $\vec{F}_i$ на оси декартовой системы координат, а $\ddot{x}_i, \ddot{y}_i, \ddot{z}_i$ — проекции ускорения i-й точки на эти же оси, то уравнение (2.5) можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^{n}\left[(X_i - m_i\ddot{x}_i)\delta x_i + (Y_i - m_i\ddot{y}_i)\delta y_i + (Z_i - m_i\ddot{z}_i)\delta z_i\right] = 0. \qquad (2.6)$$

Уравнения движения несвободной голономной системы в обобщенных координатах (уравнения Лагранжа) получают из общего уравнения динамики. Вывод этих уравнений хорошо известен из традиционного курса теоретической механики.

Уравнения Лагранжа имеют вид [6, 7]:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_m} = Q_m \qquad (m = 1,2,...,s) \qquad (2.7).$$

Обобщенные координаты $(v = 1,2,...,\mathrm{d})$ должны удовлетворять условиям — однозначно определять положение системы и быть между собой независимыми. В остальном выбор обобщенных координат вообще произволен. Однако весьма важен «удачный» выбор этих координат. Термин «удачный» нужно понимать в том смысле, что уравнения движения при таком выборе получают наиболее компактный вид. Например, для математического маятника наиболее удачной обобщенной координатой является угол φ. Производные от обобщенных координат $\dot{q}_1, \dot{q}_2, .., \dot{q}_s$ называются *обобщенными скоростями*. Уравнения Лагранжа второго рода не содержат реакций идеальных связей, что делает их удобными для практического использования. Таким образом, в общем случае каких угодно активных сил и при наличии идеальных связей движение материальной системы определяется *s* уравнениями Лагранжа второго рода (2.7).

Для составления левых частей этих уравнений следует выразить кинетическую энергию через обобщенные координаты и обобщенные скорости. Обобщенные силы, стоящие в правых частях этих уравнений, могут быть найдены или непосредственно по формулам (1.26), или как коэффициенты при вариациях обобщенных координат в выражении для возможной работы (1.27).

Система уравнений Лагранжа второго рода представляет собой, систему s обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно обобщенных координат. Интегрирование этих уравнений дает нам обобщенные координаты $q_1, q_2, .., q_s$ как функции времени и *2s* произвольных постоянных интегрирования. Далее на основании формул (2.6) можно получить декартовы координаты в зависимости от времени t и *2s* произвольных постоянных интегрирования.

Замечание. При применении уравнений Лагранжа второго рода к задачам на относительное движение, а также к задачам с нестационарными связями кинетическую энергию материальной системы следует вычислять в ее абсолютном движении; при нахождении обобщенных сил нужно исходить из того, что связи считаются мгновенно остановленными.

2.3. Учет дополнительных связей

Рассмотрим теперь вопрос об учете дополнительных связей, которые могут быть наложены на точки материальной системы.

Пусть на систему, подчиненную k связям, дополнительно налагается еще r связей. В этом случае число ранее выбранных обобщенных координат $3n-k$ будет превосходить число степеней свободы $3n-k-r$, торые теперь имеет рассматриваемая система. Дополнительные связи мы будем учитывать путем введения реакций этих связей в число активных сил. Обозначим эти реакции через $\vec{R}_i'$. Виртуальная работа при этом вычисляется по формуле

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n}(\vec{F}_i + \vec{R}_i')\cdot\delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{n}(Q_m + Q_m')\cdot\delta q_m,$$

где Q_i' — обобщенные силы, обусловленные реакциями $\vec{R}_i'$. Следовательно, обобщенные силы в уравнениях Лагранжа будут состоять из двух частей, соответствующих активным силам и реакциям новых связей, т. е.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_m} = Q_m + Q_m' \quad (m = 1,2,...,s) \tag{2.8}$$

Если новые связи идеальные, то в соответствии с формулами (1.19)

$$R'_{xi} = \sum_{\rho=1}^{r} \lambda_\rho \frac{\partial f_\rho}{\partial x_i}, \quad R'_{yi} = \sum_{\rho=1}^{r} \lambda_\rho \frac{\partial f_\rho}{\partial y_i}, \quad R'_{zi} = \sum_{\rho=1}^{r} \lambda_\rho \frac{\partial f_\rho}{\partial z_i} \;\; (i = 1,2,...,n) \tag{2.9}$$

λ_ρ — множители Лагранжа, а

$$f_\rho(x_i, y_i, z_i, t) = 0 \qquad (\rho = 1,2,...,r) \tag{2.10}$$

— уравнения дополнительных связей.

Согласно формуле (1.26) имеем

$$Q'_m = \sum_{i=1}^{n} \left(R'_{xi} \frac{\partial x_i}{\partial q_m} + R'_{yi} \frac{\partial y_i}{\partial q_m} + R'_{zi} \frac{\partial z_i}{\partial q_m} \right)$$

или, учитывая выражения (2.9), получим

$$Q'_m = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_m} \sum_{\rho=1}^{r} \lambda_\rho \frac{\partial f_\rho}{\partial x_i} + \frac{\partial y_i}{\partial q_m} \sum_{\rho=1}^{r} \lambda_\rho \frac{\partial f_\rho}{\partial y_i} + \frac{\partial z_i}{\partial q_m} \sum_{\rho=1}^{r} \lambda_\rho \frac{\partial f_\rho}{\partial z_i} \right) =$$

$$= \sum_{\rho=1}^{r} \lambda_\rho \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f_\rho}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_m} + \frac{\partial f_\rho}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial q_m} + \frac{\partial f_\rho}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial z_i}{\partial q_m} \right) = \sum_{\rho=1}^{r} \lambda_\rho \frac{\partial f_\rho}{\partial q_m}$$

$$(m = 1,2,...,s)$$

Таким образом, уравнения (2.8) могут быть записаны в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_m} = Q_m + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial q_m} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial q_m} + ... + \lambda_r \frac{\partial f_r}{\partial q_m}. \tag{2.11}$$

Для фактического решения этой задачи к уравнениям (2.11) (их число $3n - k$) следует присоединить еще r уравнений новых связей (2.10). Тогда мы получим систему $3n - k + r$ уравнений с тем же числом неизвестных: $3n - k$ обобщенных координат и r лагранжевых множителей.

2.4. Обобщенные реакции отброшенных связей

Рассмотрим голономную систему с s степенями свободы. Пусть $q_1, q_2, ..., q_s$ —обобщенные координаты, определяющие положение системы. Отбросим r связей. Тогда число степеней свободы увеличится до $s + r$. К старым обобщенным координатам $q_1, q_2, ..., q_s$ прибавим r новых $q_{s+1}, q_{s+2}, ..., q_{s+r}$ и будем иметь в виду, что при $q_{s+\mu} = 0$ $(\mu = 1,2,...,r)$ новая материальная система совпадает с исходной системой. Мы можем представить переход от новой системы к исходной как наложение на новую систему r новых связей вида

$$f_{s+\mu} = q_{s+\mu} = 0 \quad (\mu = 1,2,...,r).$$

Тогда, в соответствии с уравнениями (2.11), имеем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_m} = Q_m + \sum_{\mu=1}^{r} \lambda_\mu \frac{\partial f_{s+\mu}}{\partial q_m}, \qquad \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_{s-\mathrm{d}},$$

но так как

$$\frac{\partial f_{s+\mu}}{\partial q_m} = \begin{cases} 0, s+\mu \neq m & (m = 1,2,...,s+r) \\ 1, s+\mu = m & (\mu = 1,2,...,r) \end{cases}$$

то

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_m} = Q_m \quad (m = 1,2,...,s)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_m} = Q_m + \lambda_m \quad (m = s+1,...,s+r)$$

Эти уравнения следует рассматривать совместно с уравнениями связей

$$f_{s+\mu} = q_{s+\mu} = 0 \; (\mu = 1,2,...,r)$$

Следовательно, после составления полученных уравнений в них следует принять

$$q_{s+\mu} = 0, \quad \dot{q}_{s+\mu} = 0, \quad \ddot{q}_{s+\mu} = 0$$

Итак, для получения обобщенных реакций отброшенных связей служат уравнения

$$\lambda_m = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_m} - Q_m \qquad (m = s+1,...,s+r)$$

в которых после их составления следует принять

$$q_{s+\mu} = 0, \quad \dot{q}_{s+\mu} = 0, \quad \ddot{q}_{s+\mu} = 0 \;\; (\mu = 1,2,...,r)$$

Укажем здесь без вывода выражения для кинетической энергии через обобщенные координаты и обобщенные скорости.

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m v_i^{\,2} = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{s}\sum_{p=1}^{s} A_{mp}\dot{q}_m\dot{q}_p + \sum_{m=1}^{s} B_m \dot{q}_m + T_0$$

где

$$A_{mp} = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_m} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_p}\right) = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_m} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_p} + \frac{\partial y_i}{\partial q_m} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial q_p} + \frac{\partial z_i}{\partial q_m} \cdot \frac{\partial z_i}{\partial q_p}\right)$$

(очевидно, что $A_{mp} = A_{pm}$),

$$B_m = \sum_{i=1}^{n} m_i (\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_m} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}) = \sum_{i=1}^{n} m_i (\frac{\partial x_i}{\partial q_m} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{\partial y_i}{\partial q_m} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial t} + \frac{\partial z_i}{\partial q_m} \cdot \frac{\partial z_i}{\partial t}),$$

$$T_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} m_i (\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t})^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \left[(\frac{\partial x_i}{\partial t})^2 + (\frac{\partial y_i}{\partial t})^2 + (\frac{\partial z_i}{\partial t})^2 \right]^2$$

Кинетическая энергия нестационарной (реономной) голономной материальной системы может быть представлена как сумма трех частей: T_2, T_1, T_0.

$$T = T_2 + T_1 + T_0,$$

где

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{s} \sum_{m=1}^{s} A_{mp} \dot{q}_m \dot{q}_p$$

является однородным многочленом второй степени от обобщенных скоростей.

$$T_1 = \sum_{m=1}^{s} B_m \dot{q}_m$$

-многочлен первой степени от обобщенных скоростей;

$$T_0 = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n} m_i (\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t})^2$$

от обобщенных скоростей не зависит.

Для стационарных (склерономных) связей, т. е. связей, для которых $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, ..., q_s)$ и, следовательно, $\partial \vec{r} / \partial t \equiv 0$, кинетическая энергия будет однородной функцией второй степени относительно обобщенных скоростей, т. е.

$$T = T_2 = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{s} \sum_{m=1}^{s} A_{mp} \dot{q}_m \dot{q}_p ; \; \frac{dT}{dt} = \sum_{m=1}^{s} Q_m \dot{q}_m .$$

Рассмотрим частные случаи сил, являющихся линейными и однородными функциями обобщенных координат, т. е. $Q_m = \sum_{\mu=1}^{s} B_{m\mu} \dot{q}_\mu$.

Если $B_{m\mu} = \gamma_{m\mu}$, где $\gamma_{m\mu} = -\gamma_{\mu m}$ и $\gamma_{\mu\mu} = 0$ $(m, \gamma = 1,2,...,s)$, то $Q_m = \sum_{\mu=1}^{s} \gamma_{m\mu} \dot{q}_\mu$ называются *гироскопическими силами*.

Пусть теперь $B_{m\mu} = -b_{m\mu}$, где $\beta_{m\mu} = \beta_{\mu m}$. Тогда $Q_m = -\sum_{\mu=1}^{s} \beta_{m\mu} \dot{q}_\mu$ и $\frac{dT}{dt} = -\sum_{m=1}^{s} \sum_{m=1}^{s} \beta_{m\mu} \dot{q}_m \dot{q}_\mu$. Если квадратичная форма $\sum_{m=1}^{s} \sum_{m=1}^{s} \beta_{m\mu} \dot{q}_m \dot{q}_\mu > 0$, то $\frac{dT}{dt} < 0$, т. е. кинетическая энергия убывает. Силы $Q_m = -\sum_{\mu=1}^{s} \beta_{m\mu} \dot{q}_\mu$ называются *диссипативными*.

2.5. Уравнения Лагранжа в квазикоординатах

Введем в рассмотрение величины $d\pi_\lambda (\lambda = 1,2,....,s)$, которыми обозначим линейные комбинации дифференциалов обобщенных координат:

$$d\pi_\lambda = \alpha_{\lambda 1} dq_1 + \alpha_{\lambda 2} dq_2 + ... + \alpha_{\lambda s} dq_s = \sum_{m=1}^{s} \alpha_{\lambda m} dq_m \,, \qquad (2.12)$$

где $\alpha_{\lambda m}$ могут быть функциями обобщенных координат. Для того чтобы $d\pi_\lambda$ выражении (2.12) были полными дифференциалами достаточно выполнения условий

$$\frac{\partial \alpha_{\mu m}}{\partial q_\nu} - \frac{\partial \alpha_{\mu\nu}}{\partial q_m} = 0 \quad (\mu, m, \nu = 1,2,...,s)$$

В этом случае π_λ могут быть приняты за обычные обобщенные координаты.

Мы будем рассматривать случаи, когда

$$\frac{\partial \alpha_{\mu m}}{\partial q_\nu} - \frac{\partial \alpha_{\mu\nu}}{\partial q_m} \neq 0 \,,$$

т. е. когда выражения (2.12) не являются полными дифференциалами. Если бы обобщенные координаты $q_1, q_2, ..., q_s$ нам были известны как функции времени, то величины π_λ можно было бы определить по формулам

$$\pi_\lambda = \int_0^t \sum_{m=1}^{s} \alpha_{\lambda m} \dot{q}_m dt \qquad (2.13)$$

Эти величины уже не являются функциями положения материальной системы и не могут быть приняты за обобщенные координаты. Несмотря на это, мы примем π_λ за обобщенные координаты и будем их называть *квазикоординатами*. Величины

$$\frac{d\pi_\lambda}{dt} = \delta\dot{\pi}_\lambda = \sum_{m=1}^{s} \alpha_{\lambda m} \delta\, \dot{q}_m \tag{2.14}$$

называются *квазискоростями.*

В соответствии с выражением (2.14) определим вариации квазикоординат с помощью выражений

$$\delta\pi_\lambda = \sum_{m=1}^{s} \alpha_{\lambda m} \delta\, q_m$$

Из соотношений (2.13) можно получить

$$\dot{q}_m = \sum_{\lambda=1}^{s} \beta_{m\lambda} \dot{\pi}_\lambda \qquad (m = 1, 2, ..., s) \tag{2.15}$$

и

$$\delta q_m = \sum_{\lambda=1}^{s} \beta_{m\lambda} \delta\pi_\lambda \qquad (m = 1, 2, ..., s) \tag{2.16}$$

Представляя $\dot{\pi}_\lambda$, определяемое формулой (2.14), в выражении (2.15), имеем

$$\dot{q}_m = \sum_{\lambda=1}^{s} \sum_{\mu=1}^{s} \beta_{m\lambda} \alpha_{\lambda\mu} \dot{q}_\mu \qquad (m = 1, 2, ..., s).$$

Отсюда следует

$$\sum_{\mu=1}^{s} \beta_{m\lambda} \alpha_{\lambda\mu} = \begin{cases} 1, & m = \mu, \\ 0, & m \neq \mu. \end{cases}$$

Перейдем к выводу уравнений Лагранжа в квазикоординатах. Каждое из уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_m} = Q_m \qquad (m = 1, 2, ..., s)$$

умножим на соответствующий коэффициент $\beta_{m\lambda}$ и просуммируем по m:

$$\sum_{m=1}^{s} \beta_{m\lambda} \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_m} \right] = \sum_{m=1}^{s} \beta_{m\lambda} Q_m \qquad (\lambda = 1, 2, ..., s)\ . \tag{2.17}$$

Виртуальная работа равна $\delta A = \sum_{\lambda=1}^{s} Q_m \delta q_m$.

В соответствии с выражением (2.16), $\delta q_m = \sum_{\lambda=1}^{s} \beta_{m\lambda} \delta\pi_\lambda$ $(m = 1, 2, ..., s)$, следовательно, $\delta A = \sum_{m=1}^{s}\sum_{\lambda=1}^{s} Q_m \beta_{m\lambda}\delta\pi_\lambda = \sum_{\lambda=1}^{s} P_\lambda\ \delta\pi_\lambda$,

где

$$P_\lambda = \sum_{m=1}^{s} Q_m \beta_{m\lambda} \quad (\lambda = 1,2,...,s).$$

Величины P_λ называются *квазиобобщенными силами*. Итак,

$$\sum_{m=1}^{s} \beta_{m\lambda}\left[\frac{dT}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_m}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_m}\right] = P_\lambda \qquad (\lambda = 1,2,...,s) \tag{2.18}$$

Заменяя в выражении для кинетической энергии обобщенные скорости $\dot q_m$ с помощью формулы (2.15) на π_λ, получим

$$T(q_m, \dot q_m \equiv \sum_{\lambda=1}^{s} \beta_{m\lambda}\dot\pi_\lambda) = T'(q_{m,} \dot\pi_m) \quad (m = 1,2...,s).$$

Подробности дальнейших вычислений даны в [1]. Итоговые уравнения имеют вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T'}{\partial \dot\pi_\lambda}\right) - \frac{\partial T'}{\partial \pi_\lambda} + \sum_{\mu=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} \gamma_{\lambda\mu j}\frac{\partial T'}{\partial \dot\pi_\mu}\dot\pi_j = P_\lambda \tag{2.19}$$

где

$$\gamma_{\lambda\mu j} = \sum_{m=1}^{s}\sum_{\nu=1}^{s} \beta_{m\lambda}\beta_{\nu j}\left(\frac{\partial \alpha_{\mu m}}{\partial q_\nu} - \frac{\partial \alpha_{\mu\nu}}{\partial q_m}\right) \quad (\lambda, \mu, j = 1,2...,s).$$

$$\frac{\partial T'}{\partial \pi_\lambda} = \sum_{m=1}^{s} \beta_{\mu\lambda}\frac{\partial T}{\partial q_m}, \quad (\lambda = 1,2...,s).$$

Уравнения (2.19) носят название *уравнений Эйлера — Лагранжа*. Отметим, что коэффициенты $\vec\rho_c = 0$ не зависят от структуры и движения механической системы, а их значение зависит только от определения величин $\dot\pi_\lambda$ через обобщенные скорости $\dot q_1, \dot q_2, ..., \dot q_s$.

2.6. Уравнения Лагранжа второго рода в случае потенциальных сил

Обобщенные силы называются *потенциальными,* если существует функция

$$\Pi = \Pi(q_1, q_2, ..., q_s, t), \tag{2.20}$$

частными производными от которой по обобщенным координатам, взятыми с обратным знаком, являются эти силы, т. е.

$$Q_m = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_m} \qquad m = (1,2,...,s). \qquad (2.21)$$

Функция (2.20) называется потенциальной энергией. Ранее нами был рассмотрен частный случай потенциальных сил — консервативные силы и была установлена формула (1.31) аналогичная формуле (2.21).

Используя формулу (2.21), перепишем уравнения (3.21) в виде

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m}) - \frac{\partial T}{\partial q_m} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_m},$$

Введем в рассмотрение функцию

$$L = T - \Pi,$$

которая называется *функцией Лагранжа* или кинетическим потенциалом. Так как потенциальная энергия от обобщенных скоростей не зависит, то

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_m} \equiv 0$$

и, следовательно, уравнения Лагранжа могут быть записаны в виде

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}) - \frac{\partial L}{\partial q_m} = 0 \qquad (m = 1,2,...,s). \qquad (2.22)$$

2.7. Обобщенный интеграл энергии

Предположим, что функция Лагранжа (кинетический потенциал) голономной системы является функцией обобщенных координат, обобщенных скоростей и времени, т. е.

$$L = L(q_m, \dot{q}_m, t) \; (m = 1,2,...,s). \qquad (2.23)$$

Дифференцируя по времени функцию (2.23), будем иметь

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{m=1}^{s} (\frac{\partial L}{\partial q_m}\dot{q}_m + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}\ddot{q}_m) + \frac{dL}{dt}. \qquad (2.24)$$

Из уравнений (2.22) следует, что

$$\frac{\partial L}{\partial q_m} = \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}) \qquad (m = 1,2,...,s).$$

Тогда

$$\frac{\partial L}{\partial q_m}\dot{q}_m + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}\ddot{q}_m = \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m})\dot{q}_m + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}\ddot{q}_m = \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}\dot{q}_m)$$

$$(m = 1,2,...,s).$$

Значит, выражение (2.24) можно переписать в виде

$$\frac{dL}{dt}=\frac{d}{dt}\sum_{m=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot q_m}\dot q_m+\frac{\partial L}{\partial t}$$

или

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{m=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot q_m}\dot q_m-L\right)+\frac{\partial L}{\partial t}=0$$

Если $\dfrac{\partial L}{\partial t}=0$ т. е. если функция Лагранжа явно от времени не зависит, то

$$\frac{d}{dt}(\frac{d}{dt}\sum_{m=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot q_m}\dot q_m-L)=0. \tag{2.25}$$

$$\frac{d}{dt}\sum_{m=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot q_m}\dot q_m-L)=h.$$

Это выражение называется *обобщенным интегралом энергии (интегралом Якоби)*. Вспоминая, что $\dfrac{\partial L}{\partial \dot q_m}\dot q_m=\dfrac{\partial T}{\partial \dot q_m}\dot q_m$, можем записать

$$\frac{d}{dt}\sum_{m=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot q_m}\dot q_m-L=\sum_{m=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot q_m}\dot q_m-T+\Pi. \tag{2.26}$$

Для реономной системы кинетическая энергия выражается формулой:

$$T=T_2+T_1+T_0.$$

Подставляя это в формулу (2.26), получим

$$\sum_{m=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot q_m}\dot q_m-L=\sum_{m=1}^{s}\frac{\partial T_2}{\partial \dot q_m}\dot q_m+\sum_{m=1}^{s}\frac{\partial T_1}{\partial \dot q_m}\dot q_m-T_2-T_1-T_0+\Pi$$

По теореме Эйлера об однородных функциях имеем

$$\sum_{m=1}^{s}\frac{\partial T_2}{\partial \dot q_m}\dot q_m=2T_2,\quad \sum_{m=1}^{s}\frac{\partial T_1}{\partial \dot q_m}\dot q_m=T_1,$$

Следовательно,

$$\sum_{m=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot q_m}\dot q_m-L=T_2-T_0+\Pi \tag{2.27}$$

Заметим, что это выражение не совпадает с полной энергией системы

$$E=T+\Pi=T_2+T_0+T_1+\Pi.$$

Используя формулу (2.27), перепишем обобщенный интеграл энергии (2.25) в виде

$$T_2 - T_0 + \Pi = h$$

Итак, обобщенный интеграл энергии существует, если силы потенциальны, а функция Лагранжа явно от времени T не зависит.

Для склерономных консервативных систем, когда L явно не зависит от времени, $T = T_2$ и обобщенный интеграл будет обычным интегралом энергии:

$$T + \Pi = T_2 + \Pi = h$$

2.8. Циклические координаты. Уравнения Рауса

Обобщенные координаты, которые не входят явно в функцию Лагранжа, называются *циклическими координатами*. Те же, которые входят в функцию Лагранжа, называются *позиционными координатами*.

Метод Рауса заключается в одновременном исключении циклических координат из уравнений Лагранжа второго рода, при этом число уравнений движения в независимых координатах понижается на число исключенных циклических координат. Предположим сначала, что все обобщенные координаты позиционные. Тогда функция Лагранжа будет функцией всех обобщенных координат, обобщенных скоростей и времени t, т. е.

$$L = L(q_1,...,q_s,\dot{q}_1,...,\dot{q}_s,t); \tag{2.28}$$

в этом случае мы будем иметь s уравнений Лагранжа (2.22):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_m} = 0 \quad (m = 1,2,...,s), \tag{2.29}$$

Для производных от L по первым $r (r \le s)$ обобщенным скоростям $\dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_r$ введем обозначение

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} = p_m \quad (m = 1,2,...,r). \tag{2.30}$$

где p_m называются *обобщенными импульсами*. Тогда на основании уравнений (2.29) имеем

$$\frac{\partial L}{\partial q_m} = \dot{p}_m \quad (m = 1,2,...,r). \tag{2.31}$$

Найдем полный дифференциал от функции (2.28):

$$dL = \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial q_m} dq_m + \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} d\dot{q}_m + \frac{\partial L}{\partial t} dt.$$

Принимая во внимание формулы (2.30) и (2.31), получим

$$dL = \sum_{m=1}^{r} \dot{p}_m dq_m + \sum_{m=r+1}^{s} \frac{\partial L}{\partial q_m} dq_m + \sum_{m=1}^{r} p_m d\dot{q}_m + \sum_{m=r+1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} d\dot{q}_m + \frac{\partial L}{\partial t} dt .$$

Так как

$$\sum_{m=1}^{r} p_m d\dot{q}_m = d\sum_{m=1}^{r} p_m \dot{q}_m - \sum_{m=1}^{r} \dot{q}_m dp_m ,$$

то будет

$$d(\sum_{m=1}^{r} p_m \dot{q}_m - L) = -\sum_{m=1}^{r} \dot{p}_m dq_m - \sum_{m=r+1}^{s} \frac{\partial L}{\partial q_m} dq_m + \sum_{m=1}^{r} \dot{q}_m dp_m - - \sum_{m=r+1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} d\dot{q}_m - \frac{\partial L}{\partial t} dt \qquad (2.32)$$

Функцию

$$R = \sum_{m=1}^{r} p_m \dot{q}_m - L \qquad (2.33)$$

называют *функцией Рауса*.

Полный дифференциал от функции Рауса имеет вид

$$dR = \sum_{m=1}^{r} \frac{\partial R}{\partial q_m} dq_m + \sum_{m=r=1}^{s} \frac{\partial R}{\partial q_m} dq_m + \sum_{m=1}^{r} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_m} d\dot{q}_m + + \sum_{m=r+1}^{s} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_m} d\dot{q}_m + \sum_{m=1}^{r} \frac{\partial R}{\partial p_m} dp_m + \frac{\partial R}{dt} dt \qquad (2.34)$$

Сравнивая между собой выражения (2.32) и (2.34) с учетом обозначения (2.32), получим

$$\frac{\partial R}{\partial q_m} = -\dot{p}_m , \; \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_m} = 0 , \; \frac{\partial R}{\partial p_m} = -\dot{q}_m \quad (m = 1,2,...,r) \qquad (2.35)$$

и

$$\frac{\partial R}{\partial q_m} = -\frac{\partial L}{\partial q_m}, \; \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_m} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \quad (m = r+1, r+2,...,s) \qquad (2.36)$$

Кроме того,

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t},$$

Из условия

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_m}=0 \qquad (m=1,2,...,r)$$

вытекает, что функция Рауса от первых r обобщенных скоростей не зависит. Подставляя теперь результаты (2.35) и (2.36) в уравнения Лагранжа (2.29), будем иметь

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_m}\right)-\frac{\partial R}{\partial q_m}=0 \quad (m=r+1,...,s) \tag{2.37}$$

и

$$\dot{q}_m=\frac{\partial R}{\partial p_m}, \quad \dot{p}_m=-\frac{\partial R}{\partial q_m} \tag{2.38}$$

Пусть теперь первые r обобщенных координат $(q_1, q_2,..., q_r)$ будут циклическими, тогда

$$\frac{\partial L}{\partial q_m}=0 \qquad (m=1,2,...,r),$$

следовательно, в соответствии с (2.31) $\dot{p}_m=0$ $(m=1,2,...,r)$ и

$$p_m=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \qquad (m=1,2,...,r)$$

будут постоянными величинами. Из уравнений (2.38) в связи с этим получим

$$\dot{q}_m=\frac{\partial R}{\partial p_m}, \frac{\partial R}{\partial p_m}=0 \tag{2.39}$$

Это значит, что циклические координаты не входят в состав функций Рауса. Уравнения же (2.37), которые называются уравнениями Рауса, своего вида не изменят. Итак, нами установлено, что функция Рауса не содержит циклических, координат и их производных по времени.

Для отыскания позиционных координат служат $s-r$ уравнений Рауса (2.37). Циклические же координаты, в соответствии с (2.39), определяются по формулам

$$q_m=\int \frac{\partial R}{\partial p_m}dt \quad (m=1,2,...,r). \tag{2.40}$$

3. МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОНСЕРВАТИВНОЙ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ И ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

3.1. Малые колебания консервативной системы с одной степенью свободы около положения устойчивого равновесия

Рассмотрим произвольную консервативную систему с голономными и стационарными связями, имеющую одну степень свободы. Положение системы будем определять обобщенной координатой q отсчитываемой от положения устойчивого равновесия. Предположим, что система отклонена на небольшую величину от положения равновесия и ей сообщена небольшая начальная скорость. Тогда вследствие устойчивости положения равновесия система будет совершать движение вблизи этого положения равновесия, т. е. обобщенная координата q и ее скорость $\dot{q}$ будут все время малы по модулю. Это обстоятельство дает возможность применить приближенный метод исследования движения, основанный на том, что нелинейные в общем случае дифференциальные уравнения движения упрощаются и заменяются на приближенные линейные уравнения. Для этого, очевидно, достаточно выражения для кинетической и потенциальной энергий разложить в ряды по степеням q и $\dot{q}$, сохранив в них члены не выше второго порядка малости.

Для системы со стационарными связями, имеющей одну степень свободы, кинетическая энергия имеет вид

$$T = \frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2 \ , \tag{3.1}$$

где обобщенный коэффициент инерции $a(q)$ является **в** общем случае функцией обобщенной координаты q.

Так как кинетическая энергия T при $\dot{q} \neq 0$ всегда положительна, то коэффициент $a(q)$ положителен и не обращается в нуль ни при каких значениях q, в частности,

$$a(0) = a > 0.$$

Разложим $a(q)$ в ряд Маклорена по степеням q:

$$a(q) = a(0) + \left(\frac{da}{dq}\right)_0 q + \dots .$$

и подставим это выражение в равенство (3.1):

$$T = \frac{1}{2}\left[a + \left(\frac{da}{dq}\right)_0 q + \ldots\right]\dot{q}^2$$

Для того чтобы сохранить члены не выше второго порядка малости относительно q и $\dot{q}$ отбросим все слагаемые в квадратной скобке, начиная со второго:

$$T = \frac{1}{2} a\dot{q}^2$$

Это приближенное выражение для кинетической энергии отличается от точного значения (3.1) тем, что обобщенный коэффициент инерции $a(q)$ заменяется на его значение a в положении равновесия.

Для системы с одной степенью свободы с принятой точностью будем иметь

$$\Pi = \frac{1}{2} cq^2 \qquad (3.2)$$

Приближенные выражения для кинетической и потенциальной энергий представляют квадратичные формы с постоянными положительными коэффициентами. Для кинетической энергии это следует из того, что она всегда положительна и в нуль обращается только при $\dot{q} = 0$, а положительность коэффициента c в выражении для потенциальной энергии следует из того, что рассматриваемое положение равновесия устойчиво.

Составим уравнение движения, учитывая, что для консервативной системы $Q = -\frac{\partial \Pi}{\partial q}$,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q}.$$

Пользуясь выражениями (3.1) и (3.2) и принимая во внимание, что $a = \text{const}$, получим

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = a\dot{q}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) = a\ddot{q}, \quad \frac{\partial T}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q} = cq.$$

Тогда уравнение Лагранжа принимает вид

$$a\ddot{q} = -cq,$$

или

$$\ddot{q} + k^2 q = 0, \qquad (3.3)$$

где

$$k^2 = \frac{c}{a}$$

Заметим, что число k вещественно, так как коэффициенты a и c положительны.

Уравнение (3.3) называется *дифференциальным уравнением малых колебаний системы около положения устойчивого равновесия.* Для получения этого уравнения не обязательно прибегать к уравнениям Лагранжа второго рода — можно пользоваться любыми другими методами, например, общими теоремами динамики. Важно, чтобы в результате получилось линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Однако изложенный здесь метод является общим, одинаково пригодным как для простых, так и для сложных систем с несколькими степенями свободы.

С уравнением (3.3) мы уже встречались при изучении прямолинейных колебаний материальной точки под действием линейной восстанавливающей силы. Его общее решение можно представить в следующих двух эквивалентных формах:

$$q = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt,$$

или

$$q = A \sin(kt + \varepsilon). \tag{3.4}$$

Произвольные постоянные C_1 и C_2 или A и ε определяются из начальных условий. Период незатухающих колебаний

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{a}{c}}. \tag{3.5}$$

Из изложенного видно, что вблизи положения устойчивого равновесия консервативная система с одной степенью свободы совершает незатухающие гармонические колебания.

3.2. Случай произвольной возмущающей силы

До сих пор мы рассматривали свободные колебания консервативной системы с одной степенью свободы около положения устойчивого равновесия. При отсутствии сил сопротивления дифференциальное уравнение малых колебаний имеет вид

$$\ddot{q} + k^2 q = 0. \tag{3.6}$$

Если же, помимо потенциальных сил, действуют еще силы сопротивления, пропорциональные первой степени скорости, то дифференциальное уравнение приводится к следующей форме:

$$\ddot{q} + 2h\dot{q} + k^2 q = 0. \tag{3.7}$$

Предположим теперь, что, помимо потенциальных сил и сил сопротивления, на материальную систему действует возмущающая сила, явным образом зависящая от времени. Обозначим соответствующую обобщенную силу через $Q(t)$. Тогда, после деления на коэффициент инерции a, получим вместо уравнения (3.7) следующее дифференциальное уравнение:

$$\ddot{q} + 2h\dot{q} + k^2 q = F(t) \tag{3.8}$$

где $F(t)$— обобщенная сила, отнесенная к коэффициенту инерции:

$$F(t) = \frac{Q(t)}{a}$$

В курсе теоретической механики мы подробно исследовали решение этого уравнения в предположении, что возмущающая сила $F(t)$ изменяется по гармоническому закону. Поэтому в тех случаях, когда функция $F(t)$ имеет вид

$$F(t) = F_0 \sin(pt + \delta),$$

можно использовать полученные в курсе теоретической механике результаты. Здесь мы рассмотрим случай, когда возмущающая сила $F(t)$ изменяется произвольным образом.

Предположим сначала, что силы сопротивления отсутствуют. Тогда уравнение (3.8) примет вид

$$\ddot{q} + k^2 q = F(t). \tag{3.9}$$

Общее решение этого линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами складывается из общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения данного уравнения (3.9). Соответствующее однородное уравнение будет

$$\ddot{q} + k^2 q = 0$$

Его общее решение имеет вид

$$q = D_1 \cos kt + D_2 \sin kt, \tag{3.10}$$

где D_1 и D_2 – произвольные постоянные интегрирования.,

Частное решение уравнения (3.9) будем искать в форме (3.10), предположив, что D_1 и D_2 являются функциями времени:

$$q = D_1(t)\cos kt + D_2(t)\sin kt \qquad (3.11)$$

Дифференцируя по времени, получим

$$\dot{q} = \frac{dD_1}{dt}\cos kt + \frac{dD_2}{dt}\cos kt - D_1 k \sin kt + D_2 k \cos kt$$

Нам нужно найти одно частное решение, а мы ввели две неизвестные функции D_1 и D_2. Поэтому их можно подчинить некоторому условию. Потребуем, чтобы сумма первых двух слагаемых в правой части последнего равенства равнялась нулю:

$$\frac{dD_1}{dt}\cos kt + \frac{dD_2}{dt}\cos kt = 0\,. \qquad (3.12)$$

Тогда

$$\dot{q} = -D_1 k \sin kt + D_2 k \cos kt$$

Дифференцируя еще раз по времени, получим

$$\ddot{q} = -\frac{dD_1}{dt}k\sin kt + \frac{dD_2}{dt}k\cos kt - D_1 k^2 \cos kt - D_2 k^2 \sin kt$$

Подставим это выражение для $\ddot{q}$ и выражение (3.11) для q в уравнение (3.9). Тогда, после приведения подобных членов, получим

$$-\frac{dD_1}{dt}k\sin kt + \frac{dD_2}{dt}k\cos kt = F(t)\,. \qquad (3.13)$$

Решая совместно уравнения (3.12) и (3.13) относительно производных dD_1/dt и dD_2/dt найдем

$$\frac{dD_1}{dt} = -\frac{1}{k}F(t)\sin(kt), \quad \frac{dD_2}{dt} = \frac{1}{k}F(t)\cos(kt)\,.$$

Интегрируя, будем иметь

$$D_1 = -\frac{1}{k}\int_0^t F(\xi)\sin k\xi\, d\xi, \quad D_2 = \frac{1}{k}\int_0^t F(\xi)\cos k\xi\, d\xi \quad ,$$

где через ξ обозначена переменная интегрирования.

Подставив найденные значения для D_1 и D_2 в равенство (3.11), получим частное решение уравнения (3.9):

$$q = -\frac{1}{k}\cos kt\int_0^t F(\xi)\sin k\xi\, d\xi + \frac{1}{k}\sin kt\int_0^t F(\xi)\cos k\xi\, d\xi \quad .$$

Так как функции $\cos kt$ и $\sin kt$ не зависят от переменной интегрирования ξ то их можно внести под знаки интегралов:

$$q = -\frac{1}{k}\int_0^t F(\xi)\cos kt \sin k\xi\, d\xi + \frac{1}{k}\int_0^t F(\xi)\sin kt \cos k\xi\, d\xi\,.$$

Объединяя оба интеграла, получим

$$q = \frac{1}{k}\int_0^t F(\xi)\left[\sin kt \cos k\xi - \cos kt \sin k\xi\right] d\xi$$

или

$$q = \frac{1}{k}\int_0^t F(\xi)\sin k(t-\xi)\,d\xi \ . \tag{3.14}$$

Таково частное решение дифференциального уравнения (3.9) при произвольной возмущающей силе $F(t)$.

Для того чтобы найти частное решение уравнения (3.8), сделаем в нем замену переменных, положив

$$q = \exp(-ht)z\,,$$

где z - новая неизвестная функция. Имеем

$$\dot{q} = -h\exp(-ht)z + \exp(-ht)\dot{z},$$

$$\ddot{q} = h^2\exp(-ht)z - 2h\exp(-ht)\dot{z} + \exp(-ht)\ddot{z}.$$

После подстановки значений для q, $\dot{q}$ и $\ddot{q}$ в уравнение (3.8) в приведения подобных членов получим

$$\exp(-ht)\ddot{z} + (k^2 - h^2)\exp(-ht)z = F(t)\,,$$

или, разделив на $\exp(-ht)$,

$$\ddot{z} + (k^2 - h^2)z = F(t)\exp(ht)\,.$$

Будем предполагать, что $h < k$ (силы сопротивления не очень велики). Тогда, положив

$$k_1^2 = k^2 - h^2\,, \tag{3.15}$$

мы придем к уравнению (3.9), где функция $F(t)$ заменена на функцию $F(t)\exp(ht)$, а коэффициент k на k_1. Поэтому частное решение последнего уравнения согласно равенству (3.14) будет

$$z = \frac{1}{k_1}\int_0^t \exp(h\xi)F(\xi)\sin k_1(t-\xi)\,d\xi\,.$$

Переходя к старой переменной $q = \exp(-ht)z$, найдем

$$q = \frac{1}{k_1}\exp(-ht)\int_0^t \exp(h\xi)F(\xi)\sin k_1(t-\xi)\,d\xi\,,$$

или, внося множитель $\exp(-ht)$ под знак интеграла,

$$q = \frac{1}{k_1}\int_0^t \exp[-h(t-\xi)]F(\xi)\sin k_1(t-\xi)\,d\xi. \tag{3.16}$$

Таково частное решение дифференциального уравнения (3.9) при произвольной возмущающей силе $F(t)$. Непосредственной проверкой легко установить, что частные решения (3.14) и (3.15) удовлетворяют нулевым начальным условиям.

Общее решение дифференциального уравнения (3.8) имеет вид

$$q = \exp(-ht)\left(C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t\right) + \\ + \frac{1}{k_1}\int_0^t \exp[-h(t-\xi)]F(\xi)\sin k_1(t-\xi)\,d\xi. \tag{3.17}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные интегрирования.

3.3. Малые колебания консервативной системы с двумя степенями свободы около положения устойчивого равновесия

Рассмотрим произвольную консервативную систему с голономными и стационарными связями, имеющую две степени свободы. Положение системы будем определять обобщенными координатами q_1 и q_2, отсчитываемыми от положения устойчивого равновесия. Вблизи этого положения обобщенные координаты q_1 и q_2 и обобщенные скорости $\dot{q}_1$ и $\dot{q}_2$, будут все время малы по модулю, так как равновесие устойчивое.

Кинетическая энергия системы для $s = 2$ имеет вид

$$T = \frac{1}{2}\left[a_{11}(q_1,q_2)\dot{q}_1^2 + 2a_{12}(q_1,q_2)\dot{q}_1\dot{q}_2 + a_{22}(q_1,q_2)\dot{q}_2^2\right]. \tag{3.18}$$

Коэффициенты инерции в общем случае зависят от координат q_1 и q_2. Разложим их в ряд Маклорена по степеням q_1 и q_2 и ограничимся малыми нулевого порядка (для того, чтобы кинетическая энергия содержала члены не выше второго порядка малости относительно $q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2$)

$$\left.\begin{aligned} a_{11}(q_1,q_2) &\approx a_{11}(0,0) = a_{11}, \\ a_{12}(q_1,q_2) &\approx a_{12}(0,0) = a_{12}, \\ a_{22}(q_1,q_2) &\approx a_{22}(0,0) = a_{22}. \end{aligned}\right\} \tag{3.19}$$

Теперь выражение для кинетической энергии примет вид

$$T = \frac{1}{2}\left[a_{11}\dot{q}_1^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + a_{22}\dot{q}_2^2\right] \tag{3.20}$$

где все обобщенные коэффициенты инерции - постоянные числа.

Так как при скоростях, отличных от нуля, кинетическая энергия положительна, то квадратичная форма (3.20) удовлетворяет критерию Сильвестра, который для данного случая имеет вид

$$a_{11} > 0, \quad a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0. \tag{3.21}$$

Для системы с двумя степенями свободы разложение потенциальной энергии в ряд по степеням q_1 и q_2 дается следующей формулой

$$\Pi = \frac{1}{2}\left(c_{11}q_1^2 + 2c_{12}q_1q_2 + c_{22}q_2^2\right). \tag{3.22}$$

Для положения устойчивого равновесия квадратичная форма (3.22) определенно положительна и она удовлетворяет критерию Сильвестра:

$$c_{11} > 0, \quad c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0. \tag{3.23}$$

Пользуясь уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q}$$

и равенствами (3.20) и (3.22), составим дифференциальные уравнения малых колебаний. Имеем ($a_{ij} = \text{const}$)

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = a_{11}\dot{q}_1 + a_{12}\dot{q}_2, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) = a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2,$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = 0, \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial q} = c_{11}q_1 + c_{12}q_2.$$

Следовательно, уравнение для координаты q_1 будет

$$a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 = -c_{11}q_1 - c_{12}q_2.$$

Второе уравнение может быть получено аналогичным способом.

Принимая во внимание, что $a_{12} = a_{21}$ и $c_{12} = c_{21}$, окончательно будем иметь

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 = 0, \\ a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.24}$$

Таким образом, малые колебания консервативной системы с двумя степенями свободы около положения устойчивого равновесия описываются двумя линейными однородными дифференциальными уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами. Решение этих уравнений будем искать в форме

$$q_1 = A\sin(kt + \varepsilon), \quad q_2 = B\sin(kt + \varepsilon), \tag{3.25}$$

где A, B, k и ε - неизвестные постоянные.

Продифференцируем выражения для q_1 и q_2 дважды повремени t:

$$\ddot{q}_1 = -Ak^2 \sin(kt+\varepsilon), \quad \ddot{q}_2 = -Bk^2 \sin(kt+\varepsilon),$$

и подставим полученные выражения в уравнения (24):

$$-a_{11}Ak^2 \sin(kt+\varepsilon) - a_{12}Bk^2 \sin(kt+\varepsilon) +$$
$$+ c_{11}A\sin(kt+\varepsilon) + c_{12}B\sin(kt+\varepsilon) = 0,$$
$$-a_{21}Ak^2 \sin(kt+\varepsilon) - a_{22}Bk^2 \sin(kt+\varepsilon) +$$
$$+ c_{21}A\sin(kt+\varepsilon) + c_{22}B\sin(kt+\varepsilon) = 0.$$

Для того чтобы эти равенства удовлетворялись тождественно при любых t, вычислим коэффициенты при $\sin(kt+\varepsilon)$ и приравняем их к нулю:

$$\left.\begin{aligned} (c_{11} - a_{11}k^2)A + (c_{12} - a_{12}k^2)B = 0, \\ (c_{21} - a_{21}k^2)A + (c_{22} - a_{22}k^2)B = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3.26)$$

Эти алгебраические линейные однородные уравнения относительно A и B должны иметь решение, отличное от нуля (в противном случае согласно (3.25) $q_1 = q_2 = 0$, что соответствует покою, а не движению). Поэтому определитель этой системы должен равняться нулю:

$$\begin{vmatrix} c_{11} - a_{11}k^2 & c_{12} - a_{12}k^2 \\ c_{21} - a_{21}k^2 & c_{22} - a_{22}k^2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (3.27)$$

Раскрывая определитель, получим

$$\left(c_{11} - a_{11}k^2\right)\left(c_{22} - a_{22}k^2\right) - \left(c_{12} - a_{12}k^2\right)^2 = 0, \qquad (3.28)$$

или

$$\left(a_{11}a_{22} - a_{12}^2\right)k^4 - \left(a_{11}c_{22} + a_{22}c_{11} - 2a_{12}c_{12}\right)k^2 + \left(c_{11}c_{22} - c_{12}^2\right) = 0. \qquad (3.29)$$

Уравнение (3.27), или эквивалентные ему уравнения (3.28) и (3.29), называется *уравнением частот,* или *вековым уравнением.*

Докажем, что оба корня этого уравнения относительно k^2 вещественны и положительны. Для доказательства обозначим левую часть уравнения (3.29) или, что то же самое, уравнения (3.28) через $\Delta(k^2)$. Тогда, пользуясь соотношениями (3.21) и (3.23), будем иметь

$$\Delta(0) = c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0, \quad \Delta(\infty) > 0,$$

$$\Delta\left(\frac{c_{11}}{a_{11}}\right) = -\frac{(a_{11}c_{12} - a_{12}c_{11})^2}{a_{11}^2} < 0, \quad \Delta\left(\frac{c_{22}}{a_{22}}\right) = -\frac{(a_{22}c_{12} - a_{12}c_{22})^2}{a_{22}^2} < 0$$

(значения $k^2 = 0$ и $k^2 = \infty$ подставлялись в левую часть уравнения (26), а значения $k^2 = c_{11}/a_{11}$ и $k^2 = c_{22}/a_{22}$ в левую часть эквивалентного ему уравнения (25)).

Это означает, что между $k^2 = 0$ и $k^2 = \infty$ график функции $\Delta = \Delta(k^2)$ пересекает ось абсцисс в двух точках (рисунок 1), определяющих два положительных корня k_1^2 и k_2^2 уравнения частот.

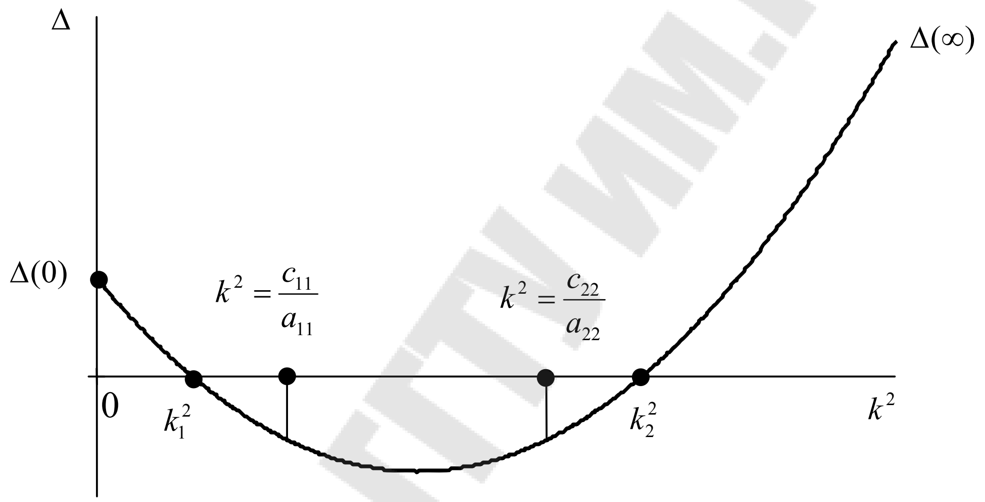

Рисунок 1

Прежде чем перейти к дальнейшему, заметим, что в том случае, когда уравнения (3.26) распадаются на два независимых уравнения (это будет при $a_{12} = a_{21} = 0$ и $c_{12} = c_{21} = 0$), соответствующие частоты колебаний будут (они называются парциальными частотами)

$$k_1^* = \sqrt{\frac{c_{11}}{a_{11}}}, \quad k_2^* = \sqrt{\frac{c_{22}}{a_{22}}}.$$

Из полученных выражений и рисунка 1 видно, что парциальные частоты больше меньшей частоты системы k_1 и меньше большей частоты системы k_2.

Извлечем теперь из k_1^2 и k_2^2 квадратные корни и воспользуемся только положительными значениями k_1 и k_2. Каждому корню k_1 и k_2

будет отвечать одно частное решение (3.25), причем каждой частоте k_1 и k_2 отвечают свои значения A, B и ε. Частные решения линейно независимы, поэтому общее решение будет равно их линейной комбинации:

$$q_1 = A_1 \sin(k_1 t + \varepsilon_1) + A_2 \sin(k_2 t + \varepsilon_2),$$
$$q_2 = B_1 \sin(k_1 t + \varepsilon_1) + B_2 \sin(k_2 t + \varepsilon_2).$$

Между числами A_1 и B_1, A_2 и B_2 имеется связь, которая устанавливается уравнениями (3.26). Если подставить в эти уравнения k_1 или k_2 то определитель системы (3.26) обратится в нуль. Следовательно, из двух уравнений этой системы независимых только одно. Возьмем одно из этих уравнений, например первое (при решении практических задач нужно выбирать наиболее простое уравнение), и найдем из него отношение

$$\frac{B_i}{A_i} = \frac{c_{11} - a_{11}k_i^2}{c_{12} - a_{12}k_i^2} = \mu_i, \quad (i = 1,2). \tag{3.30}$$

Каждому значению частоты k_1 и k_2 отвечают соответствующие значения μ_1 и μ_2. Вычислив их по формуле (3.30), найдем

$$B_1 = \mu_1 A_1, \quad B_2 = \mu_2 A_2. \tag{3.31}$$

Теперь общее решение примет вид

$$\begin{aligned} q_1 &= A_1 \sin(k_1 t + \varepsilon_1) + A_2 \sin(k_2 t + \varepsilon_2),\\ q_2 &= \mu_1 A_1 \sin(k_1 t + \varepsilon_1) + \mu_2 A_2 \sin(k_2 t + \varepsilon_2). \end{aligned} \tag{3.32}$$

В этом решении частоты k_1 и k_2 и коэффициенты μ_1 и μ_2 неизвестные числа, характеризующие данную систему, A_1, A_2, ε_1 и ε_2 произвольные постоянные, определяемые из начальных условий движения.

Из формы общего решения видно, что движение системы с двумя степенями свободы около положения устойчивого равновесия складывается из двух независимых колебаний:

$$q_1 = q_1^{(1)} + q_1^{(2)}, \quad q_2 = q_2^{(1)} + q_2^{(2)},$$

где

$$q_1^{(1)} = A_1 \sin(k_1 t + \varepsilon_1), \quad q_1^{(2)} = A_2 \sin(k_2 t + \varepsilon_2),$$
$$q_2^{(1)} = \mu_1 A_1 \sin(k_1 t + \varepsilon_1), \quad q_2^{(2)} = \mu_2 A_2 \sin(k_2 t + \varepsilon_2).$$

Первое колебание в обеих координатах происходит с частотой k_1 а второе с частотой k_2. Эти колебания называются главными. Коэффициенты μ_1 и μ_2 определяют формы колебаний; согласно равенствам (3.30) они имеют простой физический смысл, показывая, во сколько раз амплитуда соответствующего главного колебания в одной из координат больше (или меньше) амплитуды другой координаты.

Из определения видно, что все координаты в каждом главном колебании изменяются по гармоническому закону, имея одинаковые частоты и фазы. Это означает, что они (т. е. координаты) одновременно обращаются в нуль, одновременно достигают максимальных значений и т. п., причем координаты в каждом главном колебании находятся в постоянном отношении μ_i, не зависящем от начальных условий.

Частоты колебаний (точнее, круговые частоты) k_1 и k_2, а также коэффициенты μ_1 и μ_2 являются основными характеристиками малых колебаний системы с двумя степенями свободы.

В заключение отметим, что методы составления и интегрирования дифференциальных уравнений малых колебаний системы с двумя степенями свободы около положения устойчивого равновесия без всяких изменений могут быть распространены на системы с большим числом степеней свободы.

4. НЕГОЛОНОМНЫЕ СИСТЕМЫ

4.1. Число степеней свободы неголономной системы.

Рассмотрим систему с линейными неголономными связями, т. е. со связями, в уравнения которых проекции скоростей входят линейно. Уравнения таких связей имеют вид

$$\sum_{i=1}^{n}(A_{\nu i}\dot{x}_i + B_{\nu i}\dot{y}_i + C_{\nu i}\dot{z}_i) + D_\nu = 0 \quad (\nu = 1,2,...,\mathrm{d})$$

или

$$\sum_{i=1}^{n}(A_{\nu i}dx_i + B_{\nu i}dy_i + C_{\nu i}dz_i) + D_\nu dt = 0 \quad (\nu = 1,2,...,\mathrm{d}), \qquad (4.1)$$

где d — число неголономных связей, $A_{\nu i}, B_{\nu i}, C_{\nu i}, D_\nu$ — функции координат, а в случае нестационарных связей и времени. Если $D_\nu \equiv 0$, то указанные связи называются однородными линейными неголономными.

Пусть на материальную систему наложено k голономных связей

$$f_i(x_i, y_i, z_i, t) = 0$$

и d неголономных связей вида (4.1). Тогда вариации координат должны удовлетворять следующим уравнениям:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial f_j}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial f_j}{\partial z_i}\delta z_i\right) = 0 \quad (j = 1,2,\dots,k),$$

$$\sum_{i=1}^{n}(A_{\nu i}\delta x_i + B_{\nu i}\delta y_i + C_{\nu i}\delta z_i) = 0 \qquad (\nu = 1,2,\dots,k),$$

Следовательно, если эти $k + \mathrm{d}$ уравнений независимы, то число независимых вариаций координат равно $3n - k - \mathrm{d}$. Это число независимых вариаций координат называется *числом степеней свободы неголономной системы.*

Остановимся на одном свойстве неголономных связей, не отмеченном нами ранее. Всякая геометрическая связь является также и кинематической связью, т. е. ограничения, накладываемые на координаты точек, накладывают ограничения и на скорости точек. Но оказывается, что наличие неинтегрируемых кинематических связей может не влиять на независимость координат.

4.2. Уравнения движения для неголономных систем с множителями Лагранжа

Пусть $q_1, q_2, \dots, q_s$ будут обобщенными координатами механической системы. Пусть на систему наложено d неголономных связей вида

$$\sum_{m=1}^{s} a_{\nu m}\dot{q}_m + a_\nu = 0 \quad (\nu = 1,2,\dots,\mathrm{d}) \tag{4.2}$$

В п. 2.3 был рассмотрен прием составления уравнений Лагранжа второго рода, если на материальную систему наложены дополнительные связи. Этот прием заключался во введении реакций дополнительных связей в число активных сил.

Воспользуемся этим приемом для учета вводимых неголономных связей. Так как вводимые связи идеальные, то

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{R}'_i\delta\vec{r}_i = \sum_{m=1}^{s} Q'_m\delta q_m = 0, \tag{4.3}$$

где $\vec{R}'_i$ — реакции неголономных связей, Q'_m — обобщенные силы, соответствующие этим реакциям. Из уравнений связей (4.3) следует, что

$$\sum_{m=1}^{s} a_{\nu m} q_m = 0 \qquad (\nu = 1,2,...,\mathrm{d}).$$

Умножим каждое из этих соотношений на соответствующий множитель Лагранжа λ_ν и сложим полученные выражения между собой:

$$\sum_{m=1}^{s} \delta q_m \sum_{\nu=1}^{\mathrm{d}} \lambda_\nu a_{\nu m} = 0. \qquad (4.4)$$

Вычитая из выражения (4.3) соотношение (4.4), получим

$$\sum_{m=1}^{s} \delta q_m (Q' - \sum_{\nu=1}^{\mathrm{d}} \lambda_\nu a_{\nu m}) = 0$$

независимых вариаций обобщенных координат $s-\mathrm{d}$. Выберем $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_d$ так, чтобы множители у остальных d вариаций обращались в нуль; тогда

$$Q' = \sum_{\nu=1}^{\mathrm{d}} \lambda_\nu a_{\nu m} = 0. \quad (m = 1,2,...,s),$$

и, следовательно, уравнения движения при наличии d неголономных связей будут иметь вид

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m}) - \frac{\partial T}{\partial q_m} = Q_m + \sum_{\nu=1}^{\mathrm{d}} \lambda_\nu a_{\nu m}. \qquad (4.5)$$

Уравнения (4.5) вместе с уравнениями связей (4.2) образуют систему $s+\mathrm{d}$ уравнений относительно неизвестных $(q_1, q_2, ..., q_s, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{\mathrm{d}})$.

4.3. Уравнения движения в квазикоординатах

В случае голономных стационарных связей уравнения движения в квазикоординатах были получены в п. 2.5.

Пусть теперь на рассматриваемую систему будет наложено d неголономных связей вида

$$\sum_{m=1}^{s} a_{\nu m} \dot{q}_m + a_\nu = 0 \;\; (\nu = 1,2,...,\mathrm{d}), \qquad (4.6)$$

где $a_{\nu m}, a_\nu$ зависят только от обобщенных координат. Как было показано в п.4.2, уравнения Лагранжа при учете, новых связей имеют вид (4.5), т. е.

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T'}{\partial \dot{q}_m}) - \frac{\partial T}{\partial q_m} = Q_m + \sum_{\nu=1}^{\mathrm{d}} \lambda_\nu a_{\nu m}.$$

Произведя с этими уравнениями те же операции, которые были проведены в п.2.5, получим

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T'}{\partial \dot{\pi}_\chi}) - \frac{\partial T'}{\partial \pi_\chi} + \sum_{\mu=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} \gamma_{\chi\mu i} \frac{\partial T'}{\partial \dot{\pi}_\mu} \dot{\pi}_j = P_\chi + \sum_{m=1}^{s}\sum_{\nu=1}^{s} \beta_{m\chi} a_{\nu m} \lambda_\nu \qquad (4.7)$$

$$(\chi = 1,2,...,s),$$

где T' определяется формулой (2.18), P_χ — формулой (2.17), $\gamma_{\chi\mu j}$ — формулой (2.19), а квазискорости выражаются через обобщенные скорости при помощи соотношений

$$\dot{\pi}_\chi = \sum_{m=1}^{s} \alpha_{\chi m} \dot{q}_m \qquad (\chi = 1,2,...,s). \qquad (4.8)$$

Выберем теперь в последних d соотношениях (4.8) коэффициенты $\alpha_{\chi m}$ следующим образом:

$$\alpha_{\chi m} = \alpha_{\nu m},$$

где $\chi = s - \mathrm{d} + \nu$ $(\nu = 1,2,...,\mathrm{d})$. Правые части уравнений (4.7) при этом примут вид

$$P_\chi + \sum_{m=1}^{s}\sum_{\nu=1}^{s} \beta_{m\chi} \alpha_{s-\mathrm{d}+\nu,m} \lambda_\nu$$

или

$$P_\chi + \sum_{\nu=1}^{\mathrm{d}} \lambda_\nu \sum_{m=1}^{s} \beta_{m\chi} \alpha_{s-\mathrm{d}+\nu,m} \quad (\chi = 1,2,...,s).$$

На основании свойства

$$\sum_{m=1}^{s} \beta_{m\chi} \alpha_{\mu m} = \begin{cases} 1, \chi = \mu, \\ 0, \chi \neq \mu, \end{cases}$$

делаем заключение о том, что

$$\sum_{m=1}^{s} \beta_{m\chi} \alpha_{s-d+\nu,m} = 0 \text{ для } \chi = 1,2,...,s-\mathrm{d}.$$

Следовательно, уравнения Эйлера—Лагранжа при наличии неголономных связей будут иметь вид

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T'}{\partial \dot{\pi}_\chi}) - \frac{\partial T'}{\partial \pi_\chi} + \sum_{\mu=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} \gamma_{\chi\mu j} \frac{\partial T'}{\partial \dot{\pi}_\mu} \dot{\pi}_j = P_\chi \quad (\chi = 1,2,...,s-\mathrm{d}).$$

Присоединяя к этим уравнениям d, уравнений связей (4.6), получаем систему $s-\mathrm{d}$ уравнений второго порядка и d уравнений первого порядка для определения неизвестных $q_{1,}q_2,...,q_s$ и $\dot{\pi}_1,\dot{\pi}_2,...,\dot{\pi}_{s-\mathrm{d}}$.. Оставшиеся последние d уравнений (4.7) могут служить для определения λ_ν, т. е. для определения реакций связей

4.4. Уравнения Аппеля

Пусть на материальную систему, состоящую из n точек, наложено k голономных и d неголономных связей. Если $q_1,q_2,...,q_s$, где $s=3n-k$, независимые обобщенные координаты, то формулы

$$\vec{r}_i=\vec{r}_i(t,q_1,q_2,...,q_s) \quad (i=1,2,...,n) \tag{4.9}$$

устанавливают связь между декартовыми и обобщенными координатами. Из формул (4.9) следует, что

$$\dot{\vec{r}}_i=\sum_{m=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_m}\dot{q}_m+\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t} \qquad (i=1,2,...,n)$$

и

$$\vec{\delta}r_i=\sum_{m=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_m}\delta q_m \qquad (i=1,2,...,n)$$

Пусть уравнения неголономных связей имеют вид

$$\sum_{\mu=1}^{s}a_{\nu\mu}\dot{q}_\mu+a_\nu=0 \quad (\nu=1,2,...,\mathrm{d}) \tag{4.10}$$

Выберем за $s-\mathrm{d}$ независимых квазискоростей (по числу степеней свободы) $s-\mathrm{d}$ независимых линейных комбинаций обобщенных скоростей

$$\dot{\pi}_\chi=\sum_{\mu=1}^{s}\alpha_{\chi\mu}\dot{q}_\mu \quad (\chi=1,2,...,s-\mathrm{d}) \tag{4.11}$$

Из уравнений (3.10) и (3.11) определим зависимость обобщенных скоростей от квазискороетей $\dot{\pi}_\chi$. Очевидно, что это можно сделать в том случае, если определитель системы уравнений (4.10) и (4.11) отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1s} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \alpha_{s-\mathrm{d},1} & \alpha_{s-\mathrm{d},2} & \ldots & \alpha_{s-\mathrm{d},s} \\ a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1s} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ .a_{\mathrm{d}1} & a_{\mathrm{d}2} & \ldots & a_{\mathrm{d}s} \end{vmatrix} \neq 0$$

Пусть найденная зависимость имеет вид

$$\dot{q}_m = \sum_{\mu=1}^{s-\mathrm{d}} b_{m\mu}\dot{\pi}_\mu + b_m \quad (m = 1,2,\ldots,s), \tag{4.12}$$

где $b_{m\mu}$ и b_m — функции времени и обобщенных координат. Величины $\dot{\pi}_\mu$, могут принимать произвольные значения, так как по формулам (4.12) всегда можно подобрать соответствующие им значения $\dot{q}_m$. Дальнейшие выкладки основаны на применении общего уравнения динамики и подробно рассмотрены в [1]. В итоге получаем $s-\mathrm{d}$ уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\pi}} = \Pi_\mu \qquad (\mu = 1,2,\ldots,s-\mathrm{d}) \tag{4.13}$$

которые называются *уравнениями Аппеля*.
где Π_μ - *обобщенные силы, соответствующие квазикоординатами* π_μ;

$$\Pi_\mu = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \vec{e}_{i\mu} = \sum_{m=1}^{s}\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_m} b_{m\mu} \qquad (\mu = 1,2,\ldots,s-\mathrm{d})$$

Функция

$$S = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i a_i^{\;2}}{2}.$$

называется *энергией ускорений* (по аналогии с кинетической энергией). Система уравнений (4.13) совместно с соотношениями (4.10) составляет полную систему уравнений для определения декартовых координат $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots\ldots, x_n, y_n, z_n$ и квазискоростей $\dot{\pi}_1, \dot{\pi}_2, \ldots, \dot{\pi}_{s-\mathrm{d}}$ как функций времени t.

Возьмем теперь в качестве квазискоростей $s-\mathrm{d}$ независимых обобщенных скоростей $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_{s-\mathrm{d}}$, и выразим через них с помощью соотношений (4.10) остальные d обобщенных скоростей:

$$\dot{q}_{s-\mathrm{d}+v} = \sum_{\mu=1}^{s-\mathrm{d}} h_{s-\mathrm{d}+v,\mu}\dot{q}_{\mu} \qquad (v = 1,2,...,\mathrm{d})$$

Отсюда

$$\delta q_{s-\mathrm{d}+v} = \sum_{\mu=1}^{s-\mathrm{d}} h_{s-\mathrm{d}+v,\mu}\delta q_{\mu} \tag{4.14}$$

Заменяя теперь в выражении для возможной работы

$$\delta A = \sum_{j=1}^{s} Q_j \delta q_j$$

вариации $\delta q_{s-\mathrm{d}+v}$ $(v = 1,2,...,\mathrm{d})$ с помощью формулы (4.14), получим

$$\delta A = \sum_{\mu=1}^{s-\mathrm{d}} Q^{*}{}_{\mu}\delta q_{\mu}$$

где

$$Q^{*}{}_{\mu} = Q_{\mu} - \sum_{v=1}^{\mathrm{d}} Q_{s-\mathrm{d}+v} h_{s-\mathrm{d}+v,\mu}$$

обобщенные силы, соответствующие независимым вариациям $\delta q_{\mu}(\mu = 1,2,...,s-\mathrm{d})$

Уравнения Аппеля теперь примут вид

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_{\mu}} = Q^{*}{}_{\mu} \qquad (\mu = 1,2,...,s-\mathrm{d})$$

Для голономной системы уравнениями Аппеля будут

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_{m}} = Q_m \qquad (m = 1,2,...,s)$$

При вычислении функции S бывает целесообразно использовать теорему, аналогичную теореме Кёнига.

Пусть подвижная система координат имеет начало в центре масс материальной системы и движется поступательно. Тогда положение i-й точки системы в неподвижной системе координат определяется радиусом-вектором

$$s - \mathrm{d}, \tag{4.15}$$

где r_c — радиус-вектор центра масс в неподвижной системе координат, а p_i—радиус-вектор точки (в подвижной системе координат. Из выражения (4.15) следует, что

$$\vec{a}_i = \vec{a}_c + \vec{a}_{ri} \tag{4.16}$$

где $\vec{a}_{ri}$—относительное ускорение i-й точки. Подставим соотношение (4.16) в выражение для функции S:

$$S=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i a^2{}_i}{2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i(\vec{a}_c+\vec{a}_{ri})^2}{2}=\frac{1}{2}Ma^2{}_c+\vec{a}_i\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{a}_{ri}+\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i a^2{}_{ri}}{2},$$

где $M=\sum_{i=1}^{n}m_i$ — масса всей системы. Далее имеем

$$\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{a}_{ri}=\frac{\mathrm{d}^2}{dt^2}\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{\rho}_i=\frac{\mathrm{d}^2}{dt^2}(M\vec{\rho}_c)=0$$

так как $\vec{\rho}_c=0$. Следовательно,

$$S=\frac{1}{2}Ma_c{}^2+S'$$

где

$$S'=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i a_{ri}{}^2}{2}$$

ускорение системы в относительном движении

4.5. Уравнения движения неголономной системы. Уравнения С. А. Чаплыгина

В п. 2.2. нами было получено выражение

$$Q_m-\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}\right]=0$$

Пусть на систему наложено d неголономных связей

$$\sum_{m=1}^{s}a_{vm}\dot{q}_m+a_v=0 \quad (v=1,2,...,\mathrm{d}) \qquad (4.17)$$

Примем первые $s-\mathrm{d}$ обобщенных координат за независимые и выразим обобщенные скорости $\dot{q}_{s-\mathrm{d}+1},\dot{q}_{s-\mathrm{d}+2}$, ..., $\dot{q}_s$ с помощью уравнения неголономных связей через $\dot{q}_1,\dot{q}_2,...,\dot{q}_{s-\mathrm{d}}$

$$\dot{q}_k=\sum_{m=1}^{s-\mathrm{d}}h_{km}\delta q_m+h_k \qquad (k=s-\mathrm{d}+1,...,s) \qquad (4.18)$$

откуда следует, что

$$\delta q_k=\sum_{m=1}^{s-\mathrm{d}}h_{km}\delta q_m, \qquad (k=s-\mathrm{d}+1,s-\mathrm{d}+2,...,s)$$

$$\sum_{m=1}^{s-\mathrm{d}}(Tq_m-Q_m)\delta q_m+\sum_{k=s-\mathrm{d}+1}^{s-\mathrm{d}}(Tq_k-Q_k)\sum_{m=1}^{s-\mathrm{d}}h_{km}\delta q_m=0$$

или

$$\sum_{m=1}^{s-\mathrm{d}}\left[Tq_m - Q_m + \sum_{k=s-\mathrm{d}+1}^{s-\mathrm{d}}(Tq_k - Q_k)h_{km}\right]\delta q_m = 0.$$

В силу независимости $\delta q_1, \delta q_2, ..., \delta q_{s-\mathrm{d}}$ имеем

$$Tq_m - Q_m + \sum_{k=s-\mathrm{d}+1}^{s-\mathrm{d}}(Tq_k - Q_k)h_{km} = 0, \qquad (m = 1,2,...,s-\mathrm{d}) \qquad (4.19)$$

Это и есть искомые уравнения движения. Присоединяя к ним уравнения неголономных связей (4.17), получим полную систему уравнений для определения всех обобщенных координат.

Если коэффициенты h_{km}, кинетическая энергия $\dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_{s-\mathrm{d}}$ и потенциальная энергия П не зависят от $q_{s-\mathrm{d}+1}, q_{s-\mathrm{d}+2}, ..., q_s$, то уравнения (4.19) примут вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_m} + \sum_{k=s-\mathrm{d}+1}^{s} h_{km}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_m}, \qquad (m = 1,2,...,s-\mathrm{d})$$

Пусть T^* будет кинетической энергией системы после исключения скоростей $\dot{q}_{s-\mathrm{d}+1}, \dot{q}_{s-\mathrm{d}+2}, ..., \dot{q}_s$ тогда

$$\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_m} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m} + \sum_{k=s-\mathrm{d}+1}^{s}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{q}_m},$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial q_m} = \frac{\partial T}{\partial q_m} + \sum_{k=s-\mathrm{d}+1}^{s}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_m},$$

Из выражения (4.18) следует, что

$$\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{q}_m} = h_{km}, \quad \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_m} = \sum_{r=1}^{s-\mathrm{d}}\frac{\partial h_{kr}}{\partial q_r}\dot{q}_r$$

Следовательно,

$$\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_m} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m} + \sum_{k=s-\mathrm{d}+1}^{s} h_{km}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k},$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial q_m} = \frac{\partial T}{\partial q_m} + \sum_{k=s-\mathrm{d}+1}^{s}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\sum_{r=1}^{s-\mathrm{d}}\frac{\partial h_{kr}}{\partial q_m}\dot{q}_r.$$

Теперь можно написать

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m}\right) + \sum_{k=s-\mathrm{d}+1}^{s} h_{km}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_m}\right) - \sum_{k=s-\mathrm{d}+1}^{s}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\frac{dh_{km}}{dt}.$$

Замечая, что

$$\frac{dh_{km}}{dt} = \sum_{r=1}^{s-\mathrm{d}} \frac{\partial h_{kr}}{\partial q_r} \dot{q}_r$$

перепишем уравнения движения в виде

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_m}) - \frac{\partial T^*}{\partial q_m} + \sum_{k=s-\mathrm{d}+1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \sum_{r=1}^{s-\mathrm{d}} (\frac{\partial h_{kr}}{\partial q_m} - \frac{\partial h_{km}}{\partial q_r}) \dot{q}_r = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_m},$$
$$(m = 1,2,...,s - \mathrm{d})$$

Эти уравнения получил С. А. Чаплыгин, и они носят его имя. Исключая в полученных уравнениях с помощью зависимостей (4.18) скорости $\dot{q}_{s-\mathrm{d}+1}, \dot{q}_{s-\mathrm{d}+2}, ..., \dot{q}_s$ входящие в выражения $\partial T / \partial \dot{q}_k$ получим систему $s - \mathrm{d}$ уравнений с $s - \mathrm{d}$ неизвестными $q_1, q_2, ..., q_{s-\mathrm{d}}$ которая интегрируется независимо от уравнений неголономных связей. Остальные координаты можно затем определить из уравнений (3.18).

5. ЗАДАЧИ НА СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА.

5.1. Механическая система с одной степенью свободы.

Механическая система движется под действием сил тяжести и сил сопротивления. Начальное положение системы показано на рисунке 1, 2. Учитывая трение скольжения тела *1* (варианты 1-3, 5, 6, 8-12, 17-23, 28-30) и сопротивление качению тела *3*, катящегося без скольжения (варианты 2, 4, 6-9, 11, 13-15, 20, 21, 24, 27, 29), пренебрегая другими силами сопротивления и массами нитей, предполагаемых нерастяжимыми, определить:

1. Уравнение движения тела 1 $s = s(t)$.
2. Кинетическую энергию системы как функцию времени. Построить график.

В задании приняты следующие обозначения: m_1, m_2, m_3, m_4 - массы тел *1*, *2*, *3*, *4*; R_2, r_2, R_3, r_3 - радиусы больших и малых окружностей; i_{2x}, $i_{3\xi}$ - радиусы инерции тел *2* и *3* относительно горизонтальных осей, проходящих через их центры тяжести; α, β - углы наклона плоскостей к горизонту; f - коэффициент трения скольжения; δ - коэффициент трения качения.

Необходимые для решения данные приведены в табл. 1 и табл. 2. Блоки и катки, для которых радиусы инерции в таблице не указаны, считать сплошными однородными цилиндрами. Радиусы малых окружностей выбрать самостоятельно. Наклонные участки нитей параллельны соответствующим наклонным плоскостям. Начальные условия движения системы выбрать самостоятельно.

Таблица 1

№ п/п	№ схемы	m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	m_4, кг	R_2, см	R_3, см	R/r	i_{2x}, см	$i_{3\xi}$, см	α, град	β, град	f	δ, см
1	1	1.0	4.0	0.3	1.5	-	-	-	-	-	65	-	0.10	-
2	2	2.1	1.2	0.7	-	-	30	2.0	-	20	35	45	0.22	0.20
3	3	1.5	1.4	0.1	1.6	-	-	-	-	-	45	-	0.10	-
4	4	1.2	2.0	2.1	-	16	25	1.5	14	-	30	-	-	0.20
5	5	1.2	0.5	0.4	-	-	30	-	-	-	35	45	0.15	0.20
6	6	1.3	2.8	10.0	-	-	30	1.2	-	20	30	-	0.12	0.25
7	7	1.4	0.4	0.3	0.2	-	-	-	-	-	60	-	0.10	-
8	8	1.6	0.6	0.4	-	-	30	2.1	-	25	20	45	0.17	0.20
9	9	1.4	0.6	0.3	1.2	30	-	2.0	20	-	45	-	0.20	-
10	10	1.0	2.0	6.0	2.0	30	20	1.6	26	-	30	-	-	0.24
11	11	1.3	0.7	7.0	5.0	-	25	-	-	-	-	-	-	0.20
12	12	1.6	0.9	6.5	0.8	20	15	1.4	18	-	70	-	-	0.25
13	13	1.2	2.0	4.0	3.0	-	-	-	-	-	-	-	-	-
14	14	1.3	4.0	2.0	2.0	20	30	1.8	15	20	25	-	0.12	-
15	15	1.0	0.4	0.1	1.0	24	-	-	20	-	65	-	0.15	-
16	16	1.0	1.1	2.4	-	20	20	2.0	16	-	35	55	0.20	0.32
17	17	1.1	1.0	0.1	0.9	20	-	1.2	18	-	50	-	0.10	-
18	18	0.9	1.0	6.0	0.5	20	20	1.3	16	-	40	-	-	0.20
19	19	1.5	0.3	0.2	-	-	35	-	-	-	25	50	0.20	0.20
20	20	1.5	0.8	0.4	2.1	26	20	1.7	20	18	20	-	0.12	-

Таблица 2

№ п/п	№ схемы	m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	m_4, кг	R_2, см	R_3, см	R/r	i_{2x}, см	$i_{3\xi}$, см	α, град	β, град	f	δ, см
21	1	1.5	6.0	0.5	1.2	-	-	-	-	-	50	-	0.11	-
22	2	2.5	1.4	0.9	-	-	40	2.0	-	32	40	15	0.2	0.1
23	3	2.5	1.9	0.2	2.6	-	-	-	-	-	40	-	005	-
24	4	1.8	5.0	6.1	-	28	32	1.5	24	-	10	-	-	0.1
25	5	1.2	0.8	0.2	-	-	20	-	-	-	30	25	0.11	0.15
26	6	1.5	3.8	12.0	-	-	40	1.2	-	30	20	-	0.05	0.24
27	7	1.2	0.2	0.45	0.3	-	-	-	-	-	70	-	0.12	-
28	8	2.6	0.9	0.2	-	-	41	2.1	-	35	20	35	0.14	0.3
29	9	1.1	0.9	0.2	1.5	25	-	2.0	20	-	30	-	0.19	-
30	10	1.5	2.0	6.5	2.5	24	26	1.6	20	-	30	-	-	0.21
31	11	1.9	0.5	7.7	5.5	-	21	-	-	-	-	-	-	0.18
32	12	1.8	0.4	6.2	0.95	22	16	1.4	16	-	60	-	-	0.1
33	13	1.1	1.2	4.5	2.0	-	-	-	-	-	-	-	-	-
34	14	1.4	4.1	2.5	2.1	34	34	1.8	25	30	45	-	0.11	-
35	15	0.9	0.4	0.12	1.7	31	-	-	27	-	60	-	0.13	-
36	16	1.2	1.1	2.8	-	40	25	2.0	26	-	30	45	0.1	0.22
37	17	1.12	1.4	0.1	0.9	26	-	1.2	18	-	30	-	0.1	-
38	18	0.95	1.6	6.5	0.5	21	21	1.3	19	-	30	-	-	0.18
39	19	1.7	0.5	0.25	-	-	31	-	-	-	15	30	0.14	0.17
40	20	1.9	0.9	0.45	2.1	26	25	1.7	26	25	30	-	0.1	-

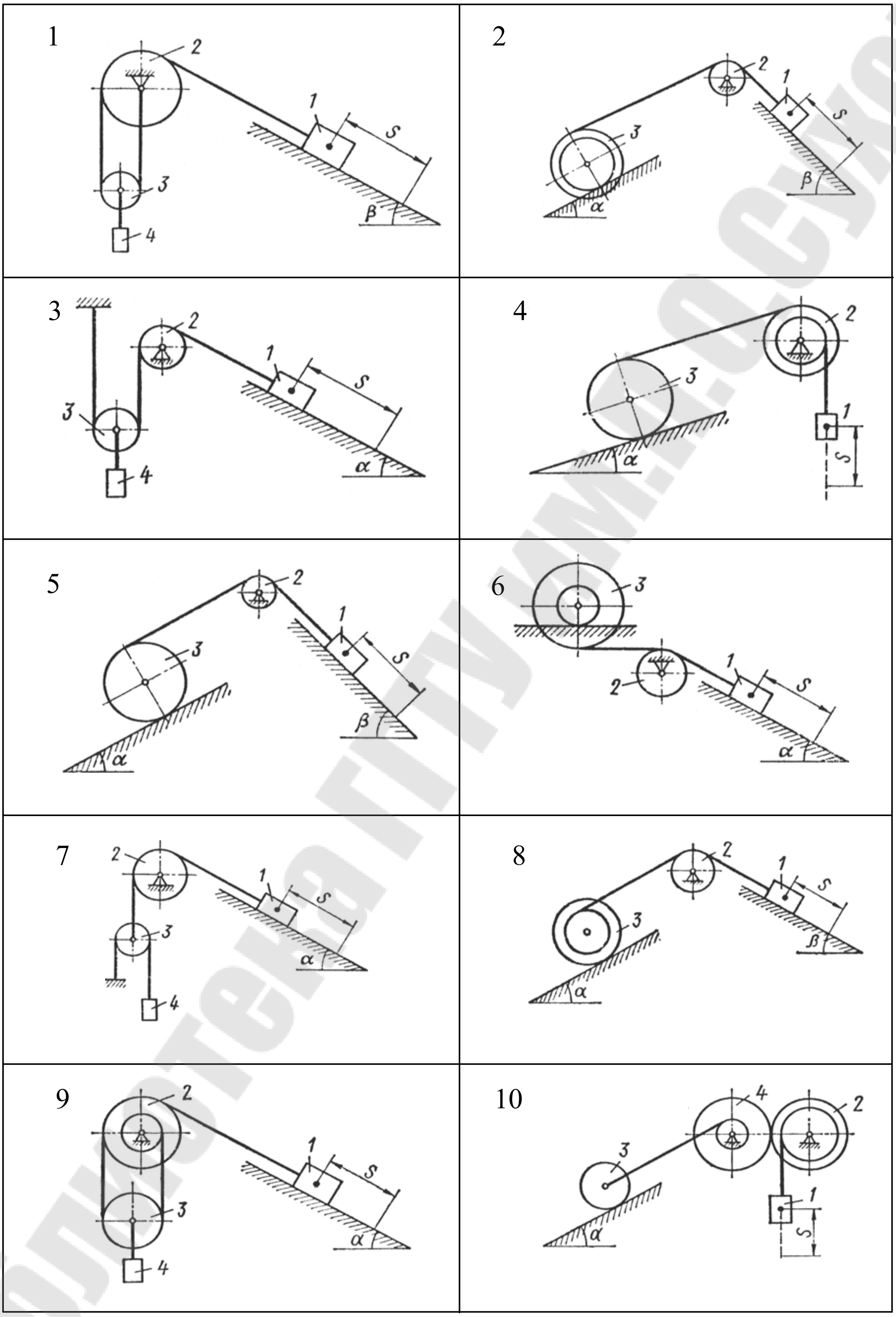

Рисунок 2

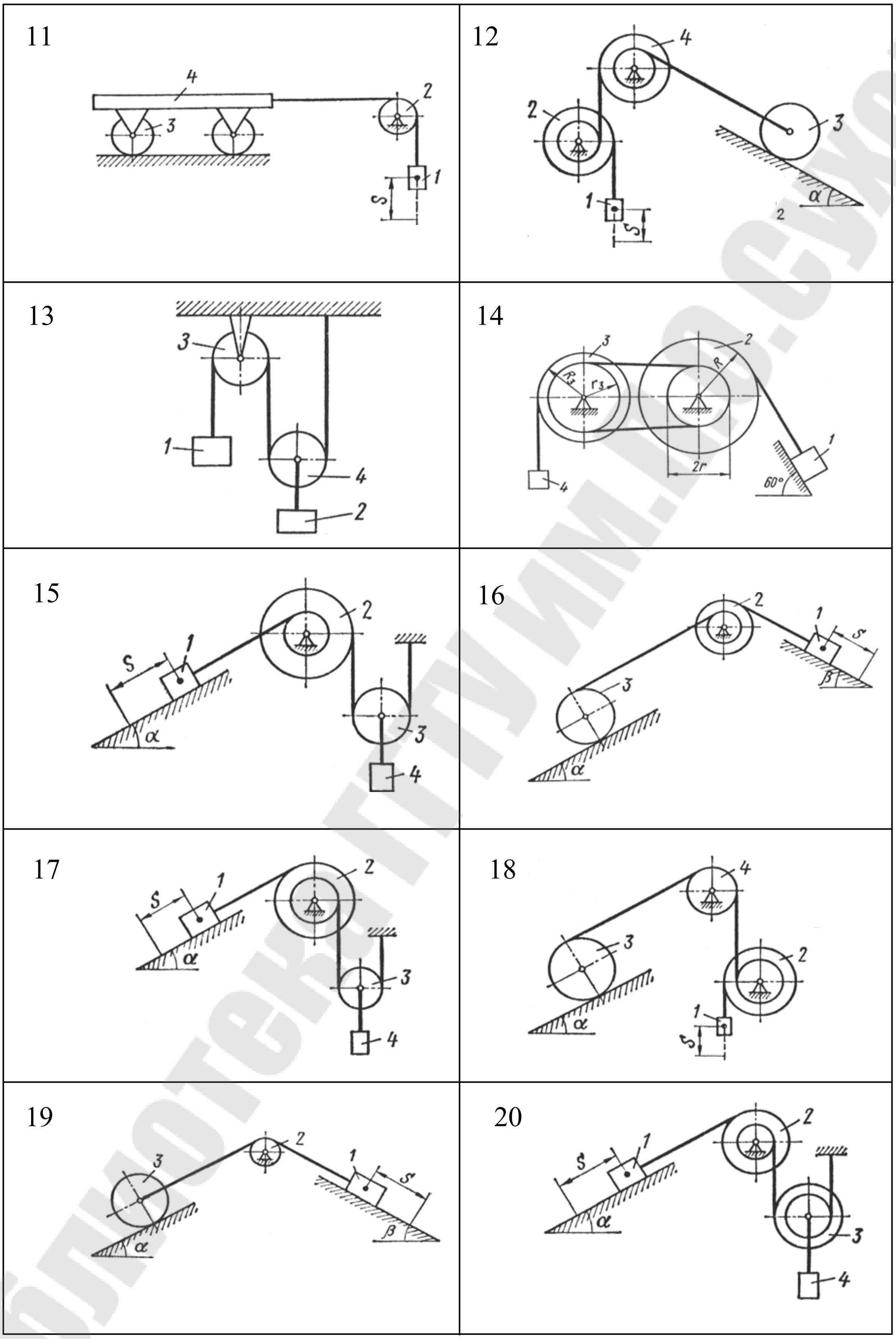

Рисунок 3

5.2. Исследование движения механической системы с двумя степенями свободы.

Механическая система тел 1-6 (рисунок 4, 5) движется под воздействием постоянных сил $\vec{P}$, пар сил с моментами M, сил тяжести и сил сопротивления (сил трения). Необходимые данные приведены в табл. 3 и табл. 4. Там же указаны рекомендуемые обобщенные координаты (x и φ - обобщенные координаты для абсолютного движения, а ξ - для относительного движения). При решении задачи массами нитей пренебречь. Считать, что качение колес происходит без проскальзывания. Трение качения и силы сопротивления в подшипниках не учитывать. Колеса, для которых в таблице радиусы инерции не указаны, считать сплошными однородными дисками. Водила (кривошипы) рассматривать как тонкие однородные стержни. Принять, что в вариантах 19, 20, 27, 28, 35, 36, 39 и 40 механизм расположен в горизонтальной плоскости. В вариантах 3 и 4 массой ленты пренебречь. В вариантах 5 и 6 блоки 5 и 6 насажены на общую ось свободно, их массы и размеры одинаковы. В вариантах 27, 28, 31 – 40 момент M_1 приложен к водилу.

Величины моментов M_1 и M_2 принять следующими: $M_1 = (20+N)$ Нм, $M_2 = (30+2N)$ Нм; N - номер варианта.

Рассмотреть два варианта движения системы:

1. С учетом сил трения.
2. Без учета сил трения.

Найти:

1. Уравнения движения системы в обобщенных координатах q_1 и q_2 при заданных начальных условиях.
2. Кинетическую энергию системы как функцию времени. Построить график.
3. Скорость и ускорение тела 1 как функцию времени. Построить график.

Примечание. Если на механизм не действуют силы трения, то к любому звену, которое совершает вращательное движение приложить пару сил сопротивления с моментом равным M_c. Величину M_c выбрать самостоятельно.

Таблица 3

№ варианта	№ схемы	Массы звеньев,кг					Радиусы инерции, м		Радиус r,м	α°	β°	Сила P, Н	Моменты, Нм	Начальные условия				Коэффициент трения скольжения	Обобщенные координаты	
		1	2	3	4	5	i_{2z}	i_{3z}						q_{10}	q_{20}	$\dot{q}_{10}$	$\dot{q}_{20}$		q_1	q_2
1	1	2	6	1	1	-	-	-	-	30	-	-		0.1	0	0.12	0	-	x	ξ
2	1	3	5.5	1.5	2	-	-	-	-	45	-	-		0	0.1	0	0.61	-	x	ξ
3	2	4	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	120	0.15	0	0	0.2	-	φ	x
4	2	2	2.5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	150	0	0.2	0.2	0.2	-	φ	x
5	3	2	2	4	2	2		-	-	25	30	-	-	0	0.	0.2	0.3	0.1	x_1	x_2
6	3	1	3	6	1	0		-	-	30	45	-	-	0	0.12	0.4	0	0.1	x_1	x_2
7	4	2	2.5	0	1	2	0.4	0.6	0.8	30	-	-	140	0.2	0	0	0.1	-	φ	ξ
8	4	1	2	3.5	1	2.5	0.2	0.3	0.5	45	-	-	130	0.1	0	0.25	0	-	φ	ξ
9	5	0.5	5	1.5	2	-	-	-	-	60	30	100	-	0.2	0.3	0.3	0	0.25	x	ξ
10	5	3.5	4	1	2.5	-	-	-	-	50	40	250	-	0	0	0.23	0	0.2	x	ξ
11	6	1	2.5	3.5	4	2	-	0.25	0.4	-	-	-	-	0	0.3	0.25	0	-	x	ξ
12	6	2.5	5	3	2	2.5	-	0.3	0.4	-	-	-	-	0.15	0	0	0.31	-	x	ξ
13	7	1.5	2	3	1	-	-	0.35	0.5	30	-	-	-	1.5	0	0	0.25	0.1	x	ξ
14	7	2	2.5	3.5	2	-	-	0.3	0.4	45	-	-	-	1	0	0.42	0.2	0.15	x	ξ
15	8	1	1.5	3	2.5	3	-	-	-	40	-	-	-	1.2	0	0.4	0.2	0.12	x	ξ
16	8	3	1.5	1	2	3	-	-	-	60	-	-	-	0.2	0	0.64	0	0.2	x	ξ
17	9	2	2	1.5	3.5	1		-	-	-	-	-	-	0	1.3	0	0.5	0.13	x	ξ
18	9	2	3.5	1	3	1		-	-	-	-	-	-	0	0	0	0.65	0.17	x	ξ
19	10	1.5	3	2.2	1	-	0.6	0.22	0.4	-	-	-	M_1, M_2	0	0	0.1	0.24	-	$φ_1$	$φ_2$
20	10	1	3.5	2	2	-	0.7	0.32	0.5	-	-	-	M_1, M_2	0.15	0	0.81	0	-	$φ_1$	$φ_2$

Таблица 4

№ варианта	№ схемы	Массы звеньев,кг					Радиусы инерции, м		Радиус r,м	α°	β°	Сила P, Н	Моменты, Нм	Начальные условия				Коэффициент трения скольжения	Обобщенные координаты	
		1	2	3	4	5	i_{2z}	i_{3z}						q_{10}	q_{20}	$\dot{q}_{10}$	$\dot{q}_{20}$		q_1	q_2
21	11	2	7	1.5	-	-	-	-	-	20	-	150	-	0	0.22	0.23	0	0.12	x	ξ
22	11	1.5	5	1.5	-	-	-	-	-	30	-	230	-	0.1	0.2	0	0.3	0.1	x	ξ
23	12	3.5	2	1.5	2		-	-	-	-	-	-	60	0	0.4	0.6	0.4	-	φ	ξ
24	12	3	3.5	1.5	1		-	-	-	-	-	-	245	0.2	0.3	0	0.6	-	φ	ξ
25	13	2	1.5	1	1.5	3	-	-	-	40	-	-	-	0	0.4	0	0.48	0.05	x	ξ
26	13	3	1.5	1.5	1	3	-	-	-	50	-	-	-	0	0	0.2	0.5	0.15	x	ξ
27	14	2	3	2	-	-	0.5	-	0.7	-	-	-	M_1, M_2	0	0.12	0	0	-	φ_1	φ_2
28	14	4	4	2	-	-	0.6	-	0.8	-	-	-	M_1, M_2	0.1	0	0.36	0	-	φ_1	φ_2
29	15	1	3	2.5	2.3	2	-	-	-	35	-	-	-	0	0.3	0.42	0.3	0.11	x	ξ
30	15	1.5	3.5	1	2	2.5	-	-	-	55	-	-	-	0.12	0.53	0.23	0	0.16	x	ξ
31	16	1.5	3	2	3.5	-	-	-	-	-	-	-	M_1, M_2	0	0	0.94	0	-	φ_1	φ_2
32	16	1	4	2.5	3	-	-	-	-	-	-	-	M_1, M_2	0	0.3	0.5	0	-	φ_1	φ_2
33	17	2.5	2.5	2	0	-	0.45	-	0.6	-	-	-	85	0	0	0.51	0	-	φ	x
34	17	2	2	2	1.5	-	0.5	-	0.7	-	-	-	153	0.22	0.24	0.2	0	-	φ	x
35	18	1	1	3	-	-	-	-	-	-	-	-	M_1, M_2	0	0	0.3	0.36	-	φ_1	φ_2
36	18	1.5	1.5	5	-	-	-	-	-	-	-	-	M_1, M_2	0	0.2	0	0.6	-	φ_1	φ_2
37	19	2	3.5	4	-	-	0.25	-	0.4	-	-	-	250	0	0	0.25	0.59	-	φ	x
38	19	3	2	4.5	-	-	0.32	-	0.4	-	-	-	140	0	0.2	0.5	0.9	-	φ	x
39	20	1.5	4.5	2	1	-	-	-	-	-	-	-	M_1, M_2	0.5	0	0.4	0	-	φ_1	φ_2
40	20	2	4	2.5	2	-	-	-	-	-	-	-	M_1, M_2	0	0.25	0	0.2	-	φ_1	φ_2

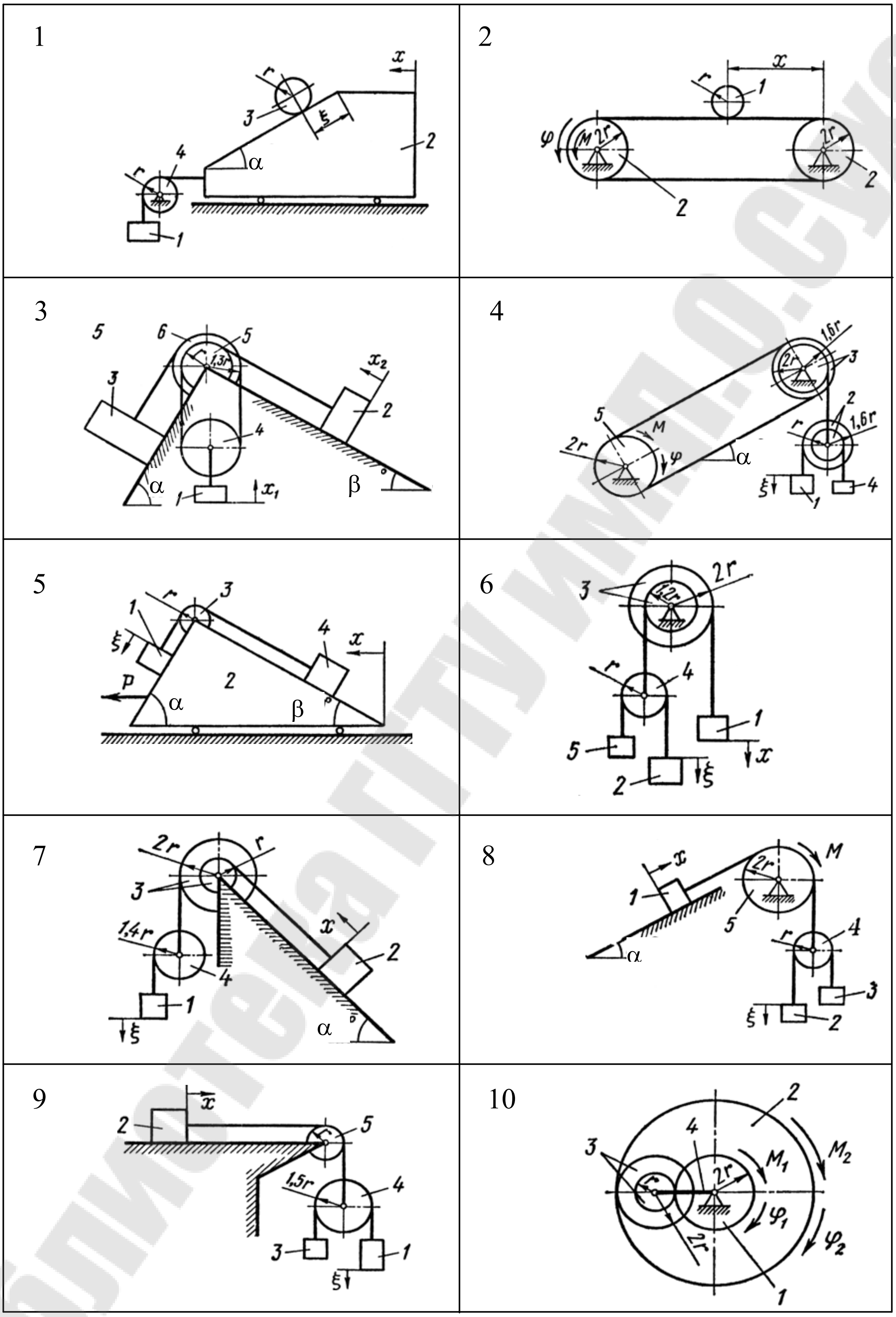

Рисунок 4

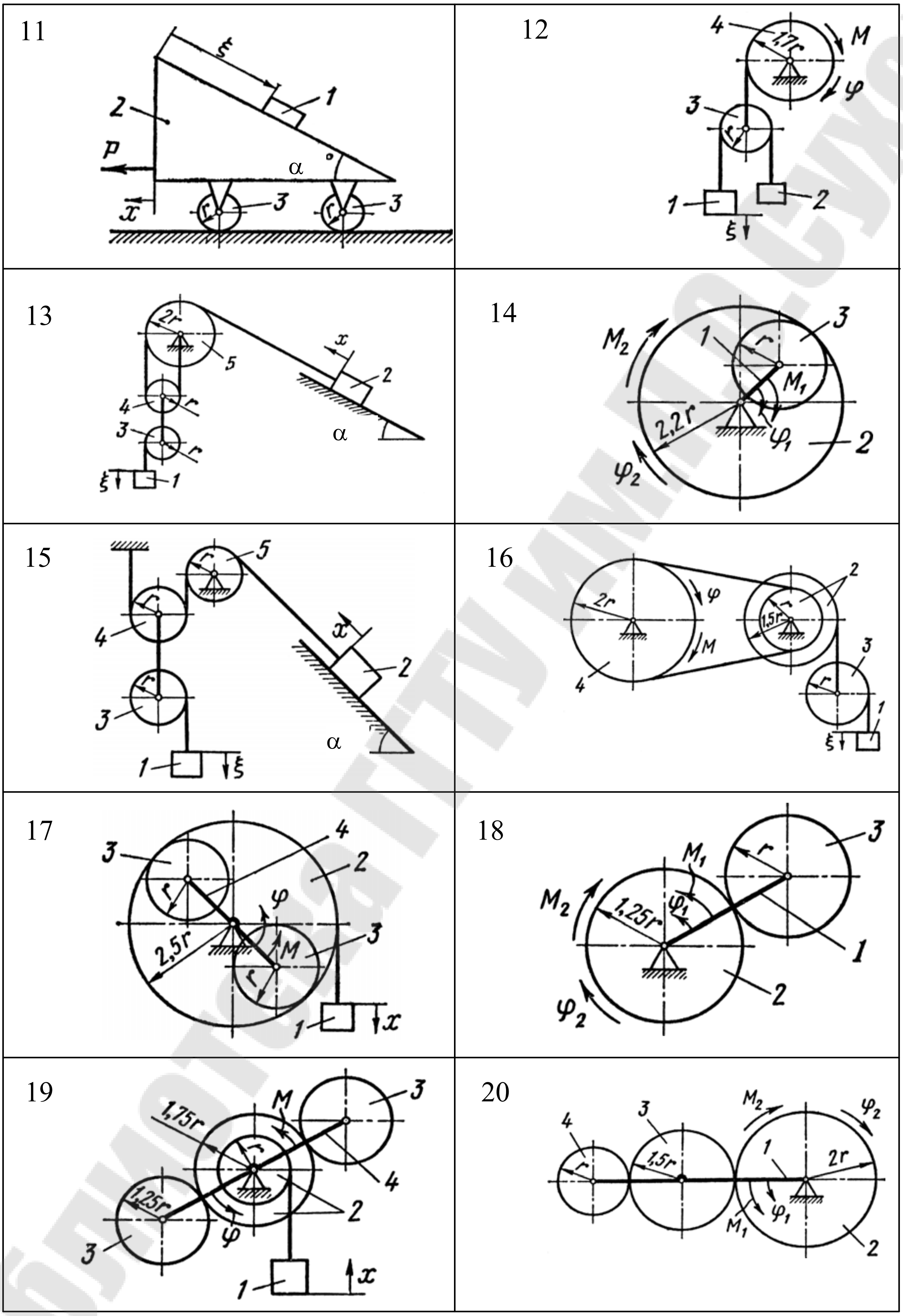
11
ξ
1
2
P
α
x
r
3
12
4
1,7r
M
φ
3
r
1
2
ξ
13
2r
5
x
2
4
r
3
r
α
ξ
1
14
M2
1
r
3
M1
2,2r
φ1
2
φ2
15
5
r
r
4
r
3
x
2
α
1
ξ
16
2r
φ
2
r
1,5r
M
4
3
r
1
ξ
17
4
3
2
r
φ
2,5r
M
3
r
1
x
18
M1
3
r
M2
1,25r
φ1
1
2
φ2
19
M
3
1,75r
r
1,25r
4
2
φ
3
1
x
20
4
3
M2
φ2
r
1,5r
1
2r
M1
φ1
2

Рисунок 5

ЛИТЕРАТУРА

1. Бутенин Н.В. Введение в аналитическую механику. – М.: «Наука», 1971. – 264 с.
2. Бутенин Н.В., Фуфаев Н.А. Введение в аналитическую механику. – М.: «Наука», 1991. – 256 с.
3. Добронравов В.В. Основы аналитической механики. – М.: «Высшая школа», 1976. – 264 с.
4. Беленький И.М. Введение в аналитическую механику. – М.: «Высшая школа», 1964. – 323 с.
5. Лурье А. И. Аналитическая механика. – М.: «Физматгиз», 1961. – 824 с.
6. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. М.: «Высшая школа», 1985., Т. 1. – 239 с., Т. 2. – 496 с.
7. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. М.: «Высшая школа», 1983., Т. 1. – 352 с., Т. 2. – 640 с.

Содержание

Шабловский Олег Никифорович
Кроль Дмитрий Григорьевич

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Пособие
для студентов инженерно-технических специальностей дневной и заочной форм обучения

Подписано в печать 18.06.10.
Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Ризография. Усл. печ. л. 3,72. Уч.-изд. л. 3,32.
Изд. № 267
E-mail: ic@gstu.by
http://www.gstu.by

Отпечатано на цифровом дуплекаторе
с макета оригинала авторского для внутреннего использования.
Учреждение образования «Гомельский государственный
технический университет имени П.О. Сухого».
246746, г. Гомель, пр. Октября, 48.