

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Теоретические основы электротехники»

С. А. Грачев, В. В. Соленков, Я. О. Шабловский

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

ПРАКТИКУМ

**по курсу «Теория линейных электрических цепей»
для студентов электротехнических специальностей**

В трех частях

Часть 3

Цепи с распределёнными параметрами

Электронный аналог печатного издания

Гомель 2010

УДК 621.3.011.7(075.8)
ББК 31.211я73
Г78

*Рекомендовано к изданию научно-методическим советом
энергетического факультета ГГТУ им. П. О. Сухого
(протокол № 2 от 22.12.2008 г.)*

Рецензент: канд. техн. наук, доц. каф. «Электроснабжение» ГГТУ им. П. О. Сухого
А. В. Сычев

Г78 **Грачев, С. А.** Теоретические основы электротехники : практикум по курсу «Теория линейных электрических цепей» для студентов электротехн. специальностей : в 3 ч. Ч 3. Цепи с распределёнными параметрами / С. А. Грачев, В. В. Соленков, Я. О. Шабловский. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2010. – 64 с.– Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: <http://lib.gstu.local>. – Загл. с титул. экрана.

ISBN 978-985-420-929-6.

Содержатся решения типовых задач по разделу «Линейные электрические цепи с распределёнными параметрами».

Для студентов электротехнических специальностей.

УДК 621.3.011.7(075.8)
ББК 31.211я73

ISBN 978-985-420-929-6 (ч. 3)
ISBN 978-985-420-713-1

© Грачев С. А., Соленков В. В., Шабловский Я. О.,
2010

© Учреждение образования «Гомельский
государственный технический университет
имени П. О. Сухого», 2010

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данный практикум является третьей (завершающей) частью курса «Теория линейных электрических цепей» и содержит решения основных типов задач по разделу «Цепи с распределёнными параметрами». Практикум предназначен для студентов электротехнических и электроэнергетических специальностей дневной и заочной форм обучения, в первую очередь, для студентов, обучающихся по специальности 1-43 01 02 «Электроэнергетические системы и сети». Рассмотренные задачи могут быть использованы на практических занятиях по указанному разделу курса ТОЭ, а разобранные решения будут полезны при самостоятельной работе студентов, в том числе, при подготовке к экзаменам. Для удобства читателей в начале практикума приведены краткие сведения из теории цепей с распределёнными параметрами и основные расчетные формулы.

ГЛАВА 6

УСТАНОВИВШИЕСЯ ПРОЦЕССЫ В ЦЕПЯХ С РАСПРЕДЕЛЁННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Вводные положения

Однородная двухпроводная линия определяется своими первичными параметрами: активным сопротивлением R_0 , индуктивностью L_0 , емкостью C_0 и активной проводимостью G_0 единицы длины линии. При заданной частоте тока единица длины линии имеет продольное сопротивление

$$\underline{Z}_0 = R_0 + j\omega L_0$$

и поперечную проводимость

$$\underline{Y}_0 = G_0 + j\omega C_0.$$

При этом для двухпроводной воздушной линии

$$L_0 = \frac{\mu_0}{\pi} \ln\left(\frac{2D}{d}\right); \quad C_0 = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{2D}{d}\right)},$$

где $\epsilon_0 = 8,84 \cdot 10^{-12}$ Ф/м; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м; D – расстояние между осями проводов диаметром d .

Вторичные параметры линии: волновое (характеристическое) сопротивление

$$\underline{Z}_в = Z_в e^{j\theta} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}},$$

коэффициент распространения

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta = \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0},$$

где $\alpha > 0$ – коэффициент ослабления; $\beta > 0$ – коэффициент фазы.

При этом

$$\underline{Z}_0 = \underline{\gamma}\underline{Z}_B; \quad \underline{Y}_0 = \frac{\underline{\gamma}}{\underline{Z}_B}.$$

Мгновенные значения напряжения $u = u(x, t)$ между проводами и тока $i = i(x, t)$ в линии определяются уравнениями

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = R_0 i + \frac{L_0 \partial i}{\partial t}; \quad -\frac{\partial i}{\partial x} = G_0 u + \frac{C_0 \partial u}{\partial t},$$

где координата x поперечного сечения отсчитывается от начала линии. В комплексной форме те же уравнения имеют вид

$$-\frac{d\underline{U}}{dx} = R_0 \underline{I} + j\omega L_0 \underline{I} = \underline{Z}_0 \underline{I}; \quad -\frac{d\underline{I}}{dx} = G_0 \underline{U} + j\omega C_0 \underline{U} = \underline{Y}_0 \underline{U}.$$

Решение этих уравнений:

$$\underline{U}(x) = \underline{U}_{\text{пр}} + \underline{U}_{\text{обр}} = \underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}x} + \underline{A}_2 e^{+\underline{\gamma}x}; \quad (6.1)$$

$$\underline{I}(x) = \underline{I}_{\text{пр}} - \underline{I}_{\text{обр}} = \frac{\underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}x} - \underline{A}_2 e^{+\underline{\gamma}x}}{\underline{Z}_B}, \quad (6.2)$$

где

$$\underline{A}_1 = A_1 e^{j\psi_1} = \frac{\underline{U}_1 + \underline{Z}_B \underline{I}_1}{2} = \frac{\underline{U}_2 + \underline{Z}_B \underline{I}_2}{2} e^{\underline{\gamma}l}; \quad (6.3)$$

$$\underline{A}_2 = A_2 e^{j\psi_2} = \frac{\underline{U}_1 - \underline{Z}_B \underline{I}_1}{2} = \frac{\underline{U}_2 - \underline{Z}_B \underline{I}_2}{2} e^{-\underline{\gamma}l}. \quad (6.4)$$

Здесь \underline{U}_1 и \underline{I}_1 – комплексы действующих значений напряжения и тока в начале линии ($x = 0$); \underline{U}_2 и \underline{I}_2 – комплексы действующих значений напряжения и тока в конце линии ($x = l$); $\underline{U}_{\text{пр}}$, $\underline{I}_{\text{пр}}$ – комплексы действующих значений напряжения и тока прямой волны; $\underline{U}_{\text{обр}}$, $\underline{I}_{\text{обр}}$ – комплексы действующих значений напряжения и тока обратной (отражённой) волны.

С учётом (6.3) и (6.4) комплексы действующих значений напряжения и тока в произвольной точке линии можно выразить равенствами

$$\underline{U} = Ue^{j\Psi_u} = \underline{U}_1 \operatorname{ch}\underline{\gamma}x - \underline{Z}_B \underline{I}_1 \operatorname{sh}\underline{\gamma}x; \quad \underline{I} = Ie^{j\Psi_i} = \underline{I}_1 \operatorname{ch}\underline{\gamma}x - \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_B} \operatorname{sh}\underline{\gamma}x.$$

При отсчете расстояния от конца линии ($y = l - x$) те же величины выражаются равенствами

$$\underline{U}(x) = \underline{U}_2 \operatorname{ch}\underline{\gamma}y + \underline{Z}_B \underline{I}_2 \operatorname{sh}\underline{\gamma}y; \quad \underline{I}(x) = \underline{I}_2 \operatorname{ch}\underline{\gamma}y + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_B} \operatorname{sh}\underline{\gamma}y.$$

При вычислениях гиперболических функций комплексного аргумента можно пользоваться формулами

$$\operatorname{sh}\underline{\gamma}x = \operatorname{sh}\alpha x \cos \beta x + j \operatorname{ch}\alpha x \sin \beta x; \quad \operatorname{ch}\underline{\gamma}x = \operatorname{ch}\alpha x \cos \beta x + j \operatorname{sh}\alpha x \sin \beta x.$$

Мгновенные значения напряжений и токов:

$$u_{\text{пр}}(x, t) = A_1 \sqrt{2} e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x + \psi_1);$$

$$u_{\text{обр}}(x, t) = A_2 \sqrt{2} e^{+\alpha x} \sin(\omega t + \beta x + \psi_2);$$

$$i_{\text{пр}}(x, t) = \frac{A_1 \sqrt{2}}{\underline{Z}_B} e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x + \psi_1 - \Theta);$$

$$i_{\text{обр}}(x, t) = \frac{A_2 \sqrt{2}}{\underline{Z}_B} e^{+\alpha x} \sin(\omega t + \beta x + \psi_2 - \Theta).$$

Возможны два частных случая:

1) линия без потерь ($R_0 \approx 0, G_0 \approx 0$);

2) линия без искажений $\left(\frac{R_0}{L_0} = \frac{G_0}{C_0} \right)$

В обоих названных случаях

$$\beta = \omega \sqrt{L_0 C_0},$$

а волновое сопротивление – чисто активное:

$$\underline{Z}_B = Z_B = \sqrt{L_0 / C_0}.$$

При этом в линии без потерь

$$\alpha = 0, \quad \underline{\gamma} = j\beta,$$

а в линии без искажений

$$\alpha = \sqrt{R_0 G_0}.$$

Напряжение и ток в произвольной точке линии без потерь:

$$\underline{U} = \underline{U}_1 \cos \beta x - j \underline{I}_1 Z_B \sin \beta x = \underline{U}_2 \cos \beta y + j \underline{I}_2 Z_B \sin \beta y;$$

$$\underline{I} = \underline{I}_1 \cos \beta x - j \frac{\underline{U}_1}{Z_B} \sin \beta x = \underline{I}_2 \cos \beta y + j \frac{\underline{U}_2}{Z_B} \sin \beta y.$$

Линия, в конце которой присоединена нагрузка с сопротивлением \underline{Z}_H , имеет входное сопротивление

$$\underline{Z}_{\text{BX}} = \underline{Z}_B \frac{\underline{Z}_H + \underline{Z}_B \operatorname{th} \underline{\gamma} l}{\underline{Z}_B + \underline{Z}_H \operatorname{th} \underline{\gamma} l}.$$

Для короткозамкнутой линии ($\underline{Z}_H = 0$)

$$\underline{Z}_{\text{BX}} = \underline{Z}_K = \underline{Z}_B \operatorname{th} \underline{\gamma} l.$$

Для ненагруженной (разомкнутой) линии (холостой ход, $\underline{Z}_H = \infty$)

$$\underline{Z}_{\text{BX}} = \underline{Z}_X = \underline{Z}_B \operatorname{cth} \underline{\gamma} l.$$

При этом

$$\underline{Z}_{\text{BX}} = \underline{Z}_B \frac{\underline{Z}_H + \underline{Z}_K}{\underline{Z}_H + \underline{Z}_X};$$

$$\underline{Z}_B = \sqrt{\underline{Z}_K \underline{Z}_X}; \quad \operatorname{th} \underline{\gamma} l = \sqrt{\frac{\underline{Z}_K}{\underline{Z}_X}}; \quad e^{2\underline{\gamma} l} = \frac{1 + \operatorname{th} \underline{\gamma} l}{1 - \operatorname{th} \underline{\gamma} l}.$$

Вычисление гиперболического тангенса производится по формуле

$$\operatorname{th}(a + jb) = \frac{\operatorname{sh} 2a}{\operatorname{ch} 2a + \cos 2b} + j \frac{\sin 2b}{\operatorname{ch} 2a + \cos 2b}.$$

Для линии без потерь

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{Z}_{\text{в}} \frac{\underline{Z}_{\text{н}} + j\underline{Z}_{\text{в}} \operatorname{tg}\beta l}{\underline{Z}_{\text{в}} + j\underline{Z}_{\text{н}} \operatorname{tg}\beta l}.$$

При коротком замыкании линии без потерь

$$\underline{Z}_{\text{к}} = j\underline{Z}_{\text{в}} \operatorname{tg}\beta l.$$

При холостом ходе линии без потерь

$$\underline{Z}_{\text{х}} = -j\underline{Z}_{\text{в}} \operatorname{ctg}\beta l.$$

Активная мощность в конце линии без потерь равна нулю при холостом ходе, при коротком замыкании и при чисто реактивной нагрузке.

Если нагрузка линии без потерь чисто реактивная ($\underline{Z}_{\text{н}} = jX_{\text{н}}$), то удобно обозначить

$$\delta_{\text{н}} = \operatorname{arctg} \frac{X_{\text{н}}}{Z_{\text{в}}}.$$

Тогда входное сопротивление линии без потерь

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = j\underline{Z}_{\text{в}} \operatorname{tg}(\beta l + \delta_{\text{н}}).$$

При холостом ходе линии без потерь

$$\underline{U} = \underline{U}_2 \cos \beta y; \quad \underline{I} = j \frac{\underline{U}_2}{Z_{\text{в}}} \sin \beta y = \frac{\underline{U}_2}{Z_{\text{в}}} e^{j90^\circ} \sin \beta y.$$

При этом мгновенные значения напряжения и тока

$$u = U_{2m} \cos \beta y \sin \alpha t; \quad i = \frac{U_{2m}}{Z_{\text{в}}} \sin \beta y \cos \omega t$$

соответствуют стоячим волнам – волнам, получающимся при наложении прямой и обратной волн с одинаковыми амплитудами:

$$u = \frac{U_{2m}}{2} (\sin(\omega t + \beta y) + \sin(\omega t - \beta y)), \quad i = \frac{I_{2m}}{2} (\sin(\omega t + \beta y) - \sin(\omega t - \beta y)).$$

В конце линии ($y = 0$) и в точках, отстоящих от её конца на расстояниях $y = k\lambda/2$ (где k – целое число) наблюдаются пучности напряжения и узлы тока. На расстояниях $y = (2k + 1)\lambda/4$ от конца линии наблюдаются узлы напряжения и пучности тока.

При коротком замыкании линии без потерь

$$\underline{U} = jZ_B I_2 \sin \beta y = Z_B I_2 e^{j90^\circ} \sin \beta y; \quad \underline{I} = I_2 \cos \beta y$$

и мгновенные значения напряжения и тока

$$u = Z_B I_{2m} \sin \beta y \cos \alpha t, \quad i = I_{2m} \cos \beta y \sin \alpha t$$

соответствуют стоячим волнам. В конце линии и в точках, отстоящих от конца на целое число полуволн ($y = k\lambda/2$), имеют место узлы напряжения и пучности тока, а в точках, отстоящих от конца линии на расстояния $y = (2k + 1)\lambda/4$ – пучности напряжения и узлы тока.

Существенно, что узлы и пучности неподвижны; при этом узлы тока совпадают с пучностями напряжения и наоборот.

Фазовая скорость волны

$$c = \frac{dx}{dt} = \frac{\alpha}{\beta}$$

максимальна в воздушной линии без потерь:

$$c = c_{\max} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с} = 3 \cdot 10^5 \text{ км/с}.$$

В кабеле без потерь, изоляция которого имеет относительную диэлектрическую проницаемость ϵ_r и магнитную проницаемость μ_r ,

$$c = \frac{c_{\max}}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}.$$

В линии без искажений фазовая скорость волны постоянна:

$$c = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}.$$

Длина волны в линии

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{2\pi}{\beta},$$

где f – циклическая частота тока.

Коэффициент отражения

$$\underline{\Gamma} = \frac{A_2 e^{\gamma l}}{A_1 e^{-\gamma l}} = \frac{Z_H - Z_B}{Z_H + Z_B}.$$

При $Z_H = Z_B$ нагрузка линии называется согласованной; в этом случае

$$Z_{\text{вх}} = Z_B,$$

и отраженная волна отсутствует:

$$\underline{U} = \underline{U}_{\text{пр}}; \quad \underline{I} = \underline{I}_{\text{пр}}; \quad \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} = Z_B;$$

$$\ln \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \ln \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} = \underline{\gamma} l;$$

$$\alpha l = \ln \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \ln \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2}; \quad \beta l = \psi_{u1} - \psi_{u2} = \psi_{i1} - \psi_{i2}.$$

Примеры решения задач

6.1. Линия на частоте $f = 10$ кГц имеет следующие первичные параметры: $R_0 = 5$ Ом/км, $L_0 = 1,9 \cdot 10^{-3}$ Гн/км, $C_0 = 6,35 \cdot 10^{-9}$ Ф/км, $G_0 = 6 \cdot 10^{-7}$ См/км. Определить вторичные параметры линии, длину волны и фазовую скорость.

Решение

Волновое сопротивление линии

$$\underline{Z}_B = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{5 + j2\pi \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 1,9 \cdot 10^{-3}}{6 \cdot 10^{-7} + j2\pi \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 6,35 \cdot 10^{-9}}} = 547 e^{-j1^\circ 10'} \text{ Ом}.$$

Коэффициент распространения

$$\begin{aligned}\underline{\gamma} &= \sqrt{(R_0 + j\omega L_0) \cdot (G_0 + j\omega C_0)} = \\ &= \sqrt{(5 + j2\pi \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 1,9 \cdot 10^{-3}) \cdot (6 \cdot 10^{-7} + j2\pi \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 6,35 \cdot 10^{-9})} = \\ &= (4,42 \cdot 10^{-3} + j0,218) \text{ км}^{-1}.\end{aligned}$$

Отсюда коэффициент ослабления

$$\alpha = 4,42 \text{ мНп/км},$$

коэффициент фазы

$$\beta = 0,218 \text{ рад/км}.$$

Длина волны в линии

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{0,218} = 28,8 \text{ км}.$$

Фазовая скорость

$$c = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi \cdot 10 \cdot 10^3}{0,218} = 2,88 \cdot 10^5 \text{ км/с}.$$

6.2. Известны первичные параметры линии длиной 100 км: $R_0 = 2 \text{ Ом/км}$, $L_0 = 10 \text{ мГн/км}$, $G_0 = 0,8 \text{ мкСм/км}$, $C_0 = 10 \text{ нФ/км}$. Рассчитать напряжение и ток в начале линии, если на частоте 100 Гц через нагрузку с сопротивлением $Z_H = 3,1e^{-j20^\circ} \text{ кОм}$ протекает ток $I_2 = 5e^{j20^\circ} \text{ А}$.

Решение

При заданной частоте единица длины линии имеет продольное сопротивление

$$\begin{aligned}\underline{Z}_0 &= R_0 + j2\pi f L_0 = 2 + j2 \cdot 3,14 \cdot 100 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = \\ &= 2 + j6,28 = 6,6e^{j72,3^\circ} \text{ Ом/км}\end{aligned}$$

и поперечную проводимость

$$\begin{aligned}\underline{Y}_0 &= G_0 + j\omega C_0 = 0,8 \cdot 10^{-6} + j2 \cdot 3,14 \cdot 100 \cdot 6,5 \cdot 10^{-9} = \\ &= 0,8 \cdot 10^{-6} + j4,08 \cdot 10^{-6} = 4,16e^{j78,9^\circ} \text{ мкСм/км}.\end{aligned}$$

По найденным значениям \underline{Z}_0 и \underline{Y}_0 рассчитываем коэффициент распространения

$$\begin{aligned}\underline{\gamma} &= \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0} = \sqrt{6,6e^{j72,3^\circ} \cdot 4,16 \cdot 10^{-6} e^{j78,9^\circ}} = 5,24e^{j75,6^\circ} \cdot 10^{-3} \text{ км}^{-1} = \\ &= (1,3 + j5,1) \cdot 10^{-3} \text{ км}^{-1}\end{aligned}$$

и волновое сопротивление

$$\underline{Z}_B = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}} = \sqrt{\frac{6,6e^{j72,3^\circ}}{4,16 \cdot 10^{-6} e^{j78,9^\circ}}} = 1,26e^{-j3,3^\circ} \text{ кОм}.$$

Напряжение и ток в начале линии определяются равенствами

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 \text{ch} \underline{\gamma} l + \underline{I}_2 \underline{Z}_B \text{sh} \underline{\gamma} l, \quad \underline{I}_1 = \underline{I}_2 \text{ch} \underline{\gamma} l + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_B} \text{sh} \underline{\gamma} l.$$

В нашем случае

$$\underline{U}_2 = \underline{I}_2 \underline{Z}_H = 5e^{j20^\circ} \cdot 3,1 \cdot 10^3 e^{-j20^\circ} = 15,5 \text{ кВ}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= 15,5 \cdot 10^3 \cdot \text{ch}(5,24e^{j75,6^\circ} \cdot 10^{-3} \cdot 100) + \\ &+ 5e^{j20^\circ} \cdot 1,26e^{-j3,3^\circ} \cdot 10^3 \cdot \text{sh}(5,24e^{j75,6^\circ} \cdot 10^{-3} \cdot 100) = 14,13e^{j17,43^\circ} \text{ кВ}; \\ \underline{I}_1 &= 5e^{j20^\circ} \cdot \text{ch}(5,24e^{j75,6^\circ} \cdot 10^{-3} \cdot 100) + \frac{15,5 \cdot 10^3}{1,26e^{-j3,3^\circ}} \text{sh}(5,24e^{j75,6^\circ} \cdot 10^{-3} \cdot 100) = \\ &= 9,51e^{j57,3^\circ} \text{ А}.\end{aligned}$$

6.3. Линия длиной 38 км имеет на частоте 800 Гц следующие вторичные параметры: $\underline{Z}_B = 1510e^{-j20^\circ 20'}$ Ом, $\underline{\gamma} = (13,6 + j36,4) \cdot 10^{-3}$ км⁻¹. Источник питания имеет ЭДС $E = 20$ кВ и внутреннее сопротивление $\underline{Z}_Г = 600$ Ом. При нагрузке $\underline{Z}_Н = 1355e^{j21^\circ 5'}$ Ом входное сопротивление линии равно $\underline{Z}_{ВХ} = 1732e^{-j34^\circ 8'}$ Ом. Определить напряжение и ток в начале линии и в нагрузке.

Решение

Ток и напряжение в начале линии находим по закону Ома:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_Г + \underline{Z}_{ВХ}} = \frac{20 \cdot 10^3}{600 + 1732e^{-j34^\circ 8'}} = 8,9e^{j25^\circ 30'} \text{ А};$$

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_{ВХ} \underline{I}_1 = 1732e^{-j34^\circ 8'} \cdot 8,9e^{j25^\circ 30'} = 15,4e^{-j8^\circ 38'} \text{ кВ}.$$

Напряжение и ток в конце линии

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_1 \text{ch} \underline{\gamma} l - \underline{Z}_B \underline{I}_1 \text{sh} \underline{\gamma} l = 15,4 \cdot 10^3 e^{-j8^\circ 38'} \text{ch}[(13,6 + j36,4) \cdot 10^{-3} \cdot 38] -$$

$$- 1510e^{-j20^\circ 20'} \cdot 8,9e^{j25^\circ 30'} \cdot \text{sh}[(13,6 + j36,4) \cdot 10^{-3} \cdot 38] = 8,5e^{-j61^\circ} \text{ кВ};$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 \text{ch} \underline{\gamma} l - \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_B} \text{sh} \underline{\gamma} l = 8,9e^{j25^\circ 30'} \cdot \text{ch}[(13,6 + j36,4) \cdot 10^{-3} \cdot 38] -$$

$$- \frac{15,4 \cdot 10^3 e^{-j8^\circ 38'}}{1510e^{-j20^\circ 20'}} \cdot \text{sh}[(13,6 + j36,4) \cdot 10^{-3} \cdot 38] = 6,27e^{-j82^\circ} \text{ А}.$$

6.4. Известны первичные параметры линии длиной 100 км: $R_0 = 15$ Ом/км, $L_0 = 5$ мГн/км, $G_0 = 0,05$ мкСм/км, $C_0 = 5$ нФ/км. На входе линии действует напряжение $u_1 = 100\sqrt{2} \sin(10^3 t + 90^\circ)$, В.

1. Найти напряжение, ток и мощность нагрузки с сопротивлением $\underline{Z}_Н = 100e^{-j50^\circ}$ Ом.

2. Рассчитать, каким должно быть напряжение в начале линии, чтобы в нагрузке выделилась мощность $P'_2 = 6,43$ кВт. Определить активную мощность источника, развиваемую при этом.

Решение

1. Определяем вторичные параметры линии:

$$\underline{Z}_B = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}} = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{15 + j10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{0,05 \cdot 10^{-6} + j10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-9}}} =$$
$$= \sqrt{\frac{15,81e^{j18,44^\circ}}{5e^{j89,43^\circ} \cdot 10^{-6}}} = 1,78e^{-j35,5^\circ} \text{ кОм.}$$

$$\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0} = \sqrt{15,81e^{j18,44^\circ} \cdot 5e^{j89,43^\circ} \cdot 10^{-6}} =$$
$$= 8,9 \cdot 10^{-3} e^{j53,94^\circ} = (5,24 + j7,19) \cdot 10^{-3} \text{ км}^{-1},$$

откуда

$$\alpha = 5,24 \text{ мНп/км}, \quad \beta = 7,19 \cdot 10^{-3} \text{ рад/км.}$$

Напряжение в начале линии

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} l + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_H} \cdot \underline{Z}_B \operatorname{sh} \underline{\gamma} l.$$

Следовательно, напряжение в конце линии

$$\underline{U}_2 = \frac{\underline{U}_1}{\operatorname{ch} \underline{\gamma} l + \frac{\underline{Z}_B}{\underline{Z}_H} \operatorname{sh} \underline{\gamma} l} = \frac{100e^{j90^\circ}}{0,94e^{j29,28^\circ} + \frac{1,78 \cdot 10^3 e^{-j35,5^\circ}}{100e^{j50^\circ}} \cdot 0,86e^{j60,75^\circ}} =$$
$$= 6,27e^{j112,26^\circ} \text{ В.}$$

Ток в конце линии

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_H} = \frac{6,27e^{j112,26^\circ}}{100e^{j50^\circ}} = 0,0627e^{j62,26^\circ} \text{ А.}$$

Мощность нагрузки

$$P_2 = U_2 I_2 \cos(\arg \underline{Z}_H) = 6,27 \cdot 0,0627 \cos(50^\circ) = 0,25 \text{ Вт.}$$

2. Значению P'_2 мощности нагрузки соответствует ток нагрузки

$$\underline{I}'_2 = \sqrt{\frac{P'_2}{R_H}} = \sqrt{\frac{P'_2}{\operatorname{Re} \underline{Z}_H}} = \sqrt{\frac{6430}{64,3}} = 10 \text{ А}.$$

Тогда напряжение в конце линии

$$\underline{U}'_2 = \frac{P'_2}{I'_2 \cos(\arg \underline{Z}_H)} = \frac{6430}{10 \cos 50^\circ} = 1000 \text{ В}.$$

Напряжение в начале линии

$$\underline{U}'_1 = \underline{U}'_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} l + \underline{Z}_B I'_2 \operatorname{sh} \underline{\gamma} l.$$

Примем $\underline{U}'_2 = 1000e^{j0^\circ}$ В; тогда $\underline{I}'_2 = 10e^{-j50^\circ}$ А. Подставляя эти значения, получаем:

$$\begin{aligned} \underline{U}'_1 &= 1000 \cdot 0,94e^{j23,28^\circ} + 1,78 \cdot 10^3 e^{-j35,5^\circ} \cdot 10e^{-j50^\circ} \cdot 0,86e^{j60,75^\circ} = \\ &= 15,95e^{-j22,24^\circ} \text{ кВ}. \end{aligned}$$

В начале линии при этом протекает ток

$$\begin{aligned} \underline{I}'_1 &= \underline{I}'_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} l + \frac{\underline{U}'_2}{\underline{Z}'_B} \operatorname{sh} \underline{\gamma} l = 10e^{-j50^\circ} \cdot 0,94e^{j23,28^\circ} + \\ &+ \frac{1000}{1,78 \cdot 10^3 e^{-j35,5^\circ}} \cdot 0,86e^{j60,75^\circ} = 9,145e^{-j24,18^\circ} \text{ А}. \end{aligned}$$

Соответственно, активная мощность источника

$$P_1 = U'_1 I'_1 \cos \varphi_1 = 15950 \cdot 9,145 \cdot \cos(-22,24^\circ + 24,18^\circ) = 145,8 \text{ кВт}.$$

6.5. Линия длиной 59 км имеет следующие первичные параметры: $R_0 = 2,84$ Ом/км; $L_0 = 1,94$ мГн/км; $G_0 = 0,70$ мкСм/км; $C_0 = 6,25$ нФ/км.

1. Рассчитать сопротивление приемника, при котором на частоте 800 Гц в линии отсутствует отраженная волна. Найти напряжение и активную мощность источника при напряжении приемника 20 В.

2. Определить предельную длину линии l_{\max} при допустимом ослаблении сигнала 1,3 Нп. Какое напряжение должно быть в начале линии, чтобы при увеличении её длины до $l = l_{\max}$ напряжение приемника осталось прежним?

3. Найти напряжение в конце линии при её холостом ходе, если после отключения приемника напряжение в начале линии осталось прежним.

4. Определить, как необходимо изменить активное сопротивление линии, чтобы она стала неискажающей.

Решение

1. Отраженная волна отсутствует при согласовании нагрузки, т. е. при

$$\begin{aligned} \underline{Z}_H = \underline{Z}_B &= \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}} = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = \\ &= \sqrt{\frac{2,84 + j5,03 \cdot 10^3 \cdot 1,94 \cdot 10^{-3}}{0,70 \cdot 10^{-6} + j5,03 \cdot 10^3 \cdot 6,25 \cdot 10^{-9}}} = 568e^{-7^\circ 30'} \text{ Ом.} \end{aligned}$$

Коэффициент распространения заданной линии

$$\begin{aligned} \underline{\gamma} &= \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0} = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = \\ &= \sqrt{(2,84 + j5,03 \cdot 10^3 \cdot 1,94 \cdot 10^{-3})(0,70 \cdot 10^{-6} + j5,03 \cdot 10^3 \cdot 6,25 \cdot 10^{-9})} = \\ &= 17,9 \cdot 10^{-3} e^{j81^\circ 15'} = 2,72 \cdot 10^{-3} + j17,5 \cdot 10^{-3} \text{ км}^{-1}, \end{aligned}$$

отсюда

$$\alpha = 2,72 \cdot 10^{-3} \text{ Нп/км}; \quad \alpha l = 2,72 \cdot 10^{-3} \cdot 59 = 0,16 \text{ Нп.}$$

Для согласованной нагрузки

$$U_1 = U_2 e^{\alpha l} = 20 e^{0,16} = 20 \cdot 1,17 = 23,4 \text{ В.}$$

Активная мощность источника

$$P_1 = U_1 I_1 \cos \varphi_1 = \frac{U_1^2}{Z_B} \cos \varphi_1 = \frac{U_2^2}{Z_B} e^{2\alpha l} \cos \varphi_1 = \frac{U_2^2}{Z_B} e^{2\alpha l} \cos(\arg Z_B) = \\ = \frac{20^2}{568} 1,38 \cos(-7^\circ 30') = 0,96 \text{ Вт.}$$

2. При допустимом ослаблении $\alpha l = 1,3$ Нп наибольшая длина линии

$$l_{\max} = \frac{1,3}{\alpha} = \frac{1,3}{2,72 \cdot 10^{-3}} = 478 \text{ км.}$$

При $U_2 = 20$ В, $l = l_{\max}$ в начале линии с согласованной нагрузкой необходимо напряжение

$$U_1 = U_2 e^{\alpha l_{\max}} = 20 \cdot e^{1,3} = 20 \cdot 3,68 = 73,5 \text{ В.}$$

3. При $I_2 = 0$ (холостой ход линии)

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} l,$$

следовательно, напряжение в конце линии

$$U_2 = \frac{U_1}{|\operatorname{ch} \underline{\gamma} l|} = \frac{23,4}{0,55} = 42,6 \text{ В.}$$

4. Первичные параметры неискажающей линии удовлетворяют уравнению

$$\frac{R_0}{L_0} = \frac{G_0}{C_0}. \quad (6.5)$$

Обозначим R'_0 активное сопротивление неискажающей линии с заданными по условию параметрами L_0 , C_0 и G_0 . Тогда уравнение (6.5) примет вид

$$\frac{R'_0}{1,94 \cdot 10^{-3}} = \frac{0,7 \cdot 10^{-6}}{6,25 \cdot 10^{-9}}.$$

Отсюда следует, что заданная линия станет неискажающей при уменьшении её активного сопротивления до значения $R'_0 = 0,217 \text{ Ом}$.

6.6. Заданы первичные параметры линии длиной 100 км: $R_0 = 2 \text{ Ом/км}$, $L_0 = 2 \text{ мГн/км}$, $G_0 = 5 \text{ мкСм/км}$, $C_0 = 6 \text{ нФ/км}$. Определить, какую мощность отдаёт в линию генератор напряжения $u_1 = 10^4 \cdot \sqrt{2} \sin(500t + 90^\circ) \text{ В}$, если сопротивление нагрузки 100 Ом.

Решение

Вторичные параметры линии:

$$\underline{Z}_B = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{2 + j500 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10^{-6} + j500 \cdot 6 \cdot 10^{-9}}} = 620e^{-j2,2^\circ} \text{ Ом};$$

$$\begin{aligned} \underline{\gamma} &= \sqrt{(R_0 + j\omega L_0) \cdot (G_0 + j\omega C_0)} = \\ &= \sqrt{(2 + j500 \cdot 2 \cdot 10^{-3}) \cdot (5 \cdot 10^{-6} + j500 \cdot 6 \cdot 10^{-9})} = 3,61 \cdot 10^{-3} e^{j28,8^\circ} \text{ км}^{-1}. \end{aligned}$$

Входное сопротивление линии

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = 620e^{-j2,2^\circ} \cdot \frac{100 + 620e^{-j2,2^\circ} \text{th}(3,61 \cdot 10^{-3} e^{j28,8^\circ} \cdot 100)}{620e^{-j2,2^\circ} + 100\text{th}(3,61 \cdot 10^{-3} e^{j28,8^\circ} \cdot 100)} = 310e^{j15,2^\circ} \text{ Ом}.$$

Следовательно, ток генератора равен

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_{\text{вх}}} = \frac{10^4 e^{j90^\circ}}{310e^{j15,2^\circ}} = 32,3e^{j74,8^\circ} \text{ А}.$$

Мощность генератора

$$P_1 = U_1 I_1 \cos(\psi_{u_1} - \psi_{i_1}) = 10^4 \cdot 32,3 \cdot \cos(90^\circ - 74,8^\circ) = 311,6 \text{ кВт}.$$

6.7. Заданы первичные параметры линии длиной 120 км: $R_0 = 2 \text{ Ом/км}$, $L_0 = 5 \text{ мГн/км}$, $G_0 = 0,5 \text{ мкСм/км}$, $C_0 = 2 \text{ нФ/км}$. Определить мощность, потребляемую нагрузкой с сопротивлением 500 Ом, если напряжение генератора $u_1 = 10^3 \cdot \sqrt{2} \sin 10^3 t$, В.

Решение

Вторичные параметры линии

$$\underline{Z}_B = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{2 + j500 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{0,5 \cdot 10^{-6} + j500 \cdot 2 \cdot 10^{-9}}} = 1619e^{-j3,9^\circ} \text{ Ом};$$

$$\begin{aligned} \underline{\gamma} &= \sqrt{(R_0 + j\omega L_0) \cdot (G_0 + j\omega C_0)} = \sqrt{(2 + j500 \cdot 5 \cdot 10^{-3}) \cdot (0,5 \cdot 10^{-6} + j500 \cdot 2 \cdot 10^{-9})} = \\ &= 3,34 \cdot 10^{-3} e^{j72,1^\circ} \text{ км}^{-1}. \end{aligned}$$

Напряжение в начале линии

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 \text{ch} \underline{\gamma} l + \underline{Z}_B \underline{I}_2 \text{sh} \underline{\gamma} l = \underline{U}_2 \text{ch} \underline{\gamma} l + \underline{Z}_B \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_H} \text{sh} \underline{\gamma} l,$$

откуда напряжение на нагрузке

$$\underline{U}_2 = \frac{\underline{U}_1}{\text{ch} \underline{\gamma} l + \frac{\underline{Z}_B}{\underline{Z}_H} \text{sh} \underline{\gamma} l}.$$

В нашем случае

$$\text{ch} \underline{\gamma} l = \text{ch}(3,34 \cdot 10^{-3} e^{j72,7^\circ} \cdot 120) = 0,937e^{j2,8^\circ},$$

$$\text{sh} \underline{\gamma} l = \text{sh}(3,34 \cdot 10^{-3} e^{j72,7^\circ} \cdot 120) = 0,391e^{j72,9^\circ},$$

следовательно,

$$\underline{U}_2 = 540e^{-j41,4^\circ} \text{ В}, \quad P_2 = \frac{U_2^2}{R_H} = \frac{540^2}{500} = 583,2 \text{ Вт}.$$

6.8. Опыты по определению входного сопротивления линии длиной 5 км при холостом ходе и коротком замыкании на конце линии показали, что на частоте 1000 Гц $\underline{Z}_x = 535e^{-j64^\circ}$ Ом, $\underline{Z}_k = 467,5e^{-j10^\circ}$ Ом. Найти напряжение и ток в начале линии в трех случаях:

- 1) при коротком замыкании ток в конце линии $\underline{I}_2 = 1$ А;
- 2) при замыкании на активное сопротивление $Z_2 = 400$ Ом по нагрузке протекает ток $\underline{I}_2 = 0,5$ А;

3) при переключении на постоянное напряжение ($\alpha = 0$) через нагрузку 300 Ом протекает ток 0,5 А.

Решение

Определяем вторичные параметры:

$$\underline{Z}_B = \sqrt{\underline{Z}_X \underline{Z}_K} = \sqrt{535e^{-j64^\circ} \cdot 467,5e^{-j10^\circ}} = 500e^{-j37^\circ} \text{ Ом};$$

$$\text{th} \underline{\gamma}l = \sqrt{\frac{\underline{Z}_K}{\underline{Z}_X}} = \sqrt{\frac{467,5e^{-j10^\circ}}{535e^{-j64^\circ}}} = 0,935e^{j27^\circ}.$$

Известно, что

$$\text{th} \underline{\gamma}l = \frac{e^{\underline{\gamma}l} - e^{-\underline{\gamma}l}}{e^{\underline{\gamma}l} + e^{-\underline{\gamma}l}} = \frac{e^{2\underline{\gamma}l} - 1}{e^{2\underline{\gamma}l} + 1}, \quad e^{2\underline{\gamma}l} = \frac{1 + \text{th} \underline{\gamma}l}{1 - \text{th} \underline{\gamma}l}.$$

Положим $e^{2\underline{\gamma}l} \equiv We^{j\xi}$. Тогда

$$\underline{\gamma}l = \frac{1}{2} \ln(We^{j\xi}).$$

В нашем случае

$$e^{2\underline{\gamma}l} = \frac{1 + 0,935e^{j27^\circ}}{1 - 0,935e^{j27^\circ}} = 4,11e^{j81^\circ 10'};$$

$$\underline{\gamma} = 0,2e^{j45^\circ} \text{ км}^{-1}; \quad \underline{\gamma}l = 0,2e^{j45^\circ} \cdot 5 = e^{j45^\circ};$$

$$\text{sh} \underline{\gamma}l = e^{j54^\circ 20'}; \quad \text{ch} \underline{\gamma}l = 1,07e^{j27^\circ 20'}.$$

Определяем первичные параметры:

$$R_0 + j\omega L_0 = \underline{\gamma} \underline{Z}_B = 0,2e^{j45^\circ} \cdot 500e^{-j37^\circ} = 100e^{j8^\circ} = 99 + j13,9 \text{ Ом/км};$$

$$\frac{\underline{\gamma}}{\underline{Z}_B} = G_0 + j\omega C_0 = \frac{0,2e^{j45^\circ}}{500e^{-j37^\circ}} = 0,4 \cdot 10^{-3} e^{j82^\circ} = 0,0557 + j0,396 \text{ мСм/км},$$

откуда

$$R_0 = 99 \text{ Ом/км}, \quad L_0 = \frac{13,9}{2\pi \cdot 1000} = 2,22 \text{ мГн/км};$$

$$G_0 = 0,0557 \text{ мСм/км}, \quad C_0 = \frac{0,396 \cdot 10^{-3}}{2\pi \cdot 1000} = 0,063 \text{ мкФ/км}.$$

1. При коротком замыкании

$$\underline{U}_1 = \underline{I}_2 \underline{Z}_B \text{sh} \underline{\gamma} l; \quad \underline{I}_1 = \underline{I}_2 \text{ch} \underline{\gamma} l.$$

В нашем случае

$$\underline{U}_1 = 1 \cdot 500 e^{-j37^\circ} \cdot e^{j54^\circ 20'} = 500 e^{j17^\circ 20'} \text{ В};$$

$$\underline{I}_1 = 1 \cdot 1,07 e^{j27^\circ 20'} = 1,07 e^{j27^\circ 20'} \text{ А}.$$

2. В общем случае

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 \text{ch} \underline{\gamma} l + \underline{I}_2 \underline{Z}_B \text{sh} \underline{\gamma} l; \quad \underline{I}_1 = \underline{I}_2 \text{ch} \underline{\gamma} l + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_B} \text{sh} \underline{\gamma} l.$$

В нашем случае

$$\underline{U}_2 = \underline{I}_2 \underline{Z}_2 = 0,5 \cdot 400 = 200 \text{ В}.$$

Следовательно,

$$\underline{U}_1 = 200 \cdot 1,07 e^{j27^\circ 20'} + 0,5 \cdot 500 e^{-j37^\circ} \cdot e^{j54^\circ 20'} = 463 e^{j22^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{I}_1 = 0,5 \cdot 1,07 e^{j27^\circ 20'} + \frac{200}{500 e^{-j37^\circ}} \cdot e^{j54^\circ 20'} = 0,8 e^{j53^\circ 38'} \text{ А}.$$

3. Волновое сопротивление линии для постоянного тока:

$$\underline{Z}_B = \sqrt{\frac{R_0}{G_0}} = \sqrt{\frac{90}{0,0557 \cdot 10^{-3}}} = 1330 \text{ Ом}.$$

Постоянная распространения

$$\gamma = \sqrt{R_0 G_0} = \sqrt{99 \cdot 0,0557 \cdot 10^{-3}} = 0,0743 \text{ км}^{-1},$$

тогда

$$\gamma l = 0,0743 \cdot 5 = 0,371; \quad \text{sh } \gamma l = 0,379; \quad \text{ch } \gamma l = 1,07.$$

Подставляя эти значения в формулы

$$U_1 = U_2 \text{ch } \gamma l + I_2 Z_B \text{sh } \gamma l; \quad I_1 = I_2 \text{ch } \gamma l + \frac{U_2}{Z_B} \text{sh } \gamma l,$$

получаем:

$$U_1 = 200 \cdot 1,07 + 0,5 \cdot 1330 \cdot 0,379 = 466 \text{ В};$$

$$I_1 = 0,5 \cdot 1,07 + \frac{200}{1330} \cdot 0,379 = 0,694 \text{ А}.$$

6.9. Известны сопротивления холостого хода и короткого замыкания воздушной линии: $\underline{Z}_x = 767e^{j4^\circ 30'}$ Ом и $\underline{Z}_k = 735e^{-j4^\circ 30'}$ Ом (частота 100 кГц). Определить первичные и вторичные параметры линии длиной 20 км, фазовую скорость и длину волны.

Решение

По заданным сопротивлениям \underline{Z}_x и \underline{Z}_k определяем вторичные параметры:

$$\underline{Z}_B = \sqrt{\underline{Z}_k \underline{Z}_x} = 750e^{j0^\circ} \text{ Ом}; \quad \text{th } \underline{\gamma} l = \sqrt{\frac{\underline{Z}_k}{\underline{Z}_x}} = 0,975e^{-j4^\circ 30'}.$$

Из формулы

$$\underline{\gamma} l = \frac{1}{2} \ln(W e^{j\xi})$$

(см. решение задачи 6.8) находим:

$$\alpha l = \frac{1}{2} \ln W; \quad \beta l = \frac{1}{2} (\xi + 2k\pi),$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$ Здесь мы учитываем, что в общем случае определенному положению вектора на комплексной плоскости соответствует

бесконечное множество комплексных чисел, отличающихся аргументом на целое число 2π . В нашем случае

$$\underline{\gamma}l = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + 0,975e^{-j4^\circ 30'}}{1 - 0,975e^{-j4^\circ 30'}}$$

откуда

$$\alpha l = 1,6 \text{ Нп}; \quad \beta l = (k - 0,2)\pi, \text{ рад.}$$

Величина

$$\beta = \frac{(k - 0,2)\pi}{l} \quad (6.6)$$

должна быть положительной, поэтому $k \geq 1$. Помимо этого, необходимо учесть, что

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (6.7)$$

Из (6.6) и (6.7) получаем:

$$\frac{(k - 0,2)\pi}{l} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

или

$$k = 0,2 + \frac{2l}{\lambda}. \quad (6.8)$$

При максимальной фазовой скорости волны в линии ($c = c_{\max}$) заданной частоте $f = 100$ кГц соответствует длина волны

$$\lambda_0 = \frac{c_{\max}}{f} = \frac{3 \cdot 10^5}{100 \cdot 10^3} = 3 \text{ км},$$

так что для отрезка $l = 20$ км из формулы (6.8)

$$k = 13,3.$$

В воздушной линии с потерями $c < c_{\max}$, поэтому $\lambda < \lambda_0$, т. е. $k \geq 14$:

$$k_1 = 14, \quad k_2 = 15 \text{ и т. д.}$$

Соответственно,

$$\beta_1 l = 13,8\pi \text{ рад}; \quad \beta_2 l = 14,8\pi \text{ рад} \text{ и т. д.}$$

Каждому значению βl соответствуют определенные значения длины волны $\lambda = \frac{2\pi l}{\beta l}$ и фазовой скорости $c = \lambda f$:

$$\lambda_1 = 2,90 \text{ км}; \quad \lambda_2 = 2,71 \text{ км} \text{ и т. д.};$$

$$c_1 = 2,90 \cdot 10^5 \text{ км/с}; \quad c_2 = 2,71 \cdot 10^5 \text{ км/с} \text{ и т. д.}$$

Первичные параметры линии находим по формулам

$$R_0 + j\alpha L_0 = \underline{\gamma Z_B}, \quad G_0 + j\omega C_0 = \frac{\underline{\gamma}}{\underline{Z_B}}.$$

Для первого решения

$$R_0 = 60 \text{ Ом/км}; \quad L_0 = 2,60 \text{ мГн/км};$$

$$G_0 = 106 \text{ мкСм/км}; \quad C_0 = 4,60 \text{ нФ/км}.$$

Для второго решения

$$R_0 = 60 \text{ Ом/км}; \quad L_0 = 2,79 \text{ мГн/км};$$

$$G_0 = 106 \text{ мкСм/км}; \quad C_0 = 4,94 \text{ нФ/км} \text{ и т. д.}$$

Сделать выбор среди полученных решений, основываясь только на данных измерений сопротивлений холостого хода и короткого замыкания, нельзя. Для этого в условии должно содержаться дополнительное указание (см. задачу 6.10).

6.10. На входе линии длиной $l = 55,5$ км действует напряжение $u_1(t) = 500 \sin 1000t$, В. При коротком замыкании этой линии в ней протекает ток $i_{1к}(t) = 1 \sin(1000t + 21,5^\circ)$ А, при холостом ходе ток линии $i_{1х}(t) = 1 \sin(1000t + 68,5^\circ)$ А. Определить первичные параметры линии и мгновенные значения тока и напряжения в конце линии при согласованной нагрузке, зная, что длина линии меньше $\frac{\lambda}{2}$.

Решение

Находим входные сопротивления линии при коротком замыкании и холостом ходе:

$$Z_{\text{к}} = \frac{U_{1\text{м}}}{I_{1\text{мк}}} = \frac{500e^{j0^\circ}}{1e^{j21,5^\circ}} = 500e^{-j21,5^\circ} \text{ Ом};$$

$$Z_{\text{х}} = \frac{U_{1\text{м}}}{I_{1\text{мх}}} = \frac{500e^{j0^\circ}}{1e^{j68,5^\circ}} = 500e^{-j68,5^\circ} \text{ Ом}.$$

Тогда

$$\underline{Z}_{\text{в}} = \sqrt{\underline{Z}_{\text{к}} \underline{Z}_{\text{х}}} = \sqrt{500e^{-j21,5^\circ} \cdot 500e^{-j68,5^\circ}} = 500e^{-j45^\circ} \text{ Ом};$$

$$\text{th } \underline{\gamma}l = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{\text{к}}}{\underline{Z}_{\text{х}}}} = \sqrt{\frac{500e^{-j21,5^\circ}}{500e^{-j68,5^\circ}}} = e^{j23,5^\circ};$$

$$e^{2\underline{\gamma}l} = \frac{1 + e^{-j23,5^\circ}}{1 - e^{-j23,5^\circ}} = 4,74e^{j(90^\circ + 2n\pi)},$$

откуда

$$2\alpha l = \ln 4,74 = 1,556; \quad \alpha l \approx 0,78;$$

$$2\beta l = 90^\circ + 2n\pi; \quad \beta l = 45^\circ + n\pi.$$

По условию, длина линии $l < \frac{\lambda}{2}$. Тогда $\beta l < \pi$, т. е.

$$\beta l = 45^\circ = 0,78 \text{ рад},$$

откуда

$$\beta = \frac{\beta l}{l} = \frac{0,78}{55,5} = 1,41 \cdot 10^{-2} \text{ рад/км}.$$

Далее находим

$$\alpha = \frac{\alpha l}{l} = \frac{0,78}{55,5} = 1,41 \cdot 10^{-2} \text{ Нп/км};$$

$$\underline{\gamma} = (1,41 + j1,41) \cdot 10^{-2} \text{ км}^{-1}.$$

Первичные параметры линии:

$$\begin{aligned} R_0 + j\omega L_0 &= \underline{\gamma} \underline{Z}_B = (1,41 + j1,41) \cdot 10^{-2} \cdot 500 e^{-j45^\circ} = \\ &= 2 \cdot 10^{-2} e^{j45^\circ} \cdot 500 e^{-j45^\circ} 10 e^{j0^\circ} \text{ Ом/км}; \end{aligned}$$

$$\frac{\underline{\gamma}}{\underline{Z}_B} = G_0 + j\omega C_0 = \frac{2 \cdot 10^{-2} e^{j45^\circ}}{500 e^{-j45^\circ}} = 0,4 \cdot 10^{-4} e^{j90^\circ} = j40 \cdot 10^{-6} \text{ См/км}.$$

Отсюда получаем:

$$R_0 = 10 \text{ Ом/км}; \quad L_0 = 0; \quad G_0 = 0; \quad C_0 = 40 \cdot 10^{-9} \text{ Ф/км}.$$

Мгновенные значения напряжения и тока на нагрузке в согласованном режиме ($\underline{Z}_H = \underline{Z}_B$):

$$u_2(t) = U_{m1} e^{-\alpha l} \sin(\omega t - \beta l) = 229,36 \sin(\omega t - 45^\circ), \text{ В};$$

$$i_2(t) = \frac{U_{m1}}{\underline{Z}_B} e^{-\alpha l} \sin(\omega t - \beta l + 45^\circ) = 0,46 \sin \omega t, \text{ А}.$$

6.11. Известны параметры линии без потерь: $Z_B = 500 \text{ Ом}$, $\lambda = 50 \text{ км}$. На каком минимальном расстоянии l' от своего начала эта линия должна быть закорочена, чтобы её входное сопротивление стало равным $\underline{Z}_{\text{вх}} = j250 \text{ Ом}$.

Решение

В отсутствие потерь входное сопротивление короткозамкнутой линии длиной l'

$$\underline{Z}_k = jZ_B \operatorname{tg} \beta l'.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} \beta l' = \frac{Z_k}{Z_B} = \frac{250}{500} = 0,5; \quad \beta l' = 0,464 \text{ рад.}$$

Учитывая, что

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda},$$

окончательно получаем:

$$l' = \frac{0,464\lambda}{2\pi} = \frac{0,464 \cdot 50}{2\pi} = 3,69 \text{ км.}$$

6.12. Определить наименьшую длину короткозамкнутой на конце двухпроводной воздушной линии, имеющей при частоте 10^8 Гц входное сопротивление $j800$ Ом. Расстояние между осями проводов $D = 20$ см, диаметр каждого провода $d = 4$ мм.

Решение

При коротком замыкании линии без потерь

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{Z}_k = jZ_B \operatorname{tg} \beta l. \quad (6.9)$$

Для двухпроводной воздушной линии

$$L_0 = \frac{\mu_0}{\pi} \ln(2D/d); \quad C_0 = \frac{\pi \epsilon_0}{\ln(2D/d)},$$

где $\epsilon_0 = 8,84 \cdot 10^{-12}$ Ф/м, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м. Тогда

$$Z_B = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \frac{\ln(2D/d)}{\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \frac{\ln\left(\frac{2 \cdot 200}{4}\right)}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{8,84 \cdot 10^{-12}}} = 553 \text{ Ом.}$$

По условию [см. (6.9)],

$$j800 = j553 \operatorname{tg} \beta l.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg}\beta l = \frac{800}{553} = 1,445; \quad \beta l = 55^\circ 20' = 0,963 \text{ рад};$$

$$\beta = \omega\sqrt{L_0 C_0} = \omega\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = \frac{2\pi \cdot 10^8}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 8,84 \cdot 10^{-12}} = 2,092 \text{ рад/м.}$$

Искомая длина линии

$$l = \frac{0,963}{2,092} = 0,46 \text{ м.}$$

6.13. Найти входное сопротивление короткозамкнутой двухпроводной линии без потерь длиной $l = 35$ м для генератора волн длиной $\lambda = 50$ м. Диаметр проводов линии $d = 4$ мм, расстояние между проводами $D = 13,5$ см. Определить, какой реактивный элемент эквивалентен этой линии.

Решение

Волновое сопротивление линии

$$\begin{aligned} Z_{\text{в}} &= \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \sqrt{\frac{\mu_r \mu_0}{\pi} \ln\left(\frac{2D}{d}\right) \cdot \frac{\ln\left(\frac{2D}{d}\right)}{\epsilon_r \epsilon_0 \pi}} = \frac{1}{\pi} \ln\left(\frac{2D}{d}\right) \sqrt{\frac{\mu_r \mu_0}{\epsilon_r \epsilon_0}} = \\ &= \frac{1}{\pi} \ln\left(\frac{2 \cdot 13,5}{4}\right) \cdot \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{8,84 \cdot 10^{-12}}} = 505 \text{ Ом.} \end{aligned}$$

Входное сопротивление линии

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = jZ_{\text{в}} \operatorname{tg}\beta l = jZ_{\text{в}} \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} l = j505 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{50} \cdot 35\right) = j1554 \text{ Ом.}$$

Следовательно, заданная линия эквивалентна катушке с индуктивностью

$$L = \frac{Z_{\text{вх}}}{\omega} = \frac{Z_{\text{вх}} \cdot \lambda}{2\pi c_{\text{max}}} = \frac{1554 \cdot 50}{2\pi \cdot 3 \cdot 10^5} = 0,041 \text{ мГн.}$$

6.14. В контуре генератора волн с частотой $f = 150$ МГц индуктивностью служит отрезок короткозамкнутой линии, которая выполнена из трубок диаметром $d = 6$ мм, находящихся на расстоянии $D = 90$ мм друг от друга. Емкость контура 40 пФ. Определить, на каком наименьшем расстоянии l от начала линии должен находиться подвижный короткозамыкатель, чтобы контур был настроен на генерируемую частоту.

Решение

Входное сопротивление короткозамкнутой линии без потерь

$$\underline{Z}_к = jZ_B \operatorname{tg}\beta l.$$

В нашем случае

$$\underline{Z}_к = j\alpha L,$$

где L – индуктивность, необходимая для резонанса в контуре без потерь. Значение L определяется условием

$$\omega L = \frac{1}{\alpha C},$$

следовательно,

$$Z_B \operatorname{tg}\beta l = \frac{1}{\alpha C},$$

откуда

$$\operatorname{tg}\beta l = \frac{1}{Z_B \omega C}, \quad l = \frac{1}{\beta} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{Z_B \omega C}\right).$$

При этом

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 150 \cdot 10^6 = 3\pi \cdot 10^8 \text{ рад/с}; \quad \beta = \frac{\omega}{c} = \frac{3\pi \cdot 10^8}{3 \cdot 10^5} = \pi \text{ рад/м}.$$

Индуктивность и ёмкость двухпроводной воздушной линии:

$$L_0 = \frac{\mu_0}{\pi} \ln(2D/d); \quad C_0 = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln(2D/d)}.$$

Следовательно,

$$Z_B = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \cdot \frac{\ln(2D/d)}{\pi} = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{8,84 \cdot 10^{-12}}} \cdot \frac{\ln\left(\frac{2 \cdot 90}{6}\right)}{\pi} = 408,15 \text{ Ом}.$$

Тогда

$$l = \frac{1}{\pi} \arctg\left(\frac{1}{408,15 \cdot 3\pi \cdot 10^8 \cdot 40 \cdot 10^{-12}}\right) = 0,021 \text{ м} = 2,1 \text{ см}.$$

6.15. Длина линии без потерь $l = \lambda/2$. Входное напряжение линии $\underline{U}_1 = 100 \text{ В}$. Определить ток в генераторе и в ёмкостной нагрузке с сопротивлением 10 Ом .

Решение

Для линии без потерь

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_1 \cos \beta l - j \underline{I}_1 Z_B \sin \beta l, \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_1 \cos \beta l - j \frac{\underline{U}_1}{Z_B} \sin \beta l.$$

В нашем случае

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{2}\right) - j \frac{\underline{U}_1}{Z_B} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{2}\right) = \underline{I}_1 \cos \pi = -\underline{I}_1;$$

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_1 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{2}\right) - j \underline{I}_1 Z_B \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{2}\right) = \underline{U}_1 \cos \pi = -\underline{U}_1 = -100 \text{ В},$$

следовательно,

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{Z_H} = \frac{-100}{-j10} = -j10 \text{ А}, \quad \underline{I}_1 = -\underline{I}_2 = j10 \text{ А}.$$

6.16. На входе воздушной линии без потерь с индуктивностью $L_0 = 1,67 \text{ мГн/км}$ действует напряжение $U_1 = 1,2 \text{ кВ}$. Определить ток источника, если длина линии $l = 100 \text{ м}$, сопротивление нагрузки $Z_H = 380 \text{ Ом}$, длина волны $\lambda = 60 \text{ м}$.

Решение

Для воздушной линии без потерь

$$Z_B = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} = c_{\max},$$

где $c_{\max} = 3 \cdot 10^5$ км/с. Отсюда находим:

$$Z_B = L_0 c_{\max} = 1,67 \cdot 10^{-3} \cdot 3 \cdot 10^5 = 501 \text{ Ом}.$$

В нашем случае

$$\beta l = \frac{2\pi}{\lambda} l = \frac{2 \cdot 3,14}{0,06} \cdot 0,1 = 10,47 \text{ рад}, \quad \text{tg}\beta l = 1,74.$$

Следовательно,

$$\underline{Z}_{\text{BX}} = Z_B \frac{\underline{Z}_H + jZ_B \text{tg}\beta l}{Z_B + j\underline{Z}_H \text{tg}\beta l} = 501 \cdot \frac{380 + j501 \cdot 1,74}{501 + j380 \cdot 1,74} = 553e^{j12^\circ 40'} \text{ Ом}.$$

В итоге имеем: ток источника

$$I_1 = \frac{U_1}{Z_{\text{BX}}} = \frac{1,2 \cdot 10^3}{553} = 2,16 \text{ А}.$$

6.17. Линия без потерь длиной $l = 5$ м имеет следующие первичные параметры: $L_0 = 1,67$ мкГн/м, $C_0 = 6,67$ пФ/м. Сопротивление нагрузки $Z_2 = 2,5$ кОм. На частоте $f = 100$ МГц напряжение на нагрузке $U_2 = 10$ В. Определить входное сопротивление линии, напряжение и ток в начале линии.

Решение

Вторичные параметры линии:

$$\underline{Z}_B = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \sqrt{\frac{1,67 \cdot 10^{-6}}{6,67 \cdot 10^{-12}}} = 500 \text{ Ом};$$

$$\beta = \omega \sqrt{L_0 C_0} = 2\pi \cdot 100 \cdot 10^6 \sqrt{1,67 \cdot 10^{-6} \cdot 6,67 \cdot 10^{-12}} = 2,1 \text{ рад/м}.$$

В нагрузке протекает ток

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2} = \frac{10}{2500} = 4 \text{ мА}.$$

Комплексы действующих значений напряжения и тока:

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= \underline{U}_2 \cos \beta l + j \underline{Z}_B \underline{I}_2 \sin \beta l = \\ &= 10 \cos(2,1 \cdot 5) + j 500 \cdot 0,004 \sin(2,1 \cdot 5) = 5,3 e^{-j160^\circ 55'} \text{ В};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{I}_1 &= \underline{I}_2 \cos \beta l + j \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_B} \sin \beta l = \\ &= 0,004 \cos(2,1 \cdot 5) + j \frac{10}{500} \sin(2,1 \cdot 5) = 17,5 e^{-j96^\circ 35'} \text{ мА}.\end{aligned}$$

Входное сопротивление линии

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{5,3 e^{-j160^\circ 55'}}{17,5 \cdot 10^{-3} e^{-j96^\circ 35'}} = 312 e^{-j64^\circ 20'} \text{ Ом}.$$

6.18. В линии без потерь с индуктивностью $L_0 = 5 \text{ мГн/км}$ фазовая скорость волны $c = 2,5 \cdot 10^5 \text{ км/с}$. Длина линии 100 км, напряжение источника $u_1 = 1 \sin 5000t$, кВ. Рассчитать токи в начале и в конце линии при её холостом ходе.

Решение

При холостом ходе линии без потерь

$$\underline{U}_{1m} = \underline{U}_{2m} \cos \beta l, \quad \underline{I}_{1m} = j \frac{\underline{U}_{2m}}{\underline{Z}_B} \sin \beta l.$$

В нашем случае

$$\beta = \frac{\alpha}{c} = \frac{5000}{2,5 \cdot 10^5} = 0,02 \text{ рад/км}.$$

Ёмкость линии без потерь

$$C_0 = \frac{1}{c^2 L_0} = \frac{1}{(2,5 \cdot 10^5)^2 \cdot 5 \cdot 10^{-3}} = 0,32 \cdot 10^{-8} \text{ Ф/км},$$

а её волновое сопротивление

$$Z_{\text{в}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 10^{-3}}{0,32 \cdot 10^{-8}}} = 12,5 \text{ Ом}.$$

Комплексы амплитуд искомых величин:

$$\underline{U}_{2m} = \frac{\underline{U}_{1m}}{\cos \beta l} = \frac{1000}{\cos(0,02 \cdot 100)} = -2,4 \text{ кВ},$$

$$\underline{I}_{1m} = j \frac{-2,4 \cdot 10^3}{12,5} \sin(0,02 \cdot 100) = -j175 \text{ А}.$$

6.19. В линии без потерь с индуктивностью $L_0 = 0,24 \text{ мГн/км}$ фазовая скорость волны $c = 2 \cdot 10^5 \text{ км/с}$. Длина линии 60 км, напряжение источника $U_1 = 1,2 \text{ кВ}$, частота 400 Гц. Рассчитать токи в начале и конце линии при её коротком замыкании.

Решение

Воспользовавшись тем, что для линии без потерь

$$c = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}},$$

находим ёмкость линии

$$C_0 = \frac{1}{c^2 L_0} = \frac{1}{(2 \cdot 10^5)^2 \cdot 0,24 \cdot 10^{-3}} = 1,04 \cdot 10^{-7} \text{ Ф/км}$$

и её волновое сопротивление

$$Z_{\text{в}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \sqrt{\frac{0,24 \cdot 10^{-3}}{1,04 \cdot 10^{-7}}} = 48 \text{ Ом}.$$

При коротком замыкании линии без потерь

$$\underline{U}_{1m} = j\underline{I}_{2m}Z_B \sin \beta l, \quad \underline{I}_{1m} = \underline{I}_{2m} \cos \beta l.$$

В нашем случае

$$\beta = \frac{\alpha}{c} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi \cdot 400}{2 \cdot 10^5} = 12,57 \cdot 10^{-3} \text{ рад/км.}$$

Комплексы амплитуд искомым токов:

$$\underline{I}_{2m} = \frac{\underline{U}_{1m}}{jZ_B \sin \beta l} = \frac{1,2 \cdot 10^3}{j48 \sin(12,57 \cdot 10^{-3} \cdot 60)} = 36,5 e^{-j90^\circ} \text{ А,}$$

$$\underline{I}_{1m} = 36,5 e^{-j90^\circ} \cos(12,57 \cdot 10^{-3} \cdot 60) = 26,6 e^{-j90^\circ} \text{ А.}$$

6.20. В середине линии без потерь с волновым сопротивлением 400 Ом подключен генератор (ЭДС $E = 1200$ В, внутреннее сопротивление $r = 300$ Ом). Длина линии равна $\lambda/2$. Найти напряжения и токи на границах линии, если на обоих её концах произошло короткое замыкание (рис. 6.1).

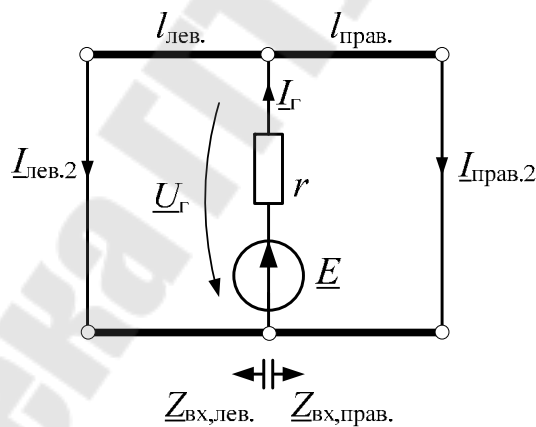


Рис. 6.1

Решение

Длины левого и правого участков линии $l_{\text{лев}} = l_{\text{прав}} = \lambda/4$, поэтому входные сопротивления участков

$$\underline{Z}_{\text{вх,лев}} = \underline{Z}_{\text{вх,прав}} = jZ_B \operatorname{tg} \beta l = jZ_B \operatorname{tg} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{4} \right) = \infty,$$

ток генератора $\underline{I}_Г = 0$, а его напряжение равно ЭДС: $\underline{U}_Г = 1200$ В.

При коротком замыкании линии без потерь возникает стоячая волна с узлом в конце линии:

$$U_{2,\text{лев}} = U_{2,\text{прав}} = 0.$$

Пучность напряжения находится на расстоянии $\lambda/4$ от узла, что в нашем случае соответствует месту подключения генератора:

$$U_{\text{max}} = U_{\Gamma} = 1200 \text{ В}.$$

Узлы и пучности тока совпадают соответственно с пучностями и узлами напряжения, поэтому в месте подключения генератора узел тока

$$I_{\text{min}} = I_{\Gamma} = 0,$$

а на обоих концах линии – пучности тока:

$$I_{2,\text{лев}} = I_{2,\text{прав}} = I_{\text{max}}.$$

При коротком замыкании линии без потерь

$$\underline{U}_1 = jZ_{\text{в}} \underline{I}_2 \sin \beta l,$$

следовательно в нашем случае

$$I_{2,\text{лев}} = I_{2,\text{прав}} = \frac{U_{\Gamma}}{Z_{\text{в}} \sin \beta l} = \frac{1200}{400 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{4}\right)} = 3 \text{ А}.$$

6.21. Рассчитать действующие значения напряжения и тока на границах линии предыдущей задачи, если длина линии слева от генератора равна $\lambda/4$, а справа $\lambda/8$.

Решение

Входные сопротивления участков линии:

$$\underline{Z}_{\text{вх,лев}} = jZ_{\text{в}} \operatorname{tg} \beta l_{\text{лев}} = \infty,$$

$$\underline{Z}_{\text{вх,прав}} = jZ_{\text{в}} \operatorname{tg} \beta l_{\text{прав}} = jZ_{\text{в}} \operatorname{tg} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{8} \right) = jZ_{\text{в}} \operatorname{tg} 45^{\circ} = jZ_{\text{в}} = j400 \text{ Ом}.$$

В конце каждого короткозамкнутого участка линии узел напряжения ($U_{2,\text{лев}} = U_{2,\text{прав}} = 0$) и пучность тока.

Ток и напряжение генератора:

$$I_{1,\text{лев}} = 0, \quad I_{1,\text{прав}} = I_{\Gamma} = 24 \text{ мА},$$

т. к.

$$\underline{I}_{\Gamma} = \frac{\underline{E}}{r + \underline{Z}_{\text{вх,прав}}}; \quad \underline{U}_{\Gamma} = \underline{I}_{\Gamma} \cdot \underline{Z}_{\text{вх,прав}} = \frac{jZ_{\text{в}} \cdot \underline{E}}{r + jZ_{\text{в}}},$$

откуда

$$I_{\Gamma} = \frac{E}{\sqrt{r^2 + Z_{\text{в}}^2}} = \frac{1200}{\sqrt{300^2 + 400^2}} = 2,4 \text{ А};$$

$$U_{\Gamma} = \frac{Z_{\text{в}} E}{\sqrt{r^2 + Z_{\text{в}}^2}} = \frac{400 \cdot 1200}{\sqrt{300^2 + 400^2}} = 960 \text{ В}.$$

Для левого участка линии:

$$U_{1,\text{лев}} = U_{\text{лев max}} = U_{\Gamma} = 960 \text{ В (пучность)};$$

ток в конце левого участка

$$I_{2,\text{лев}} = I_{\text{лев max}} = \frac{U_{\Gamma}}{Z_{\text{в}} \sin \beta l} = \frac{U_{\Gamma}}{Z_{\text{в}} \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} l \right)} = \frac{960}{400 \sin \left(\frac{\pi}{2} \right)} = 2,4 \text{ А}.$$

Для правого участка: в начале линии

$$U_{\text{прав1}} = U_{\Gamma} = 960 \text{ В (не пучность, т. к. } l_{\text{прав}} \neq \frac{(2k+1)\lambda}{4} \text{ !)};$$

ток в конце участка

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 \cos \beta l,$$

следовательно,

$$I_{2,\text{прав}} = \frac{I_{1,\text{прав}}}{\cos \beta l_{\text{прав}}} = \frac{2,4}{\cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{8} \right)} = 3,4 \text{ А}.$$

6.22. Для измерения емкости конденсатора найдено положение узлов напряжения вдоль линии без потерь, в конце которой включен конденсатор, а в начале – генератор частоты $f = 15$ МГц. Определить емкость конденсатора, если расстояние от конца воздушной линии с волновым сопротивлением $Z_B = 550$ Ом до ближайшего узла напряжения $x' = 10$ см.

Решение

В нашем случае

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 15 \cdot 10^6 = 3\pi \cdot 10^7 \text{ рад/с}; \quad \beta = \frac{\omega}{c} = \frac{3\pi \cdot 10^7}{3 \cdot 10^5} = 100\pi \text{ рад/км}.$$

Способ 1

Входное сопротивление участка линии относительно сечения, в котором напряжение равно нулю (узел напряжения), равно нулю:

$$\underline{Z}_{\text{вх}}(x') = Z_B \frac{\underline{Z}_H + jZ_B \operatorname{tg} \beta x'}{Z_B + j\underline{Z}_H \operatorname{tg} \beta x'} = 0,$$

где $\underline{Z}_H = \frac{-j}{\alpha C}$. Следовательно,

$$-\frac{j}{\alpha C} + jZ_B \operatorname{tg} \beta x' = 0,$$

откуда

$$C = \frac{1}{\omega Z_B \operatorname{tg} \beta x'} = \frac{1}{3\pi \cdot 10^7 \cdot 550 \operatorname{tg}(100\pi \cdot 10^{-4})} = 614 \text{ пФ}.$$

Способ 2

Конденсатор можно заменить отрезком разомкнутой линии, входное сопротивление которого равно

$$\underline{Z}_x = -jZ_B \operatorname{ctg} \beta l_0.$$

Длина l_0 этого отрезка должна быть такой, чтобы в сечении x' был узел напряжения. Наименьшее расстояние между узлами и пучно-

ми напряжения в линии равно $\lambda/4$, поэтому длину отрезка следует выбрать равной

$$l_0 = \frac{\lambda}{4} - x'.$$

Искомая ёмкость определяется уравнением

$$jZ_B \operatorname{ctg} \beta \left(\frac{\lambda}{4} - x' \right) = \frac{j}{\omega C},$$

откуда

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{\omega Z_B \operatorname{ctg} \beta \left(\frac{\lambda}{4} - x' \right)} = \\ &= \frac{1}{3\pi \cdot 10^7 \cdot 550 \operatorname{ctg} \left[100\pi \cdot \left(\frac{3 \cdot 10^5}{4 \cdot 15 \cdot 10^6} - 10^{-4} \right) \right]} = 614 \text{ пФ}. \end{aligned}$$

6.23. Определить входное сопротивление линии, если известны её вторичные параметры ($Z_B = 1e^{j31^\circ}$ кОм, $\gamma = 15 \cdot 10^{-3} e^{j70^\circ}$ км $^{-1}$) и номинальные характеристики активно-ёмкостной нагрузки: $P_H = 5$ кВт, $U_H = 200$ В, $\cos \varphi = 0,7$. Длина линии 80 км.

Решение

Мощность нагрузки

$$P_H = U_2 I_2 \cos \varphi,$$

где $U_2 = U_H = 220$ В. Следовательно,

$$I_2 = \frac{P_2}{U_2 \cos \varphi} = \frac{5 \cdot 10^3}{220 \cdot 0,7} = 32,47 \text{ А}.$$

Тогда

$$\underline{Z}_H = \frac{U_2}{I_2} e^{j \arccos 0,7} = \frac{220}{32,47} e^{-j45,6^\circ} = 6,78 e^{-j45,6^\circ} \text{ Ом}.$$

Искомое входное сопротивление линии

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{Z}_{\text{Б}} \frac{\underline{Z}_{\text{Н}} \operatorname{ch} \underline{\gamma} l + \underline{Z}_{\text{Б}} \operatorname{sh} \underline{\gamma} l}{\underline{Z}_{\text{Б}} \operatorname{ch} \underline{\gamma} l + \underline{Z}_{\text{Н}} \operatorname{sh} \underline{\gamma} l} = 10^3 e^{j31^\circ} \times$$

$$\times \frac{6,78 e^{-j45,6^\circ} \cdot \operatorname{ch}(15 \cdot 10^{-3} e^{j70^\circ} \cdot 80) + 10^3 e^{j31^\circ} \cdot \operatorname{sh}(15 \cdot 10^{-3} e^{j70^\circ} \cdot 80)}{10^3 e^{j31^\circ} \cdot \operatorname{ch}(15 \cdot 10^{-3} e^{j70^\circ} \cdot 80) + 6,78 e^{-j45,6^\circ} \cdot \operatorname{sh}(15 \cdot 10^{-3} e^{j70^\circ} \cdot 80)} =$$

$$= 1631 e^{j71,4^\circ} \text{ Ом.}$$

6.24. Определить КПД линии длиной 30 км ($\underline{Z}_{\text{Б}} = 600 e^{j25^\circ}$ Ом, $\underline{\gamma} = 0,018 e^{j60^\circ}$ км⁻¹), если известны номинальные характеристики её активно-индуктивной нагрузки: $U_{\text{Н}} = 127$ В, $P_{\text{Н}} = 2$ кВт, $\cos \varphi_2 = 0,8$.

Решение

Так как $\cos \varphi_2 = 0,8$, при $\underline{U}_2 = 127 e^{j0^\circ}$ В

$$\underline{I}_2 = I_2 e^{-j37^\circ}.$$

Активная мощность нагрузки

$$P_2 = U_2 I_2 \cos \varphi_2,$$

отсюда

$$I_2 = \frac{P_{\text{Н}}}{U_2 \cos \varphi_2} = \frac{2 \cdot 10^3}{127 \cdot 0,8} = 19,7 \text{ А}; \quad \underline{I}_2 = 19,7 e^{-j37^\circ} \text{ А.}$$

Напряжение и ток в начале линии:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} l + \underline{Z}_{\text{Б}} \underline{I}_2 \operatorname{sh} \underline{\gamma} l; \quad \underline{I}_1 = \underline{I}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} l + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_{\text{Б}}} \underline{I}_2 \operatorname{sh} \underline{\gamma} l.$$

В нашем случае

$$\operatorname{ch} \underline{\gamma} l = \operatorname{ch}(0,018 e^{j60^\circ} \cdot 30) = 0,933 e^{j7,6^\circ};$$

$$\operatorname{sh} \underline{\gamma} l = \operatorname{sh}(0,018 e^{j60^\circ} \cdot 30) = 0,527 e^{j62,5^\circ}.$$

Отсюда

$$\underline{U}_1 = 6316e^{j50^\circ} \text{ В}; \quad \underline{I}_1 = 18,4e^{-j29,3^\circ} \text{ А};$$

$$P_1 = U_1 I_1 \cos \varphi_1 = 6316 \cdot 18,4 \cdot \cos(50^\circ - (29,3^\circ)) = 21739 \text{ Вт.}$$

КПД линии

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{2 \cdot 10^3}{21739} = 0,092.$$

6.25. Линия длиной 50 км имеет в согласованном режиме КПД $\eta = 0,7$. При этом генератор напряжения $U_1 = 1$ кВ развивает мощность $P_1 = 50$ кВт. Определить коэффициент затухания линии и параметры приёмника, если $I_1 = 100$ А.

Решение

КПД согласованной линии

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = e^{-2\alpha l}.$$

Отсюда

$$P_2 = \eta P_1 = 0,7 \cdot 50 \cdot 10^3 = 35 \text{ кВт},$$

$$\alpha = -\frac{1}{2l} \ln \eta = -\frac{1}{2 \cdot 50} \ln 0,7 = 3,57 \text{ мНп/км.}$$

Коэффициент мощности генератора

$$\cos \varphi_1 = \frac{P_1}{U_1 I_1} = \frac{50 \cdot 10^3}{10^3 \cdot 100} = 0,5.$$

В согласованном режиме

$$\frac{U_1}{I_1} = \frac{U_2}{I_2}, \quad \cos \varphi_1 = \cos \varphi_2.$$

Следовательно, приёмник имеет активное сопротивление

$$R_2 = Z_2 \cos \varphi_2 = \frac{U_1}{I_1} \cos \varphi_1 = \frac{10^3}{100} \cdot 0,5 = 5 \text{ Ом},$$

и реактивное сопротивление

$$X_2 = Z_2 \sin \varphi_2 = \frac{U_1}{I_1} \sin \varphi_1 = \frac{10^3}{100} \cdot 0,866 = 8,66 \text{ Ом}.$$

6.26. Известны напряжение и ток в начале линии длиной 30 км: $u_1 = 100\sqrt{2} \sin 10^3 t$, В, $i_1 = 25\sqrt{2} \sin(10^3 t - 30^\circ)$, А. Определить мощность приемника, согласованного с этой линией, если коэффициент распространения $\underline{\gamma} = 8,54 \cdot 10^{-3} e^{j69,44^\circ} \text{ км}^{-1}$.

Решение

Действующее значение напряжения в конце линии:

$$\underline{U}_2 = \frac{U_1}{e^{\underline{\gamma}l}} = \frac{1000}{\exp\left(8,54 \cdot 10^{-3} e^{j69,44^\circ} \cdot 30\right)} = 913,9 e^{-j13,75^\circ} \text{ В}.$$

Для согласованного приемника

$$\underline{Z}_H = \underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{1000}{25 e^{-j30^\circ}} = 40 e^{j30^\circ} \text{ Ом}.$$

Следовательно, искомая мощность приемника

$$P_2 = U_2 I_2 \cos \varphi_2 = U_2 \frac{U_2}{Z_H} \cos(\arg \underline{Z}_H) = 913,9 \cdot \frac{913,9}{40} \cos 30^\circ = 18 \text{ кВт}.$$

6.27. Трёхфазная линия длиной 900 км имеет следующие вторичные параметры: $\underline{Z}_B = 397 e^{-j5^\circ 23'}$ Ом; $\underline{\gamma} = 1,073 \cdot 10^{-3} e^{j84^\circ 37'}$ км⁻¹. Найти напряжение прямой и обратной волн в конце и в начале линии, если фазное напряжение в конце линии $U_{2\phi} = U_2 = 190,5$ кВ. Активная мощность в конце линии $P_2 = 300$ МВт, $\cos \varphi_2 = 1$.

Решение

Поскольку нагрузка чисто активная, при фазном напряжении U_2 и мощности P_2 фазный ток

$$\underline{I}_2 = I_2 = \frac{P_2}{3U_2} = \frac{300 \cdot 10^6}{3 \cdot 190,5 \cdot 10^3} = 525 \text{ A}.$$

Напряжения прямой и обратной волн в конце линии:

$$\underline{U}_{2\text{пр}} = \frac{(\underline{U}_2 + \underline{Z}_B \underline{I}_2)}{2} = \frac{(190,5 + 397e^{-j5^\circ 23'} \cdot 525)}{2} = 199,2e^{-j2^\circ 50'} \text{ кВ};$$

$$\underline{U}_{2\text{обр}} = \frac{(\underline{U}_2 - \underline{Z}_B \underline{I}_2)}{2} = \frac{(190,5 - 397e^{-j5^\circ 23'} \cdot 525)}{2} = 13,12e^{j131^\circ 35'} \text{ кВ}.$$

В начале линии

$$\begin{aligned} \underline{U}_{1\text{пр}} &= \underline{U}_{2\text{пр}} e^{\gamma l} = 199,2e^{-j2^\circ 50'} \cdot \exp(1,073 \cdot 10^{-3} e^{j84^\circ 37'} \cdot 900) = \\ &= 218,2e^{-j1,7^\circ} \text{ кВ}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_{1\text{обр}} &= \underline{U}_{2\text{обр}} e^{-\gamma l} = 13,12e^{j131^\circ 35'} \cdot \exp(1,073 \cdot 10^{-3} e^{j84^\circ 37'} \cdot 900) = \\ &= 12,02e^{j130^\circ} \text{ кВ}. \end{aligned}$$

6.28. Трехфазная линия длиной $l = 900$ км рассчитана на потери мощности в изоляции $P_0 = 2$ кВт/км на фазу при следующих первичных параметрах: $R_0 = 0,08$ Ом/км, $L_0 = 1,336$ мГн/км, $C_0 = 8,6$ нФ/км. Номинальное линейное напряжение $U_{\text{л}} = 400$ кВ, линейное напряжение в конце линии $U_{\text{л}2} = 381$ кВ. Активная мощность в конце линии $P_2 = 300$ МВт, $\cos \varphi_2 = 1$. Определить: 1) ток в начале и в конце линии; 2) напряжение в начале линии; 3) напряжение в конце линии и ток в начале линии при сбросе нагрузки (фазное напряжение в начале линии считать неизменным).

Решение

Номинальное фазное напряжение:

$$U_{\phi} = \frac{U_{\text{л}}}{\sqrt{3}} = \frac{400}{\sqrt{3}} = 231 \text{ кВ}.$$

Воспользовавшись соотношением $P_0 = U_{\phi}^2 G_0$, находим поперечную проводимость:

$$G_0 = \frac{P_0}{U_{\phi}^2} = \frac{2 \cdot 10^3}{(231 \cdot 10^3)^2} = 3,75 \cdot 10^{-8} \text{ См/км.}$$

Вторичные параметры линии:

$$\underline{Z}_B = \sqrt{\frac{0,8 + j2\pi \cdot 50 \cdot 1,336 \cdot 10^{-3}}{3,75 \cdot 10^{-8} + j2\pi \cdot 50 \cdot 8,6 \cdot 10^{-9}}} = 387 e^{-j5^\circ 23'} \text{ Ом};$$

$$\begin{aligned} \underline{\gamma} &= \sqrt{(0,8 + j2\pi \cdot 50 \cdot 1,336 \cdot 10^{-3}) \cdot (3,75 \cdot 10^{-8} + j2\pi \cdot 50 \cdot 8,6 \cdot 10^{-9})} = \\ &= 1,07 \cdot 10^{-3} e^{j84^\circ 37'} \text{ км}^{-1}. \end{aligned}$$

1. Фазное напряжение в конце линии:

$$U_{2\phi} = \frac{U_{2л}}{\sqrt{3}} = \frac{381 \cdot 10^3}{\sqrt{3}} = 220 \text{ кВ.}$$

Ток в конце линии

$$I_2 = \frac{P_2}{3U_{2\phi} \cos \varphi_2} = \frac{300 \cdot 10^6}{3 \cdot 220 \cdot 10^3 \cdot 1} = 455 \text{ А.}$$

Примем

$$\underline{U}_{2\phi} \equiv \underline{U}_2 = 220 \cdot 10^3 e^{j0^\circ} \text{ В,}$$

тогда

$$I_2 = 455 e^{j0^\circ} \text{ А.}$$

Ток в начале линии

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= I_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} l + \frac{U_2}{\underline{Z}_B} \operatorname{sh} \underline{\gamma} l = \\ &= \frac{220 \cdot 10^3}{387 e^{-j5^\circ 23'}} \operatorname{sh}(1,07 \cdot 10^{-3} e^{j84^\circ 37'} \cdot 900) + 455 \operatorname{ch}(1,07 \cdot 10^{-3} e^{j84^\circ 37'} \cdot 900) = \\ &= 548 e^{j63^\circ 10'} \text{ А.} \end{aligned}$$

2. Напряжение в начале линии:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} l + \underline{Z}_B \underline{I}_2 \operatorname{sh} \underline{\gamma} l = 220 \cdot 10^3 \operatorname{ch}(1,07 \cdot 10^{-3} e^{j84^\circ 37'} \cdot 900) + 387 e^{-j5^\circ 23'} \cdot 455 \operatorname{sh}(1,07 \cdot 10^{-3} e^{j84^\circ 37'} \cdot 900) = 222 e^{j47^\circ 30'} \text{ В.}$$

3. При холостом ходе линии:

$$\underline{U}_2 = \frac{\underline{U}_1}{\operatorname{ch} \underline{\gamma} l} = \frac{222 e^{j47^\circ 30'}}{\operatorname{ch}(1,07 \cdot 10^{-3} e^{j84^\circ 37'} \cdot 900)} = 382 e^{-j7^\circ 22'} \text{ кВ.}$$

Линейное напряжение холостого хода в конце линии

$$U_{2\text{л}} = \sqrt{3} U_2 = \sqrt{3} \cdot 382 = 661,5 \text{ кВ.}$$

4. Активная мощность, отдаваемая в линию, равна

$$P_1 = 3 U_1 I_1 \cos \varphi_1 = 3 \cdot 222 \cdot 548 \cos(47^\circ 30' - 63^\circ 10') = 352 \text{ МВт.}$$

КПД линии

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{300}{352} = 0,853.$$

6.29. На входе линии длиной 120 км генератор создает напряжение $u_1 = 1000 \sin \omega t + 500 \sin(3\omega t - 60^\circ)$, В; $\alpha = 500$ рад/с. Определить мгновенные значения: 1) напряжения на нагрузке с сопротивлением 200 Ом; 2) тока в конце линии при её коротком замыкании. Первичные параметры линии известны: $R_0 = 4$ Ом/км, $G_0 = 0,5$ мкСм/км, $C_0 = 4$ нФ/км, $L_0 = 32$ мГн/км.

Решение

Параметры заданной линии удовлетворяют требованию

$$\frac{R_0}{L_0} = \frac{G_0}{C_0}.$$

Следовательно, линия – неискажающая.

Волновое сопротивление линии является чисто активным:

$$\underline{Z}_B = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \sqrt{\frac{32 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 10^{-9}}} = 2830 \text{ Ом.}$$

Коэффициент распространения линии без искажений:

$$\begin{aligned}\underline{\gamma} &= \sqrt{R_0 G_0} + j\omega \sqrt{L_0 C_0} = \sqrt{4 \cdot 0,5 \cdot 10^{-6}} + j\omega \sqrt{32 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^{-9}} = \\ &= 1,4 \cdot 10^{-3} + j\omega \cdot 11,3 \cdot 10^{-6} \text{ км}^{-1}.\end{aligned}$$

На первой гармонике

$$\underline{\gamma} = \underline{\gamma}_{(1)} = 1,4 \cdot 10^{-3} + j500 \cdot 11,3 \cdot 10^{-6} = (1,4 + j5,65) \cdot 10^{-3} \text{ км}^{-1}.$$

На третьей гармонике

$$\underline{\gamma} = \underline{\gamma}_{(3)} = 1,4 \cdot 10^{-3} + j3 \cdot 500 \cdot 11,3 \cdot 10^{-6} = (1,4 + j16,95) \cdot 10^{-3} \text{ км}^{-1}.$$

1. Комплекс амплитуды напряжения в конце линии:

$$\underline{U}_{2m} = \frac{\underline{U}_{1m}}{\text{ch} \underline{\gamma} l + \frac{Z_B}{Z_H} \text{sh} \underline{\gamma} l}.$$

На первой гармонике

$$\begin{aligned}\underline{U}_{2m(1)} &= \frac{1000}{\text{ch}[(1,4 + j5,65) \cdot 10^{-3} \cdot 120] + \frac{2830}{200} \cdot \text{sh}[(1,4 + j5,65) \cdot 10^{-3} \cdot 120]} = \\ &= \frac{1000}{0,8e^{j7,63^\circ} + 14,15 \cdot 0,65e^{j78,3^\circ}} = 105e^{-j74^\circ} \text{ В}.\end{aligned}$$

На третьей гармонике

$$\begin{aligned}\underline{U}_{2m(3)} &= \frac{500e^{-j60^\circ}}{\text{ch}[(1,4 + j16,95) \cdot 10^{-3} \cdot 120] + \frac{2830}{200} \cdot \text{sh}[(1,4 + j16,95) \cdot 10^{-3} \cdot 120]} = \\ &= \frac{500e^{-j60^\circ}}{0,478e^{j161,6^\circ} + 14,15 \cdot 0,91e^{j94,75^\circ}} = 38e^{-j156,7^\circ} \text{ В}.\end{aligned}$$

В итоге имеем:

$$u_2 = 105 \sin(\omega t - 74^\circ) + 38 \sin(3\omega t - 156,7^\circ), \text{ В}.$$

2. Комплекс амплитуды тока в конце линии при её коротком замыкании:

$$\underline{I}_{2m} = \frac{\underline{U}_{1m}}{\underline{Z}_B \operatorname{sh} \gamma l}.$$

На первой гармонике

$$\underline{I}_{2m(1)} = \frac{1000}{2830 \cdot 0,65 e^{j78,3^\circ}} = 0,544 e^{-j78,3^\circ} \text{ А}.$$

На третьей гармонике

$$\underline{I}_{2m(3)} = \frac{500 e^{-j60^\circ}}{2830 \cdot 0,91 e^{j94,75^\circ}} = 0,194 e^{-j154,75^\circ} \text{ А}.$$

Следовательно, $i_{2к} = 0,544 \sin(\omega t - 78,3^\circ) + 0,194 \sin(3\omega t - 154,75^\circ)$, А.

6.30. Заданы первичные параметры линии длиной 100 км: $R_0 = 10$ Ом/км, $G_0 = 10^{-6}$ См/км, $C_0 = 5 \cdot 10^{-9}$ Ф/км, $L_0 = 0,05$ Гн/км. Найти мгновенное значение напряжения на входе линии и мгновенные значения токов в начале и в конце линии, согласованной с нагрузкой, если мгновенное значение напряжения в конце линии $u_2 = 220\sqrt{2} \sin 314t + 100\sqrt{2} \sin(3 \cdot 314t + 60^\circ)$, В.

Решение

Волновое сопротивление линии

$$\underline{Z}_B = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{10 + j\omega \cdot 0,05}{10^{-6} + j\omega \cdot 5 \cdot 10^{-9}}} = 3162 \text{ Ом}$$

является чисто активным, хотя линия имеет потери. Следовательно, заданная линия является неискажающей.

Комплексы амплитуд гармонических составляющих тока в согласованной нагрузке ($\underline{Z}_H = \underline{Z}_B$):

$$\underline{I}_{2m(1)} = \frac{\underline{U}_{2m(1)}}{\underline{Z}_H} = \frac{220\sqrt{2}}{3162} = 0,098 \text{ А};$$

$$\underline{I}_{2m(3)} = \frac{\underline{U}_{2m(3)}}{\underline{Z}_H} = \frac{100\sqrt{2}e^{j60^\circ}}{3162} = 0,045e^{j60^\circ} \text{ А.}$$

Следовательно,

$$i_2 = 0,098 \sin 314t + 0,045 \sin(3 \cdot 314t + 60^\circ), \text{ А.}$$

Коэффициент распространения линии

$$\begin{aligned} \underline{\gamma} &= \sqrt{(R_0 + j\omega L_0) \cdot (G_0 + j\omega C_0)} = \sqrt{(10 + j\omega \cdot 0,05) \cdot (10^{-6} + j\omega \cdot 5 \cdot 10^{-9})} = \\ &= 3,16 \cdot 10^{-3} + j\omega \cdot 15,8 \cdot 10^{-6} \text{ км}^{-1}. \end{aligned}$$

Соответственно, для первой гармоники ($\alpha = 314$ рад/с)

$$\underline{\gamma} = \underline{\gamma}_{(1)} = 3,16 \cdot 10^{-3} + j4,96 \cdot 10^{-3} \text{ км}^{-1},$$

а для третьей гармоники ($\alpha = 3 \cdot 314$ рад/с)

$$\underline{\gamma} = \underline{\gamma}_{(3)} = 3,16 \cdot 10^{-3} + j14,88 \cdot 10^{-3} \text{ км}^{-1}.$$

Комплексы амплитуд гармонических составляющих входного напряжения при согласованной нагрузке:

– для первой гармоники

$$\underline{U}_{1m(1)} = \underline{U}_{2m(1)} e^{\underline{\gamma}_{(1)}l} = 220\sqrt{2} \exp[(3,16 + j4,96) \cdot 10^{-3} \cdot 100] = 427e^{j28,4^\circ} \text{ В};$$

– для третьей гармоники

$$\underline{U}_{1m(3)} = \underline{U}_{2m(3)} e^{\underline{\gamma}_{(3)}l} = 220\sqrt{2} \exp[(3,16 + j14,88) \cdot 10^{-3} \cdot 100] = 194e^{j85,26^\circ} \text{ В.}$$

Следовательно,

$$u_1 = 427 \sin(314t + 28,4^\circ) + 194 \sin(3 \cdot 314t + 85,26^\circ), \text{ В.}$$

Найдём комплексы амплитуд гармонических составляющих тока в начале линии.

Способ 1

При согласованной нагрузке $\underline{Z}_H = \underline{Z}_B = \underline{Z}_{BX}$, поэтому

$$\underline{I}_{1m} = \frac{U_{1m}}{\underline{Z}_B}.$$

Для первой гармоники

$$\underline{I}_{1m(1)} = \frac{U_{1m(1)}}{\underline{Z}_B} = \frac{427e^{j28,4^\circ}}{3162} = 0,135e^{j28,4^\circ} \text{ А.}$$

Для третьей гармоники

$$\underline{I}_{3m(3)} = \frac{U_{3m(3)}}{\underline{Z}_B} = \frac{194e^{j85,26^\circ}}{3162} = 0,061e^{j85,26^\circ} \text{ А.}$$

Способ 2

При согласованной нагрузке

$$\underline{I}_{1m} = \underline{I}_{2m} e^{\gamma l}.$$

Для первой гармоники

$$\underline{I}_{1m(1)} = \underline{I}_{2m(1)} \cdot e^{\gamma_{(1)} \cdot l} = 0,098 \cdot \exp[(3,16 + j4,96) \cdot 10^{-3} \cdot 100] = 0,135e^{j28,4^\circ} \text{ А.}$$

Для третьей гармоники

$$\underline{I}_{1m(3)} = \underline{I}_{2m(3)} \cdot e^{\gamma_{(3)} \cdot l} = 0,045e^{j60^\circ} \cdot \exp[(3,16 + j14,88) \cdot 10^{-3} \cdot 100] = 0,061e^{j85,26^\circ} \text{ А.}$$

В итоге имеем:

$$i_1 = 0,135 \sin(314t + 28,4^\circ) + 0,061 \sin(3 \cdot 314t + 85,26^\circ), \text{ А.}$$

6.31. Заданы первичные параметры неискажающей линии длиной 100 км: $R_0 = 2 \text{ Ом/км}$, $L_0 = 10 \text{ мГн/км}$, $G_0 = 1 \text{ мкСм/км}$, $C_0 = 5 \text{ нФ/км}$. Определить мгновенные значения тока в начале и в нагрузке с сопротивлением 1414 Ом, если $u_1 = \sin(10^3 t + 90^\circ) + 0,45 \sin(3 \cdot 10^3 t) \text{ кВ}$.

Решение

Вторичные параметры неискажающей линии:

$$Z_B = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \sqrt{\frac{10 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10^{-9}}} = 1414 \text{ Ом};$$

$$\underline{\gamma} = \frac{R_0}{L_0} \sqrt{L_0 C_0} + j\omega \sqrt{L_0 C_0} = \frac{2}{10} \sqrt{10 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-9}} + j\omega \sqrt{10 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-9}} =$$
$$= 1,414 \cdot 10^{-3} + j\omega 7,07 \cdot 10^{-6} \text{ км}^{-1};$$

$$\underline{\gamma}_{(1)} = 1,414 \cdot 10^{-3} + j7,07 \cdot 10^{-3} \text{ км}^{-1};$$

$$\underline{\gamma}_{(3)} = 1,414 \cdot 10^{-3} + j2,121 \cdot 10^{-2} \text{ км}^{-1}.$$

Волновое сопротивление совпадает с сопротивлением нагрузки, следовательно, линия является согласованной.

При согласованной нагрузке

$$\underline{U}_{2m(1)} = \frac{\underline{U}_{1m(1)}}{e^{\underline{\gamma}_{(1)} l}} = \frac{10^3 e^{j90^\circ}}{1,152 e^{j40,5^\circ}} = 868 e^{j49,5^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{U}_{2m(3)} = \frac{\underline{U}_{1m(3)}}{e^{\underline{\gamma}_{(3)} l}} = \frac{450 e^{j0^\circ}}{1,152 e^{j121,5^\circ}} = 390 e^{-j121,5^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{I}_{2m(1)} = \frac{\underline{U}_{2m(1)}}{Z_B} = \frac{868 e^{j49,5^\circ}}{1414} = 0,614 e^{j49,5^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_{2m(3)} = \frac{\underline{U}_{2m(3)}}{Z_B} = \frac{390 e^{-j121,5^\circ}}{1414} = 0,276 e^{-j121,5^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_{1m(1)} = \underline{I}_{2m(1)} e^{\underline{\gamma}_{(1)} l} = 0,614 e^{j49,5^\circ} \cdot 1,152 e^{j40,5^\circ} = 0,707 e^{j90^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_{1m(3)} = \underline{I}_{2m(3)} e^{\underline{\gamma}_{(3)} l} = 0,276 e^{-j121,5^\circ} \cdot 1,152 e^{j121,5^\circ} = 0,318 e^{j0^\circ} \text{ А},$$

либо

$$\underline{I}_{1m(1)} = \frac{\underline{U}_{1m(1)}}{Z_B} = \frac{10^3 e^{j90^\circ}}{1414} = 0,707 e^{j90^\circ} \text{ A};$$

$$\underline{I}_{1m(3)} = \frac{\underline{U}_{1m(3)}}{Z_B} = \frac{450}{1414} = 0,318 \text{ A}.$$

В итоге имеем:

$$i_1(t) = 0,707 \sin(10^3 t + 90^\circ) + 0,318 \sin(3 \cdot 10^3 t) \text{ A};$$

$$i_2(t) = 0,614 \sin(10^3 t + 49,5^\circ) + 0,276 \sin(3 \cdot 10^3 t - 121,5^\circ) \text{ A}.$$

6.32. Заданы первичные параметры линии длиной 100 км: $R_0 = 5 \text{ Ом}$, $L_0 = 60 \text{ мГн}$, $G_0 = 0,5 \text{ мкСм/км}$, $C_0 = 6 \text{ нФ/км}$. Найти мгновенное значение напряжения на входе линии, если при $\underline{Z}_H = 0,5 \underline{Z}_B$ ток в конце этой линии имеет мгновенное значение $i_2(t) = 50 \sin 400t + 20 \sin(3 \cdot 400t + 90^\circ) \text{ A}$.

Решение

Волновое сопротивление линии

$$\underline{Z}_B = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{5 + j400 \cdot 60 \cdot 10^{-3}}{0,5 \cdot 10^{-6} + j400 \cdot 6 \cdot 10^{-9}}} = 3162 \text{ Ом}$$

является чисто активным, хотя линия имеет потери. Следовательно, заданная линия является неискажающей.

Сопротивление нагрузки

$$\underline{Z}_H = 0,5 \underline{Z}_B = 0,5 \cdot 3162 = 1581 \text{ Ом}.$$

Гармонические составляющие напряжения нагрузки имеют амплитуды

$$\underline{U}_{2m(1)} = \underline{Z}_H \cdot \underline{I}_{2m(1)} = 1581 \cdot 50 = 79000 \text{ В},$$

$$\underline{U}_{2m(3)} = \underline{Z}_H \cdot \underline{I}_{2m(3)} = 1581 \cdot 20 e^{j90^\circ} = 31620 e^{j90^\circ} \text{ В}.$$

Коэффициент распространения

$$\underline{\gamma} = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0) \cdot (G_0 + j\omega C_0)} = \sqrt{(5 + j\omega 60 \cdot 10^{-3}) \cdot (0,5 \cdot 10^{-6} + j\omega \cdot 6 \cdot 10^{-9})} = \\ = 1,58 \cdot 10^{-3} + j\omega \cdot 19 \cdot 10^{-6} \text{ км}^{-1}.$$

На первой гармонике

$$\text{ch} \underline{\gamma}_{(1)} l = \text{ch}((1,58 \cdot 10^{-3} + j19 \cdot 10^{-6}) \cdot 100) = 0,742 e^{j8,5^\circ}, \\ \text{sh} \underline{\gamma}_{(1)} l = \text{sh}((1,58 \cdot 10^{-3} + j19 \cdot 10^{-6}) \cdot 100) = 0,707 e^{j80,64^\circ}.$$

На третьей гармонике

$$\text{ch} \underline{\gamma}_{(3)} l = \text{ch}((1,58 \cdot 10^{-3} + j3 \cdot 19 \cdot 10^{-6}) \cdot 100) = 0,67 e^{j169,65^\circ}, \\ \text{sh} \underline{\gamma}_{(3)} l = \text{sh}((1,58 \cdot 10^{-3} + j19 \cdot 10^{-6}) \cdot 100) = 0,775 e^{j97,66^\circ}.$$

Подставляя эти значения в равенство

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 \text{ch} \underline{\gamma} l + \underline{Z}_B \underline{I}_2 \text{sh} \underline{\gamma} l = \underline{U}_2 \left(\text{ch} \underline{\gamma} l + \frac{\underline{Z}_B}{\underline{Z}_H} \text{sh} \underline{\gamma} l \right),$$

находим комплексы амплитуд гармонических составляющих входного напряжения:

$$\underline{U}_{1m(1)} = 141362 \cdot e^{j57,4^\circ}, \quad \underline{U}_{1m(3)} = -59090 \cdot e^{j27,6^\circ},$$

следовательно,

$$u_1(t) = 141362 \sin(400t + 57,4^\circ) - 59090 \sin(3 \cdot 400t + 27,6^\circ) \text{ В}.$$

6.33. Для обеспечения бегущей волны в линии без потерь, питающей активную нагрузку, применяется схема, показанная на рис. 6.2. На входе линии действует напряжение $U_1 = 100 \text{ В}$. Основная линия имеет волновое сопротивление $Z_{B1} = 100 \text{ Ом}$. Определить волновое сопротивление четвертьволнового отрезка линии без потерь и напряжение на нагрузке, если $R_H = 400 \text{ Ом}$.

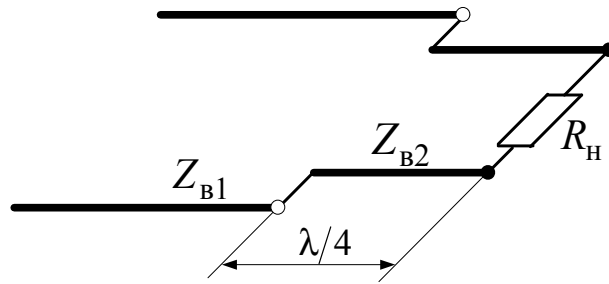


Рис. 6.2

Решение

Бегущая волна в линии имеет место при совпадении волнового сопротивления линии с входным сопротивлением четвертьволнового трансформатора

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = Z_{\text{в2}} \frac{\underline{Z} + jZ_{\text{в2}} \operatorname{tg} \beta l_{\text{тр}}}{Z_{\text{в2}} + j\underline{Z} \operatorname{tg} \beta l_{\text{тр}}},$$

где \underline{Z} – сопротивление нагрузки трансформатора. Длина трансформатора $l_{\text{тр}} = \lambda/4$, следовательно,

$$\beta l_{\text{тр}} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2},$$

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = Z_{\text{в2}} \frac{\underline{Z} + jZ_{\text{в2}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}}{Z_{\text{в2}} + j\underline{Z} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}} = Z_{\text{в2}} \frac{\underline{Z} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} + jZ_{\text{в2}}}{Z_{\text{в2}} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} + j\underline{Z}} = \frac{Z_{\text{в2}}^2}{\underline{Z}}.$$

Согласование достигается при $\underline{Z}_{\text{вх}} = Z_{\text{в1}}$, поэтому необходимо выбрать

$$Z_{\text{в2}} = \sqrt{Z_{\text{в1}} \underline{Z}}.$$

В нашем случае ($\underline{Z} = R_{\text{H}}$)

$$Z_{\text{в2}} = \sqrt{100 \cdot 400} = 200 \text{ Ом}.$$

Действующее значение напряжения $U_{\lambda/4}$ на входе согласующего отрезка линии:

$$\underline{U}_{\lambda/4} = \underline{U}_2 \cos \beta \frac{\lambda}{4} + jZ_{B2} \frac{\underline{U}_2}{Z_H} \sin \beta \frac{\lambda}{4} = jZ_B \frac{\underline{U}_2}{Z_H} \sin \frac{\pi}{2} = jZ_{B2} \frac{\underline{U}_2}{Z_H}.$$

Ввиду отсутствия потерь в основной линии действующее значение напряжения на входе согласующего отрезка линии $\underline{U}_{\lambda/4} = \underline{U}_1$. Тогда напряжение на нагрузке

$$\underline{U}_2 = \frac{\underline{U}_{\lambda/4}}{\frac{jZ_{B2}}{Z_H}} = \frac{100e^{j0^\circ}}{j \frac{200}{400}} = -j200 \text{ В.}$$

6.34. Для обеспечения бегущей волны в линии без потерь, питающей нерезистивную нагрузку, применяется схема, показанная на рис. 6.3 (метод Татарина). Определить длину l' короткозамкнутой линии (шлейфа) и волновое сопротивление \tilde{Z} четвертьволнового трансформатора, если волновое сопротивление линии $Z_B = 600 \text{ Ом}$, волновое сопротивление шлейфа $Z'_B = 600 \text{ Ом}$, сопротивление нагрузки $Z_H = 800 + j450 \text{ Ом}$, длина волны источника 20 м.

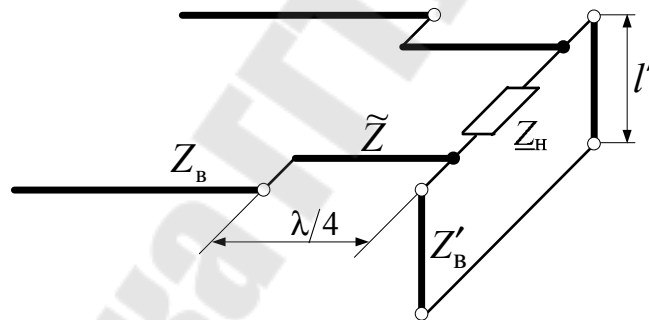


Рис. 6.3

Решение

Бегущая волна в линии имеет место при совпадении волнового сопротивления линии с входным сопротивлением трансформатора

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \tilde{Z} \frac{Z + j\tilde{Z} \operatorname{tg} \beta l_{\text{тр}}}{\tilde{Z} + jZ \operatorname{tg} \beta l_{\text{тр}}}.$$

Сопротивление \underline{Z} нагрузки трансформатора, состоящей из параллельно включенных шлейфа с сопротивлением $\underline{Z}' = jZ'_B \operatorname{tg} \beta l'$ и нагрузки линии, определяется равенством

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{\underline{Z}'} + \frac{1}{\underline{Z}_H} = g - jb. \quad (6.10)$$

Согласование достигается при

$$\tilde{Z} = \sqrt{Z_B Z}$$

(см. решение задачи 6.33). Волновое сопротивление трансформатора – активное (т. к. линия без потерь), поэтому \underline{Z} также должно быть активным сопротивлением. Следовательно, в равенстве $b = 0$, т. е.

$$\operatorname{Im} \left(\frac{1}{800 + j450} + \frac{1}{j600 \operatorname{tg} \beta l'} \right) = 0,$$

или

$$0,535 \cdot 10^{-3} + \frac{1}{600 \operatorname{tg} \beta l'} = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} \beta l' = -3,12; \quad \beta l' = \frac{2\pi l'}{\lambda} = 1,876 \text{ рад},$$

$$l' = 5,96 \text{ м}.$$

При этой длине шлейфа

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{800 + j450} + \frac{1}{j600 \cdot (-3,12)} \right) = 952 \text{ мкСм},$$

$$\underline{Z} = R = \frac{1}{952 \cdot 10^{-6}} = 1050 \text{ Ом}.$$

Отсюда волновое сопротивление трансформатора

$$\tilde{Z} = \sqrt{Z_B R} = \sqrt{600 \cdot 1050} = 795 \text{ Ом}.$$

6.35. Линия без потерь длиной 8 м имеет волновое сопротивление $Z_B = 600$ Ом. Для согласования нагрузки линии применяется шлейф длиной $l' = 4,12$ м, подвешенный на расстоянии $y = 2,72$ м от конца линии (рис. 6.4). После согласования нагрузки линии в её конце произошло короткое замыкание ($Z_H = 0$). Найти входное сопротивление линии, напряжение U_{ab} , токи в конце линии и в короткозамыкающей перемычке шлейфа. Волновое сопротивление шлейфа $Z_B = 600$ Ом, напряжение источника 200 В, длина волны 20 м.

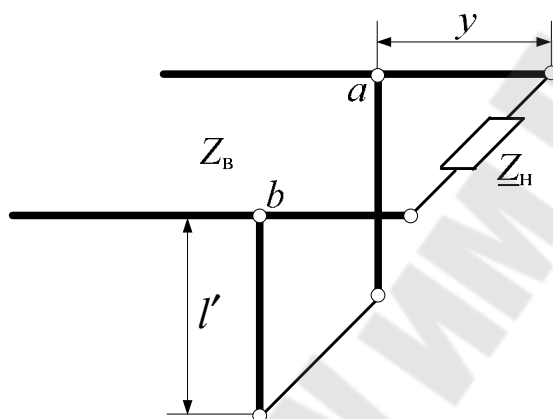


Рис. 6.4

Решение

В отсутствие потерь проводимость параллельно соединенных шлейфа и короткозамкнутого участка длиной y равна

$$Y_{ab} = \frac{1}{jZ'_B \operatorname{tg} \beta l'} + \frac{1}{jZ_B \operatorname{tg} \beta y}.$$

В нашем случае $\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{20} = 0,314$ рад/км, следовательно,

$$Y_{ab} = \frac{1}{j600 \operatorname{tg}(0,314 \cdot 4,12)} + \frac{1}{j600 \operatorname{tg}(0,314 \cdot 2,72)} = -j1,9 \text{ мкСм}.$$

Такую же входную проводимость имеет эквивалентный короткозамкнутый отрезок линии длиной x_0 (рис. 6.5). Сопротивление этого отрезка определяется уравнением

$$Z_{ab} = jZ_B \operatorname{tg} \beta x_0. \quad (6.11)$$

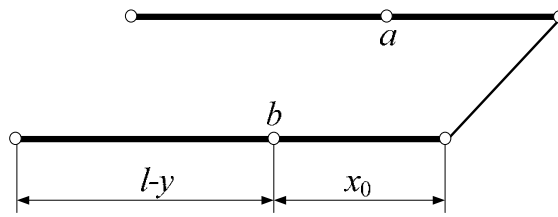


Рис. 6.5

Приводя уравнение (6.11) к виду

$$\frac{1}{\underline{Y}_{ab}} = j600 \operatorname{tg}(0,314x_0)$$

и решая его, находим:

$$x_0 = 2,28 \text{ м.}$$

Следовательно, заданная линия с шлейфом эквивалентна линии без шлейфа длиной

$$l_0 = l - y + x_0 = 8 - 2,72 + 2,28 = 7,56 \text{ м.}$$

Входное сопротивление такой линии

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = jZ_B \operatorname{tg} \beta l_0 = j600 \operatorname{tg}(0,314 \cdot 7,56) = -j580 \text{ Ом.}$$

Ток в конце эквивалентной линии

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_1}{jZ_B \sin \beta l_0} = \frac{200}{j600 \sin(0,314 \cdot 7,56)} = -j0,48 \text{ А,}$$

следовательно,

$$\underline{U}_{ab} = jZ_B \underline{I}_2 \sin \beta x_0 = j600 \cdot (-j0,48) \cdot \sin(0,314 \cdot 2,28) = 189 \text{ В.}$$

Ток в перемычке шлейфа

$$\underline{I}_{\text{ш}} = \frac{\underline{U}_{ab}}{jZ_B \sin \beta l'} = \frac{189}{j600 \sin(0,314 \cdot 4,12)} = -j0,328 \text{ А ;}$$

ток короткого замыкания в конце линии

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{ab}}{jZ_B \sin \beta y} = \frac{189}{j600 \sin(0,314 \cdot 2,72)} = -j0,418 \text{ А.}$$

6.36. Линия без потерь длиной $l = 9\lambda/16$ имеет волновое сопротивление $Z_B = 400 \text{ Ом}$. Рассчитать входное сопротивление линии и

сопротивление нагрузки, если комплексный коэффициент отражения на входе линии $\underline{\Gamma}_1 = 0,333e^{-j45^\circ}$.

Решение

Входное сопротивление линии

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{\text{вх}} &= \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{U}_{\text{пр1}} + \underline{U}_{\text{обр1}}}{(\underline{U}_{\text{пр1}} - \underline{U}_{\text{обр1}})} = Z_{\text{в}} \frac{1 + \frac{\underline{U}_{\text{обр1}}}{\underline{U}_{\text{пр1}}}}{1 - \frac{\underline{U}_{\text{обр1}}}{\underline{U}_{\text{пр1}}}} = Z_{\text{в}} \frac{1 + \underline{\Gamma}_1}{1 - \underline{\Gamma}_1} = \\ &= 400 \frac{1 + 0,333e^{-j45^\circ}}{1 - 0,333e^{-j45^\circ}} = 629e^{-j28^\circ} \text{ Ом.} \end{aligned}$$

Коэффициент отражения

$$\underline{\Gamma}_2 = \frac{\underline{U}_{\text{обр2}}}{\underline{U}_{\text{пр2}}} = \frac{\underline{U}_{\text{обр1}}e^{j\beta l}}{\underline{U}_{\text{пр1}}e^{-j\beta l}} = \underline{\Gamma}_1 e^{j2\beta l}.$$

В нашем случае

$$2\beta l = 2 \frac{2\pi}{\lambda} \frac{9}{16} \lambda = \frac{9\pi}{4} = 2\pi + \frac{\pi}{4}; \quad e^{j2\beta l} = e^{j\frac{\pi}{4}}.$$

Следовательно,

$$\underline{\Gamma}_2 = 0,333e^{-j45^\circ} \cdot e^{j45^\circ} = 0,333.$$

Тогда сопротивление нагрузки

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{\text{н}} &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} = \frac{\underline{U}_{\text{пр2}} + \underline{U}_{\text{обр2}}}{(\underline{U}_{\text{пр2}} - \underline{U}_{\text{обр2}})} = Z_{\text{в}} \frac{1 + \frac{\underline{U}_{\text{обр2}}}{\underline{U}_{\text{пр2}}}}{1 - \frac{\underline{U}_{\text{обр2}}}{\underline{U}_{\text{пр2}}}} = \\ &= Z_{\text{в}} \frac{1 + \underline{\Gamma}_2}{1 - \underline{\Gamma}_2} = 400 \cdot \frac{1 + 0,333}{1 - 0,333} = 800 \text{ Ом.} \end{aligned}$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Рассчитать первичные параметры линии, если измерения сопротивления короткого замыкания и холостого хода при частоте 800 Гц дали: $\underline{Z}_к = 900e^{j63^\circ}$ Ом; $\underline{Z}_х = 360e^{-78^\circ}$ Ом. Длина линии 59 км.

2. Воздушная линия связи имеет следующие параметры: $R_0 = 2,4$ Ом/км; $L_0 = 1,4$ мГн/км; $G_0 = 0,70$ мкСм/км; $C_0 = 6,25$ нФ/км.

1. Найти индуктивность каждой из катушек, которые необходимо включить через каждые 0,5 км, чтобы линия стала неискажающей.

2. Выяснить, как изменится индуктивность, если учесть потери в катушках: на частоте 800 Гц добротность катушки $Q = 200$.

3. Определить фазовую скорость волны в неискажающей линии.

4. Найти, какую наибольшую длину могла бы иметь неискажающая линия при допустимом затухании 11,3 дБ.

3. Для определения параметров трехфазного кабеля длиной 100 км, работающего на частоте 50 Гц, были проведены опыты холостого хода и короткого замыкания. Данные опытов: $U_{1х,л} = 10$ кВ; $I_{1х} = 32$ А ($\varphi_{1х} < 0$); $P_{1х} = 54$ кВт; $U_{1к,л} = 3$ кВ; $I_{1к} = 32,4$ А ($\varphi_{1к} > 0$); $P_{1к} = 167$ кВт. Определить первичные и вторичные параметры кабеля.

4. Для определения первичных параметров воздушной линии без потерь длиной 3 м при частоте 10 МГц было измерено входное сопротивление в режиме короткого замыкания: $Z_к = 290$ Ом. Определить первичные и вторичные параметры линии.

5. Для трехфазной сталеалюминовой воздушной линии электропередачи сечением 400 мм^2 и длиной 900 км известны первичные параметры: $R_0 = 0,08$ Ом/км; $G_0 = 3,75 \cdot 10^{-8}$ См/км; $X_0 = 0,42$ Ом/км; $B_0 = 2,7$ мкСм/км. Найти фазное напряжение, ток и активную мощность в начале линии, если на приемном конце линейное напряжение 330 кВ, активная мощность приемников 300 МВт и коэффициент мощности нагрузки равен 1.

6. Определить фазовую скорость волны, длину волны и КПД для линии задачи 5.

7. В конце линии задачи 5 произошел сброс нагрузки. Определить линейное напряжение в конце линии и ток в начале, считая, что фазное напряжение на станции осталось неизменным и равным 229 кВ.

8. Последовательно соединенные воздушная линия ($l_1 = 20$ км; $R_{01} = 4,0$ Ом/км; $G_{01} = 1$ мкСм/км) и кабель ($l_2 = 40$ км; $R_{02} = 0,5$ Ом/км; $G_{02} = 0,5$ мкСм/км) подключены к генератору постоянного тока с напряжением 10 кВ. Кабель имеет согласованную нагрузку. Определить мощности приемника и генератора.

9. Определить мощность генератора задачи 8 при условии, что кабель на конце разомкнут.

10. Измерен ток $I_2 = 0,1$ А в конце воздушной линии без потерь с волновым сопротивлением 600 Ом при сопротивлении нагрузки $Z_{\text{н}} = 1200$ Ом. Определить, на каких расстояниях от конца линии напряжение максимально и минимально. Вычислить значения этих напряжений. Построить график распределения действующего значения напряжения вдоль линии, откладывая расстояния от конца линии в относительных единицах $\frac{x}{\lambda}$, где λ – длина волны.

11. На концах двух одинаковых кабелей длиной 100 см с волновым сопротивлением 200 Ом и полиэтиленовой изоляцией ($\epsilon_r = 2,4$) включены приемники с сопротивлениями соответственно $Z_{\text{н1}} = 200$ Ом и $Z_{\text{н2}} = 100$ Ом. Напряжение на вводах каждого приемника должно быть равно 20 мВ. Определить необходимые напряжения двух генераторов, работающих на частоте 75 МГц. Найти, какое минимальное напряжение генератора можно получить при $Z_{\text{н2}} = 100$ Ом, если изменять длину кабеля, и наименьшую длину кабеля, при которой получится это напряжение.

12. Определить, при какой длине линии без потерь значение напряжения в конце линии остается неизменным независимо от подключения и отключения согласованной нагрузки. Напряжение генератора поддерживается постоянным.

13. Генератор с внутренним сопротивлением R_1 должен отдать максимальную мощность приемнику с сопротивлением R_2 . Для согласования сопротивлений между генератором и приемником включена воздушная линия, потерями в которой можно пренебречь. Найти наименьшую длину линии, а также ее индуктивность и емкость на единицу длины.

14. Линия задачи 6.34 подключена к генератору с напряжением 200 В. Определить ток в сопротивлении нагрузки.

15. Для согласования нагрузки воздушной линии, соединяющей передатчик с антенной, применяется отрезок короткозамкнутой линии (шлейф) длиной l' (рис. 6.4), подвешенный на расстоянии y от конца. Определить необходимые минимальные длины l' и y . Волновое сопротивление шлейфа и линии равно 600 Ом; входное сопротивление антенны $Z_H = r_H = 800$ Ом. Длина волны генератора 20 м.

16. Длина линии задачи 15 равна 8 м. Найти мощность, которую отдает передатчик с напряжением 200 В до согласования нагрузки и после согласования. Определить, во сколько раз напряжение падающей волны больше напряжения отраженной волны до согласования нагрузки и на каком расстоянии от конца линии находится ближайший минимум напряжения.

17. Для согласования нагрузки линии задачи 15 вместо короткозамкнутого отрезка применяется: 1) разомкнутый отрезок; 2) четвертьволновый трансформатор. Определить: 1) наименьшую длину разомкнутого отрезка при длине $y = 2,72$ м; 2) волновое сопротивление трансформатора.

18. Длина линии задачи 15 равна 8 м. Определить напряжение на сопротивлении нагрузки до ее согласования (шлейфа нет) и после согласования, если напряжение генератора остается неизменным и равным 200 В. Известно, что $y = 2,72$ м и $l' = 4,12$ м.

19. Для согласования с воздушной линией приемника, сопротивление которого $Z_H = 800 + j450$ Ом, выбрана схема, показанная

на рис. 6.3. Определить наименьшую длину отрезка l' и волновое сопротивление четвертьволнового трансформатора. Волновое сопротивление линии и отрезка 600 Ом. Длина волны генератора 20 м.

20. Линия без потерь длиной $\frac{\lambda}{4}$ закорочена на обоих концах. Найти зависимость сопротивления $Z(x)$, нагружающего генератор, при изменении места присоединения генератора к линии. Здесь x – расстояние от левого конца линии до точки присоединения генератора.

21. Определить расстояние от конца линии задачи 6.22 до ближайшей пучности напряжения, если емкостное сопротивление конденсатора равно волновому сопротивлению линии.

22. При измерении емкости методом, указанным в задаче 6.22, не учитывалось влияние краевого эффекта в конце линии (электрическое поле распространяется и за пределы линии, что эквивалентно некоторой включенной в конце линии емкости). Для определения этой емкости было измерено расстояние от конца линии до ближайшего узла напряжения при отключенном конденсаторе. Оказалось, что оно равно 45 см. Определить поправку, которую следует внести в найденное в задаче 6.22 значение емкости конденсатора, если учесть краевой эффект (считая, что краевой эффект нагруженной и разомкнутой линий одинаков).

23. У воздушной линии без потерь с волновым сопротивлением 400 Ом было исследовано распределение напряжения вдоль линии. Оказалось, что первый минимум напряжения 12 В находится на расстоянии 0,4 м от конца линии, а первый максимум напряжения 16 В – на расстоянии 0,9 м. Определить сопротивление нагрузки.

24. Воздушная линия без потерь имеет волновое сопротивление, равное 400 Ом. Измерения показали, что первый от конца минимум напряжения находится на расстоянии 2 м, а второй на расстоянии 7 м и отношение $\frac{U_{\min}}{U_{\max}} = 0,5$.

Определить сопротивление нагрузки.

Ответы к задачам:

1. 2,84 Ом/км; 1,94 мГн/км; 0,70 мкСм/км; 6250 пФ/км.
2. 1) 11,7 мГн; 2) 15,1 мГн; 3) $65,6 \cdot 10^3$ км/с; 4) 818 км.
3. $R_0 = 0,51$ Ом/км; $X_0 = 0,12$ Ом/км; $G_0 = 0$; $B_0 = 54,3$ мкСм/км;
 $Z_B = 98,4e^{-j38^\circ 30'}$ Ом; $\gamma = (3,34 + j4,16) \cdot 10^{-3}$ км⁻¹.
4. 1,33 мГн/км; 8,3 нФ/км; 400 Ом; 12 град/м.
5. 229 кВ; 700 А; 355 МВт.
6. $295 \cdot 10^3$ км/с; 5900 км; 84,5 %.
7. 683 кВ; 820 А.
8. 82,2 кВт; 94,3 кВт.
9. 4,0 кВт.
10. 1) $\frac{n\lambda}{2}$, где n – целое число; 2) $\frac{k\lambda}{4}$, где k – целое нечетное число; $U_{\max} = 120$ В в конце линии; $U_{\min} = 60$ В; $I_{\max} = 0,4$ А в конце линии; $I_{\min} = 0,2$ А.
11. 20 мВ и 31,8 мВ; 20 мВ; 129 см (0).
12. $\frac{n\lambda}{2}$, где n – целое число.
13. $\frac{\lambda}{4}$; $\frac{\sqrt{r_1 r_2}}{c_0}$; $\frac{1}{c_0} \sqrt{r_1 r_2}$, где c_0 – скорость света в вакууме.
14. 0,29 А.
15. 2,72 м; 4,12 м.
16. 58,9 и 66,7 Вт; в 7 раз; 5 м.
17. 1) 9,12 м; 2) 693 Ом.
18. 218 и 232 В.
19. 1,36 м; 850 Ом.
20. $j0,5z_B \sin 2\beta x$.
21. 0,75 м.
22. 0,3 пФ.
23. $503e^{j10^\circ}$ Ом.
24. $680e^{-j24^\circ}$ Ом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бессонов, Л. А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи / Л. А. Бессонов. – 10-е изд. – Москва : Гардарики, 2002. – 638 с.
2. Теоретические основы электротехники. Справочник по теории электрических цепей / под ред. Ю. А. Бычкова, В. М. Золотницкого, Э. П. Чернышева. – Санкт-Петербург : Питер, 2008. – 349 с.
3. Белецкий, А. Ф. Теория линейных электрических цепей / А. Ф. Белецкий. – Санкт-Петербург : Лань, 2009. – 544 с.
4. Прянишников, В. А. Электротехника и ТОЭ в примерах и задачах / В. А. Прянишников, Е. А. Петров, Ю. М. Осипов. – Санкт-Петербург : КОРОНА принт, 2003. – 336 с.
5. Новгородцев, А. Б. Теоретические основы электротехники. 30 лекций по теории электрических цепей / А. Б. Новгородцев. – 2-е изд. – Санкт-Петербург : Питер, 2006. – 576 с.
6. Теоретические основы электротехники. В 3 т. Т. 1, 2 / К. С. Демирчян [и др.]. – Санкт-Петербург : Питер, 2004.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	3
Глава 6. Установившиеся процессы в цепях с распределёнными параметрами.....	4
Вводные положения.....	4
Примеры решения задач.....	10
Задачи для самостоятельного решения.....	58
Литература	63

Учебное электронное издание комбинированного распространения

Учебное издание

Грачев Станислав Анатольевич
Соленков Виталий Владимирович
Шабловский Ярослав Олегович

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Практикум

**по курсу «Теория линейных электрических цепей»
для студентов электротехнических специальностей**

В трех частях

Часть 3

Цепи с распределёнными параметрами

Редактор *Н. И. Жукова*
Компьютерная верстка *В. В. Вороник*

Подписано в печать 11.03.10.

Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».

Ризография. Усл. печ. л. 3,72. Уч.-изд. л. 2,9.

Изд. № 175.

E-mail: ic@gstu.by

<http://www.gstu.by>

Издатель и полиграфическое исполнение:
Издательский центр учреждения образования
«Гомельский государственный технический университет
имени П. О. Сухого».

ЛИ № 02330/0549424 от 08.04.2009 г.

246746, г. Гомель, пр. Октября, 48.