

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Теоретические основы электротехники»

Я. О. Шабловский, А. В. Козлов

ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

ПРАКТИКУМ

**по курсу «Теоретические основы электротехники»
для студентов специальности 1-53 01 05
«Автоматизированные электроприводы»
заочной формы обучения**

Гомель 2015

УДК 621.3.011.71(075.8)
ББК 31.211.61я73
Ш13

*Рекомендовано научно-методическим советом
энергетического факультета ГГТУ им. П. О. Сухого
(протокол № 1 от 30.09.2014 г.)*

Рецензент: доц. каф. «Электроснабжение» ГГТУ им. П. О. Сухого
канд. техн. наук *Ю. А. Рудченко*

Шабловский, Я. О.
Ш13 Линейные электрические цепи : практикум по курсу «Теоретические основы электротехники» для студентов специальности 1-53 01 05 «Автоматизированные электроприводы» заоч. формы обучения / Я. О. Шабловский, А. В. Козлов. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2015. – 190 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Мб RAM ; свободное место на HDD 16 Мб ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: <https://elib.gstu.by>. – Загл. с титул. экрана.

Содержит вводные практические сведения из теории линейных электрических цепей, а также примеры решения задач по основным разделам курса.

Для студентов специальности 1-53 01 05 «Автоматизированные электроприводы» заочной формы обучения.

УДК 621.3.011.71(075.8)
ББК 31.211.61я73

© Учреждение образования «Гомельский
государственный технический университет
имени П. О. Сухого», 2015

ГЛАВА 1 ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Вводные положения

Ток I и напряжение U_{ab} участка ab , имеющего электрическое сопротивление R (рис. 1.1, а), связаны законом Ома: $U_{ab} = RI$. Величину, обратную сопротивлению, называют электрической проводимостью: $G = 1/R$. Закон Ома применяется для ветви или для одноконтурной схемы; при его написании следует прежде всего выбрать произвольно некоторое положительное направление тока. Для ветви, состоящей только из резисторов и не содержащей ЭДС (например, для ветви ab на рис. 1.2), при положительном направлении тока от точки a к точке b

$$I = (\varphi_a - \varphi_b) / R_{ab} = U_{ab} / R_{ab},$$

где φ_a и φ_b – потенциалы точек a и b ; U_{ab} – разность потенциалов (напряжение) между точками a и b ; $R_{ab} = R_4 + R_5$ – полное сопротивление ветви между точками a и b .

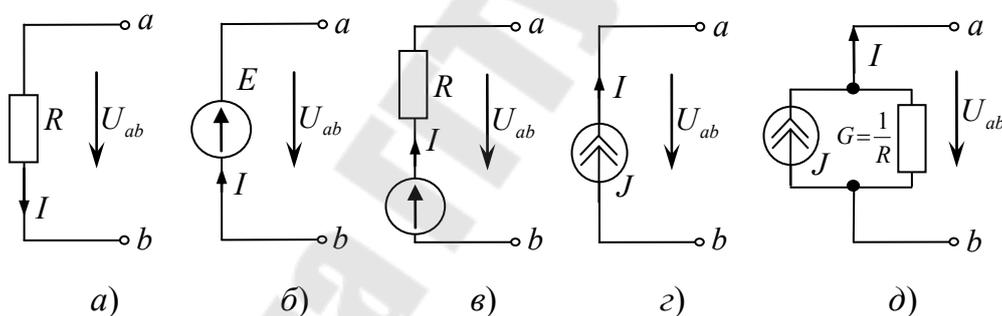


Рис. 1.1

Для ветви схемы, содержащей ЭДС и резисторы, например, для ветви acb на рис. 1.2:

$$I_1 = \frac{\varphi_a - \varphi_b + \sum E}{R_{acb}} = \frac{U_{ab} + E_1 - E_2}{R_{acb}},$$

где $R_{acb} = R_1 + R_2 + R_9$.

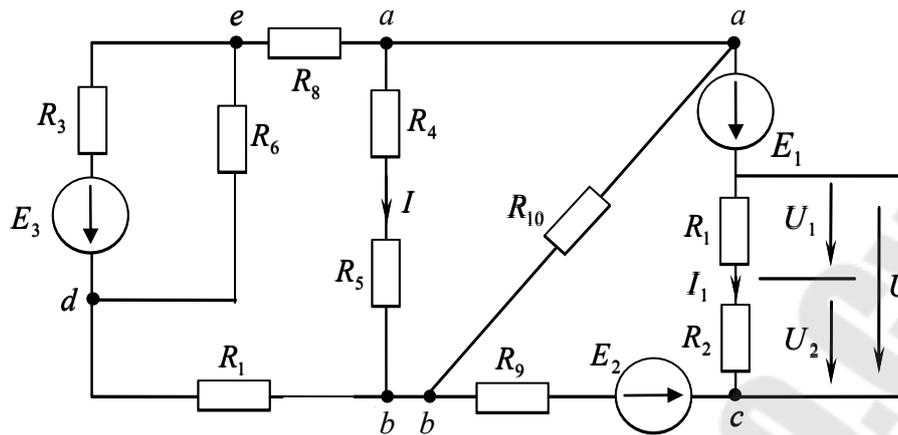


Рис. 1.2

Первый закон Кирхгофа:

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0.$$

Второй закон Кирхгофа:

$$\sum_{k=1}^n U_k = 0 \quad \text{либо} \quad \sum_{k=1}^n E_k = \sum_{k=1}^n R_k I_k.$$

Для написания первого закона Кирхгофа необходимо задаться положительными направлениями токов каждой ветви. Токи, направленные к узлу, принимаются положительными, а направленные от узла – отрицательными (или наоборот). Для написания второго закона Кирхгофа необходимо произвольно выбрать положительное направление обхода контура. Со знаком «+» берут падения напряжения в тех ветвях, в которых выбранное положительное направление тока совпадает с направлением обхода (независимо от направления ЭДС в этих ветвях), а со знаком «-» берут падения напряжения в тех ветвях, в которых положительное направление тока противоположно направлению обхода. Величины ЭДС, направления которых совпадают с выбранным направлением обхода (независимо от направления тока, протекающего через них), принимаются положительными, а ЭДС, направленные против выбранного направления обхода, – отрицательными.

При составлении уравнений по второму закону Кирхгофа следует выбирать контуры, не содержащие источников тока !

Идеальный источник электродвижущей силы характеризуется напряжением U_{ab} , которое не зависит от тока I и называется электродвижущей силой E (рис. 1.1, б): $U_{ab} = E$.

Реальный источник электродвижущей силы имеет внутреннее сопротивление и изображается схемой последовательного соединения ЭДС E и внутреннего сопротивления R (рис. 1.1, в).

Идеальный источник тока: ток J источника не зависит от напряжения U_{ab} ; внутренняя проводимость источника тока равна нулю, сопротивление источника тока бесконечно велико (рис. 1.1, г).

Реальный источник тока (с внутренней проводимостью $G = 1/R$) может быть изображен в виде параллельной схемы, содержащей источник тока J и проводимость G (рис. 1.1, д).

Переход от схемы реального источника ЭДС к эквивалентной схеме реального источника тока осуществляется по формулам:

$$J = E/R, \quad E = J/G, \quad R = 1/G.$$

Эквивалентные преобразования схем не должны привести к изменению токов или напряжений на участках схемы, не подвергшихся преобразованию.

Замена *последовательно* соединенных сопротивлений одним эквивалентным: эквивалентное сопротивление схемы, состоящей из n последовательно соединенных сопротивлений, равно сумме этих сопротивлений, т. е.

$$R_{y\hat{e}} = \sum_{k=1}^n R_k.$$

При этом сопротивления соединены последовательно, если они обтекаются одним и тем же током (например, на рис. 1.2 последовательно соединены сопротивления R_1, R_2 и R_9).

Замена *параллельно* соединенных сопротивлений одним эквивалентным: эквивалентное сопротивление схемы, состоящей из n параллельно соединенных сопротивлений определяется по формуле

$$\frac{1}{R_{y\hat{e}}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k} \quad \text{или} \quad G_{y\hat{e}} = \sum_{k=1}^n G_k.$$

При этом сопротивления соединены параллельно, если все они присоединены к одной паре узлов, например, сопротивления $R_{45} = R_4 + R_5$ и R_{10} (см. рис. 1.2).

При параллельном соединении n ветвей (рис. 1.3, а) ток каждой из ветвей вычисляется через ток I неразветвленной части схемы:

$$I_k = I \frac{G_k}{\sum_{k=1}^n G_k}.$$

В частном случае двух параллельных ветвей (рис. 1.3, б):

$$I_2 = I_1 \frac{G_2}{G_2 + G_3} = I_1 \frac{R_3}{R_2 + R_3}; \quad I_3 = I_1 \frac{G_3}{G_2 + G_3} = I_1 \frac{R_2}{R_2 + R_3}.$$

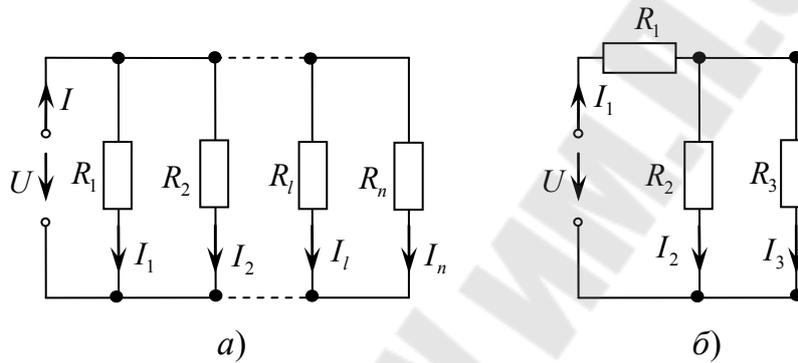


Рис. 1.3

Преобразование треугольника сопротивлений (рис. 1.4, а) в эквивалентную звезду сопротивлений (рис. 1.4, б) производится по формулам:

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; \quad R_2 = \frac{R_{23}R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; \quad R_3 = \frac{R_{31}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}};$$

Преобразование звезды сопротивлений в эквивалентный треугольник сопротивлений производится по формулам:

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1R_2}{R_3}; \quad R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2R_3}{R_1}; \quad R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3R_1}{R_2}.$$

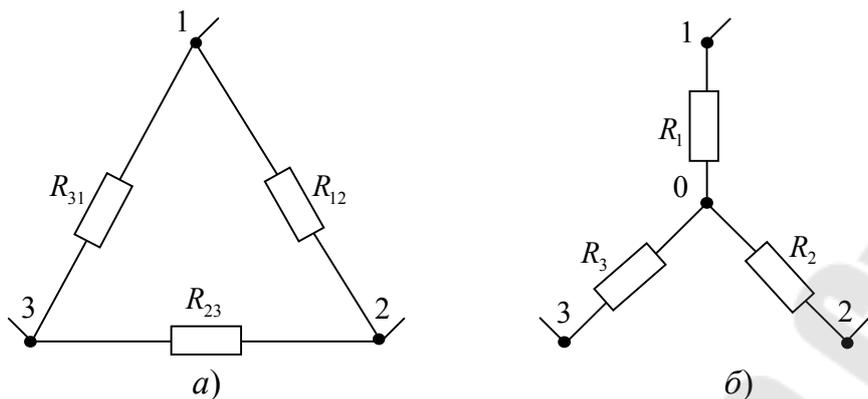


Рис. 1.4

Баланс мощностей: для любой замкнутой электрической схемы сумма мощностей $P_{\text{Э}}$, развиваемых источниками электрической энергии, равна сумме мощностей $P_{\text{П}}$, расходуемых в приемниках энергии, т. е.

$$\sum P_{\text{Э}} = \sum P_{\text{П}} \quad \text{или} \quad \sum (E_k I_k + U_k J_k) = \sum I_k^2 R_k.$$

Здесь $\sum E_k I_k$ – алгебраическая сумма, в которой положительны те слагаемые, для которых направления ЭДС E_k и соответствующего тока I_k совпадают (в противном случае слагаемое отрицательно); $\sum U_k J_k$ – алгебраическая сумма, в которой положительны те слагаемые, для которых напряжение на источнике тока и его ток J_k противоположны; в противном случае слагаемое отрицательно; $\sum I_k^2 R_k$ – арифметическая сумма, в которой учитываются как внешние сопротивления, так и сопротивления самих источников энергии.

Примеры решения задач

1.1. Для схемы рис. 1.1.1 найти эквивалентные сопротивления между зажимами a и b , c и d , d и b , если $R_1 = 6$ Ом; $R_2 = 5$ Ом; $R_3 = 15$ Ом; $R_4 = 30$ Ом; $R_5 = 6$ Ом.

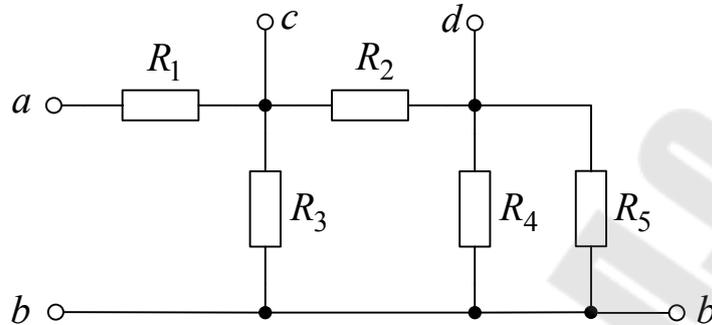


Рис. 1.1.1

Решение

Рассчитаем эквивалентное сопротивление R_{ab} .

Расчет начинаем с элементов, наиболее удаленных от входных зажимов. В данном случае это параллельные сопротивления R_4 и R_5 , подключённые к узлам b и d . Эквивалентное сопротивление участка bd равно

$$R_{bd} = \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} = \frac{30 \cdot 6}{30 + 6} = 5 \text{ Ом.}$$

Эквивалентная схема принимает вид, показанный на рис. 1.1.2. В этой схеме сопротивление R_{bd} соединено последовательно с R_2 . Общее сопротивление участка cbd равно

$$R' = R_2 + R_{bd} = 5 + 5 = 10 \text{ Ом.}$$

Эквивалентная схема показана на рис. 1.1.3. В этой схеме параллельно соединённые сопротивления R' и R_3 можно заменить эквивалентным сопротивлением R_{cb} :

$$R_{cb} = \frac{R' R_3}{R' + R_3} = \frac{10 \cdot 15}{10 + 15} = 6 \text{ Ом.}$$

Тогда схема примет вид, показанный на рис. 1.1.4. Эта схема состоит из последовательно соединённых участков ac и cb . В итоге имеем:

$$R_{ab} = R_1 + R_{cb} = 6 + 6 = 12 \text{ Ом.}$$

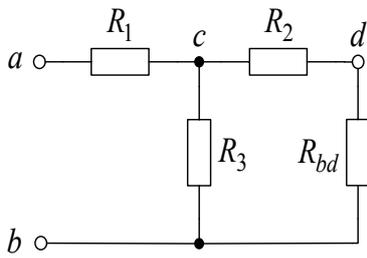


Рис. 1.1.2

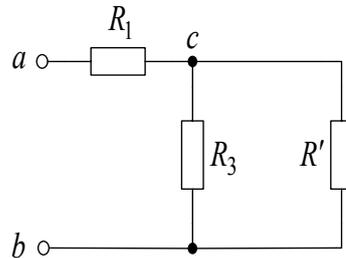


Рис. 1.1.3

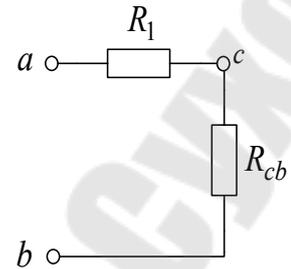


Рис. 1.1.4

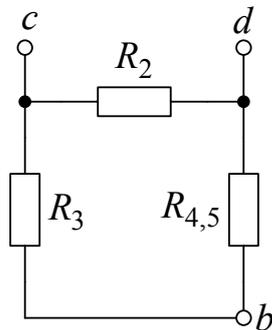


Рис. 1.1.5

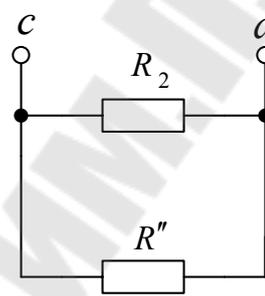


Рис. 1.1.6

Рассчитаем эквивалентное сопротивление R_{cd} .

Как и в предыдущем случае, схема содержит участок bd . Его эквивалентное сопротивление R_{bd} было найдено выше. Это сопротивление соединено последовательно с сопротивлением R_3 (рис. 1.1.5):

$$R'' = R_3 + R_{bd} = 15 + 5 = 20 \text{ Ом.}$$

Сопротивление R_{cd} образовано параллельно соединенными сопротивлениями R_2 и R'' :

$$R_{cd} = \frac{R_2 R''}{R_2 + R''} = \frac{5 \cdot 20}{5 + 20} = 4 \text{ Ом.}$$

Рассчитаем сопротивление R_{db} .

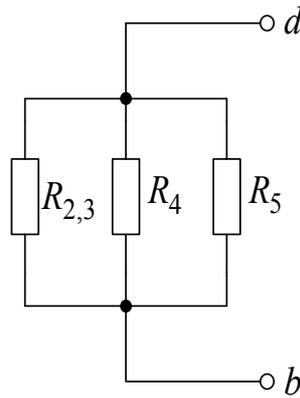


Рис. 1.1.7

По отношению к зажимам d и b схема состоит из трех параллельно соединенных сопротивлений $R_{2,3} = R_2 + R_3 = 5 + 15 = 20$ Ом, R_4 и R_5 (рис. 1.1.7). С учетом этого

$$\frac{1}{R_{db}} = \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_{2,3}} = \frac{1}{6} + \frac{1}{30} + \frac{1}{20} = \frac{1}{4} \text{ См},$$

откуда $R_{db} = 4$ Ом.

1.2. Рассчитать токи в схеме рис. 1.2.1, если $U = 120$ В, $R_1 = R_2 = 0,5$ Ом; $R_3 = 6$ Ом; $R_4 = 6$ Ом; $R_5 = R_6 = 1$ Ом; $R_7 = 2$ Ом.

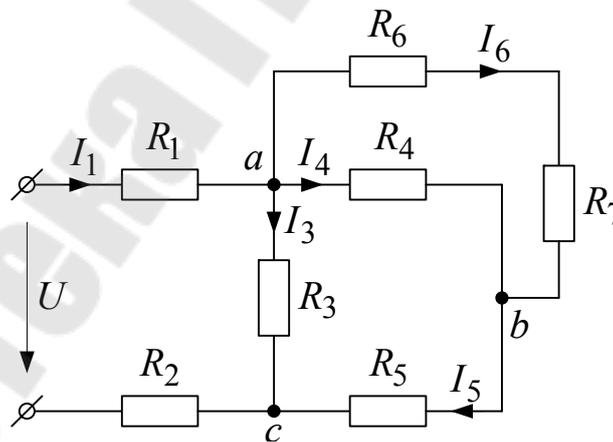


Рис. 1.2.1

Решение

Определяем входное сопротивление схемы, заменяя ее отдельные участки эквивалентными сопротивлениями:

$$R_{ab} = \frac{(R_6 + R_7)R_4}{R_6 + R_7 + R_4} = \frac{(1+2) \cdot 6}{1+2+6} = 2 \text{ Ом};$$

$$R_{ac} = \frac{(R_{ab} + R_5)R_3}{R_{ab} + R_5 + R_3} = \frac{(2+1) \cdot 6}{2+1+6} = 2 \text{ Ом}.$$

Общее (входное) сопротивление схемы

$$R_{\Sigma} = R_{ac} + R_1 + R_2 = 2 + 0,5 + 0,5 = 3 \text{ Ом}.$$

Ток в неразветвленной части схемы рассчитываем по закону Ома:

$$I_1 = \frac{U}{R_{\Sigma}} = \frac{120}{3} = 40 \text{ А}.$$

Выражения закона Ома для токов I_3 и I_5 имеют вид

$$I_3 = \frac{U_{ac}}{R_3}; \quad I_5 = \frac{U_{ac}}{R_5 + R_{ab}}.$$

Напряжение U_{ac} можно определить двумя способами:

$$1) U_{ac} = U - (R_1 + R_2)I_1 = 120 - (0,5 + 0,5) \cdot 40 = 80 \text{ В};$$

$$2) U_{ac} = R_{ac}I_1 = 2 \cdot 40 = 80 \text{ В}.$$

Тогда

$$I_3 = \frac{U_{ac}}{R_3} = \frac{80}{6} = 13,3 \text{ А}; \quad I_5 = \frac{U_{ac}}{R_5 + R_{ab}} = \frac{80}{1+2} = 26,7 \text{ А}.$$

Проверка: $I_1 = I_3 + I_5$, или $40 = 13,3 + 26,7 \text{ А}$.

Аналогично находим:

$$I_4 = \frac{U_{ab}}{R_4}; \quad I_6 = \frac{U_{ab}}{R_6 + R_7}.$$

Напряжение на участке ab

$$U_{ab} = R_{ab}I_5 = 2 \cdot 26,7 = 53,4 \text{ В}$$

либо

$$U_{ab} = U_{ac} - R_5I_5 = 80 - 26,7 = 53,3 \text{ В}.$$

Тогда

$$I_4 = \frac{U_{ab}}{R_4} = \frac{53,3}{6} = 8,9 \text{ А}; \quad I_6 = \frac{U_{ab}}{R_6 + R_7} = \frac{53,3}{1+2} = 17,8 \text{ А}.$$

Проверка: $I_5 = I_4 + I_6$, или $26,7 = 8,9 + 17,8$.

1.3. В схеме рис. 1.3.1 $U = 120 \text{ В}$, $R_1 = 10 \text{ Ом}$; $R_2 = R_3 = R_5 = 25 \text{ Ом}$; $R_4 = 50 \text{ Ом}$. Между точками c и d включают сначала вольтметр (рис. 1.3.1), а затем амперметр (рис. 1.3.2). Определить показания этих приборов, считая их идеальными.

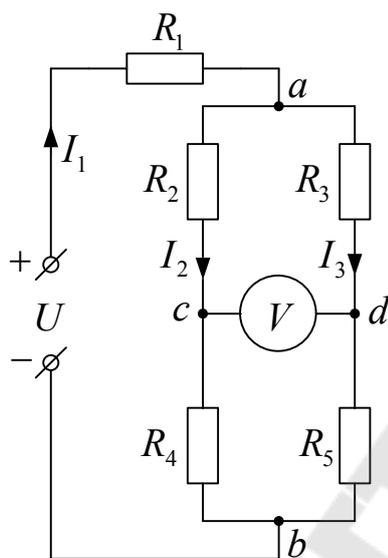


Рис. 1.3.1

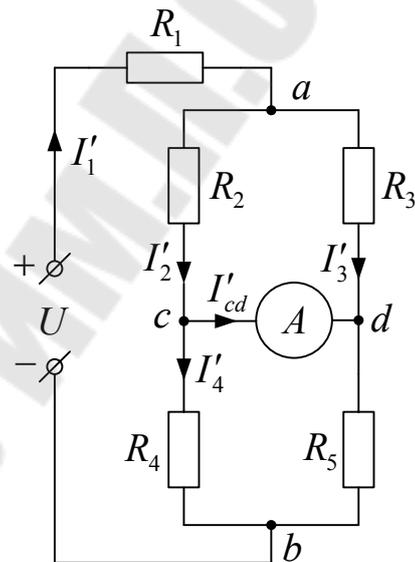


Рис. 1.3.2

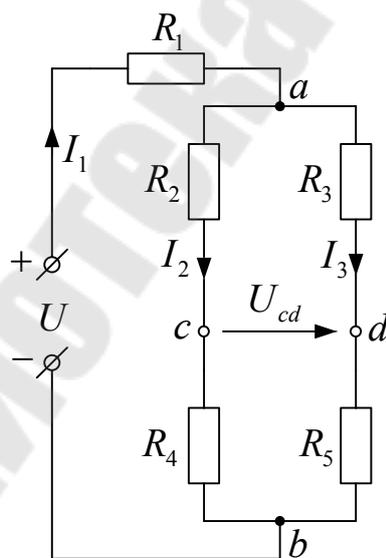


Рис. 1.3.3

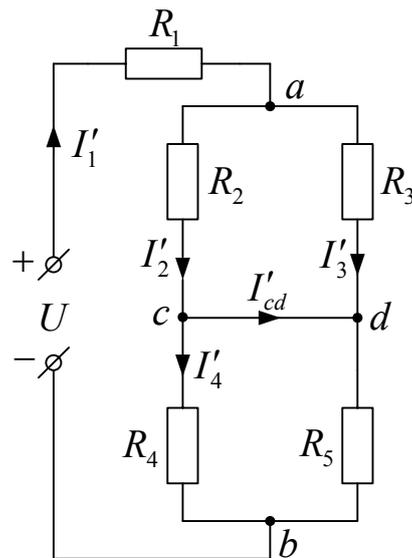


Рис. 1.3.4

Решение

Расчёт показания вольтметра. Определим входное сопротивление эквивалентной схемы (рис. 1.3.3):

$$R_{\Sigma} = R_1 + \frac{(R_2 + R_4)(R_3 + R_5)}{R_2 + R_4 + R_3 + R_5} = 10 + \frac{75 \cdot 50}{125} = 40 \text{ Ом.}$$

В неразветвлённой части протекает ток

$$I_1 = U/R_{\Sigma} = 120/40 = 3 \text{ А.}$$

Токи в ветвях $(R_2 + R_4)$ и $(R_3 + R_5)$, можно найти двумя способами.

1. "Ветвление токов":

$$I_2 = I_1 \frac{R_3 + R_5}{R_2 + R_4 + R_3 + R_5} = 3 \frac{50}{125} = 1,2 \text{ А;}$$

$$I_3 = I_1 \frac{R_2 + R_4}{R_2 + R_4 + R_3 + R_5} = 3 \frac{75}{125} = 1,8 \text{ А.}$$

2. Найдём напряжение на межузловом участке:

$$U_{ab} = I_1 \frac{(R_2 + R_4)(R_3 + R_5)}{R_2 + R_4 + R_3 + R_5} = 3 \frac{75 \cdot 50}{125} = 90 \text{ В}$$

либо

$$U_{ab} = U - R_1 I_1 = 120 - 10 \cdot 3 = 90 \text{ В.}$$

Тогда

$$I_2 = U_{ab}/(R_2 + R_4) = 90/75 = 1,2 \text{ А;}$$

$$I_3 = U_{ab}/(R_3 + R_5) = 90/50 = 1,8 \text{ А.}$$

Показание вольтметра:

$$U_V = U_{cd} = -I_2 R_2 + I_3 R_3 = -1,2 \cdot 25 + 1,8 \cdot 25 = 15 \text{ В.}$$

Расчёт показания амперметра. Определим входное сопротивление эквивалентной схемы (рис. 1.3.4):

$$R'_{\Sigma} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} + \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} = 10 + \frac{25^2}{50} + \frac{50 \cdot 25}{75} = 39,2 \text{ Ом.}$$

В неразветвлённой части протекает ток

$$I'_1 = U/R'_\Sigma = 120/39,2 = 3,1 \text{ A.}$$

Показание амперметра определяется током

$$I'_{cd} = I'_2 - I'_4.$$

Имеем:

$$I'_2 = I'_1 \frac{R_3}{R_2 + R_3} = 3,1 \frac{25}{50} = 1,55 \text{ A};$$

$$I'_4 = I'_1 \frac{R_5}{R_4 + R_5} = 3,1 \frac{25}{75} = 1,03 \text{ A.}$$

Следовательно, искомое показание амперметра

$$I'_{cd} = 1,55 - 1,03 = 0,52 \text{ A.}$$

1.4. Найти токи в схеме рис. 1.4.1 при $R_1 = 30 \text{ Ом}$; $R_2 = R_3 = 10 \text{ Ом}$; $R_4 = 26 \text{ Ом}$; $R_5 = 11 \text{ Ом}$; $R_6 = 10 \text{ Ом}$; $R_7 = 40 \text{ Ом}$; $R_8 = 50 \text{ Ом}$; $U = 114 \text{ В}$.

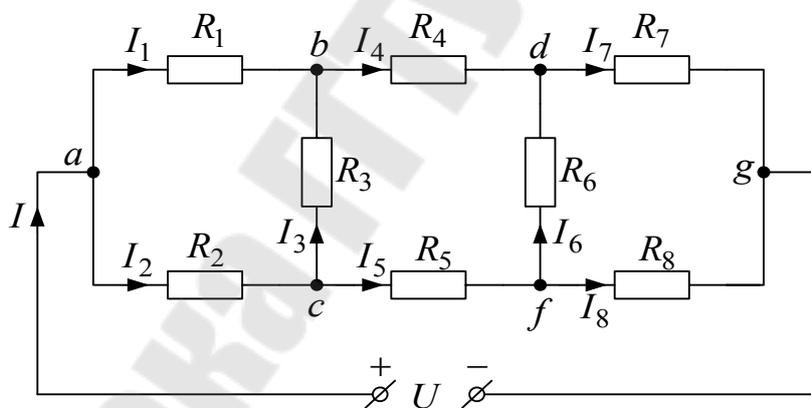


Рис. 1.4.1

Решение

Заменим треугольники сопротивлений с вершинами в узлах abc и dfg эквивалентными звездами (рис. 1.4.2).

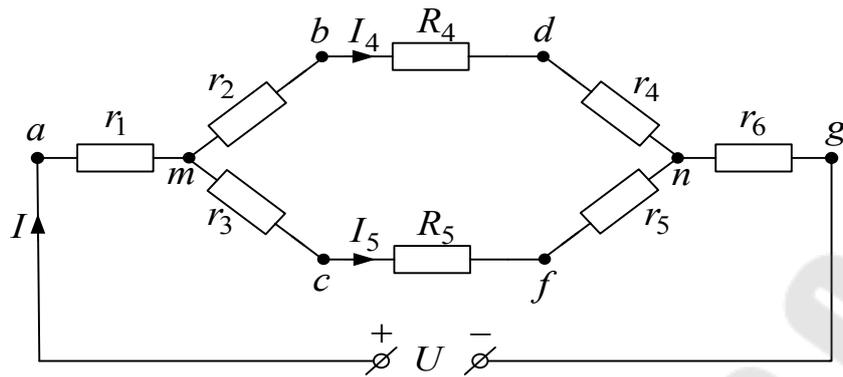


Рис. 1.4.2

Подсчитаем сопротивления r_1 , r_2 , r_3 лучей звезды, эквивалентной треугольнику abc сопротивлений R_1 , R_2 , R_3 :

$$r_1 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{30 \cdot 10}{30 + 10 + 10} = 6 \text{ Ом};$$

$$r_2 = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{30 \cdot 10}{30 + 10 + 10} = 6 \text{ Ом};$$

$$r_3 = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{10 \cdot 10}{30 + 10 + 10} = 2 \text{ Ом}.$$

Определим сопротивления r_4 , r_5 , r_6 лучей звезды, эквивалентной треугольнику dfg сопротивлений R_6 , R_7 , R_8 :

$$r_4 = \frac{R_6 R_7}{R_6 + R_7 + R_8} = \frac{10 \cdot 40}{10 + 40 + 50} = 4 \text{ Ом};$$

$$r_5 = \frac{R_6 R_8}{R_6 + R_7 + R_8} = \frac{10 \cdot 50}{10 + 40 + 50} = 5 \text{ Ом};$$

$$r_6 = \frac{R_7 R_8}{R_6 + R_7 + R_8} = \frac{40 \cdot 50}{10 + 40 + 50} = 20 \text{ Ом};$$

Эквивалентное сопротивление всей схемы:

$$R = r_1 + \frac{R' R''}{R' + R''} + r_6 = 6 + \frac{36 \cdot 18}{36 + 18} + 20 = 38 \text{ Ом},$$

где

$$R' = r_2 + R_4 + r_4 = 36 \text{ Ом}; \quad R'' = r_3 + R_5 + r_5 = 18 \text{ Ом}.$$

После преобразования в схеме остались неизменными силы токов I , I_4 , I_5 в тех ветвях схемы, которые не подвергались преобразованию:

$$I = U / R = 114 / 38 = 3 \text{ A.}$$

$$I_4 = I \frac{R''}{R' + R''} = 3 \frac{18}{36 + 18} = 1 \text{ A}; \quad I_5 = I \frac{R'}{R' + R''} = I - I_4 = 2 \text{ A.}$$

Теперь найдем токи в ветвях, подвергшихся преобразованию. Для этого по схеме рис. 1.3.2 предварительно определим напряжения между опорными точками этой схемы:

$$U_{ab} = r_1 I + r_2 I_4 = 6 \cdot 3 + 6 \cdot 1 = 24 \text{ В};$$

$$U_{ac} = r_1 I + r_3 I_5 = 6 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 22 \text{ В};$$

$$U_{cb} = U_{ab} - U_{ac} = 24 - 22 = 2 \text{ В};$$

$$U_{dg} = r_4 I_4 + r_6 I = 4 \cdot 1 + 20 \cdot 3 = 64 \text{ В};$$

$$U_{fg} = r_5 I_5 + r_6 I = 5 \cdot 2 + 20 \cdot 3 = 70 \text{ В};$$

$$U_{fd} = U_{fg} - U_{dg} = 70 - 64 = 6 \text{ В.}$$

Теперь искомые токи можно определить по закону Ома:

$$I_1 = U_{ab} / R_1 = 24 / 30 = 0,8 \text{ A}; \quad I_2 = U_{ac} / R_2 = 22 / 10 = 2,2 \text{ A};$$

$$I_3 = U_{cb} / R_3 = 2 / 10 = 0,2 \text{ A}; \quad I_6 = U_{fd} / R_6 = 6 / 10 = 0,6 \text{ A};$$

$$I_7 = U_{dg} / R_7 = 64 / 40 = 1,6 \text{ A}; \quad I_8 = U_{fg} / R_8 = 70 / 50 = 1,4 \text{ A.}$$

1.5. Для электрической схемы рис. 1.5.1 определить мощность потерь в резисторе $R_3 = 3 \text{ Ом}$, если $R_1 = 10 \text{ Ом}$; $R_4 = 5 \text{ Ом}$; $R_5 = 2 \text{ Ом}$; $J_1 = 20 \text{ A}$; $J_2 = 20 \text{ A}$.

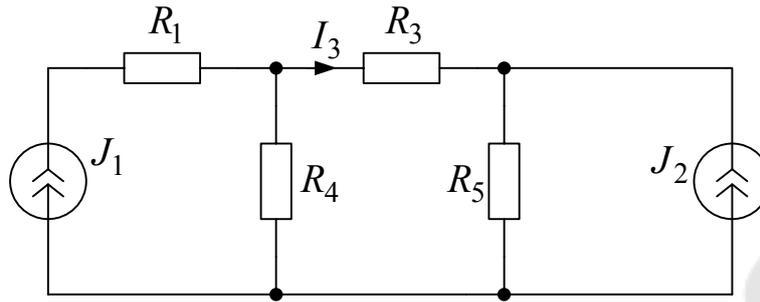


Рис. 1.5.1

Решение

Преобразуем источники тока J_1 и J_2 в эквивалентные источники ЭДС (рис. 1.5.2):

$$E_1 = R_4 J_1 = 5 \cdot 20 = 100 \text{ В}; \quad E_2 = R_5 J_2 = 2 \cdot 20 = 40 \text{ В}.$$

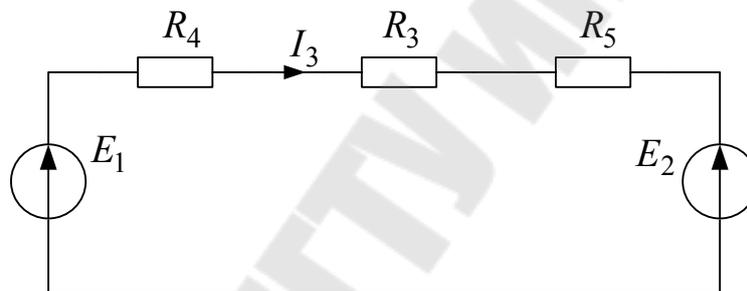


Рис. 1.5.2

Ток и мощность тепловых потерь в исследуемом резисторе:

$$I_3 = \frac{E_1 - E_2}{R_3 + R_4 + R_5} = \frac{100 - 40}{3 + 5 + 2} = 6 \text{ А}; \quad P_3 = R_3 I_3^2 = 3 \cdot 6^2 = 108 \text{ Вт}.$$

1.6. Найти токи в схеме рис. 1.6.1 и составить баланс мощностей, если $E_1 = 15 \text{ В}$; $E_2 = 70 \text{ В}$; $E_3 = 5 \text{ В}$; $r_1 = r_2 = 1 \text{ Ом}$; $r_3 = 2 \text{ Ом}$; $R_1 = 5 \text{ Ом}$; $R_2 = 4 \text{ Ом}$; $R_3 = 8 \text{ Ом}$; $R_4 = 2,5 \text{ Ом}$; $R_5 = 15 \text{ Ом}$.

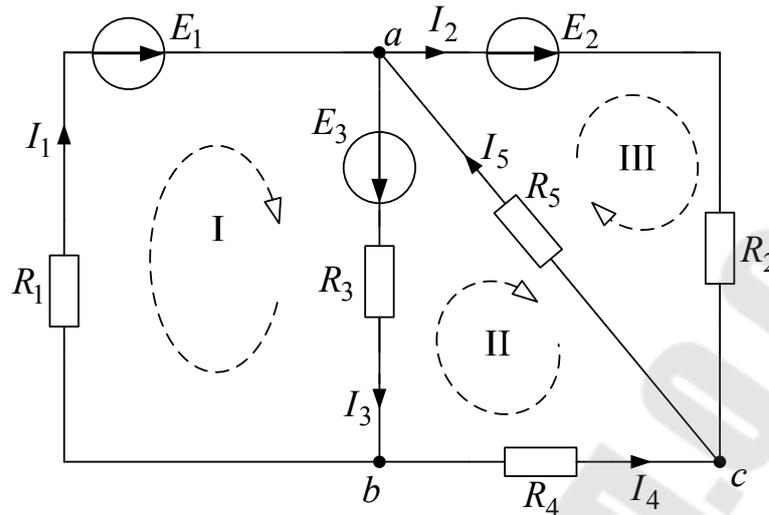


Рис. 1.6.1

Решение

Выберем и обозначим стрелками условные положительные направления токов и направления обхода трех независимых контуров I, II и III. Составим систему уравнений по законам Кирхгофа:

$$\text{для узла «a»:} \quad -I_1 + I_2 - I_3 - I_5 = 0; \quad (1.1)$$

$$\text{для узла «b»:} \quad I_1 + I_3 + I_4 = 0; \quad (1.2)$$

$$\text{для контура I:} \quad R_1 I_1 - R_3 I_3 = E_1 + E_3; \quad (1.3)$$

$$\text{для контура II:} \quad R_3 I_3 - R_4 I_4 - R_5 I_5 = -E_3; \quad (1.4)$$

$$\text{для контура III:} \quad R_2 I_2 + R_5 I_5 = E_2. \quad (1.5)$$

После подстановки числовых значений уравнения (1.3) – (1.5) принимают следующий вид:

$$6I_1 - 10I_3 = 20; \quad (1.6)$$

$$10I_3 - 2,5I_4 - 15I_5 = -5; \quad (1.7)$$

$$5I_2 + 15I_5 = 70. \quad (1.8)$$

Решая систему уравнений (1.1), (1.2), (1.6)–(1.8), получим:

$$I_1 = 5 \text{ А; } I_2 = 8 \text{ А; } I_3 = 1 \text{ А; } I_4 = -6 \text{ А; } I_5 = 2 \text{ А.}$$

Полученное при расчёте отрицательное значение тока I_4 указывает на то, что истинное направление этого тока противоположно первоначально выбранному (рис. 1.6.1).

Баланс мощностей для рассматриваемой схемы:

$$E_1 I_1 + E_2 I_2 - E_3 I_3 = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5,$$

или

$$15 \cdot 5 + 70 \cdot 8 - 5 \cdot 1 = 5^2 \cdot 6 + 8^2 \cdot 5 + 1^2 \cdot 10 + 6^2 \cdot 2,5 + 2^2 \cdot 15.$$

Имеем тождество: $630 = 630$.

1.7. Найти все токи в схеме рис. 1.7.1, если $E_1 = 40$ В; $E_2 = 20$ В; $E_4 = 10$ В; $J = 3$ А; $R_1 = 5$ Ом; $R_3 = 5$ Ом; $R_4 = 20$ Ом; $R_5 = 10$ Ом.

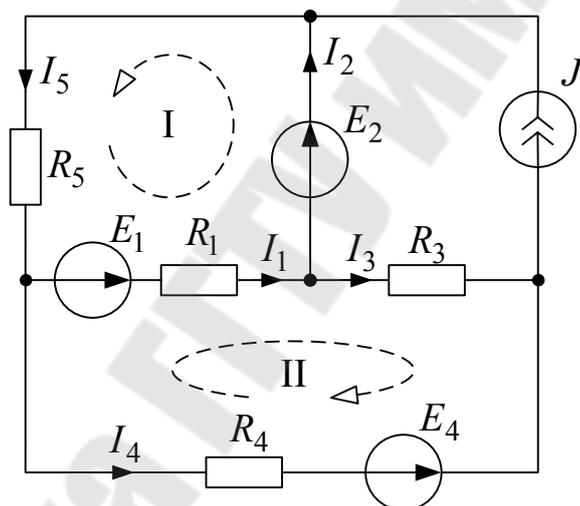


Рис. 1.7.1

Решение

Выберем направления токов в ветвях, как показано на рис. 1.7.1, и составим уравнения по первому закону Кирхгофа для узлов 1, 2, 3:

$$-I_2 + I_5 - J = 0; \quad I_1 + I_4 - I_5 = 0; \quad I_3 + I_4 - J = 0.$$

В схеме три независимых контура. По второму закону Кирхгофа уравнения составляем только для контуров, в которые не входит ветвь с источником тока, т.е. для контуров I и II. Выбрав направления обхода этих контуров, как показано на рис. 1.7.1, запишем:

$$\begin{cases} R_1 I_1 + R_5 I_5 = E_1 + E_2; \\ R_1 I_1 + R_3 I_3 - R_4 I_4 = E_1 - E_4. \end{cases}$$

Совокупную систему уравнений, составленных по законам Кирхгофа, можно представить в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ R_1 & 0 & 0 & 0 & R_5 \\ R_1 & 0 & R_3 & -R_4 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_6 \\ 0 \\ J_6 \\ E_1 + E_2 \\ E_1 - E_4 \end{bmatrix}.$$

Подстановка значений дает матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 5 & 0 & 5 & -20 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 60 \\ 30 \end{bmatrix}.$$

Решая его, находим:

$$I_1 = 3,882 \text{ А}; \quad I_2 = 1,058 \text{ А}; \quad I_3 = 2,823 \text{ А}; \quad I_4 = 0,176 \text{ А}; \quad I_5 = 4,058 \text{ А}.$$

1.8. Найти токи в схеме рис. 1.8.1 при $E_1 = 100 \text{ В}$; $E_2 = 30 \text{ В}$; $E_3 = 10 \text{ В}$; $E_4 = 6 \text{ В}$; $R_1 = 10 \text{ Ом}$; $R_2 = 10 \text{ Ом}$; $R_4 = 7 \text{ Ом}$; $R_5 = 5 \text{ Ом}$; $R_6 = 15 \text{ Ом}$; $r_4 = 1 \text{ Ом}$.

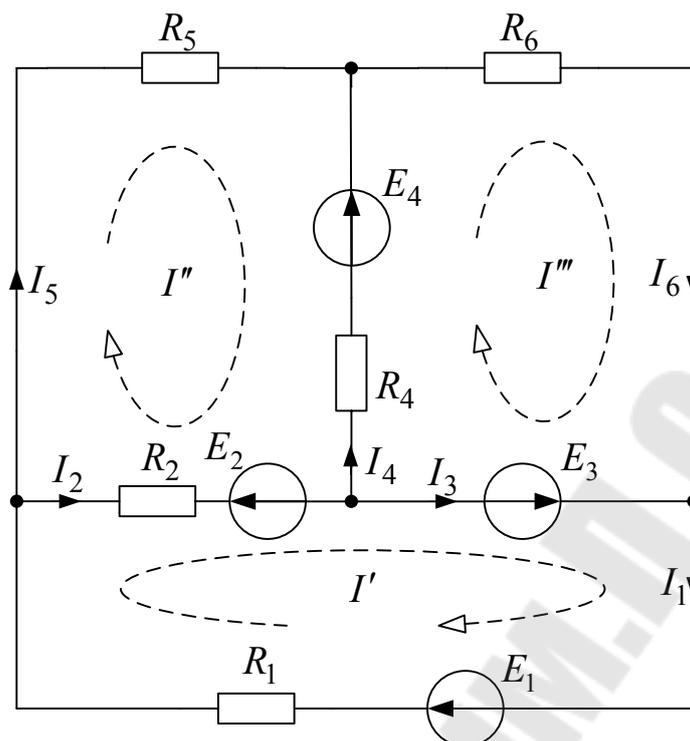


Рис. 1.8.1

Решение

Выберем направления контурных токов I' , I'' , I''' , как показано на рис. 1.8.1. Составим систему контурных уравнений:

$$\begin{aligned} (R_1 + R_2)I' - R_2I'' &= E_1 - E_2 + E_3; \\ -R_2I' + (R_2 + R_5 + R_4)I'' - R_4I''' &= E_2 - E_4; \\ -R_4I'' + (R_6 + R_4)I''' &= E_4 - E_3. \end{aligned}$$

После подстановки числовых значений получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} 20I' - 10I'' &= 80; \\ -10I' + 21I'' - 7I''' &= 24; \\ -7I'' + 22I''' &= 16. \end{aligned}$$

Решая эту систему, находим контурные токи:

$$I' = 5 \text{ A}; \quad I'' = 4 \text{ A}; \quad I''' = 2 \text{ A}.$$

Ток I_1 имеет направление контурного тока I' и равен

$$I_1 = I' = 5 \text{ A.}$$

Ток I_5 имеет направление контурного тока I'' и равен

$$I_5 = I'' = 4 \text{ A.}$$

Ток I_2 создается наложением контурных токов I' и I'' , имея направление контурного тока I' :

$$I_2 = I' - I'' = 5 - 4 = 1 \text{ A.}$$

Ток I_3 создается наложением контурных токов I' и I''' , имея направление тока I' :

$$I_3 = I' - I''' = 5 - 2 = 3 \text{ A.}$$

Ток I_4 создается наложением контурных токов I'' и I''' , имея направление контурного тока I'' :

$$I_4 = -I'' + I''' = -4 + 2 = -2 \text{ A.}$$

1.9. В схеме рис. 1.9.1 $E = 60 \text{ В}$, $J = 50 \text{ А}$, $R_1 = 5 \text{ Ом}$; $R_2 = 4 \text{ Ом}$; $R_3 = 16 \text{ Ом}$; $R_4 = 2 \text{ Ом}$; $R_5 = 8 \text{ Ом}$. Рассчитать все токи.

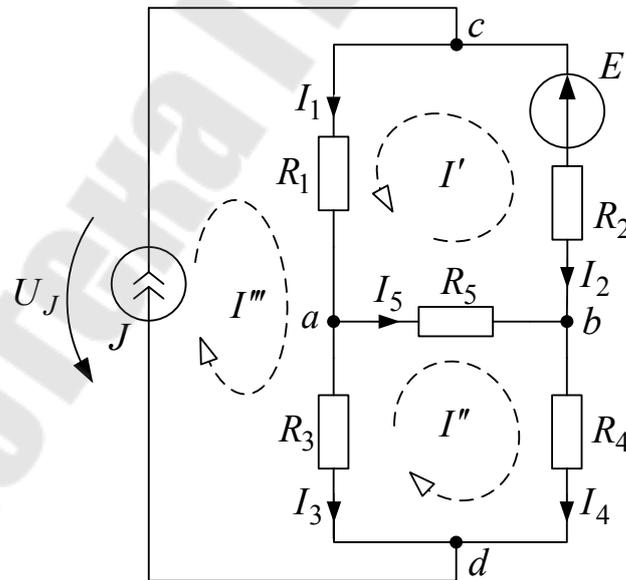


Рис. 1.9.1

Решение

Выберем направления контурных токов I' , I'' , $I''' = J$ как показано на рис. 1.9.1. Составим систему уравнений для неизвестных контурных токов I' и I'' :

$$(R_1 + R_2 + R_5)I' + R_5I'' + R_1J = E;$$

$$R_5I' + (R_3 + R_4 + R_5)I'' - R_3J = 0.$$

Подстановка числовых значений даёт систему уравнений

$$17I' + 8I'' = -190;$$

$$8I' + 26I'' = 800.$$

Решая её, находим контурные токи:

$$I' = -30 \text{ А}; \quad I'' = 40 \text{ А}.$$

Искомые токи:

$$I_1 = I' + J = -30 + 50 = 20 \text{ А}; \quad I_2 = -I' = 30 \text{ А};$$

$$I_3 = -I'' + J = -40 + 50 = 10 \text{ А}; \quad I_4 = I'' = 40 \text{ А};$$

$$I_5 = I' + I'' = -30 + 40 = 10 \text{ А}.$$

Составляем баланс мощностей:

$$P_{\text{ист}} = -EI_2 + U_J J; \quad P_{\text{пр}} = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5.$$

$$U_J = U_{cd} = R_1 I_1 + R_3 I_3 = 5 \cdot 20 + 16 \cdot 10 = 260 \text{ В}.$$

В итоге имеем тождество:

$$P_{\text{ист}} = -60 \cdot 30 + 260 \cdot 50 = 11200 \text{ Вт};$$

$$P_{\text{пр}} = 20^2 \cdot 5 + 30^2 \cdot 4 + 10^2 \cdot 16 + 40^2 \cdot 2 + 10^2 \cdot 8 = 11200 \text{ Вт}.$$

1.10. В схеме (рис. 1.10.1) рассчитать все токи при $E_1 = 4 \text{ В}$; $E_3 = 2 \text{ В}$; $E_5 = 12 \text{ В}$; $J = 2 \text{ А}$; $R'_1 = R''_1 = 4 \text{ Ом}$; $R_2 = R_3 = 2 \text{ Ом}$; $R_4 = 8 \text{ Ом}$; $R_5 = 1 \text{ Ом}$.

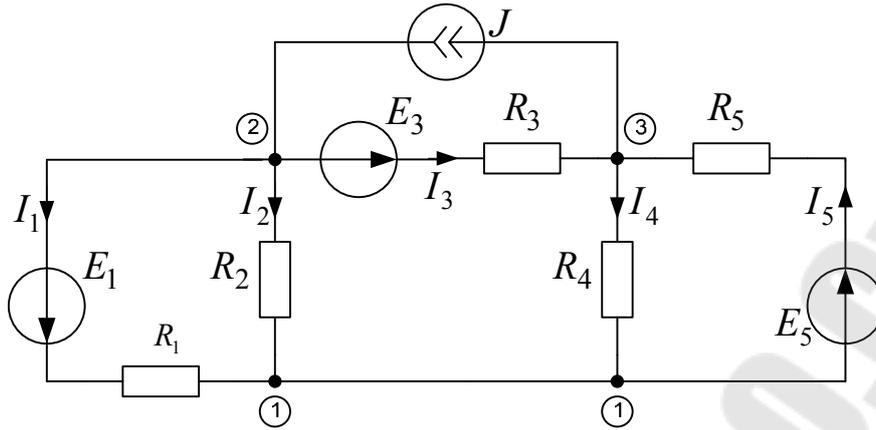


Рис. 1.10.1

Решение

Выберем положительные направления токов как показано на рис. 1.10.1. Заземлим узел 1 (т.е. примем $\varphi_1 = 0$) и запишем уравнения для потенциалов узлов 2 и 3:

$$\varphi_2 G_{22} - \varphi_3 G_{23} = -\frac{E_1}{R_1' + R_1''} - \frac{E_3}{R_3} + J;$$

$$\varphi_3 G_{33} - \varphi_2 G_{23} = \frac{E_3}{R_3} + \frac{E_5}{R_5} - J,$$

где

$$G_{22} = \frac{1}{R_1' + R_1''} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,125 \text{ См};$$

$$G_{23} = \frac{1}{R_3} = 0,5 \text{ См}; \quad G_{33} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + 1 = 1,625 \text{ См}.$$

Подставив численные значения, получим систему уравнений:

$$1,125\varphi_2 - 0,5\varphi_3 = 0,5;$$

$$-0,5\varphi_2 + 1,625\varphi_3 = 11.$$

Решение системы уравнений дает:

$$\varphi_2 = 4 \text{ В}; \quad \varphi_3 = 8 \text{ В}.$$

Токи в ветвях определим по обобщенному закону Ома:

$$I_1 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1 + E_1}{R_1' + R_1''} = \frac{4 + 4}{4 + 4} = 1 \text{ A}; \quad I_2 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{R_2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ A};$$

$$I_3 = \frac{\varphi_2 - \varphi_3 + E_3}{R_3} = \frac{4 - 8 + 2}{2} = -1 \text{ A}; \quad I_4 = \frac{\varphi_3 - \varphi_1}{R_4} = \frac{8}{8} = 1 \text{ A};$$

$$I_5 = \frac{\varphi_1 - \varphi_3 + E_5}{R_5} = \frac{0 - 8 + 12}{1} = 4 \text{ A}.$$

1.11. Рассчитать токи в схеме рис. 1.11.1, если $E_1 = 10 \text{ В}$; $E_2 = 20 \text{ В}$; $E_3 = 30 \text{ В}$; $J = 1 \text{ А}$; $R_2 = 20 \text{ Ом}$; $R_3 = 30 \text{ Ом}$; $R_4 = 40 \text{ Ом}$; $R_5 = 50 \text{ Ом}$.

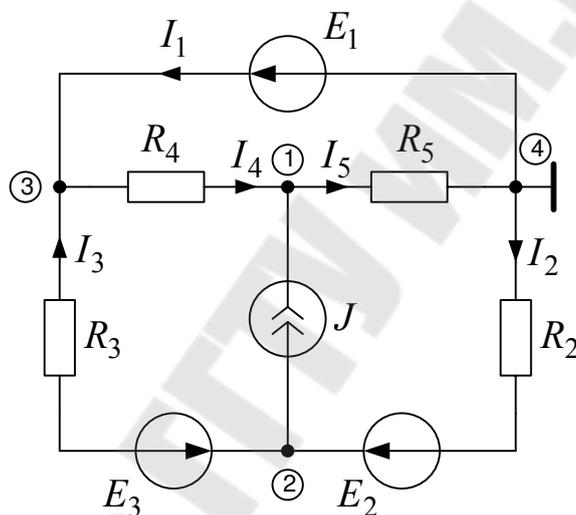


Рис. 1.11.1

Решение

Примем $\varphi_4 = 0$. Тогда $\varphi_3 = E_1 = 10 \text{ В}$. Составляем уравнения для неизвестных потенциалов φ_1 и φ_2 :

$$\varphi_1 G_{11} - \varphi_3 G_{13} - \varphi_2 G_{12} = J;$$

$$\varphi_2 G_{22} - \varphi_3 G_{23} - \varphi_2 G_{12} = \frac{E_2}{R_2} + \frac{E_3}{R_3} - J,$$

где

$$G_{11} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} = \frac{1}{40} + \frac{1}{50} = 0,045 \text{ См}; \quad G_{13} = \frac{1}{R_4} = \frac{1}{40} = 0,025 \text{ См};$$

$$G_{22} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{20} + \frac{1}{30} = 0,083 \text{ См}; \quad G_{33} = \frac{1}{R_3} = \frac{1}{30} = 0,033 \text{ См}.$$

Т.к. $G_{12} = 0$, после подстановки числовых значений уравнения принимают вид:

$$0,045\varphi_1 - 0,025\varphi_3 = 1;$$

$$0,083\varphi_2 - 0,033\varphi_3 = 1.$$

Решая эти уравнения, находим: $\varphi_1 = 27,78 \text{ В}$, $\varphi_2 = 16 \text{ В}$. Токи $I_2 \div I_6$ находим по обобщенному закону Ома:

$$I_2 = \frac{\varphi_4 - \varphi_2 + E_2}{R_2} = \frac{-16 + 20}{20} = 0,2 \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{\varphi_2 - \varphi_3 - E_3}{R_3} = \frac{16 - 10 - 30}{30} = -0,8 \text{ А};$$

$$I_4 = \frac{\varphi_3 - \varphi_1}{R_4} = \frac{10 - 27,78}{40} = -0,445 \text{ А}; \quad I_5 = \frac{\varphi_1 - \varphi_4}{R_5} = \frac{27,78}{50} = 0,555 \text{ А}.$$

Ток I_1 находим по первому закону Кирхгофа:

$$I_1 = I_4 - I_3 = -0,445 + 0,8 = 0,355 \text{ А}.$$

1.12. Рассчитать все токи в схеме (рис. 1.12.1), если $E_1 = 160 \text{ В}$; $E_2 = 100 \text{ В}$; $R_1 = 100 \text{ Ом}$; $R_2 = 150 \text{ Ом}$; $R_3 = 100 \text{ Ом}$; $R_4 = 40 \text{ Ом}$.

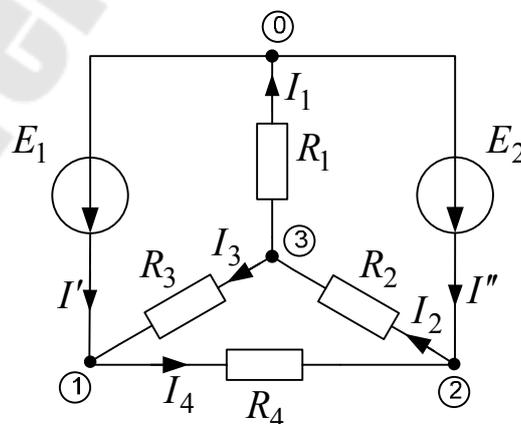


Рис. 1.12.1

Решение

В схеме две ветви с идеальными источниками ЭДС, имеющие общий узел 0. Заземлив его, можно сразу определить потенциалы двух узлов, ограничивающих эти ветви:

$$\varphi_0 = 0; \quad \varphi_1 = E_1 = 160 \text{ В}; \quad \varphi_2 = E_2 = 100 \text{ В}.$$

Неизвестным остается потенциал узла 3, для которого составляем уравнение

$$\varphi_3 G_{33} - \varphi_1 G_{31} - \varphi_2 G_{32} = 0,$$

где

$$G_{33} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{100} + \frac{1}{150} + \frac{1}{100} = 0,0267 \text{ См};$$

$$G_{31} = \frac{1}{R_3} = \frac{1}{100} = 0,01 \text{ См}; \quad G_{32} = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{150} = 0,0067 \text{ См}.$$

Подставив числовые значения и решая полученное уравнение, находим: $\varphi_3 = 85 \text{ В}$.

Токи $I_1 \div I_4$ определяем по закону Ома:

$$I_1 = \frac{\varphi_3}{R_1} = \frac{85}{100} = 0,85 \text{ А}; \quad I_2 = \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{R_2} = \frac{100 - 85}{150} = 0,1 \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{\varphi_3 - \varphi_1}{R_3} = \frac{85 - 160}{100} = -0,75 \text{ А}; \quad I_4 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_4} = \frac{160 - 100}{40} = 1,5 \text{ А}.$$

Токи I' и I'' находим по первому закону Кирхгофа:

$$I' = I_4 - I_3 = 1,5 - (-0,75) = 2,25 \text{ А};$$

$$I'' = I_2 - I_4 = 0,1 - 1,5 = -1,4 \text{ А}.$$

1.13. Найти все токи в схеме (рис. 1.13.1), если $E = 100 \text{ В}$; $E_2 = 10 \text{ В}$; $E_5 = 40 \text{ В}$; $R_1 = 20 \text{ Ом}$; $R_2 = 30 \text{ Ом}$; $R_3 = 20 \text{ Ом}$; $R_4 = 10 \text{ Ом}$.

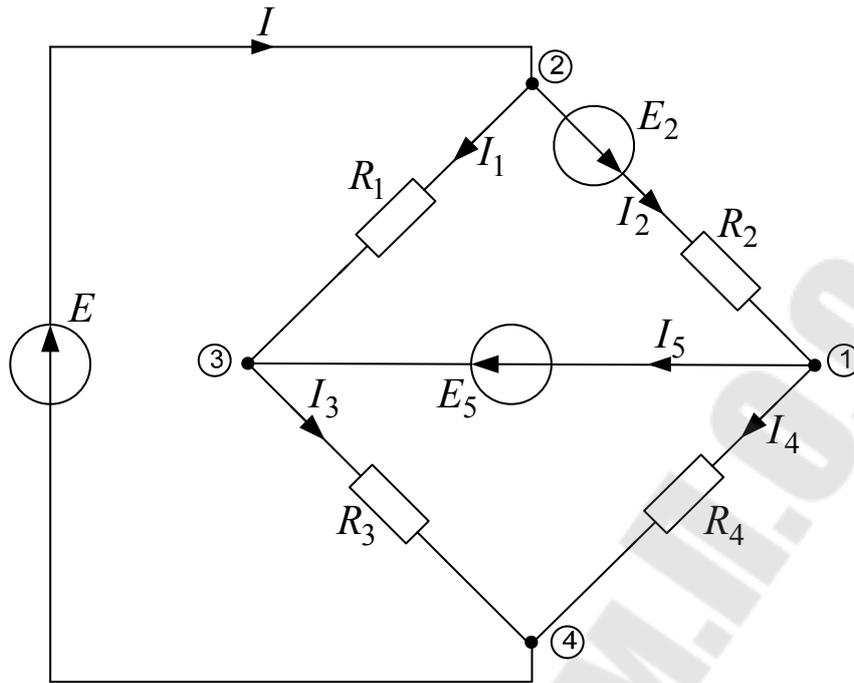


Рис. 1.13.1

Решение

В заданной схеме $R_{1-3} = R_{2-4} = 0$. Поэтому при составлении уравнений по методу узловых потенциалов для любого из узлов заданной схемы в эти уравнения войдут слагаемые, содержащие в качестве множителя бесконечно большую проводимость. Это затруднение можно обойти при помощи эквивалентного преобразования цепи.

Введение во все ветви, примыкающие к какому-либо узлу, одинаковых ЭДС, направленных к узлу (или от него), не влияет на распределение токов в схеме, т. к. в уравнениях второго закона Кирхгофа для любого контура эти ЭДС взаимно компенсируются. Воспользовавшись этим, введем во все ветви, примыкающие к узлу 1, ЭДС E' , направленные к этому узлу и равные E_5 (рис. 1.13.2). Тогда окажется, что в ветви 1–3 действуют две одинаковые и противоположно направленные ЭДС. Их сумма равна нулю, поэтому точки 1 и 3 равнопотенциальны и их можно объединить (рис. 1.13.3). Полученная эквивалентная схема имеет три узла и одну ветвь, содержащую идеальный источник ЭДС E . Поэтому по методу узловых потенциалов надо составить всего одно уравнение. Составим его для узла 1.

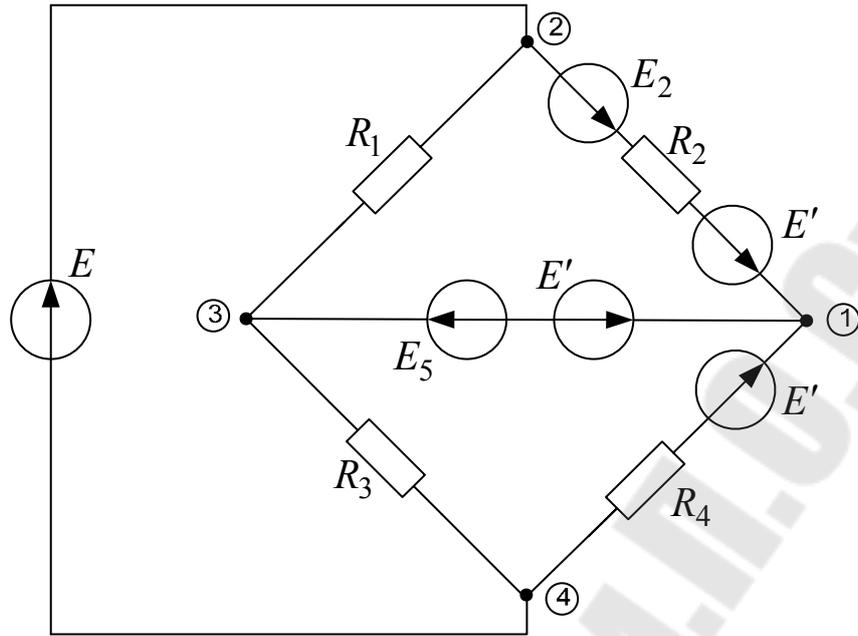


Рис. 1.13.2

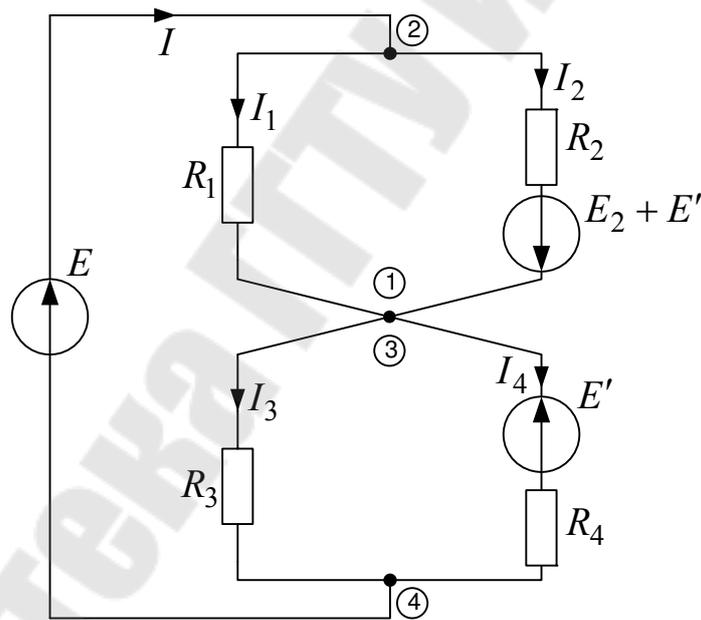


Рис. 1.13.3

Примем $\varphi_4 = 0$ В. Тогда $\varphi_2 = E = 100$ В, а уравнение для узла 1 имеет такой вид:

$$\varphi_1 G_{11} - \varphi_2 G_{12} - \varphi_4 G_{14} = (E_2 + E') \frac{1}{R_2} + E' \frac{1}{R_4}.$$

Здесь

$$G_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} = \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{20} + \frac{1}{10} = 0,233 \text{ См};$$

$$G_{12} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{20} + \frac{1}{30} = 0,083 \text{ См};$$

$$G_{14} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} = \frac{1}{20} + \frac{1}{10} = 0,15 \text{ См.}$$

После подстановки числовых значений уравнение для потенциала φ_1 принимает вид:

$$0,233\varphi_1 - 0,083\varphi_2 - 0,15\varphi_4 = (10 + 40) \frac{1}{30} + 40 \frac{1}{10}.$$

Решая это уравнение, получим: $\varphi_1 = 60 \text{ В}$.

Токи в ветвях исходной схемы найдем по обобщенному закону Ома:

$$I_1 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{R_1} = \frac{100 - 60}{20} = 2 \text{ А};$$

$$I_2 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1 + E_2 + E'}{R_2} = \frac{100 - 60 + 10 + 40}{30} = 3 \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{\varphi_3 - \varphi_4}{R_3} = \frac{60 - 0}{20} = 3 \text{ А}; \quad I_4 = \frac{\varphi_3 - \varphi_4 - E'}{R_4} = \frac{60 - 0 - 40}{10} = 2 \text{ А}.$$

Токи I и I_5 определяем по первому закону Кирхгофа:

$$I = I_1 + I_2 = 2 + 3 = 5 \text{ А}; \quad I_5 = I_2 - I_4 = 3 - 2 = 1 \text{ А}.$$

1.14. Определить токи в ветвях схемы рис. 1.14.1 методом наложения, если $E = 25 \text{ В}$; $J = 12,5 \text{ А}$; $R_1 = 1 \text{ Ом}$; $R_2 = 20 \text{ Ом}$; $R_3 = 5 \text{ Ом}$.

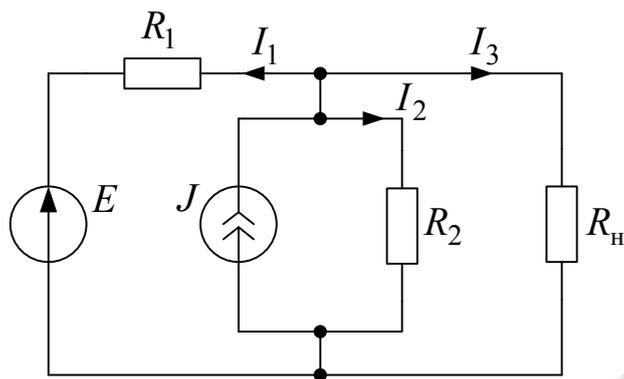


Рис. 1.14.1

Решение

При расчете схемы методом наложения рассматриваем действие каждого источника питания отдельно. Эквивалентные схемы для определения частичных токов приведены на рис. 1.14.2 и 1.14.3.

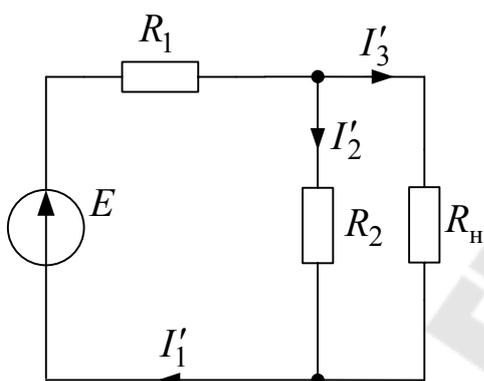


Рис. 1.14.2

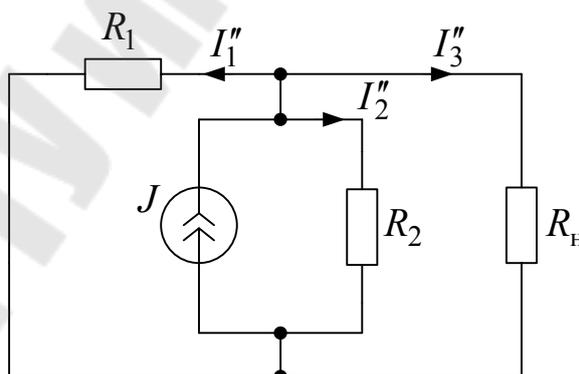


Рис. 1.14.3

В схеме рис. 1.14.2:

$$I'_1 = \frac{E}{R_1 + \frac{R_2 \cdot R_н}{R_2 + R_н}} = \frac{25}{100 + \frac{20 \cdot 5}{20 + 5}} = 5 \text{ A};$$

$$I'_2 = I'_1 \frac{R_н}{R_2 + R_н} = 5 \frac{5}{20 + 5} = 1 \text{ A}; \quad I'_3 = I'_1 \frac{R_2}{R_2 + R_н} = 5 \frac{20}{20 + 5} = 4 \text{ A}.$$

В схеме рис. 1.14.3:

$$I_1'' = J \frac{\frac{R_2 \cdot R_1}{R_2 + R_1}}{R_1 + \frac{R_2 \cdot R_1}{R_2 + R_1}} = 12,5 \frac{20 \cdot 5}{1 + \frac{20 \cdot 5}{20 + 5}} = 10 \text{ A};$$

$$I_2'' = J \frac{\frac{R_1 \cdot R_1}{R_1 + R_1}}{R_2 + \frac{R_1 \cdot R_1}{R_1 + R_1}} = 12,5 \frac{1 \cdot 5}{20 + \frac{1 \cdot 5}{1 + 5}} = 0,5 \text{ A};$$

$$I_3'' = J - I_1'' - I_2'' = 12,5 - 10 - 0,5 = 2 \text{ A}.$$

В итоге имеем:

$$I_1 = I_1'' - I_1' = 10 - 5 = 5 \text{ A}; \quad I_2 = I_2'' + I_2' = 0,5 + 1 = 1,5 \text{ A};$$

$$I_3 = I_3'' + I_3' = 2 + 4 = 6 \text{ A}.$$

1.15. Найти ток в ветви R_5 (рис. 1.15.1), если $E_1 = E_2 = 20 \text{ В}$; $R_1 = R_2 = 40 \text{ Ом}$; $R_3 = 10 \text{ Ом}$; $R_4 = 160 \text{ Ом}$; $R_5 = 20 \text{ Ом}$.

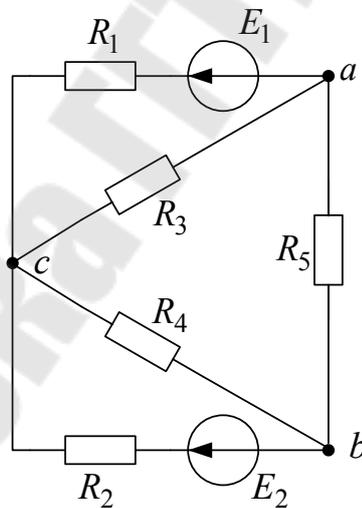


Рис. 1.15.1

Решение

Поскольку по условию требуется определить ток только в одной ветви, целесообразно применить метод эквивалентного источника. В данном случае предпочтительно использовать метод эквивалентного источника ЭДС.

Чтобы определить параметры эквивалентного источника ЭДС, в заданной схеме отключим ветвь с R_5 (рис. 1.15.2). После этого найдем напряжение $U_{ab_{xx}}$ холостого хода между точками a и b в схеме рис. 1.15.2, а также определим внутреннее сопротивление $R_{\text{ЭГ}}$ эквивалентного источника ЭДС, равное сопротивлению $R_{ab_{xx}}$ холостого хода между узлами a и b при закороченных ЭДС E_1 и E_2 (рис. 1.15.3):

$$E_{\text{ЭГ}} = U_{ab_{xx}} = -I'R_3 + I''R_4 = -\frac{E_1}{R_1 + R_3} R_3 + \frac{E_2}{R_2 + R_4} R_4 =$$

$$= -\frac{20}{40 + 10} \cdot 10 + \frac{20}{40 + 160} \cdot 160 = 12 \text{ В};$$

$$R_{\text{ЭГ}} = R_{ab_{xx}} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} = \frac{40 \cdot 10}{40 + 10} + \frac{40 \cdot 160}{40 + 160} = 40 \text{ Ом.}$$

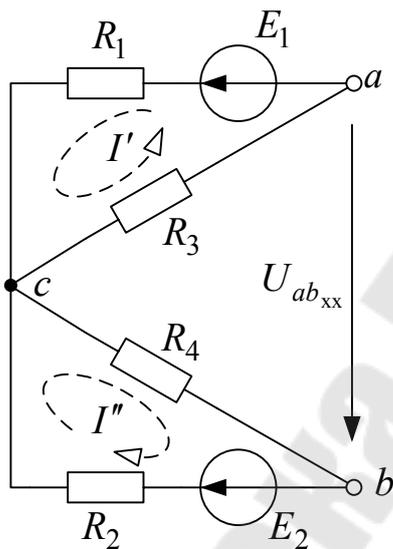


Рис. 1.15.2

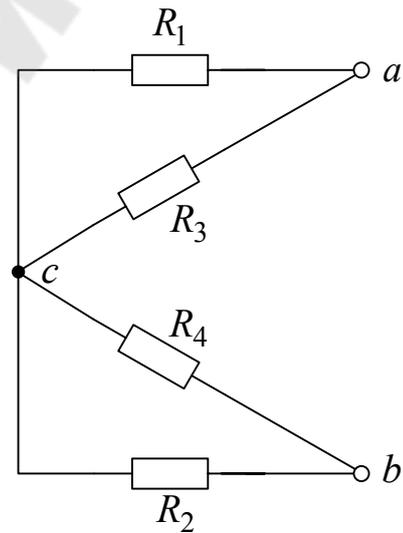


Рис. 1.15.3

Искомый ток:

$$I_5 = \frac{U_{ab_{xx}}}{R_{ab_{xx}} + R_5} = \frac{12}{40 + 20} = 0,2 \text{ А.}$$

1.16. В схеме рис. 1.16.1 заданы $E_1 = 225 \text{ В}$; $E_4 = 180 \text{ В}$; $R_1 = 45 \text{ Ом}$; $R_2 = 30 \text{ Ом}$; $R_3 = 15 \text{ Ом}$; $R_4 = 36 \text{ Ом}$; $R_5 = 18 \text{ Ом}$; $R_6 = 3 \text{ Ом}$; $R_7 = 5 \text{ Ом}$. Рассчитать ток I_6 .

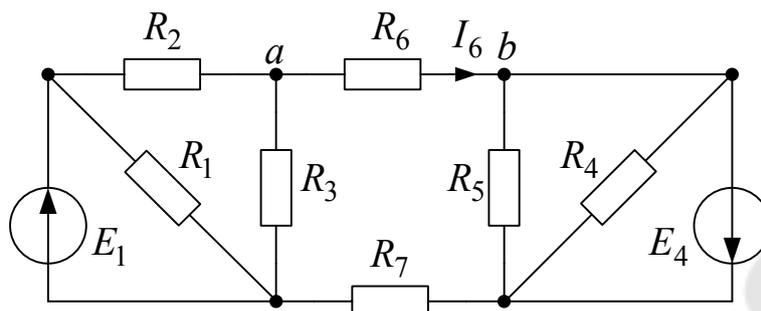


Рис. 1.16.1

Решение

В соответствии с методом эквивалентного источника ЭДС отключаем от исходной цепи ветвь с резистором R_6 и получаем схему, показанную на рис. 1.16.2.

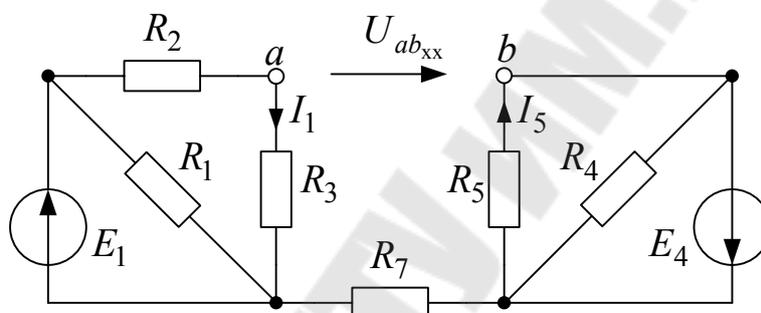


Рис. 1.16.2

Напряжение холостого хода:

$$U_{ab_{xx}} = R_3 I_1 + R_5 I_5.$$

Находим токи I_1 и I_5 в схеме рис. 1.16.2:

$$I_1 = \frac{E_1}{R_2 + R_3} = \frac{225}{30 + 15} = 5 \text{ А}; \quad I_5 = \frac{E_4}{R_5} = \frac{180}{18} = 10 \text{ А}.$$

Напряжение холостого хода:

$$U_{ab_{xx}} = 15 \cdot 5 + 18 \cdot 10 = 255 \text{ В}.$$

Для расчета внутреннего сопротивления эквивалентного генератора заменяем идеальные источники ЭДС в схеме рис. 1.16.1 короткозамкнутыми участками (рис. 1.16.3).

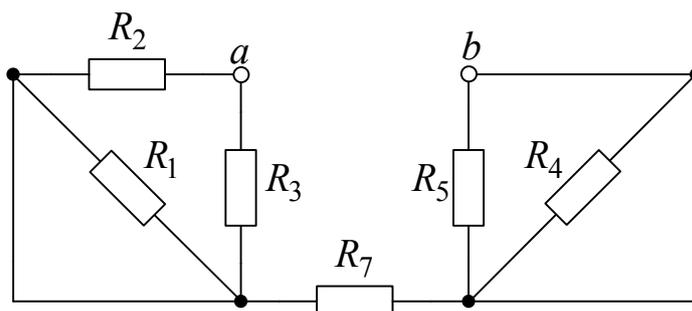


Рис. 1.16.3

Входное сопротивление такой схемы (внутреннее сопротивление эквивалентного генератора) равно

$$R_{ab_{xx}} = R_7 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = 5 + \frac{30 \cdot 15}{30 + 15} = 15 \text{ Ом.}$$

Искомый ток I_6 равен

$$I_6 = \frac{U_{ab_{xx}}}{R_{ab_{xx}} + R_6} = \frac{255}{15 + 5} = 14,2 \text{ А.}$$

1.17. В схеме рис. 1.17.1 $J = 10 \text{ А}$; $E_6 = 40 \text{ В}$; $R_1 = 5 \text{ Ом}$; $R_2 = 3 \text{ Ом}$; $R_4 = 2 \text{ Ом}$; $R_5 = 20 \text{ Ом}$; $R_6 = 4 \text{ Ом}$. Найти величину сопротивления R_3 , при которой в нем выделяется максимальная мощность.

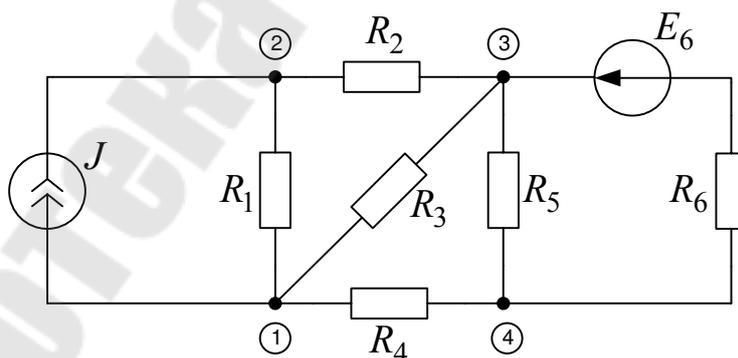


Рис. 1.17.1

Решение

Будем рассматривать сопротивление R_3 как нагрузку остальной части схемы – эквивалентного генератора, схема которого показана на рис. 1.17.2.

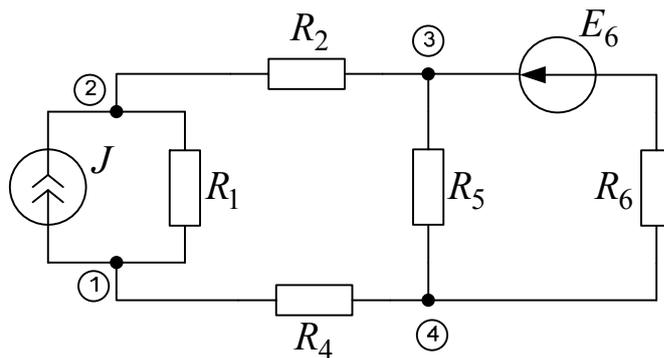


Рис. 1.17.2

Максимальная мощность в нагрузке выделяется при согласованном режиме. В нашем случае такой режим соответствует равенству $R_3 = R_{13_{xx}}$, где $R_{13_{xx}}$ – внутреннее сопротивление эквивалентного генератора. Для расчета этого сопротивления в схеме рис. 1.17.2 изымаем источник тока, а источник ЭДС заменяем короткозамкнутым участком.

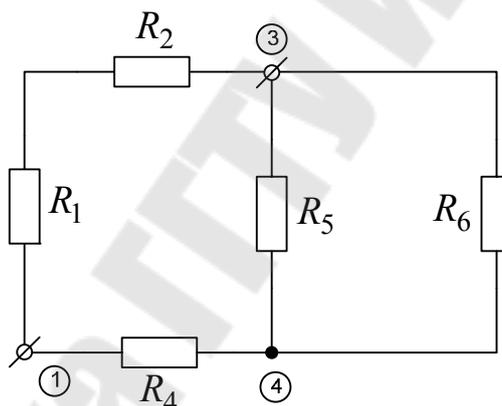


Рис. 1.17.3

После такого преобразования получаем схему, показанную на рис. 1.17.3. Её входное сопротивление относительно зажимов 1 и 3 равно:

$$R_{13_{xx}} = \frac{\left(\frac{R_5 \cdot R_6}{R_5 + R_6} + R_4 \right) \cdot (R_1 + R_2)}{\frac{R_5 \cdot R_6}{R_5 + R_6} + R_4 + R_1 + R_2} = \frac{\left(\frac{20 \cdot 4}{20 + 4} + 2 \right) \cdot (5 + 3)}{\frac{20 \cdot 4}{20 + 4} + 2 + 5 + 3} = 3,2 \text{ Ом.}$$

Для определения ЭДС эквивалентного генератора преобразуем схему рис. 1.17.2 к виду, показанному на рис. 1.17.4. В этой схеме $E_1 = JR_1 = 10 \cdot 5 = 50 \text{ В.}$

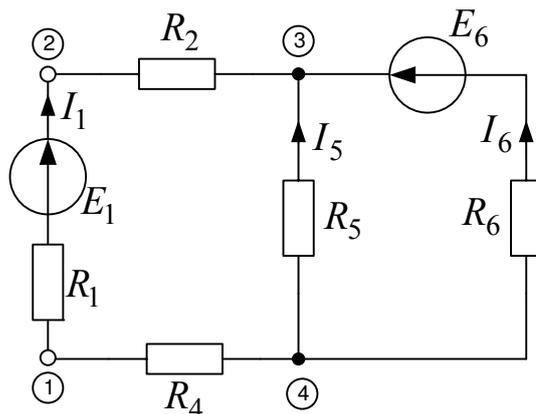


Рис. 1.17.4

Имеем:

$$U_{xx} = U_{31} = -I_1(R_1 + R_2) + E_1.$$

Напряжение U_{34} определим, используя метод узловых потенциалов:

$$U_{34} = \frac{\frac{E_1}{R_1 + R_2 + R_4} + \frac{E_6}{R_6}}{\frac{1}{R_1 + R_2 + R_4} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6}} = \frac{\frac{50}{5 + 3 + 2} + \frac{40}{4}}{\frac{1}{5 + 3 + 2} + \frac{1}{20} + \frac{1}{4}} = 37,5 \text{ В.}$$

Тогда

$$I_1 = \frac{E_1 - U_{34}}{R_1 + R_2 + R_4} = \frac{50 - 37,5}{5 + 3 + 2} = 1,25 \text{ А;}$$

$$U_{xx} = -1,25 \cdot (5 + 3) + 50 = 40 \text{ В.}$$

В итоге

$$P_{3\max} = \frac{U_{xx}^2}{4 \cdot R_{13_{xx}}} = \frac{40^2}{4 \cdot 3,2} = 125 \text{ Вт.}$$

ГЛАВА 2 ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

Вводные положения

Мгновенное значение величины a , синусоидально изменяющейся с течением времени:

$$a = A_m \sin(\omega t + \psi),$$

где A_m – амплитуда (максимальное значение); $(\omega t + \psi)$ – фаза (фазовый угол); ψ – начальная фаза; ω – угловая частота.

Период T , угловая частота ω и циклическая частота f связаны соотношениями

$$\omega = 2\pi f = 2\pi/T; \quad f = 1/T.$$

Проекция вращающегося против часовой стрелки с постоянной угловой скоростью ω вектора \vec{A}_m на вертикальную ось изменяется во времени по синусоидальному закону $a = A_m \sin(\omega t + \psi)$. Поэтому любая синусоидальная функция (ток, напряжение, ЭДС) может быть изображена вектором. Если оси координат векторной диаграммы считать осями комплексной плоскости, то вектор \vec{A}_m можно рассматривать как комплексную амплитуду \underline{A}_m .

Действующие значения синусоидально изменяющихся ЭДС, напряжения и тока:

$$E = E_m / \sqrt{2} = 0,707 E_m; \quad U = U_m / \sqrt{2}; \quad I = I_m / \sqrt{2}.$$

Комплексное действующее значение связано с комплексной амплитудой равенством $\underline{A} = \underline{A}_m / \sqrt{2}$.

Используются следующие формы записи комплексного числа:

алгебраическая $\underline{A}_m = A'_m + jA''_m;$

показательная $\underline{A}_m = A_m e^{j\psi};$

тригонометрическая $\underline{A}_m = A_m \cos \psi + jA_m \sin \psi.$

Здесь $A'_m = A_m \cos \psi = \operatorname{Re} \underline{A}_m$ – действительная (вещественная) часть комплексного числа \underline{A}_m ; $A''_m = A_m \sin \psi = \operatorname{Im} \underline{A}_m$ – его мнимая часть; A_m – его модуль; ψ – аргумент комплексного числа;

$$j = \sqrt{-1} = e^{j\frac{\pi}{2}}$$

– мнимая единица, или оператор поворота на угол $\pi/2 = 90^\circ$.

Умножение на j сводится к повороту вектора на прямой угол против часовой стрелки, а умножение на число

$$-j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

сводится к повороту вектора по часовой стрелке на прямой угол.

Алгебраическая форма удобна при сложении и вычитании комплексных чисел, а показательная – при умножении, делении, возведении в степень.

Переход от алгебраической формы к показательной производится по формулам:

$$A_m = \sqrt{(A'_m)^2 + (A''_m)^2}; \quad \psi = \arctg(A''_m / A'_m).$$

Для обратного перехода используют формулы:

$$A'_m = A_m \cos \psi; \quad A''_m = A_m \sin \psi.$$

Обозначения и правила комплексной арифметики:

$$j = \sqrt{-1} = e^{j90^\circ} = e^{j\pi/2}; \quad 1/j = -j = e^{-j90^\circ} = e^{-j\pi/2}; \quad -1 = e^{\pm j180^\circ} = e^{\pm j\pi};$$

$$\underline{A}_1 \underline{A}_2 = A_1 A_2 e^{j(\psi_1 + \psi_2)}; \quad \frac{\underline{A}_1}{\underline{A}_2} = \frac{A_1 e^{j\psi_1}}{A_2 e^{j\psi_2}} = \frac{A_1}{A_2} e^{j(\psi_1 - \psi_2)}.$$

Комплексное число $A^* = A' - jA'' = A e^{-j\psi}$ называется комплексно-сопряженным числу $\underline{A} = A' + jA'' = A e^{j\psi}$. Произведение комплексно-сопряженных чисел равно квадрату их модуля: $\underline{A} A^* = A^2$.

Пассивный элемент электрической схемы определяется полным комплексным сопротивлением $\underline{Z} = Z e^{j\varphi}$ – комплексным числом, равным отношению комплексного напряжения на зажимах данного элемента к комплексному току этого элемента:

$$\underline{Z} = \underline{U} / \underline{I} = R + jX = Z e^{j\varphi},$$

где \underline{U} и \underline{I} – комплексные действующие значения напряжения и тока; R – вещественная часть комплексного сопротивления \underline{Z} , равная резистивному сопротивлению схемы; X – мнимая часть \underline{Z} , равная реактивному сопротивлению схемы; Z – модуль полного комплексного

сопротивления схемы; $\pm \varphi$ – аргумент \underline{Z} , равный углу сдвига фаз между напряжением и током.

Отношение комплексного тока элемента к комплексному напряжению на его зажимах называется полной комплексной проводимостью:

$$\underline{Y} = \underline{I}/\underline{U} = G \mp jB = Ye^{\mp j\varphi},$$

где G и B – вещественная и мнимая части \underline{Y} , равные активной и реактивной проводимостям. Комплексная проводимость обратна комплексному сопротивлению: $\underline{Y} = 1/\underline{Z}$.

Комплексная мощность:

$$\tilde{S} = \underline{U}\underline{I}^* = UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi = P + jQ = Se^{\pm j\varphi},$$

где

$S = UI$; $P = \text{Re}[\tilde{S}] = \text{Re}[\underline{U}\underline{I}^*] = UI \cos \varphi$; $Q = \text{Im}[\tilde{S}] = \text{Im}[\underline{U}\underline{I}^*] = UI \sin \varphi$ – полная, активная и реактивная мощности. Баланс мощностей:

$$\sum_{k=1}^n (\underline{E}_k \underline{I}_k^* + \underline{U}_{J_k} \underline{J}_k^*) = \sum_{k=1}^n [I_k^2 R_k + jI_k^2 (X_{Lk} - X_{Ck})].$$

Здесь \underline{U}_J – комплекс действующего значения напряжения на источнике тока; $\sum_{k=1}^n (\underline{E}_k \underline{I}_k^*)$ – алгебраическая сумма, в которой положительны слагаемые, для которых направления действия ЭДС \underline{E}_k и соответствующего тока \underline{I}_k совпадают (в противном случае слагаемое отрицательно); $\sum_{k=1}^n (\underline{U}_k \underline{J}_k^*)$ – алгебраическая сумма, в которой положительны слагаемые, для которых напряжение \underline{U}_k на источнике тока и его ток \underline{J}_k противоположны (в противном случае слагаемое отрицательно); $\sum_{k=1}^n (I_k^2 R_k)$ – арифметическая сумма, в которой учитываются как внешние сопротивления, так и сопротивления самих источников энергии.

Переход от последовательной схемы (рис. 2.1, а) к эквивалентной параллельной схеме (рис. 2.1, б) осуществляется по формулам:

$$\begin{cases} G = \frac{R}{R^2 + X^2} = \frac{R}{Z^2}, & B = \frac{X}{R^2 + X^2} = \frac{X}{Z^2}; \\ Y = \sqrt{G^2 + B^2} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + X^2}} = \frac{1}{Z}. \end{cases}$$

При переходе от параллельной схемы к эквивалентной последовательной ее параметры определяют по формулам:

$$\begin{cases} R = \frac{G}{G^2 + B^2} = \frac{G}{Y^2}; & X = \frac{B}{G^2 + B^2} = \frac{B}{Y^2}; \\ Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \frac{1}{\sqrt{G^2 + B^2}} = \frac{1}{Y}. \end{cases}$$

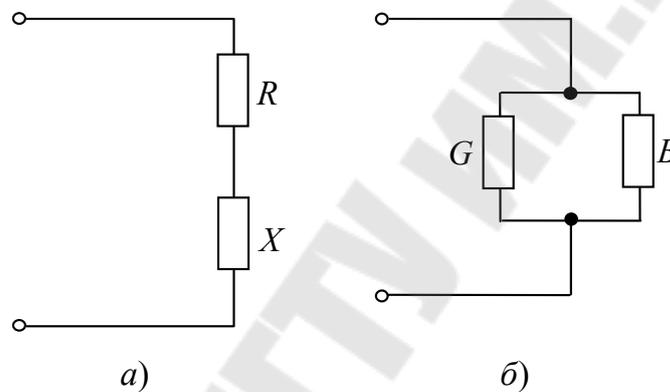


Рис. 2.1

Примеры решения задач

2.1. На рис. 2.1.1 показаны осциллограммы тока и напряжения элемента AB . В схеме рис. 2.1.2 по заданным осциллограммам необходимо: 1) записать мгновенные значения напряжения и тока, определить разность фаз между ними; 2) записать комплексы амплитуд и действующих значений; 3) определить полное, активное и реактивное сопротивление двухполюсника.

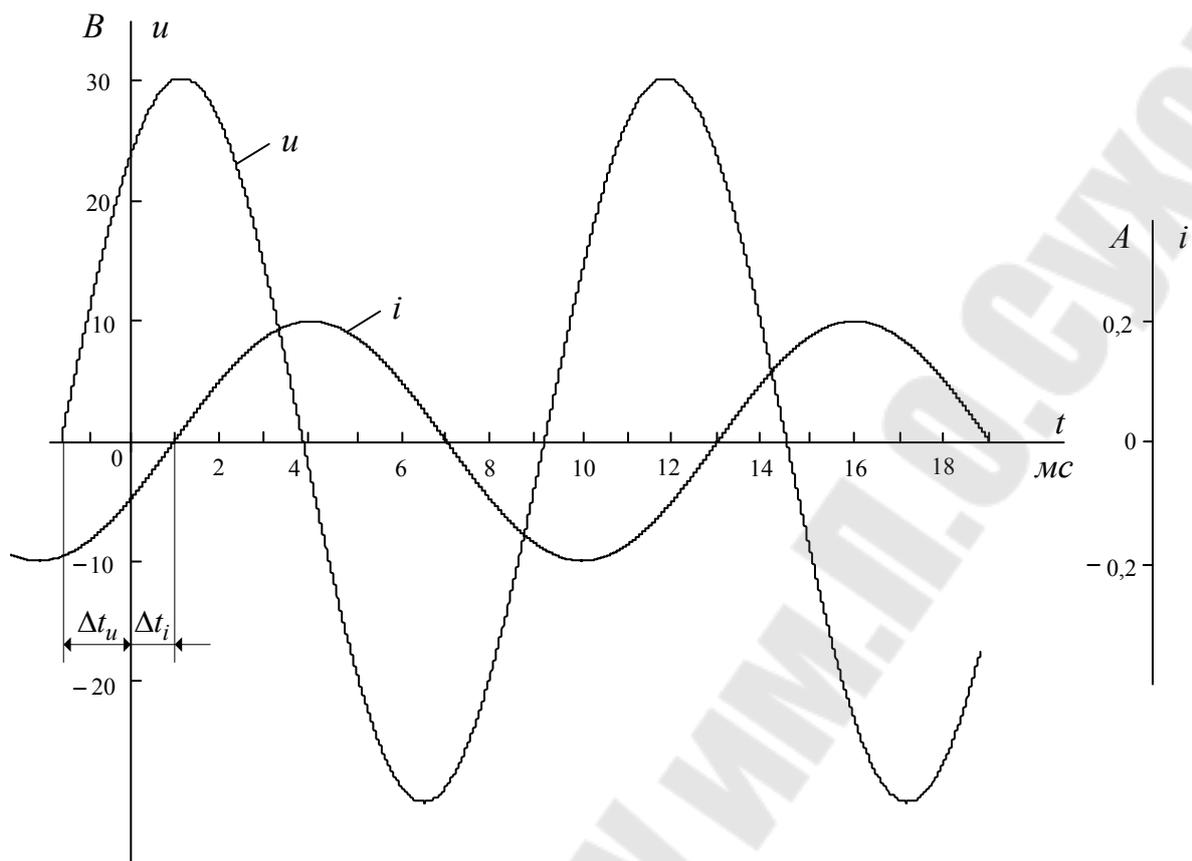


Рис. 2.1.1

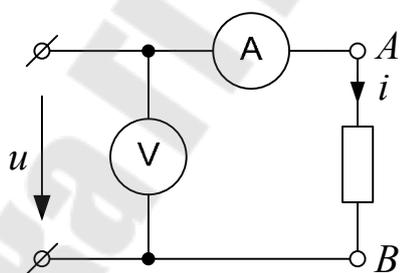


Рис. 2.1.2

Решение

Амплитуда напряжения:

$$U_m = 30 \text{ В.}$$

Амплитуда тока:

$$I_m = 0,2 \text{ А.}$$

Период колебаний:

$$T = 12 \text{ мс} = 12 \cdot 10^{-3} \text{ с.}$$

Циклическая частота колебаний:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{12 \cdot 10^{-3}} = 83,33 \text{ Гц.}$$

Круговая частота колебаний:

$$\omega = 2\pi f = 2 \cdot 3,14 \cdot 83,33 = 523,6 \text{ рад/с.}$$

Начальная фаза напряжения:

$$\psi_u = \frac{\Delta t_u}{T} \cdot 360^\circ = \frac{1,5}{12} \cdot 360^\circ = 45^\circ.$$

Начальная фаза тока:

$$\psi_i = \frac{-\Delta t_i}{T} \cdot 360^\circ = \frac{-1}{12} \cdot 360^\circ = -30^\circ.$$

Сдвиг фаз между напряжением и током:

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = 75^\circ.$$

Мгновенные значения напряжения и тока:

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u) = 30 \sin(523,6t + 45^\circ), \text{ В;}$$

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i) = 0,2 \sin(523,6t - 30^\circ), \text{ А.}$$

Комплексы амплитуд:

$$\underline{U}_m = U_m e^{j\psi_u} = 30e^{j45^\circ} \text{ В;}$$

$$\underline{I}_m = I_m e^{j\psi_i} = 0,2e^{-j30^\circ} \text{ А.}$$

Комплексы действующих значений:

$$\underline{U} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 21,2e^{j45^\circ} \text{ В; } \underline{I} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,141e^{-j30^\circ} \text{ А.}$$

Комплексное сопротивление двухполюсника находим по закону Ома:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m} = \frac{U}{I} = \frac{30}{0,2} e^{j75^\circ} = 150e^{j75^\circ} = (39 + j145) \text{ Ом.}$$

В общем случае:

$$\underline{Z} = R + jX = Z \cdot e^{j\varphi}.$$

Отсюда активное сопротивление элемента:

$$R = \operatorname{Re} Z = Z \cos \varphi = 39 \text{ Ом.}$$

Реактивное сопротивление элемента:

$$X = \operatorname{Im} Z = Z \sin \varphi = 145 \text{ Ом.}$$

Поскольку $X > 0$, заданный элемент является активно-индуктивным. Его схема замещения показана на рис. 2.1.3.

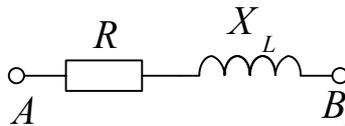


Рис. 2.1.3

2.2. Для схемы, показанной на рис. 2.1.1, проведены два опыта. При $U_V = U_1 = 100 \text{ В}$ ($f_1 = 0 \text{ Гц}$) показание амперметра $I_A = I_1 = 1 \text{ А}$. При $U_V = U_2 = 100 \text{ В}$ ($f_2 = 500 \text{ Гц}$) показания амперметра $I_A = I_2 = 0,5 \text{ А}$. Определить показание амперметра при $U_V = U_3 = 100 \text{ В}$, $f_3 = 1 \text{ кГц}$.

Решение

Из решения задачи 2.1 известно, что заданный элемент AB является активно-индуктивным (рис. 2.1.3). В первом опыте через него пропускали постоянный ток ($f = 0$). Поэтому показание амперметра определялось активным сопротивлением участка AB :

$$R = \frac{U_1}{I_1} = 100 \text{ Ом.}$$

Во втором опыте на участке AB протекал переменный ток ($f > 0$), величина которого определялась полным сопротивлением двухполюсника:

$$Z = \frac{U_2}{I_2} = 200 \text{ Ом.}$$

Индуктивное сопротивление участка AB :

$$X_L = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{200^2 - 100^2} = 173,2 \text{ Ом.}$$

Индуктивность эквивалентной катушки:

$$L = \frac{X_L}{2\pi f_2} = \frac{173,2}{2\pi \cdot 500} = 0,055 \text{ Гн.}$$

При частоте $f_3 = 1000$ Гц индуктивное и полное сопротивления участка AB соответственно равны:

$$X_{L_3} = 2\pi f_3 L = 2 \cdot 3,14 \cdot 1000 \cdot 0,055 = 346,4 \text{ Ом;}$$

$$Z_3 = \sqrt{R^2 + X_{L_3}^2} = \sqrt{100^2 + 346,4^2} = 360,5 \text{ Ом.}$$

В этом случае при таком же напряжении $U = U_3 = 100$ В на участке AB будет протекать ток

$$I_A = I_3 = \frac{U_3}{Z_3} = \frac{100}{360,5} = 0,28 \text{ А.}$$

2.3. Для определения параметров эквивалентной схемы пассивного двухполюсника Π (рис. 2.3.1) измерены напряжение $U_1 = 26$ В, ток $I_1 = 4$ А и мощность $P_1 = 40$ Вт. Для определения характера реактивного сопротивления этого двухполюсника последовательно с ним включили конденсатор (рис. 2.3.2). В этом случае при том же приложенном напряжении приборы показали $I_2 = 5,53$ А, $P_2 = 76,5$ Вт. Частота переменного тока $f = 50$ Гц. Определить параметры эквивалентной схемы двухполюсника.

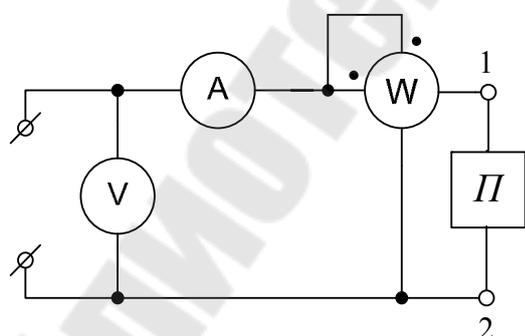


Рис. 2.3.1

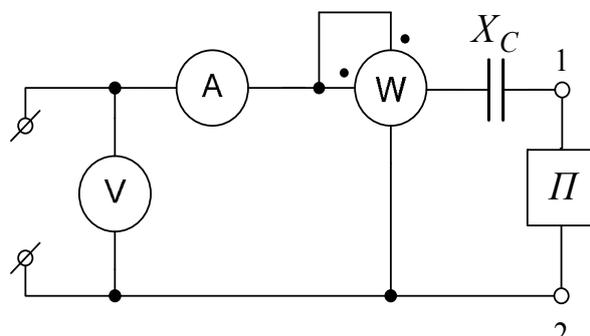


Рис. 2.3.2

Решение

Параметры эквивалентной схемы двухполюсника по данным первого опыта:

$$R_{\text{эк}} = \frac{P_1}{I_1^2} = \frac{40}{4^2} = 2,5 \text{ Ом}; \quad Z_{\text{эк}} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{26}{4} = 6,5 \text{ Ом};$$

$$X_{\text{эк}} = \sqrt{Z_{\text{эк}}^2 - R_{\text{эк}}^2} = \sqrt{6,5^2 - 2,5^2} = 6 \text{ Ом}.$$

Из данных второго эксперимента находим:

$$Z = \frac{U_1}{I_2} = \frac{26}{5,53} = 4,7 \text{ Ом};$$

$$X = \sqrt{Z^2 - R_{\text{эк}}^2} = \sqrt{4,7^2 - 2,5^2} = 4 \text{ Ом}.$$

Обработка данных второго эксперимента показывает, что емкостное сопротивление, соединенное последовательно с изучаемым двухполюсником, уменьшает общее реактивное сопротивление схемы

$$X = \pm X_{\text{эк}} - X_C.$$

Это возможно лишь в том случае, если собственное реактивное сопротивление двухполюсника имеет индуктивный характер, т. е.

$$X_{\text{эк}} = +X_{\text{эк}}.$$

Соответственно, эквивалентная индуктивность двухполюсника равна

$$L_{\text{эк}} = \frac{X_{\text{эк}}}{\omega} = \frac{6}{314} = 0,0191 \text{ Гн} = 19,1 \text{ мГн}.$$

Неизвестное значение дополнительно введенного емкостного сопротивления X_C можно определить следующим путем. В ходе решения установлено:

$$X_{\text{эк}} = +6 \text{ Ом}; \quad X = +4 \text{ Ом} \quad \text{либо} \quad X = -4 \text{ Ом}.$$

Из данных второго эксперимента следует, что

$$X = X_{\text{эк}} - X_C.$$

Отсюда получаем:

$$X_C = 2 \text{ Ом} \quad \text{либо} \quad X_C = 10 \text{ Ом}.$$

2.4. Приборы, подключенные к пассивному двухполюснику AB (рис. 2.4.1), при разомкнутом ключе K показали $U_1 = 100 \text{ В}$, $I_1 = 2 \text{ А}$,

$P_1 = 160$ Вт. Для определения характера реактивного сопротивления двухполюсника параллельно ему подключили конденсатор (ключ K замкнут), емкостное сопротивление которого $X_C = 100$ Ом, при этом приборы показали: $U_2 = 100$ В, $I_2 = 2,73$ А, $P_2 = 160$ Вт. Определить эквивалентные параметры двухполюсника.

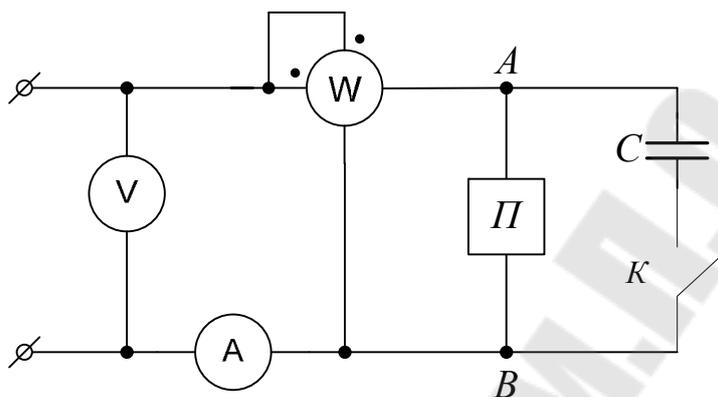


Рис. 2.4.1

Решение

В первом случае (ключ разомкнут) для последовательной схемы замещения двухполюсника (рис 2.4.2) имеем:

$$Z = \frac{U_1}{I_1} = \frac{100}{2} = 50 \text{ Ом};$$

$$R = \frac{P_1}{I_1^2} = \frac{160}{2^2} = 40 \text{ Ом}; \quad X = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{50^2 - 40^2} = 30 \text{ Ом}.$$

Эквивалентная параллельная схема замещения того же двухполюсника имеет параметры

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2} = \frac{40}{40^2 + 30^2} = 0,016 \text{ См};$$

$$B = \frac{X}{R^2 + X^2} = \frac{30}{40^2 + 30^2} = 0,012 \text{ См}.$$

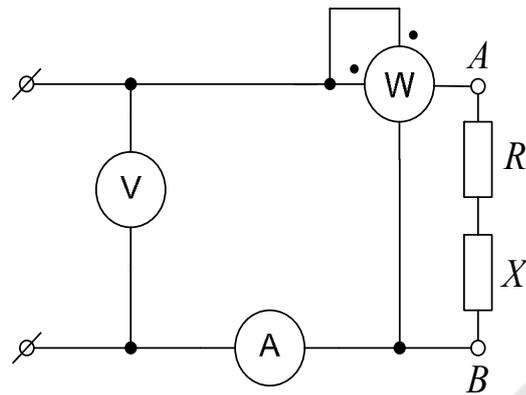


Рис. 2.4.2

Обработку данных второго измерения произведем, используя параллельную схему замещения двухполюсника. Совокупность трех параллельных ветвей в эквивалентной схеме второго опыта (рис. 2.4.3) можно рассматривать как двухполюсник, имеющий следующие параметры последовательной схемы замещения:

$$Z_{\text{эк}} = \frac{U_2}{I_2} = \frac{100}{2,73} = 36,7 \text{ Ом};$$

$$R_{\text{эк}} = \frac{P_2}{I_2^2} = \frac{160}{2,73^2} = 21,6 \text{ Ом};$$

$$X_{\text{эк}} = \sqrt{Z_{\text{эк}}^2 - R_{\text{эк}}^2} = \sqrt{36,7^2 - 21,6^2} = 29,7 \text{ Ом}.$$

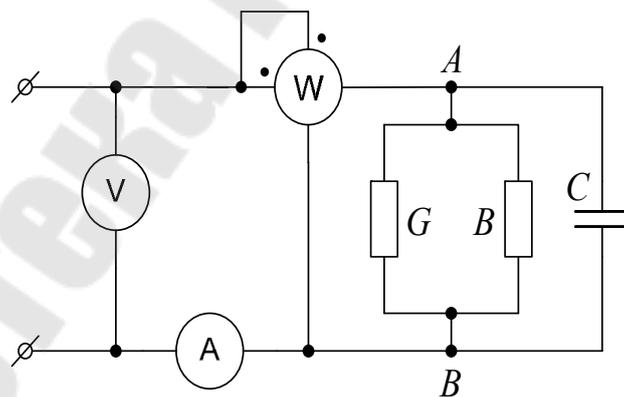


Рис. 2.4.3

Параллельная схема замещения такого двухполюсника имеет параметры:

$$G_{\text{эк}} = \frac{R_{\text{эк}}}{Z_{\text{эк}}^2} = \frac{21,6}{21,6^2 + 29,7^2} = 0,016 \text{ См};$$

$$B_{\text{эк}} = \frac{X_{\text{эк}}}{Z_{\text{эк}}^2} = \frac{29,7}{21,6^2 + 29,7^2} = 0,22 \text{ См}.$$

Как видим,

$$G_{\text{эк}} = G; \quad B_{\text{эк}} > B,$$

причем

$$B_{\text{эк}} = B + B_C,$$

где $B_C = \omega C = 0,010 \text{ См}$ – проводимость конденсатора. Таким образом, при неизменном напряжении ток в схеме после параллельного подключения конденсатора увеличился, т. е. увеличилась общая проводимость схемы:

$$\underline{Y} = G - j(\pm B - B_C).$$

Это возможно лишь в том случае, когда реактивная проводимость B_C подключаемой ветви имеет тот же характер, что и искомая реактивная проводимость B (при условии, что $B_C < 2B$), т.е. собственная реактивная проводимость двухполюсника AB имеет емкостной характер.

2.5. В цепи (рис. 2.5.1) $U = 200 \text{ В}$; $R_1 = 3 \text{ Ом}$; $R_2 = 8 \text{ Ом}$; $X_1 = 4 \text{ Ом}$; $X_2 = 6 \text{ Ом}$. Рассчитать токи в цепи и напряжения на ее участках.

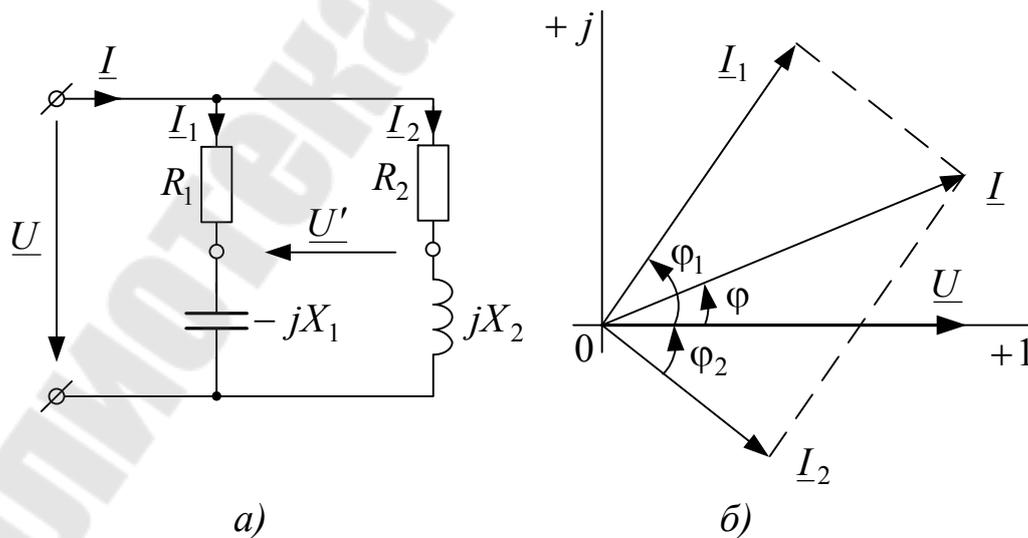


Рис. 2.5.1

Решение

Полные сопротивления параллельных ветвей цепи:

$$\underline{Z}_1 = R_1 - jX_1 = (3 - j4) = 5e^{-j51,3^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + jX_2 = (8 + j6) = 10e^{j36,8^\circ} \text{ Ом}.$$

Проводимости параллельных ветвей:

$$\underline{Y}_1 = \frac{I_1}{\underline{Z}_1} = \frac{I}{3 - j4} = \frac{3 + j4}{(3 - j4)(3 + j4)} =$$

$$= G_1 - jB_1 = (0,12 + j0,16) = 0,2e^{j53,1^\circ} \text{ См};$$

$$\underline{Y}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_2} = \frac{1}{8 + j6} = \frac{8 - j6}{(8 + j6)(8 - j6)} = \frac{8 - j6}{8^2 + 6^2} =$$

$$= G_2 - jB_2 = (0,08 - j0,06) = 0,1e^{-j36,8^\circ} \text{ См},$$

где

$$G_1 = 0,12 \text{ См}; G_2 = 0,08 \text{ См}; B_1 = 0,16 \text{ См}; B_2 = 0,06 \text{ См}.$$

Полная проводимость цепи:

$$\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 = 0,12 + j0,16 + 0,08 - j0,06 = (0,2 + j0,1) = 0,2e^{j26,5^\circ} \text{ См}.$$

Токи ветвей:

$$\underline{I} = \underline{UY} = 200(0,2 + j0,1) = (40 + j20) = 44,7e^{j26,5^\circ} .$$

$$\underline{I}_1 = \underline{UY}_1 = 200(0,12 + j0,16) = (24 + j32) = 40e^{j53,1^\circ} \text{ А}.$$

$$\underline{I}_2 = \underline{UY}_2 = 200(0,08 - j0,06) = (16 - j12) = 20e^{-j36,8^\circ} \text{ А}.$$

Проверка:

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 24 + j32 + 16 - j12 = (40 + j20) = 44,7e^{j26,5^\circ} \text{ А}.$$

Напряжение \underline{U}' определяем по второму закону Кирхгофа:

$$R_1 \underline{I}_1 - \underline{U}' - R_2 \underline{I}_2 = 0$$

или

$$3(24 + j32) - \underline{U}' - 8(16 - j12) = 0,$$

откуда

$$\underline{U}' = (-56 + j192) = 200e^{j106,3^\circ} \text{ В.}$$

Комплексные падения напряжения на участках цепи:

$$\underline{U}_1 = R_1 \underline{I}_1 = 3(24 + j32) = (72 + j96) \text{ В,} = 120e^{j53,1^\circ} \text{ В,}$$

$$\underline{U}_2 = R_2 \underline{I}_2 = 8(16 - j12) = (128 - j96) = 160e^{-j36,8^\circ} \text{ В.}$$

$$\underline{U}_3 = -jX_1 \underline{I}_1 = -j4(24 + j32) = (128 - j96) = 160e^{-j36,8^\circ} \text{ В.}$$

2.6. В схеме рис. 2.6.1 определить показания приборов, а также активные, реактивные и полные мощности для всех участков цепи при следующих исходных данных: $U = 60 \text{ В}$, $R_1 = 15 \text{ Ом}$, $R_2 = 30 \text{ Ом}$, $R_3 = 10 \text{ Ом}$, $R_4 = 70 \text{ Ом}$, $R_7 = 16 \text{ Ом}$, $X_{L2} = 20 \text{ Ом}$, $X_{L3} = 5 \text{ Ом}$, $X_{C3} = 10 \text{ Ом}$, $X_{C5} = 40 \text{ Ом}$, $X_{C6} = 40 \text{ Ом}$. Построить векторную диаграмму напряжений.

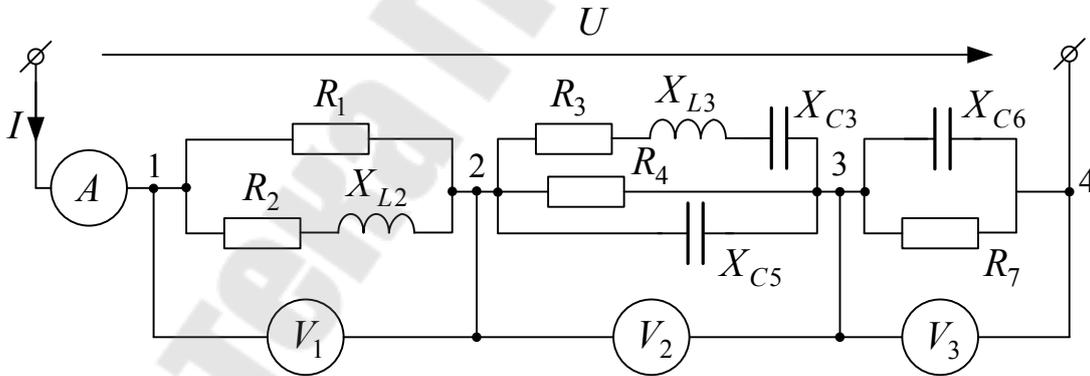


Рис. 2.6.1

Решение

Сопротивления ветвей и участков электрической цепи:

$$\underline{Z}_1 = R_1 = 15 \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_2 = R_2 + jX_{L2} = (30 + j20) \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_3 = R_3 + j(X_{L3} - X_{C3}) = 10 + j(5 - 10) = (10 - j5) \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_4 = R_4 = 70 \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_5 = -jX_{C5} = -j40 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_6 = -X_{C6} = -12 \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_7 = R_7 = 16 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{12} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{15(30 + j20)}{15 + 30 + j20} = (10,8 + j1,85) \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{45} = \frac{Z_4 Z_5}{Z_4 + Z_5} = \frac{70(-j40)}{70 + (-j40)} = (17,2 - j30,15) \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{35} = \frac{\underline{Z}_{45} Z_3}{\underline{Z}_{45} + Z_3} = \frac{(17,2 - j30,15)(10 - j5)}{17,2 - j30,15 + 10 - j5} = (7,14 - j5) \text{ Ом}.$$

$$\underline{Z}_{67} = \frac{Z_6 Z_7}{Z_6 + Z_7} = \frac{(-j12)16}{(-j12) + 16} = (5,79 - j7,68) \text{ Ом}.$$

Входное сопротивление цепи:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_\Sigma &= \underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{34} = \\ &= 10,8 - j1,85 + 7,14 - j5 + 5,79 - j7,68 = (23,96 - j10,95) \text{ Ом}. \end{aligned}$$

Поскольку в условии задачи нет особых указаний о начальной фазе входного напряжения, мы принимаем $\underline{U} = 60e^{j0^\circ}$ В. Тогда

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_\Sigma} = \frac{60}{23,96 - j10,95} = (2,08 + j0,95) \text{ А}.$$

Отсюда показание амперметра

$$I = \sqrt{2,08^2 + 0,95^2} = 2,25 \text{ А}.$$

Находим показания вольтметров в цепи:

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_{12} \underline{I} = (10,8 + j1,85)(2,08 + j0,95) = (20,74 + j14,1) \text{ В},$$

$$U_1 = \sqrt{20,74^2 + 14,1^2} = 25 \text{ В};$$

$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_{23} \underline{I} = (7,14 - j5)(2,08 + j0,95) = (19,64 - j3,6) \text{ В},$$

$$U_2 = \sqrt{19,64^2 + 3,6^2} = 20,35 \text{ В},$$

$$\underline{U}_3 = \underline{Z}_{34} \underline{I} = (5,79 - j7,68)(2,08 + j0,95) = (19,3 - j10,5) \text{ В},$$

$$U_3 = \sqrt{19,3^2 + 10,5^2} = 22 \text{ В}.$$

Активная, реактивная и полная мощности и коэффициент мощности участка 1-2 цепи:

$$P_1 = U_1 I \cos \varphi_1 = 24,8 \cdot 2,26 \cdot 10,83 / 10,98 = 51 \text{ Вт},$$

$$\cos \varphi_1 = R_{12} / Z_{12} = 10,83 / 10,98 = 0,99;$$

$$Q_1 = U_1 I \sin \varphi_1 = 24,8 \cdot 2,26 \cdot 1,85 / 10,98 = 9,45 \text{ ВАр},$$

$$\sin \varphi_1 = X_{12} / Z_{12} = 1,85 / 10,98 = 0,168;$$

$$S_1 = \sqrt{P_1^2 + Q_1^2} = U_1 I_0 = 24,8 \cdot 2,26 = 56 \text{ В·А}.$$

Активная, реактивная и полная мощности и коэффициент мощности участка 2-3 цепи:

$$P_2 = U_2 I \cos \varphi_2 = 19,7 \cdot 2,26 \cdot 7,26 / 8,76 = 36,8 \text{ Вт};$$

$$Q_2 = U_2 I \sin \varphi_0 = 19,7 \cdot 2,26 \cdot (-5) / 8,76 = 25,4 \text{ ВАр};$$

$$S_2 = U_2 I = 19,7 \cdot 2,26 = 42,4 \text{ В·А}.$$

Активная, реактивная и полная мощности и коэффициент мощности участка 3-4 цепи:

$$P_3 = U_3 I \cos \varphi_3 = 22 \cdot 2,26 \cdot 5,9 / 9,73 = 30 \text{ Вт};$$

$$Q_3 = U_3 I \sin \varphi_3 = 22 \cdot 2,26 \cdot (-7,78) / 9,73 = -39,8 \text{ ВАр};$$

$$S_3 = U_3 I = 22 \cdot 2,26 = 49,7 \text{ В·А}.$$

Векторная диаграмма напряжений для рассматриваемой электрической цепи приведена на рис. 2.6.2.

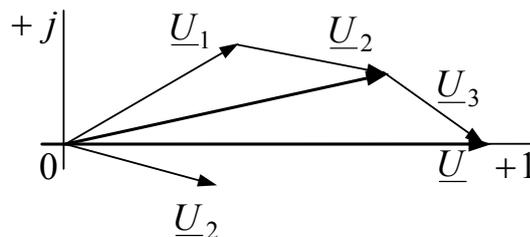


Рис. 2.6.2

2.7. Определить все токи в схеме рис. 2.7.1 при $E = 100$ В; $R_1 = 10$ Ом; $R_2 = 20$ Ом; $X_L = 30$ Ом; $X_{C_1} = 40$ Ом; $X_{C_2} = 50$ Ом.

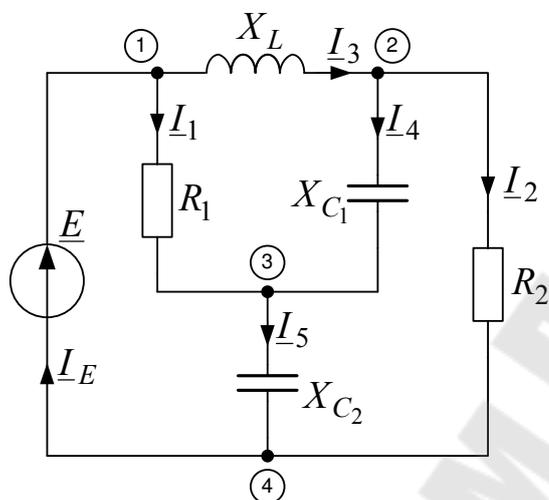


Рис. 2.7.1

Решение

Расчет схемы целесообразно начать с преобразования звезды сопротивлений R_1 , X_{C_1} , X_{C_2} в эквивалентный треугольник: вершины этого находятся в узлах 1, 2, 4, а стороны имеют сопротивления

$$\underline{Z}'_{14} = R_1 - jX_{C_2} + \frac{R_1 \cdot (-jX_{C_2})}{-jX_{C_1}} = 10 - j50 + \frac{10 \cdot (-j50)}{-j40} = 54,83e^{-j65,77^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}'_{12} = R_1 - jX_{C_1} + \frac{R_1 \cdot (-jX_{C_1})}{-jX_{C_2}} = 10 - j40 + \frac{10 \cdot (-j40)}{-j50} = 43,86e^{-j65,77^\circ} \text{ Ом};$$

$$\begin{aligned} \underline{Z}'_{24} &= -jX_{C_1} - jX_{C_2} + \frac{-jX_{C_1} \cdot (-jX_{C_2})}{R_1} = \\ &= -j40 - j50 + \frac{-j50 \cdot (-j40)}{10} = 219,32e^{-j155,77^\circ} \text{ Ом}. \end{aligned}$$

После такого преобразования схема принимает вид, показанный на рис. 2.7.2.

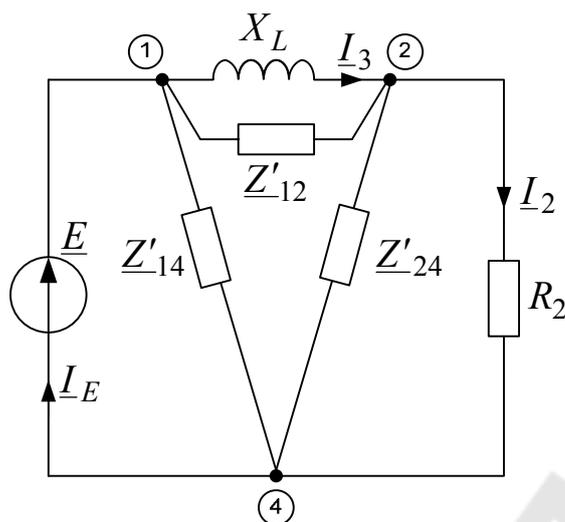


Рис. 2.7.2

Найдём сопротивления междуузловых участков этой схемы:

$$\underline{Z}_{12} = \frac{jX_L \cdot \underline{Z}'_{12}}{jX_L + \underline{Z}'_{12}} = \frac{j30 \cdot 43,86e^{j65,77^\circ}}{j30 + 43,86e^{j65,77^\circ}} = 63,91e^{j53,28^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{24} = \frac{R_2 \cdot \underline{Z}'_{24}}{R_2 + \underline{Z}'_{24}} = \frac{20 \cdot 219,32e^{-j155,77^\circ}}{20 + 219,32e^{-j155,77^\circ}} = 21,79e^{-j2,34^\circ} \text{ Ом}.$$

Входное сопротивление схемы относительно зажимов источника:

$$\underline{Z}_{\Sigma} = \frac{\underline{Z}'_{14} \cdot \underline{Z}_{124}}{\underline{Z}'_{14} + \underline{Z}_{124}},$$

где $\underline{Z}_{124} = \underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{24} = 63,91e^{j53,28^\circ} + 21,79e^{-j2,34^\circ} = 78,31e^{j40^\circ} \text{ Ом}$. Имейм:

$$\underline{Z}_{\Sigma} = \frac{54,83e^{-j65,77^\circ} \cdot 78,31e^{j40^\circ}}{54,83e^{-j65,77^\circ} + 78,31e^{j40^\circ}} = 52,052e^{-j26,01^\circ} \text{ Ом}.$$

Рассчитываем токи:

$$\underline{I}_E = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_{\Sigma}} = \frac{100e^{j0^\circ}}{52,1e^{-j26,01^\circ}} = 1,92e^{j26,01^\circ} = 1,73 + j0,84 \text{ А};$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_E \cdot \frac{\underline{Z}'_{14}}{\underline{Z}'_{14} + \underline{Z}_{124}} \cdot \frac{\underline{Z}'_{12}}{\underline{Z}'_{12} + jX_L}; \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_E \cdot \frac{\underline{Z}'_{14}}{\underline{Z}'_{14} + \underline{Z}_{124}} \cdot \frac{\underline{Z}'_{24}}{R_2 + \underline{Z}'_{24}}.$$

Подставляя численные значения, получим:

$$\begin{aligned} \underline{I}_3 &= 1,92e^{j26,01^\circ} \cdot \frac{54,8e^{-j65,77^\circ}}{54,8e^{-j65,77^\circ} + 78,3e^{j40^\circ}} \cdot \frac{43,9e^{-j65,77^\circ}}{43,9e^{-j65,77^\circ} + j30} = \\ &= 2,72e^{-j76,72^\circ} = 0,62 - j2,65 \text{ A}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_2 &= 1,92e^{-j26,01^\circ} \cdot \frac{54,8e^{-j65,77^\circ}}{54,8e^{-j65,77^\circ} + 78,3e^{j40^\circ}} \cdot \frac{219,3e^{-j155,77^\circ}}{20 + 219,3e^{-j155,77^\circ}} = \\ &= 1,39e^{-j42,34^\circ} = 1,03 - j0,94 \text{ A}; \end{aligned}$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_E - \underline{I}_3 = 1,73 + j0,84 - 0,625 + j2,65 = 3,66e^{j72,48^\circ} \text{ A};$$

$$\underline{I}_4 = \underline{I}_3 - \underline{I}_2 = 2,72e^{-j76,72^\circ} - 1,39e^{-j42,34^\circ} = 1,76e^{-j103,29^\circ} \text{ A};$$

$$\underline{I}_5 = \underline{I}_1 + \underline{I}_4 = 3,66e^{-j72,48^\circ} + 1,76e^{-j103,29^\circ} = 2,33e^{-j49,77^\circ} \text{ A}.$$

Составляем баланс мощностей:

$$\tilde{S} = \underline{E} \cdot \underline{I}_E^* = 100e^{j0^\circ} \cdot 1,92e^{-j26,01^\circ} = (173 - j84,2) \text{ ВА};$$

$$P_{\text{ист}} = \text{Re } \tilde{S} = \underline{E} \cdot \underline{I}_E^* = 173 \text{ Вт}; \quad Q_{\text{ист}} = \text{Im } \tilde{S} = -84,2 \text{ ВАр};$$

$$P_{\text{пр}} = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 = 3,66^2 \cdot 10 + 1,39^2 \cdot 20 = 173 \text{ Вт};$$

$$\begin{aligned} Q_{\text{пр}} &= I_3^2 X_L + I_4^2 (-X_{C_1}) + I_5^2 (-X_{C_2}) = \\ &= 2,72^2 \cdot 30 + 1,76^2 \cdot (-40) + 2,33^2 \cdot (-50) = -84,2 \text{ ВАр}; \end{aligned}$$

$$173 \text{ Вт} = 173 \text{ Вт}; \quad -84,2 \text{ ВАр} = -84,2 \text{ ВАр},$$

$$\text{т. е. } P_{\text{ист}} = P_{\text{пр}}; \quad Q_{\text{ист}} = Q_{\text{пр}}.$$

2.8. Определить показания амперметра в схеме (рис. 2.8.1), если $U = 120$ В; $R_1 = 15$ Ом; $R_2 = 30$ Ом; $X_1 = 25$ Ом; $X_2 = 10$ Ом.

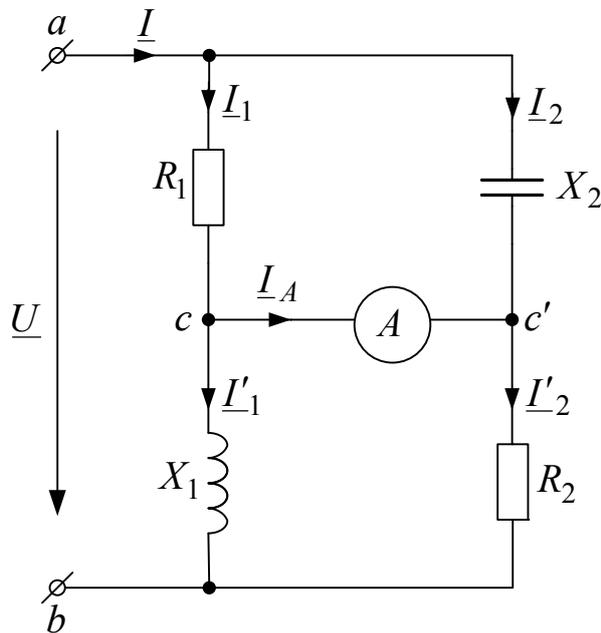


Рис. 2.8.1

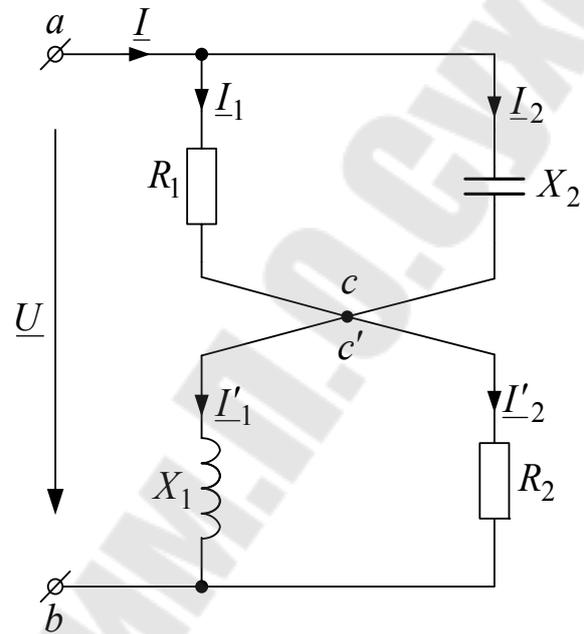


Рис. 2.8.2

Решение

Как обычно, считаем амперметр идеальным. Тогда участок cc' – короткозамкнутый. Эквивалентная схема заданной цепи представлена на рис. 2.8.2. Рассчитаем входное сопротивление такой схемы:

$$\underline{Z}_{ac} = \frac{R_1 \cdot (-jX_2)}{R_1 - jX_2} = \frac{15 \cdot (-j10)}{15 - j10} = 8,3e^{-j56,31^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{cb} = \frac{R_2 \cdot (jX_1)}{R_2 + jX_1} = \frac{30 \cdot j25}{30 + j25} = 19,2e^{j50,19^\circ} \text{ Ом}.$$

$$\underline{Z}_{\Sigma} = \underline{Z}_{ac} + \underline{Z}_{cb} = 8,3e^{-j56,31^\circ} + 19,2e^{j50,19^\circ} = 18,6e^{j24,83^\circ} \text{ Ом}.$$

Тогда

$$\underline{I} = \frac{U}{\underline{Z}_{\Sigma}} = \frac{120e^{j0^\circ}}{18,6e^{j24,83^\circ}} = 6,4e^{-j24,83^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I} \frac{-jX_2}{R_1 - jX_2} = 6,4e^{-j24,83^\circ} \frac{-j10}{15 - j10} = 3,6e^{-j81,13^\circ} = (0,55 - j3,52) \text{ А};$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I} \frac{R_1}{R_1 - jX_2} = \underline{I} - \underline{I}_1 = 6,4e^{-j24,83^\circ} - 3,6e^{-j81,3^\circ} = (5,29 + j0,82) \text{ A};$$

$$\underline{I}'_1 = \underline{I} \frac{R_2}{R_2 + jX_1} = 6,4e^{-j24,83^\circ} \frac{-j30}{30 - j25} = 4,9e^{-j75,02^\circ} = (1,27 - j4,78) \text{ A};$$

$$\underline{I}'_2 = \underline{I} \frac{jX_1}{R_2 + jX_1} = \underline{I} - \underline{I}'_1 = (-0,72 + j1,26) = 1,45e^{j119,74^\circ} \text{ A};$$

$$\underline{I}_A = \underline{I}_1 - \underline{I}'_1 = \underline{I}'_2 - \underline{I}_2 = (-6,01 + j0,44) = 6,02e^{j175,81^\circ} \text{ A}.$$

Показание амперметра $I_A = 6,02 \text{ A}$.

2.9. Рассчитать токи в схеме рис. 2.9.1 при следующих исходных данных: $R_1 = R_3 = 40 \text{ Ом}$; $X_1 = X_2 = X_3 = 50 \text{ Ом}$; $e_1(t) = 80 \sin(\omega t + 60^\circ) \text{ В}$; $e_2(t) = 120 \cos(\omega t - 60^\circ) \text{ В}$.

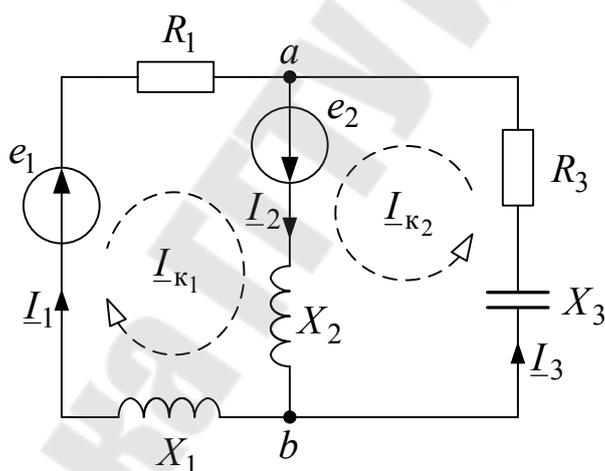


Рис. 2.9.1

Решение

Для расчета токов в символическом (комплексном) виде необходимо перейти от мгновенных значений ЭДС к комплексам их действующих значений. В данном случае при таком переходе следует учесть, что ЭДС e_2 задана косинусоидой, а не синусоидой (как обычно). Поэтому вначале необходимо заменить ЭДС e_2 эквивалентной синусоидой:

$$e_2(t) = 120 \cos(\omega t - 60^\circ) = 120 \sin(\omega t - 60^\circ + 90^\circ) = 120 \sin(\omega t + 30^\circ) \text{ В.}$$

После этого переходим к комплексам действующих значений ЭДС:

$$\underline{E}_1 = \frac{80}{\sqrt{2}} e^{j60^\circ} = 56,6 e^{j60^\circ} = (28,3 + j49) \text{ В;}$$

$$\underline{E}_2 = \frac{120}{\sqrt{2}} e^{j30^\circ} = 84,9 e^{j30^\circ} = (73,5 + j42,5) \text{ В.}$$

1 способ (метод контурных токов)

Произвольно выбираем условно положительные направления истинных (I_1, I_2, I_3) и контурных (I_{K_1}, I_{K_2}) токов {например, так, как показано на рис. 2.9.1} и записываем для контурных токов уравнения второго закона Кирхгофа:

$$\begin{cases} (R_1 + jX_1 + jX_2)I_{K_1} + jX_2 I_{K_2} = \underline{E}_1 + \underline{E}_2; \\ jX_2 I_{K_1} + (R_3 + jX_2 - jX_3)I_{K_2} = \underline{E}_2. \end{cases}$$

Подставляя числовые данные, получаем:

$$\begin{cases} (40 + j50 + j50)I_{K_1} + j50 I_{K_2} = 56,6 e^{j60^\circ} + 84,9 e^{j30^\circ}; \\ j50 I_{K_1} + (40 + j50 - j50)I_{K_2} = 84,9 e^{j30^\circ}. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, находим контурные токи:

$$\underline{I}_{K_1} = 1,08 e^{-j44,3^\circ} = (0,77 - j0,75) \text{ А; } \underline{I}_{K_2} = 0,9 e^{j6,1^\circ} = (0,89 + j0,095) \text{ А.}$$

Истинные токи выражаются алгебраическими суммами соответствующих контурных токов:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{K_1}; \underline{I}_2 = \underline{I}_{K_1} + \underline{I}_{K_2} = 1,66 - j0,66 = 1,79 e^{-j21,6^\circ} \text{ А; } \underline{I}_3 = \underline{I}_{K_2}.$$

2 способ (метод узловых потенциалов)

Определим межузловое напряжение:

$$\underline{U}_{ab} = \frac{\frac{\underline{E}_1}{R_1 + jX_1} - \frac{\underline{E}_2}{jX_2}}{\frac{1}{R_1 + jX_1} + \frac{1}{jX_2} + \frac{1}{R_3 - jX_3}} = \frac{\frac{28,3 + j49}{40 + j50} - \frac{73,5 + j42,5}{j50}}{\frac{1}{40 + j50} + \frac{1}{j50} + \frac{1}{40 - j50}} =$$

$$= -40,4 + j40,7 = 57,4e^{j134,4^\circ} \text{ В.}$$

Искомые токи определяем по закону Ома:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}_1 - \underline{U}_{ab}}{R_1 + jX_1} = \frac{56,6e^{j60^\circ} - 57,4e^{j134,4^\circ}}{40 + j50} = 1,08e^{-j44,46^\circ} = (0,77 - j0,75) \text{ А};$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{E}_2 + \underline{U}_{ab}}{jX_2} = \frac{84,9e^{j30^\circ} + 57,4e^{j134,4^\circ}}{j50} = 1,79e^{-j21,59^\circ} = (1,66 - j0,66) \text{ А};$$

$$\underline{I}_3 = \frac{-\underline{U}_{ab}}{R_3 - jX_3} = \frac{-57,4e^{j134,4^\circ}}{40 - j50} = 0,89e^{-j6,16^\circ} = (0,89 + j0,096) \text{ А.}$$

3 способ (метод наложения)

Заданная схема (рис. 2.9.1) содержит два источника питания. Вначале рассмотрим схему, в которой действует только источник e_1 , а источник e_2 заменен короткозамкнутым участком (рис. 2.9.2). В такой схеме протекают токи:

$$\underline{I}'_1 = \frac{\underline{E}_1}{R_1 + jX_1 + \frac{jX_2(R_3 - jX_3)}{R_3 + j(X_2 - X_3)}} = 0,4e^{j15,5^\circ} = (0,38 + j0,11) \text{ А};$$

$$\underline{I}'_2 = \underline{I}'_1 \frac{R_3 - jX_3}{R_3 + j(X_2 - X_3)} = 0,64e^{-j35,6^\circ} = (0,52 - j0,37) \text{ А};$$

$$\underline{I}'_3 = \underline{I}'_1 \frac{-jX_2}{R_3 + j(X_2 - X_3)} = \underline{I}'_1 - \underline{I}'_2 = 0,5e^{-j74,5^\circ} = (0,14 - j0,48) \text{ А.}$$

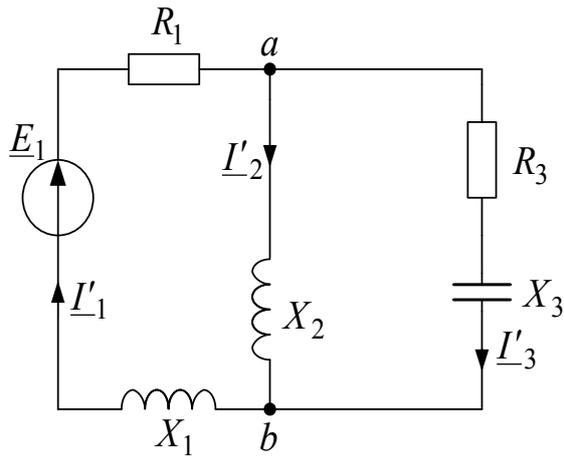


Рис. 2.9.2

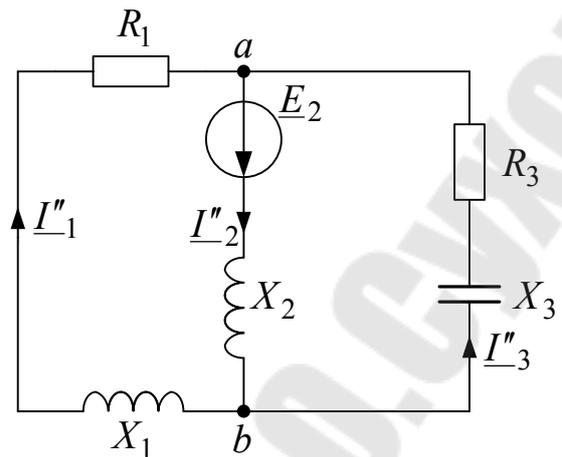


Рис. 2.9.3

Теперь рассмотрим схему, в которой короткозамкнутым участком заменен источник ЭДС e_1 (рис. 2.9.3). В ней протекают токи

$$\underline{I''_2} = \frac{\underline{E}_2}{jX_2 + \frac{(R_1 + jX_1)(R_3 - jX_3)}{R_3 + R_1 + j(X_1 - X_3)}} = 1,19e^{-j14,3^\circ} = (1,15 - j0,29) \text{ А};$$

$$\underline{I''_1} = \underline{I''_2} \frac{R_3 - jX_3}{R_3 + R_1 + j(X_1 - X_3)} = 0,95e^{-j65,6^\circ} = (0,39 - j0,87) \text{ А};$$

$$\underline{I''_3} = \underline{I''_2} \frac{R_1 + jX_1}{R_3 + R_1 + j(X_1 - X_3)} = \underline{I''_2} - \underline{I''_1} = 0,95e^{-j37^\circ} = (0,76 - j0,57) \text{ А}.$$

Истинные токи схемы выражаются алгебраическими суммами соответствующих частичных токов:

$$\underline{I}_1 = \underline{I'_1} + \underline{I''_1} = (0,77 - j0,76) \text{ А}; \quad \underline{I}_2 = \underline{I'_2} + \underline{I''_2} = (1,67 - j0,66) \text{ А};$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I'_3} - \underline{I''_3} = (0,9 + j0,09) \text{ А}.$$

Для проверки составим баланс мощностей:

$$\begin{aligned} \tilde{S} &= I_1^* E_1 + I_2^* E_2 = 1,08e^{j44,62^\circ} \cdot 56,6e^{j60^\circ} + 1,8e^{j21,5^\circ} \cdot 84,9e^{j30^\circ} = \\ &= (78,8 + j178,3) \text{ ВА}; \end{aligned}$$

$$P_{\text{ист}} = \text{Re } \tilde{S} = 78,8 \text{ Вт}; \quad Q_{\text{ист}} = \text{Im } \tilde{S} = 178,3 \text{ ВАр};$$

$$P_{\text{пр}} = I_1^2 R_1 + I_3^2 R_3 = 1,081^2 \cdot 40 + 0,896^2 \cdot 40 = 78,85 \text{ Вт};$$

$$Q_{\text{пр}} = I_1^2 X_1 + I_2^2 X_2 + I_3^2 (-X_3) = 1,08^2 \cdot 50 + 1,78^2 \cdot 50 + 0,89^2 \cdot (-50) = 178,3 \text{ ВАр};$$

$$P_{\text{ист}} = P_{\text{пр}}, \text{ или } 78,8 = 78,8 \text{ Вт}; \quad Q_{\text{ист}} = Q_{\text{пр}}, \text{ или } 178,3 = 178,3 \text{ ВАр}.$$

2.10. В схеме (рис. 2.10.1) найти ток на участке 1–1' при $R_1 = 15 \text{ Ом}$, $R_2 = 25 \text{ Ом}$; $X_1 = 18 \text{ Ом}$; $X_2 = 10 \text{ Ом}$, $e(t) = 180 \cos(\omega t + 30^\circ) \text{ В}$; $i_J(t) = 5 \sin(\omega t - 45^\circ) \text{ А}$.

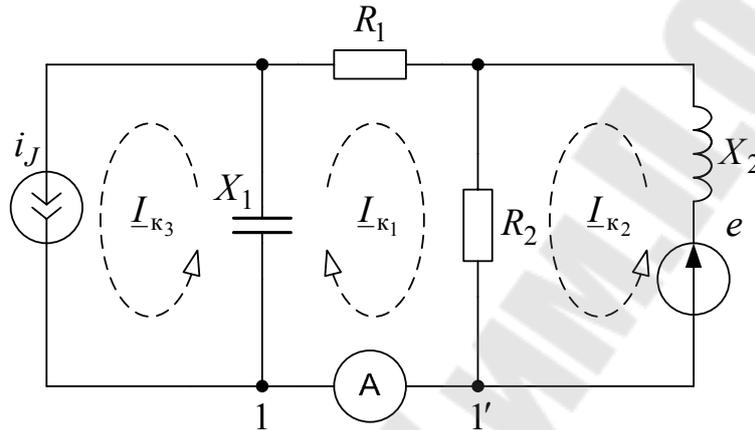


Рис. 2.10.1

Решение

Поскольку в задаче требуется рассчитать ток только в одной ветви, для расчета используем метод эквивалентного генератора. Схема холостого хода цепи показана на рис. 2.10.2.

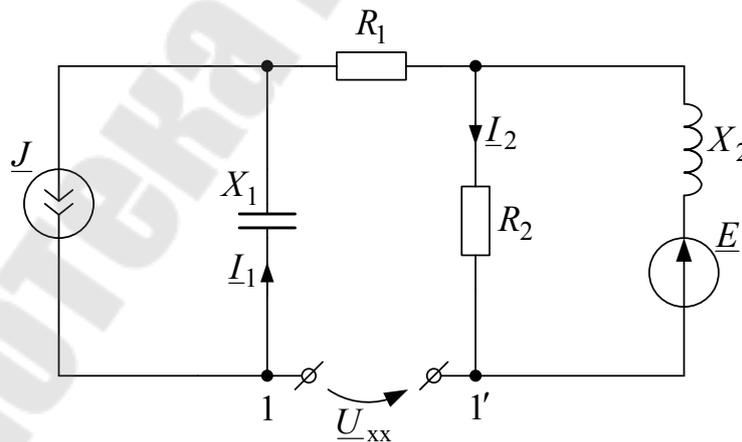


Рис. 2.10.2

В этой схеме протекают токи:

$$\underline{I}_1 = \underline{J} = \frac{5}{\sqrt{2}} e^{-j45^\circ} = 3,54 e^{-j45^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{E}}{R_2 + jX_2} = \frac{\frac{180}{\sqrt{2}} e^{j120^\circ}}{25 + j10} = 4,73 e^{j98,2^\circ} \text{ А}.$$

Напряжение холостого хода:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{\text{xx}} &= -jX_1 \underline{I}_1 + R_2 \underline{I}_2 = \\ &= -j18 \cdot 3,54 e^{-j45^\circ} + 25 \cdot 4,73 e^{j98,2^\circ} = 94,95 e^{j130,5^\circ} \text{ В}. \end{aligned}$$

Чтобы рассчитать внутреннее сопротивление эквивалентного генератора, в схеме холостого хода изымаем ветви, содержащие источники тока, и заменяем источники ЭДС короткозамкнутыми участками. После такого преобразования получится схема, показанная на рис. 2.10.3.

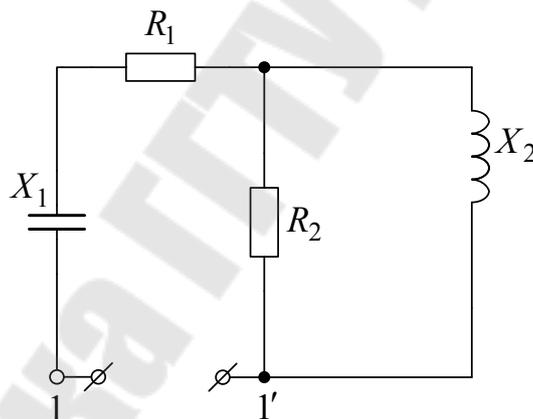


Рис. 2.10.3

Входное сопротивление такой схемы (внутреннее сопротивление эквивалентного генератора):

$$\underline{Z}_{\text{зг}} = -jX_1 + R_1 + \frac{R_2(jX_2)}{R_2 + jX_2} = 20,7 e^{-j26,55^\circ} \text{ Ом}.$$

Искомый ток:

$$\underline{I}_{11'} = \frac{\underline{U}_{\text{xx}}}{\underline{Z}_{\text{зг}} + \underline{Z}_{11'}} = \frac{\underline{U}_{\text{xx}}}{\underline{Z}_{\text{зг}} + 0} = 4,59 e^{j157,56^\circ} \text{ А}.$$

2.11. В схеме (рис. 2.11.1) имеет место резонанс. Определить R и X_C , если $P_W = 64$ Вт; $U = 4$ В; $X_L = 2$ Ом.

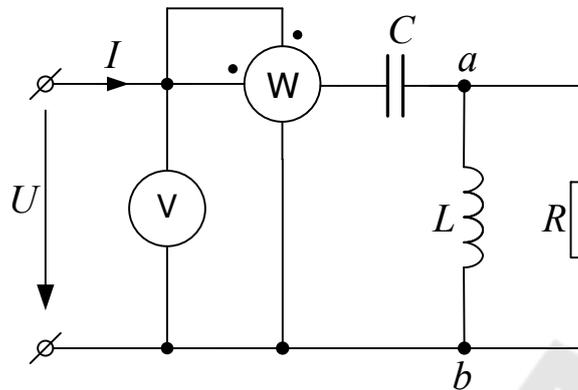


Рис. 2.11.1

Решение

В общем случае показание ваттметра

$$P_W = UI \cos \varphi,$$

где φ – угол сдвига фаз между напряжением и током двухполюсника, активную мощность которого измеряет ваттметр. В заданной схеме имеет место резонанс, поэтому $\cos \varphi = 1$. Тогда

$$I = \frac{P_W}{U} = 16 \text{ А.}$$

Параллельное соединение ветвей на участке ab можно заменить эквивалентным участком с последовательным соединением элементов (рис. 2.11.2). Чтобы рассчитать параметры этой эквивалентной схемы, предварительно выразим комплексное сопротивление участка ab в исходной схеме (рис. 2.11.1):

$$Z_{ab} = \frac{R \cdot jX_L}{(R + jX_L)} \cdot \frac{(R - jX_L)}{(R - jX_L)} = \frac{R \cdot X_L^2}{R^2 + X_L^2} + j \frac{X_L \cdot R^2}{R^2 + X_L^2}, \quad (2.1)$$

где $X_L = 2\pi fL$.

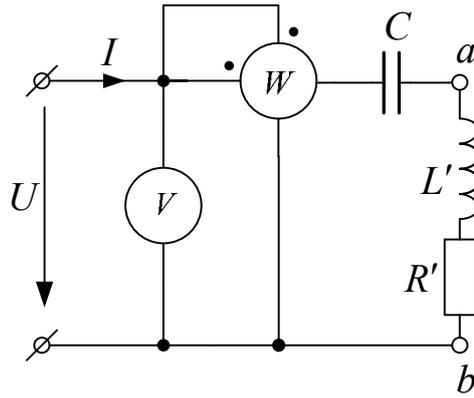


Рис. 2.11.2

Для схемы рис. 2.11.2

$$\underline{Z}_{ab} = R' + jX_{L'}, \quad (2.2)$$

где $X_{L'} = 2\pi fL'$. Сопоставляя два равносильных выражения для \underline{Z}_{ab} [формулы (1) и (2)], получаем:

$$R' = \frac{R \cdot X_L^2}{R^2 + X_L^2}; \quad X_{L'} = \frac{R^2 \cdot X_L}{R^2 + X_L^2}.$$

В схеме рис. 2.11.2 резонанс возможен при

$$X_C = X_{L'}.$$

При этом

$$P_W = I^2 R'; \quad U = R'I,$$

откуда

$$R' = \frac{U}{I} = \frac{U^2}{P_W} = \frac{4^2}{64} = 0,25 \text{ Ом.}$$

Следовательно,

$$\frac{R \cdot X_L^2}{R^2 + X_L^2} = 0,25.$$

Отсюда получаем квадратное уравнение для неизвестного R :

$$0,25R^2 - 4R + 1 = 0.$$

Это уравнение имеет 2 корня: $R_{(1)} = 15,75$ Ом; $R_{(2)} = 0,25$ Ом. Так как оба эти корня положительны, задача имеет 2 решения:

$$X_{C(1)} = \frac{X_L \cdot R_{(1)}^2}{X_L^2 + R_{(1)}^2} = 1,97 \text{ Ом}; \quad X_{C(2)} = \frac{X_L \cdot R_{(2)}^2}{X_L^2 + R_{(2)}^2} = 0,031 \text{ Ом}.$$

2.12. В схеме рис. 2.12.1 $u(t) = 120 \cos(\omega t - 45^\circ)$, В; $R = 20$ Ом; $L = 35$ мГн; $C = 45$ мкФ. Найти мгновенное значение $i(t)$ и показание амперметра при резонансе.

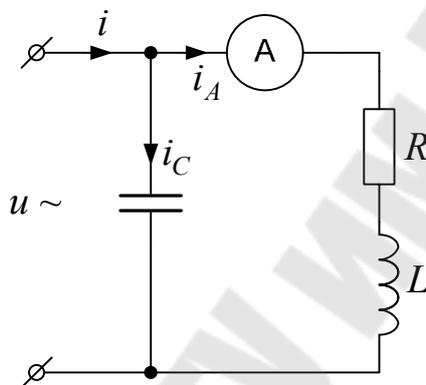


Рис. 2.12.1

Решение

Эквивалентная синусоида входного напряжения выражается равенством

$$u(t) = 120 \sin(\omega t - 45^\circ + 90^\circ) = 120 \sin(\omega t + 45^\circ), \text{ В}.$$

В заданной схеме резонанс достигается при условии

$$B_C = B_{RL},$$

где $B_C = \omega C$ – реактивная проводимость левой ветви; B_{RL} – реактивная проводимость правой ветви. Величину B_{RL} определяем из параллельной схемы замещения RL -ветви (см. задачу 2.11):

$$B_{RL} = \frac{X_L}{R^2 + X_L^2} = \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}.$$

Возвращаясь с учетом этого к условию резонанса, имеем уравнение:

$$C = \frac{L}{R^2 + (\omega L)^2}.$$

Решая его, находим резонансную частоту: $\omega = \omega_0 = 555$ рад/с.

Полная (входная) проводимость схемы при резонансе равна её активной проводимости, которая в нашем случае совпадает с активной проводимостью RL -ветви:

$$G = G_{RL} = \frac{R}{R^2 + X_L^2} = \frac{R}{R^2 + (\omega_0 L)^2} = 0,0257 \text{ См.}$$

Тогда действующее значение тока неразветвленной части схемы:

$$\underline{I} = G\underline{U} = 0,0257 \frac{120}{\sqrt{2}} e^{j45^\circ} = 2,18 e^{j45^\circ} \text{ А.}$$

Мгновенное значение этого тока:

$$i(t) = 2,18\sqrt{2} \sin(\omega_0 t + 45^\circ) = 3,1 \sin(555t + 45^\circ), \text{ А.}$$

Показание амперметра:

$$\underline{I}_A = \underline{I} \frac{-jX_C}{R + j(X_L - X_C)} = 3,04 e^{j0,8^\circ} \text{ А; } I_A = 3,04 \text{ А.}$$

2.13. В цепи (рис. 2.13.1) $R = X_C$. До замыкания ключа ваттметр показывал $P'_W = 500$ Вт. Каким будет показание ваттметра после замыкания ключа?

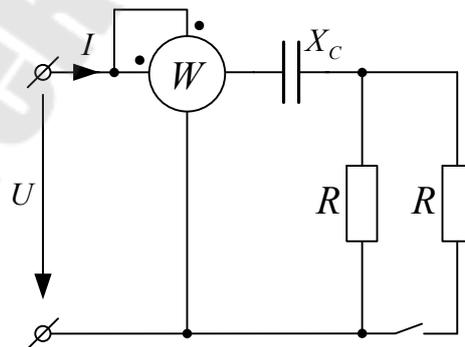


Рис. 2.13.1

Решение

Входное сопротивление цепи до замыкания ключа:

$$\underline{Z}' = Z'e^{j\varphi'} = R\sqrt{2}e^{-j45^\circ}.$$

Входное сопротивление цепи после замыкания ключа:

$$\underline{Z}'' = Z''e^{j\varphi''} = \frac{R\sqrt{5}}{2}e^{-j63,4^\circ}.$$

Показание ваттметра до замыкания ключа:

$$P'_W = \frac{U^2}{Z'} \cos \varphi' = \frac{U^2}{R\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ т.е. } \frac{U^2}{R} = 2P'_W.$$

Показание ваттметра после замыкания ключа:

$$P''_W = \frac{U^2}{Z''} \cos \varphi'' = \frac{2U^2}{R\sqrt{5}} \cos 63,4^\circ = 0,4 \frac{U^2}{R} = 0,8P'_W = 0,8 \cdot 500 = 400 \text{ Вт}.$$

2.14. При разомкнутом ключе в схеме рис. 2.14.1 показание фазометра 60° . Определить его показание при замкнутом ключе.

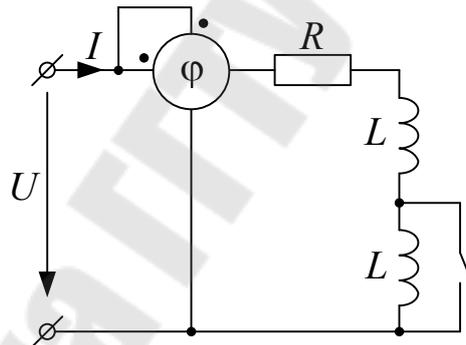


Рис. 2.14.1

Решение

До замыкания ключа входное сопротивление цепи:

$$\underline{Z}' = R + j2\omega L,$$

поэтому первоначальное показание фазометра

$$\varphi' = \arctg \frac{2\omega L}{R}.$$

После замыкания ключа входное сопротивление цепи:

$$\underline{Z}'' = R + j\omega L,$$

а показание фазометра

$$\varphi'' = \arctg \frac{\omega L}{R} = \arctg \left[\frac{\operatorname{tg} \varphi'}{2} \right] = 41^\circ.$$

2.15. Электродвигатель запитан промышленным однофазным напряжением ($U = 220 \text{ В}$, $f = 50 \text{ Гц}$) и развивает мощность $P = 1,76 \text{ кВт}$ при коэффициенте мощности $\cos \varphi = 0,4$. Определить емкость, повышающую коэффициент мощности этого двигателя до $\cos \varphi' = 0,8$.

Решение

Электродвигатель представляет собой активно-индуктивную нагрузку, поэтому схема замещения и ее векторная диаграмма будут иметь соответственно вид рис. 2.15.1 и 2.15.2..

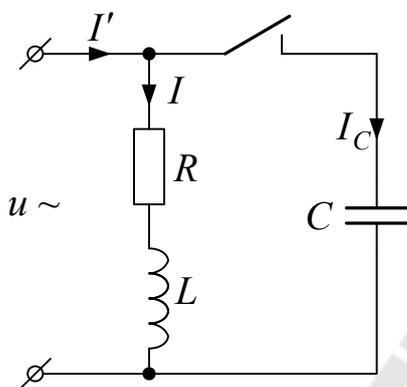


Рис. 2.15.1

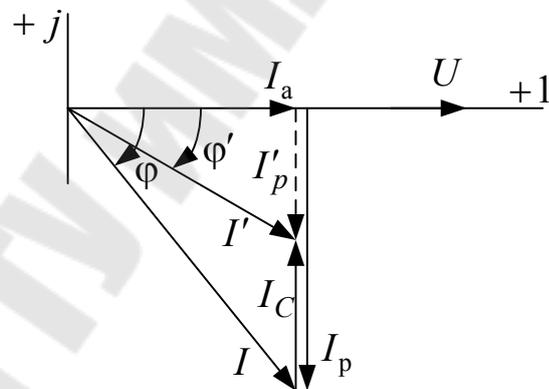


Рис. 2.15.2

Мощность двигателя:

$$P = UI \cos \varphi.$$

Ток двигателя

$$I = \frac{P}{U \cos \varphi} = \frac{1760}{220 \cdot 0,4} = 20 \text{ А}$$

имеет активную составляющую

$$I_a = I \cos \varphi = 20 \cdot 0,4 = 8 \text{ А}.$$

При параллельном подключении емкости эта составляющая не изменяется, тогда как общий ток при таком подключении уменьшается до значения

$$I' = \frac{I_a}{\cos \varphi'} = \frac{8}{0,8} = 10 \text{ A}$$

за счет уменьшения реактивной составляющей от значения

$$I_p = I \sin \varphi = 20 \cdot 0,91 = 18,2 \text{ A}$$

до значения

$$I'_p = I' \sin \varphi' = 10 \cdot 0,6 = 6 \text{ A}$$

Величина убыли реактивной составляющей равна току, протекающему через подключенную емкость:

$$I_p - I'_p = I_C = U\omega C.$$

Отсюда

$$C = \frac{I_p - I'_p}{U\omega} = \frac{18,2 - 6}{220 \cdot 314} = 177 \text{ мкФ}.$$

2.16. Для определения взаимной индуктивности двух катушек их соединили последовательно и подключили к источнику напряжения промышленной частоты. Напряжение, ток и мощность были измерены в двух случаях: сначала зажим 2 первой катушки соединён с зажимом 3 второй катушки (рис. 2.16.1), а затем зажим 2 первой катушки соединён с зажимом 4 второй катушки (рис. 2.16.2). Показания приборов в первом опыте $U_1 = 120 \text{ В}$, $I_1 = 12 \text{ А}$, $P_1 = 864 \text{ Вт}$, а во втором опыте $U_2 = 120 \text{ В}$, $I_2 = 10 \text{ А}$, $P_2 = 600 \text{ Вт}$. Определить взаимную индуктивность катушек.

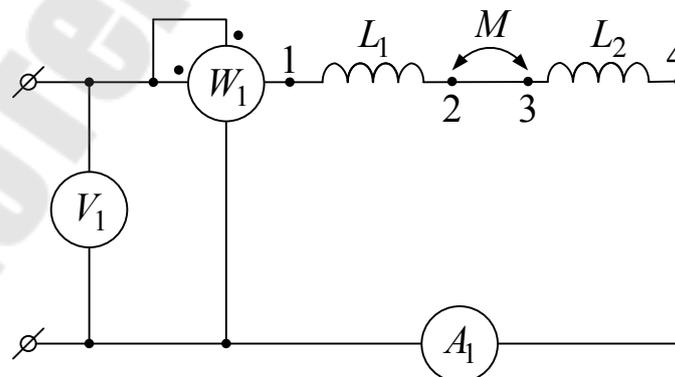


Рис. 2.16.1

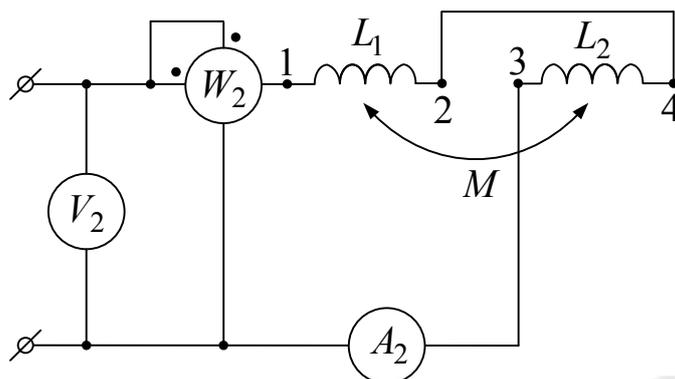


Рис. 2.16.2

Решение

По данным первого опыта найдём полное сопротивление схемы Z_1 , её резистивное R_1 и реактивное сопротивление X_1 :

$$Z_1 = U_1/I_1 = 10 \text{ Ом}; \quad R_1 = P_1/I_1^2 = 6 \text{ Ом}; \quad X_1 = \sqrt{Z_1^2 - R_1^2} = 8 \text{ Ом}.$$

Аналогично из данных второго опыта:

$$Z_2 = U_2/I_2 = 12 \text{ Ом}; \quad R_2 = P_2/I_2^2 = 6 \text{ Ом}; \quad X_2 = \sqrt{Z_2^2 - R_2^2} = 10,4 \text{ Ом}.$$

Равенство полученных значений активного сопротивления $R_1 = R_2$ свидетельствует об отсутствии ошибок измерения. Реактивное же сопротивление во втором опыте оказалось больше, чем в первом ($X_2 > X_1$). Это указывает на то, что вторая схема соответствует согласному включению, а первая – встречному.

Искомую взаимную индуктивность найдём из уравнений:

$$\omega L_1 + \omega L_2 + \omega M = X_2; \quad \omega L_1 + \omega L_2 - \omega M = X_1.$$

Вычитая одно уравнение из другого, получим:

$$M = (X_2 - X_1)/4\omega = (10,4 - 8)/(4 \cdot 2\pi \cdot 50) = 1,91 \text{ мГн}.$$

2.17. Определить все токи в схеме рис. 2.17.1, если $U = 100 \text{ В}$; $R_1 = R_2 = 30 \text{ Ом}$; $\omega L_1 = \omega L_2 = 40 \text{ Ом}$; $\omega M = 20 \text{ Ом}$.

Решение

1 способ (метод уравнений Кирхгофа)

Уравнение законов Кирхгофа для заданной схемы имеют вид:

$$\begin{cases} \underline{I}_1 - \underline{I}_2 - \underline{I}_3 = 0; \\ \underline{I}_1(R_1 + j\omega L_1) + \underline{I}_2 \cdot j\omega M = \underline{U}; \\ \underline{I}_1 \cdot j\omega M + \underline{I}_2(R_2 + j\omega L_2) = 0. \end{cases}$$

Подставляя во второе и третье уравнения числовые данные условия, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \underline{I}_1(30 + j40) + \underline{I}_2 \cdot j20 = 100; \\ \underline{I}_1 \cdot j20 + \underline{I}_2(30 + j40) = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, находим:

$$\underline{I}_1 = 2,07e^{-j44^\circ} = (1,49 - j1,44) \text{ А}; \quad \underline{I}_2 = 0,83e^{j172,87^\circ} = (0,82 + j0,103) \text{ А};$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 - \underline{I}_2 = 1,49 - j1,44 + 0,82 - j0,103 = 2,78e^{j33,7^\circ} = (2,31 - j1,543) \text{ А}.$$

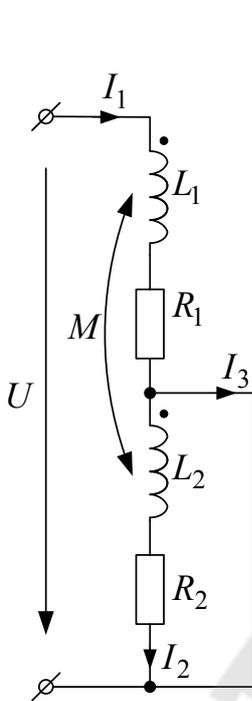


Рис. 2.17.1

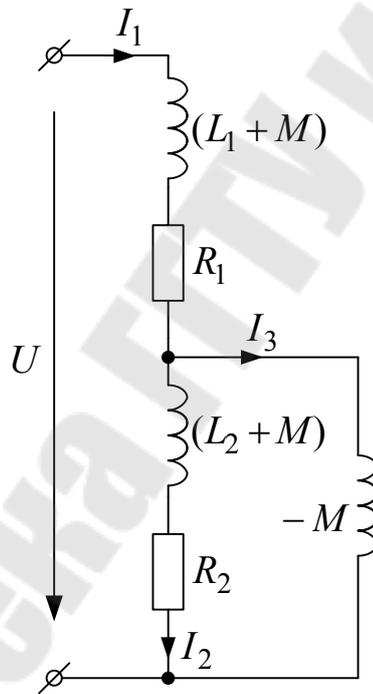


Рис. 2.17.2

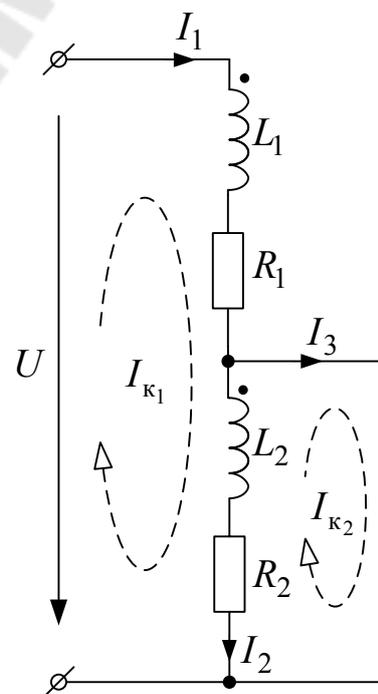


Рис. 2.17.3

2 способ (развязывание)

После развязывания схема принимает вид, показанный на рис. 2.17.2. Входное сопротивление такой схемы:

$$\underline{Z} = R_1 + j\omega(L_1 + M) + \frac{(-j\omega M) \cdot [R_2 + j\omega(L_2 + M)]}{R_2 + j\omega L_2} =$$

$$= 30 + j60 + \frac{(30 + j60)(-j20)}{30 + j40} = 48,37e^{j44^\circ} \text{ Ом.}$$

Тогда по закону Ома

$$\underline{I}_1 = \frac{U}{\underline{Z}} = \frac{100}{48,37e^{j44^\circ}} = 2,07e^{-j44^\circ} \text{ А.}$$

Токи разветвленной части схемы:

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 \frac{-j\omega M}{R_2 + j\omega L_2} = 2,07e^{-j44^\circ} \frac{20e^{-j90^\circ}}{50e^{j53,13^\circ}} = 0,828e^{j172,87^\circ} \text{ А;}$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 \frac{R_2 + j\omega(L_2 + M)}{R_2 + j\omega L_2} = 2,07e^{-j44^\circ} \frac{30 + j60}{30 + j40} = 2,78e^{-j33,7^\circ} \text{ А.}$$

3 способ (метод контурных токов)

Заданная схема содержит 2 независимых контура. Обходя их по часовой стрелке (см. рис. 2.17.3), получим 2 уравнения для контурных токов:

$$\begin{cases} \underline{I}_{K1}(R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 + 2M)) - \underline{I}_{K2}(R_2 + j\omega(L_2 + M)) = \underline{U}; \\ \underline{I}_{K2}(R_1 + j\omega L_2) - \underline{I}_{K1}(R_2 + j\omega(L_2 + M)) = 0. \end{cases}$$

Подставляя числовые данные, получим:

$$\begin{cases} 134,16e^{j63,43^\circ} \underline{I}_{K1} - 67,1e^{j63,43^\circ} \underline{I}_{K2} = 100; \\ -67,1e^{j63,43^\circ} \underline{I}_{K1} + 50e^{j53,13^\circ} \underline{I}_{K2} = 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{K1} = 2,07e^{-j44^\circ} \text{ А;} \quad \underline{I}_3 = \underline{I}_{K2} = 2,77e^{-j37,7^\circ} \text{ А;}$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{K1} - \underline{I}_{K2} = 0,825e^{-j172,9^\circ} \text{ А.}$$

2.18. Дано: $R_1 = 10 \text{ Ом}$, $R_2 = 20 \text{ Ом}$, $R_3 = 25 \text{ Ом}$, $L_1 = 4 \text{ мГн}$, $L_2 = 6 \text{ мГн}$. В схеме (рис. 2.18.1) определить R_4 и M , при которых мост уравновешен.

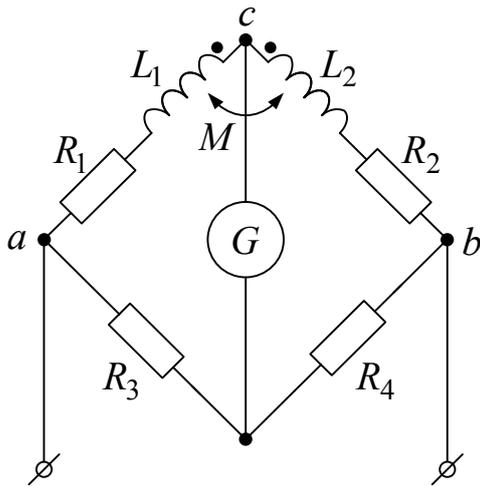


Рис. 2.18.1

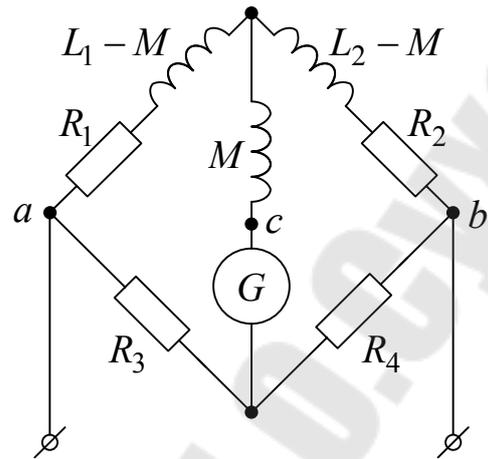


Рис. 2.18.2

Решение

Произведём развязывание индуктивных связей, т.е. преобразуем исходную схему (рис. 2.18.1) в эквивалентную, не содержащую взаимных индуктивностей (рис. 2.18.2); при этом следует обратить внимание на появление новой узловой точки. Для последней схемы записываем условие равновесия моста:

$$[R_1 + j\omega(L_1 - M)]R_4 = [R_2 + j\omega(L_2 - M)]R_3.$$

Приравняем соответственно вещественные и мнимые составляющие:

$$R_1 R_4 = R_2 R_3;$$

$$\omega(L_1 - M)R_4 = \omega(L_2 - M)R_3.$$

Решая эти уравнения, найдём: $R_4 = 50 \text{ Ом}$, $M = 2 \text{ мГн}$.

ГЛАВА 3
ЦЕПИ НЕСИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

Вводные положения

Всякая периодическая функция $f(t)$ с периодом T может быть разложена в тригонометрический ряд. Это разложение можно записать в двух формах:

$$f(t) = \frac{a_{(0)}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{(n)} \cos n\omega_1 t + b_{(n)} \sin n\omega_1 t); \quad (3.1)$$

$$f(t) = \frac{a_{(0)}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{(n)} \sin(n\omega_1 t + \psi_{(n)}), \quad (3.2)$$

где $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ – частота основной (первой) гармоники. Коэффициенты ряда (3.1) выражаются равенствами:

$$a_{(0)} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt; \quad a_{(n)} = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega_1 t dt; \quad b_{(n)} = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega_1 t dt. \quad (3.3)$$

Коэффициенты ряда (3.2) определяют по формулам:

$$c_{(n)} = \sqrt{a_{(n)}^2 + b_{(n)}^2}; \quad \psi_{(n)} = \arctg \frac{a_{(n)}}{b_{(n)}}.$$

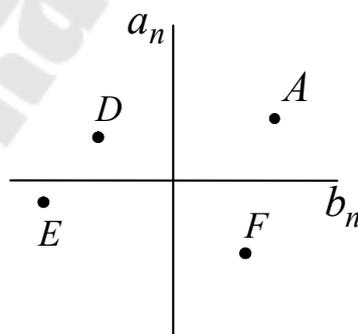


Рис. 3.1

При определении угла $\psi_{(n)}$ следует установить, в какой четверти координатной плоскости находится этот угол (рис. 3.1). Так, если $a_{(n)}$ и $b_{(n)}$ положительны (точка A), то угол $\psi_{(n)}$ лежит в первой четверти;

если $a_{(n)} > 0$, а $b_{(n)} < 0$ (точка D), то $\psi_{(n)}$ – во второй четверти; если $a_{(n)}$ и $b_{(n)}$ отрицательны (точка E), то $\psi_{(n)}$ – в третьей четверти; если же $a_{(n)} < 0$, а $b_{(n)} > 0$ (точка F), то угол $\psi_{(n)}$ лежит в четвертой четверти.

При использовании второй формы разложения (формула (3.2)) амплитуды гармоник $\tilde{h}_{(n)}$ не зависят от выбора начала отсчета: при сдвиге начала отсчета вдоль оси времени t на \tilde{t} секунд амплитуды $c_{(n)}$ сохраняются, а фазы $\psi_{(n)}$ получают приращение $\pm \omega_n \tilde{t}$.

Наиболее часто встречающиеся на практике Фурье-разложения приведены в табл. 3.1.

Действующее значение периодической величины:

$$F = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [f(t)]^2 dt}.$$

Действующие значения периодических величин, например, токов, не зависят от начальных фаз их гармонических составляющих и определяются по действующим значениям гармоник:

$$I = \sqrt{I_{(0)}^2 + \frac{I_{(1)m}^2}{2} + \frac{I_{(2)m}^2}{2} + \dots} = \sqrt{I_{(0)}^2 + I_{(1)}^2 + I_{(2)}^2 + \dots}.$$

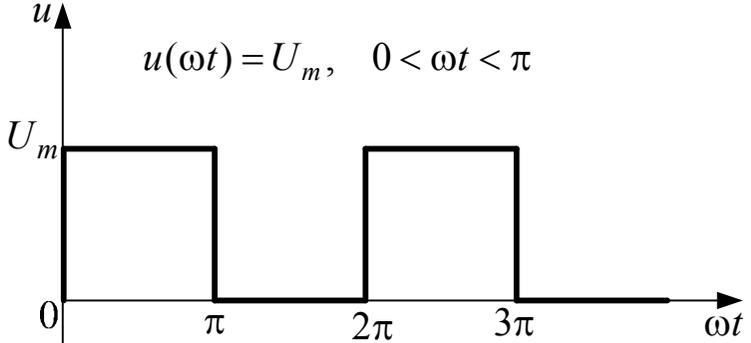
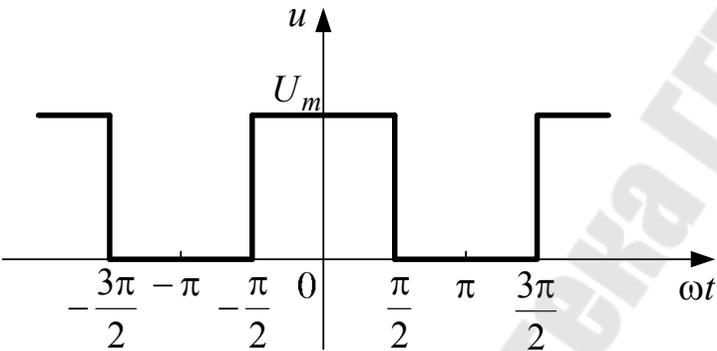
Если источник периодического несинусоидального напряжения подключен к какой-либо электрической схеме, то расчет токов в такой схеме проводится на основе метода наложения. Гармонические составляющие токов и напряжений находят по отдельности для каждой из гармоник питающего напряжения с помощью обычных приемов расчета цепей постоянного и синусоидального тока. При этом для k -й гармоники индуктивное и емкостное сопротивление соответственно равны:

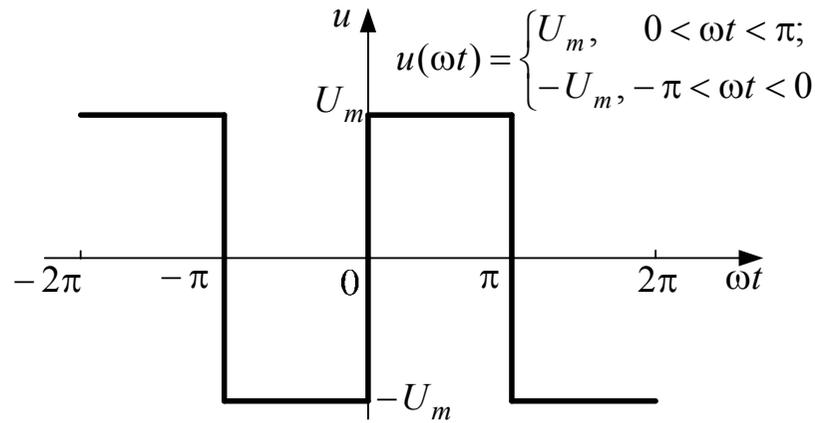
$$X_{L(k)} = k\omega_1 L; \quad X_{C(k)} = \frac{1}{k\omega_1 C}.$$

Активная (P) и реактивная (Q) мощность несинусоидальной схемы:

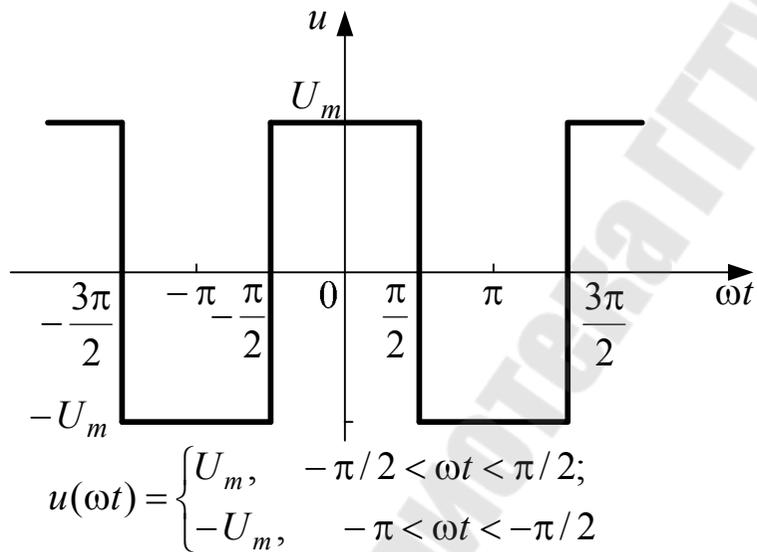
$$P = \sum_{n=0}^{\infty} U_{(n)} I_{(n)} \cos \varphi_{(n)}; \quad Q = \sum_{n=0}^{\infty} U_{(n)} I_{(n)} \sin \varphi_{(n)}.$$

Наиболее часто встречающиеся на практике Фурье-разложения

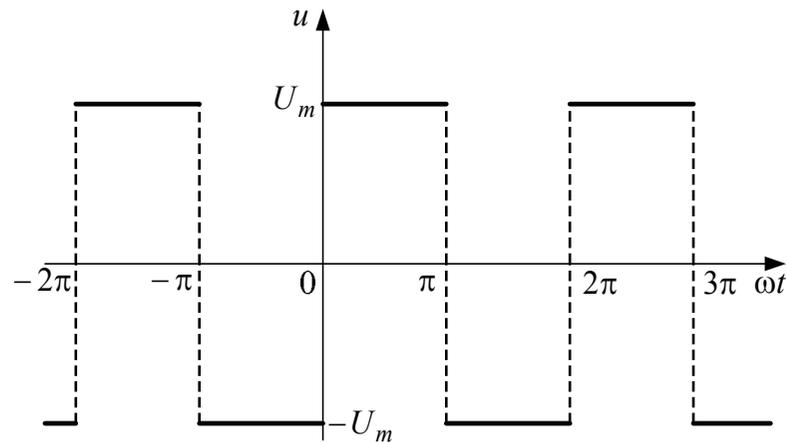
 <p>$u(\omega t) = U_m, \quad 0 < \omega t < \pi$</p>	$u(\omega t) = \frac{U_m}{2} + \frac{2U_m}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{\sin 3\omega t}{3} + \frac{\sin 5\omega t}{5} + \dots \right)$
 <p>$u(\omega t) = U_m, \quad -\pi/2 < \omega t < \pi/2$</p>	$u(\omega t) = \frac{U_m}{2} + \frac{2U_m}{\pi} \left(\cos \omega t - \frac{\cos 3\omega t}{3} + \frac{\cos 5\omega t}{5} + \dots \right)$



$$u(\omega t) = \frac{4U_m}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{\sin 3\omega t}{3} + \frac{\sin 5\omega t}{5} + \dots \right)$$

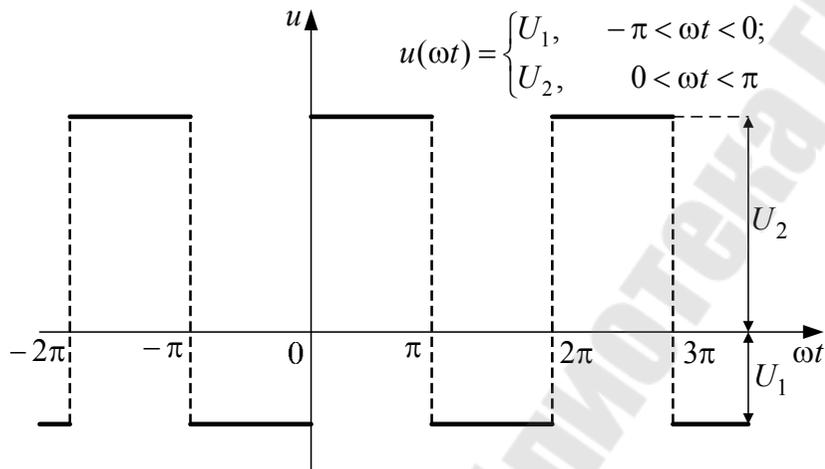


$$u(\omega t) = \frac{4U_m}{\pi} \left(\cos \omega t - \frac{\cos 3\omega t}{3} + \frac{\cos 5\omega t}{5} - \dots \right)$$



$$u(\omega t) = \begin{cases} -U_m, & -\pi < \omega t < 0; \\ U_m, & 0 < \omega t < \pi, U_m > 0 \end{cases}$$

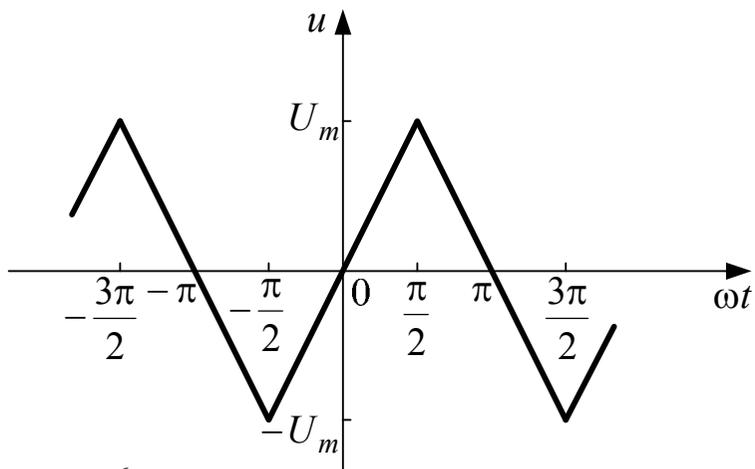
$$u(\omega t) = \frac{4U_m}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{\sin 3\omega t}{3} + \frac{\sin 5\omega t}{5} + \dots \right)$$



$$u(\omega t) = \begin{cases} U_1, & -\pi < \omega t < 0; \\ U_2, & 0 < \omega t < \pi \end{cases}$$

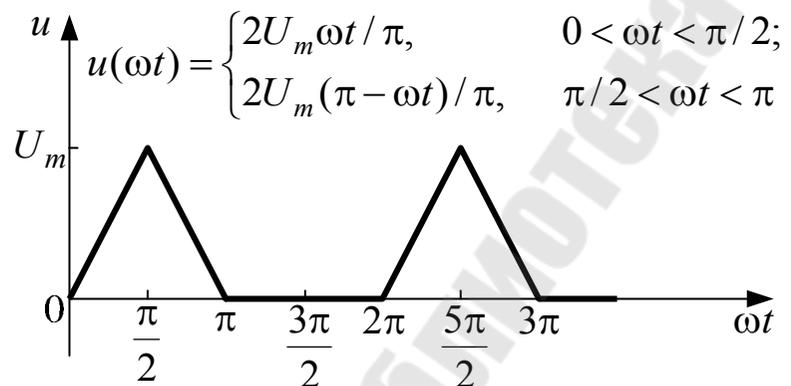
$$u(\omega t) = \frac{U_1 + U_2}{2} - 2 \frac{U_1 - U_2}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{\sin 3\omega t}{3} + \frac{\sin 5\omega t}{5} + \dots \right)$$

8



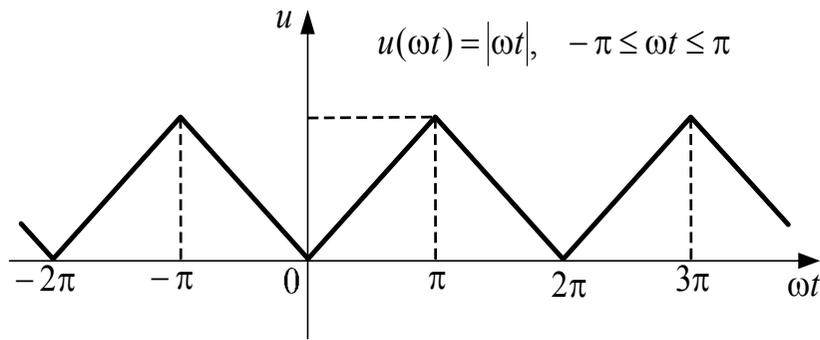
$$u(\omega t) = \begin{cases} U_m \omega t / \pi, & -\pi/2 < \omega t < \pi/2; \\ U_m \omega t (2\pi - \omega t) / \pi, & -\pi/2 < \omega t < \pi; \\ -2U_m \omega t (\pi + \omega t) / \pi, & -\pi/2 < \omega t < -\pi/2 \end{cases}$$

$$u(\omega t) = \frac{8U_m}{\pi^2} \left(\sin \omega t - \frac{\sin 3\omega t}{9} + \frac{\sin 5\omega t}{25} + \dots \right)$$

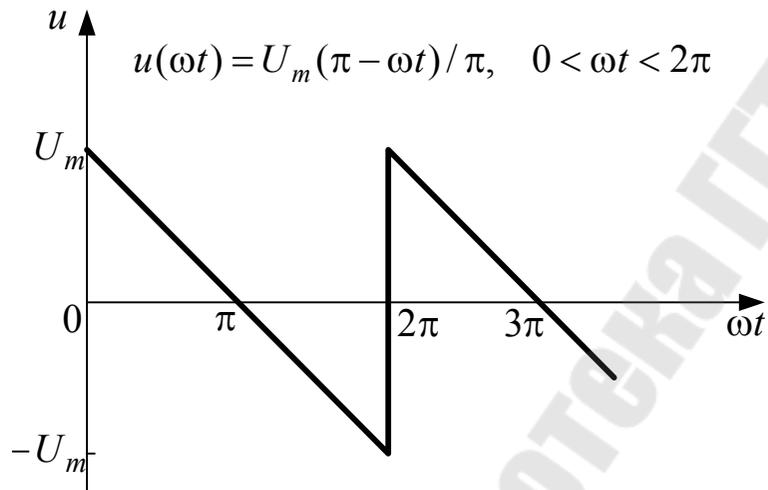


$$u(\omega t) = \begin{cases} 2U_m \omega t / \pi, & 0 < \omega t < \pi/2; \\ 2U_m (\pi - \omega t) / \pi, & \pi/2 < \omega t < \pi \end{cases}$$

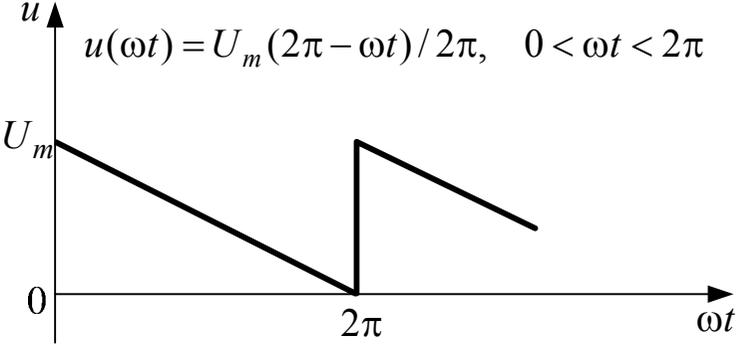
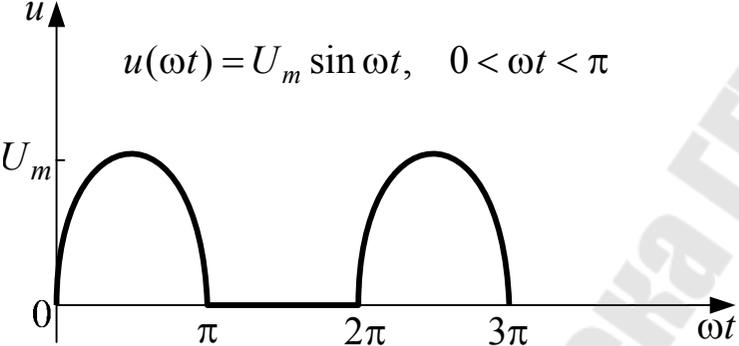
$$u(\omega t) = \frac{U_m}{4} + \frac{4U_m}{\pi^2} \left(\sin \omega t - \frac{\cos 2\omega t}{2} + \frac{\sin 3\omega t}{9} + \dots \right)$$

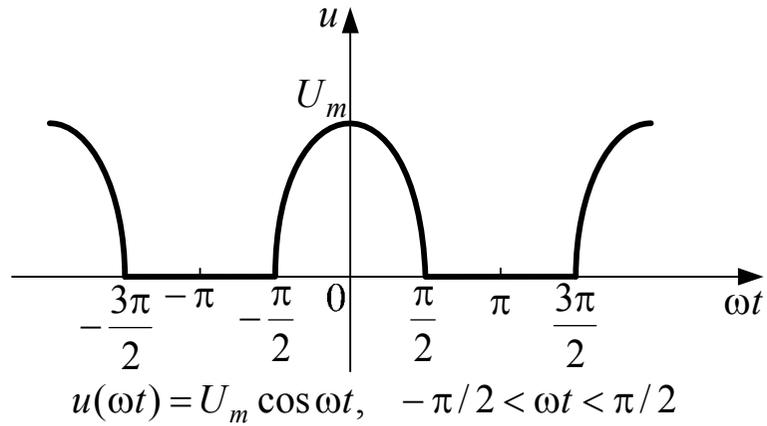


$$u(\omega t) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \left(\cos \omega t + \frac{\cos 3\omega t}{9} + \frac{\cos 5\omega t}{25} + \dots \right)$$

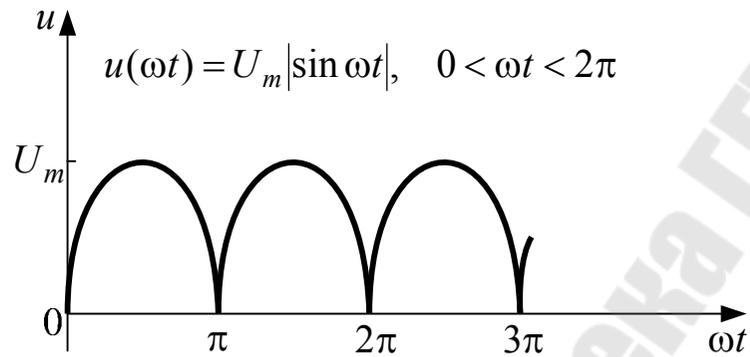


$$u(\omega t) = \frac{2U_m}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{\sin 2\omega t}{2} + \frac{\sin 3\omega t}{3} + \dots \right)$$

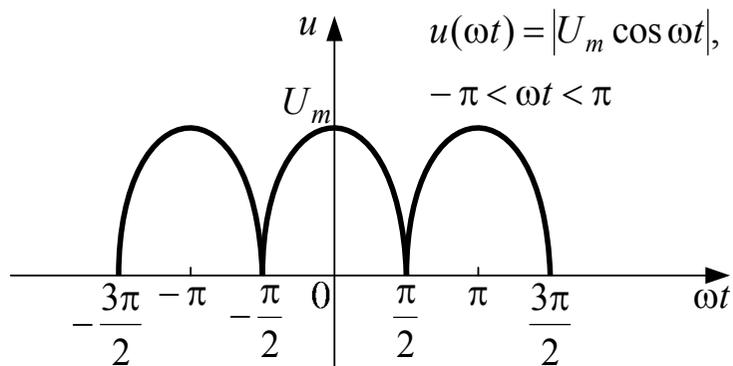
<p>u</p> <p>$u(\omega t) = U_m(2\pi - \omega t) / 2\pi, \quad 0 < \omega t < 2\pi$</p>  <p>U_m</p> <p>0</p> <p>2π</p> <p>ωt</p>	$u(\omega t) = \frac{U_m}{4} + \frac{4U_m}{\pi^2} \left(\sin \omega t - \frac{\cos 2\omega t}{2} + \frac{\sin 3\omega t}{9} + \dots \right)$
<p>u</p> <p>$u(\omega t) = U_m \sin \omega t, \quad 0 < \omega t < \pi$</p>  <p>U_m</p> <p>0</p> <p>π</p> <p>2π</p> <p>3π</p> <p>ωt</p>	$u(\omega t) = \frac{U_m}{\pi} + 2U_m \left(\frac{\sin \omega t}{4} - \frac{\cos 2\omega t}{3\pi} - \frac{\cos 4\omega t}{15\pi} - \dots \right)$



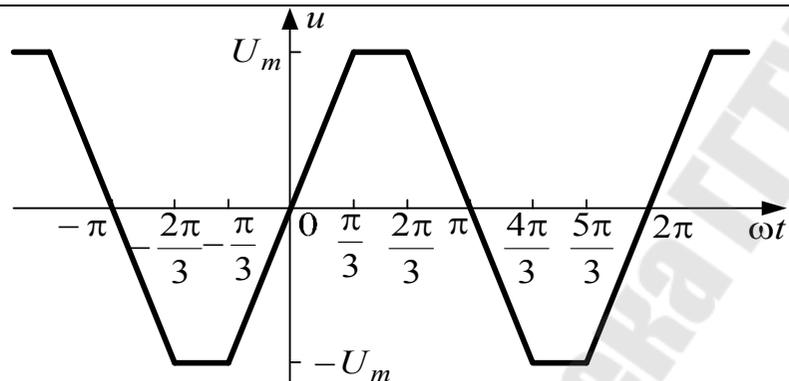
$$u(\omega t) = \frac{U_m}{\pi} + 2U_m \left(\frac{\cos \omega t}{4} + \frac{\cos 2\omega t}{3\pi} + \frac{\cos 4\omega t}{15\pi} + \dots \right)$$



$$u(\omega t) = \frac{U_m}{\pi} + 2U_m \left(\frac{\sin \omega t}{4} - \frac{\cos 2\omega t}{3\pi} - \frac{\cos 4\omega t}{15\pi} - \dots \right)$$



$$u(\omega t) = \frac{2U_m}{\pi} + \frac{4U_m}{\pi} \left(\frac{\cos 3\omega t}{3} + \frac{\cos 4\omega t}{15} - \frac{\cos 6\omega t}{35} + \dots \right)$$



$$u(\omega t) = \begin{cases} 3U_m \omega t / \pi, & -\pi/3 \leq \omega t \leq \pi/3; \\ U_m, & \pi/3 \leq \omega t \leq 2\pi/3; \\ -U_m, & -2\pi/3 \leq \omega t \leq -\pi/3; \\ 3U_m(\pi - \omega t) / \pi, & 2\pi/3 \leq \omega t \leq \pi; \\ -3U_m(\pi + \omega t) / \pi, & -\pi \leq \omega t \leq -2\pi/3 \end{cases}$$

$$u(\omega t) = \frac{6U_m \sqrt{3}}{\pi^2} \left(\sin \omega t - \frac{\sin 5\omega t}{25} + \frac{\sin 7\omega t}{49} - \dots \right)$$

Примеры решения задач

3.1. Получить разложение в ряд Фурье импульсов напряжения постоянной амплитуды $U_m = 10$ В длительностью $\tau = 0,2$ мс с периодом повторения $T = 1$ мс.

Решение

Заданное напряжение можно выразить следующим образом:

$$u(t) = f_1(t) = U_m, \quad 0 < t < \tau;$$

$$u(t) = f_2(t) = 0, \quad \tau < t < T.$$

Область интегрирования содержит два участка. С помощью формул (3.3) находим коэффициенты ряда Фурье:

$$\frac{a_{(0)}}{2} = \left[\int_0^{\tau} f_1(t) dt + \int_{\tau}^T f_2(t) dt \right] = \frac{1}{T} \int_0^{\tau} U_m dt = U_m \frac{\tau}{T} = 10 \frac{0,2}{1} = 2;$$

$$\begin{aligned} a_{(n)} &= \frac{2}{T} \left[\int_0^{\tau} f_1(t) \cos n\omega_1 t dt + \int_{\tau}^T f_2(t) \cos n\omega_1 t dt \right] = \\ &= \frac{2}{T} \int_0^{\tau} U_m \cos n\omega_1 t dt = \frac{2U_m}{n\omega_1 T} \sin n\omega_1 \tau = \frac{U_m}{\pi n} \sin n\omega_1 \tau; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{(n)} &= \frac{2}{T} \left[\int_0^{\tau} f_1(t) \sin n\omega_1 t dt + \int_{\tau}^T f_2(t) \sin n\omega_1 t dt \right] = \\ &= \frac{2}{T} \int_0^{\tau} U_m \sin n\omega_1 t dt = -\frac{2U_m}{n\omega_1 T} [\cos n\omega_1 t] = \frac{U_m}{\pi n} (1 - \cos n\omega_1 \tau); \end{aligned}$$

$$U_{m(n)} = \sqrt{a_{(n)}^2 + b_{(n)}^2} = \frac{U_m}{\pi n} \sqrt{\sin^2 n\omega_1 \tau + (1 - \cos n\omega_1 \tau)^2} = \frac{2U_m}{\pi n} \sin \frac{n\omega_1 \tau}{2};$$

$$\operatorname{tg} \psi_{(n)} = \frac{a_{(n)}}{b_{(n)}} = \frac{\sin n\omega_1 \tau}{1 - \cos n\omega_1 \tau} = \operatorname{ctg} \frac{n\omega_1 \tau}{2} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{n\omega_1 \tau}{2} \right);$$

$$\psi_{(n)} = \frac{\pi}{2} - n\omega_1 \frac{\tau}{2}.$$

Вычисляем коэффициенты второй формы ряда Фурье и начальные фазы гармоник. При этом учитываем, что

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1 \cdot 10^{-3}} = 2\pi \cdot 10^3 \text{ c}^{-1}; \quad \omega_1 \tau = 2\pi \cdot 10^{-3} \cdot 0,2 \cdot 10^{-3} = 0,4 \text{ рад.}$$

Для удобства результаты расчетов сведены в табл. 3.2 (расчеты проведены для n от 1 до 10; аналогичные расчеты для $n = 11-15$ следует проделать самостоятельно).

Искомый ряд:

$$u(t) = [2 + 3,74 \sin(\omega_1 t + 0,3\pi) + 3,03 \sin(2\omega_1 t + 0,1\pi) + 2,02 \sin(3\omega_1 t - 0,1\pi) + 0,935 \sin(4\omega_1 t - 0,3\pi) - 0,624 \times \sin(6\omega_1 t - 0,7\pi) - 0,866 \sin(7\omega_1 t - 0,9\pi) - 0,757 \sin(8\omega_1 t - 1,1\pi) - 0,416 \sin(9\omega_1 t - 1,3\pi) + \dots], \text{ В.}$$

Учитывая, что

$$-\sin(n\omega_1 t - \psi_{(n)}) = \sin(n\omega_1 t - \psi_{(n)} \pm \pi),$$

окончательно получим:

$$u(t) = [2 + 3,74 \sin(\omega_1 t + 0,3\pi) + 3,03 \sin(2\omega_1 t + 0,1\pi) + 2,02 \sin(3\omega_1 t - 0,1\pi) + 0,935 \sin(4\omega_1 t - 0,3\pi) + 0,624 \sin(6\omega_1 t + 0,3\pi) + 0,866 \sin(7\omega_1 t + 0,1\pi) + 0,757 \sin(8\omega_1 t - 0,1\pi) + 0,416 \sin(9\omega_1 t - 0,3\pi) + \dots], \text{ В.}$$

Таблица 3.2

Сводка результатов расчета к решению задачи 3.1

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n\omega_1 = \omega_{(n)}$	0	$2\pi \cdot 10^3$	$4\pi \cdot 10^3$	$6\pi \cdot 10^3$	$8\pi \cdot 10^3$	$10\pi \cdot 10^3$	$12\pi \cdot 10^3$	$14\pi \cdot 10^3$	$16\pi \cdot 10^3$	$18\pi \cdot 10^3$	$20\pi \cdot 10^3$
$\omega_n \tau / 2 = \omega_n \cdot 10^{-4}$	0	0,2 π	0,4 π	0,6 π	0,8 π	π	1,2 π	1,4 π	1,6 π	1,8 π	2 π
$\sin \frac{n\omega_1 \tau}{2}$	0	0,588	0,951	0,951	0,588	0	-0,588	-0,951	-0,951	-0,588	0
$U_{m(n)}$	2	3,74	3,03	2,02	0,935	0	-0,624	-0,866	-0,757	-0,416	0
$\Psi_{(n)}$	-	0,3 π	0,1 π	-0,1 π	-0,3 π	-	-0,1 π	-0,9 π	-1,1 π	-1,3 π	-

3.2. Записать три первые гармоники разложения периодического несинусоидального напряжения, развертка которого показана на рис. 3.2.1.

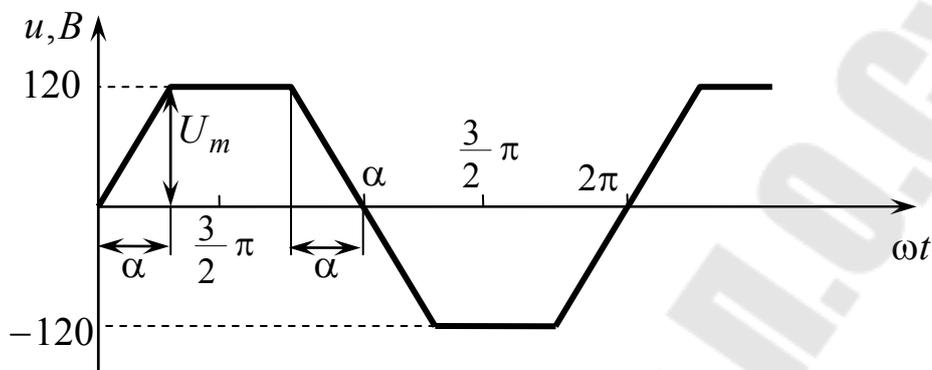


Рис. 3.2.1

Решение

Для заданной периодической функции имеется табличное разложение в ряд Фурье:

$$u(t) = \frac{4U_m}{\alpha\pi} \left(\sin \alpha \sin \omega t + \frac{1}{9} \sin 3\alpha \sin 3\omega t + \frac{1}{25} \sin 5\alpha \sin 5\omega t + \dots \right).$$

В нашем случае $U_m = 120 \text{ В}$, $\alpha = \pi/4 \text{ рад}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{4 \cdot 120 \cdot 4}{\pi \cdot \pi} \left(\sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin \omega t + \frac{1}{9} \sin \frac{3\pi}{4} \cdot \sin 3\omega t + \frac{1}{25} \sin \frac{5\pi}{4} \cdot \sin 5\omega t \right) = \\ &= 137,6 \sin \omega t + 15,3 \sin 3\omega t - 5,5 \sin 5\omega t = 137,6 \sin \omega t + 15,3 \sin 3\omega t + \\ &+ 5,5 \sin(5\omega t - 180^\circ) \text{ В.} \end{aligned}$$

3.3. Записать ряд Фурье для функции $u_2(t)$, представленной на рис. 3.3.1.

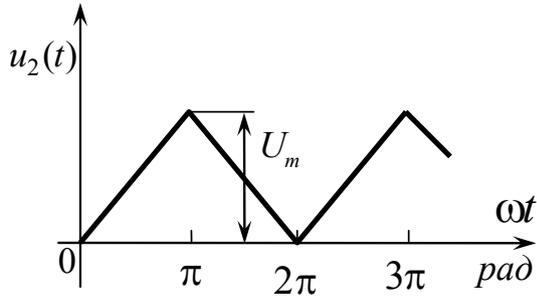


Рис. 3.3.1

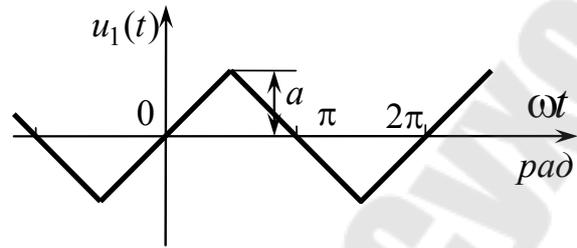


Рис. 3.3.2

Решение

Известно табличное разложение функции

$$u_1(t) = \frac{8a}{\pi^2} \left(\sin \omega t - \frac{1}{9} \sin 3\omega t + \frac{1}{25} \sin 5\omega t + \dots \right)$$

(см. рис. 3.3.2). Сместим $u_1(t)$ на четверть периода вправо, что соответствует уменьшению t на величину $T/4$ или ωt на величину $\omega T/4 = 2\pi/4 = \pi/2$. Получим функцию:

$$f_1'(t) = \frac{8a}{\pi^2} \left[\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{9} \sin\left(3\omega t - \frac{3\pi}{2}\right) + \frac{1}{25} \sin\left(5\omega t - \frac{5\pi}{2}\right) + \dots \right].$$

С учетом того, что

$$\begin{aligned} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) &= -\cos \omega t; & \sin\left(3\omega t - \frac{3\pi}{2}\right) &= -\cos 3\omega t; \\ \sin\left(5\omega t - \frac{5\pi}{2}\right) &= -\cos 5\omega t, \end{aligned}$$

получим:

$$f_1'(t) = \frac{8a}{\pi^2} \left(-\cos \omega t - \frac{1}{9} \cos 3\omega t - \frac{1}{25} \cos 5\omega t - \dots \right).$$

В завершение заменим амплитуду a на $\frac{U_m}{2}$ и поднимем функцию на величину ее постоянной составляющей. Искомое разложение имеет вид:

$$u_2(t) = \frac{U_m}{2} - \frac{4U_m}{\pi^2} \left(\cos \omega t + \frac{1}{9} \cos 3\omega t + \frac{1}{25} \cos 5\omega t + \dots \right).$$

3.4. Определить мгновенное значение тока $i(t)$ в схеме рис. 3.4.1, если $u(t) = 75 + 106\sqrt{2} \sin(\omega t + 45^\circ) - 50\sqrt{2} \sin(2\omega t - 45^\circ)$, а элементы схемы имеют сопротивления $\omega L = \frac{1}{\omega C} = 100$ Ом, $R = 150$ Ом.

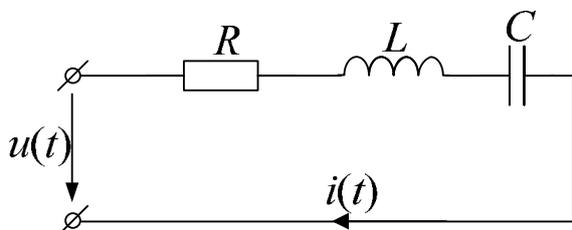


Рис. 3.4.1

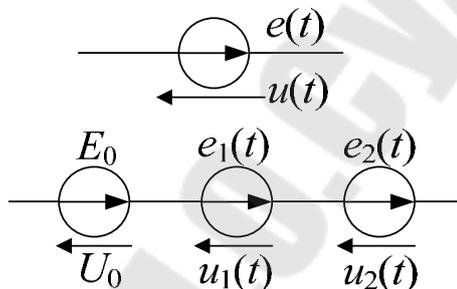


Рис. 3.4.2

Решение

Расчет линейной схемы с несинусоидальными источниками ведем по принципу наложения. Каждое слагаемое суммы

$$u(t) = u_{(0)} + u_{(1)}(t) + u_{(2)}(t) + \dots$$

представляется отдельным источником (рис. 3.4.2). Сопротивления элементов схемы для каждой гармонической составляющей определяются частотой соответствующего источника:

$$X_{L(k)} = k\omega_1 L; \quad X_{C(k)} = \frac{1}{k\omega_1 C}.$$

При этом активное сопротивление R от частоты не зависит.

Ток схемы не содержит постоянной составляющей ($I_{(0)} = 0$), т.к. в схеме есть конденсатор ($X_{C(0)} = \infty$).

Расчет первой гармоники:

$$\underline{U}_{m(1)} = 106 \cdot \sqrt{2} \cdot e^{j45^\circ} \text{ В}; \quad X_{L(1)} = \omega L = 100 \text{ Ом}; \quad X_{C(1)} = \frac{1}{\omega C} = 100 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{(1)} = R + j(X_{L(1)} - X_{C(1)}) = 150 + j(100 - 100) = 150 \text{ Ом}.$$

Для первой гармоники наблюдается резонанс напряжений. При этом

$$\underline{I}_{m(1)} = \frac{\underline{U}_{m(1)}}{\underline{Z}_{(1)}} = \frac{106 \cdot \sqrt{2} \cdot e^{j45^\circ}}{150} = 1,0 \cdot e^{j45^\circ} \text{ А}.$$

Расчет второй гармонике:

$$\underline{U}_{m(2)} = -50 \cdot \sqrt{2} \cdot e^{-j45^\circ} = 50 \cdot \sqrt{2} \cdot e^{j135^\circ} \text{ В};$$

$$X_{L(2)} = 2\omega L = 200 \text{ Ом. } X_{C(2)} = \frac{1}{2\omega C} = 50 \text{ Ом};$$

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{(2)} &= R + j(X_{L(2)} - X_{C(2)}) = 150 + j(200 - 50) + 150 + j150 = \\ &= 300\sqrt{2} \cdot e^{j45^\circ} \text{ Ом}; \end{aligned}$$

$$\underline{I}_{m(2)} = \frac{\underline{U}_{m(2)}}{\underline{Z}_{(2)}} = \frac{50\sqrt{2} \cdot e^{j135^\circ}}{300\sqrt{2} \cdot e^{j45^\circ}} = 0,166e^{j90^\circ} \text{ А.}$$

Мгновенное значение искомого тока:

$$i(t) = I_{(0)} + i_{(1)}(t) + i_{(2)}(t) = 0 + 1 \sin(\omega t + 45^\circ) + 0,166 \sin(\omega t + 90^\circ), \text{ А.}$$

3.5. В схеме рис. 3.5.1 $R_1 = 6 \text{ Ом}$, $R_2 = 5 \text{ Ом}$, $R_3 = 20 \text{ Ом}$, $u(t) = U_{(0)} + U_{m(1)} \sin \omega_1 t + U_{m(3)} \sin(3\omega_1 t + \psi_{(3)})$, где $U_{(0)} = 30 \text{ В}$; $U_{m(1)} = 100 \text{ В}$; $U_{m(3)} = 40 \text{ В}$; $\psi_{(3)} = 20^\circ$. Реактивные элементы цепи на основной частоте имеют сопротивления $\omega_1 L = 12 \text{ Ом}$ и $1/(\omega_1 C) = 30 \text{ Ом}$. Записать выражение мгновенного значения тока неразветвленного участка схемы. Определить действующее значение каждого тока. Вычислить мощность, потребляемую в схеме.

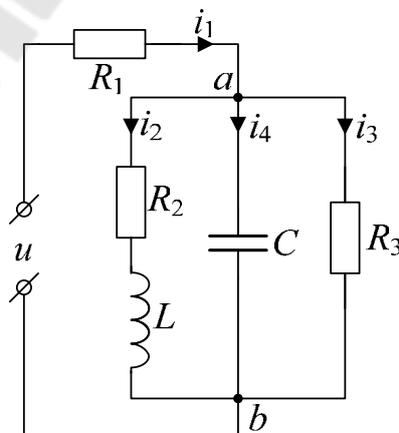


Рис. 3.5.1

Решение

Расчет постоянной составляющей:

Эквивалентное сопротивление схемы и постоянные составляющие ее токов:

$$R_{\text{эк}(0)} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 6 + \frac{5 \cdot 20}{5 + 20} = 10 \text{ Ом},$$

$$I_{1(0)} = U_0 / R_{\hat{y}(0)} = 30 / 10 = 3 \text{ А};$$

$$I_{2(0)} = I_{1(0)} \frac{R_3}{R_2 + R_3} = 3 \cdot \frac{20}{5 + 20} = 2,4 \text{ А};$$

$$I_{3(0)} = I_{1(0)} - I_{2(0)} = 3 - 2,4 = 0,6 \text{ А}; \quad I_{4(0)} = 0.$$

Расчет первой гармоники:

Определим комплексное сопротивление трех параллельных ветвей:

$$\begin{aligned} 1/\underline{Z}_{ab(1)} &= 1/\underline{Z}_{2(1)} + 1/\underline{Z}_{3(1)} + 1/\underline{Z}_{4(1)} = \\ &= 1/(5 + j12) + 1/20 + 1/(-j30) = (79,6 - j37,7) \cdot 10^{-3} \text{ См}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\underline{Z}_{ab(1)} = \frac{1}{(79,6 - j37,7) \cdot 10^{-3}} = 11,4e^{j25^\circ 20'} = (10,25 + j4,83) \text{ Ом}.$$

Комплексное сопротивление всей схемы:

$$\underline{Z}_{\hat{y}(1)} = R_1 + \underline{Z}_{ab(1)} = 16,25 + j4,83 = 17e^{j16^\circ 30'} \text{ Ом}.$$

Комплексы амплитуд тока неразветвленной части схемы, межузлового напряжения и токов параллельных ветвей находим по закону Ома:

$$\underline{I}_{1m(1)} = \frac{U_{m(1)}}{\underline{Z}_{\text{эк}(1)}} = 100 / 17e^{j16^\circ 30'} = 5,88e^{-j16^\circ 30'} \text{ А};$$

$$\underline{U}_{abm(1)} = \underline{I}_{1m(1)} \underline{Z}_{ab(1)} = 5,88e^{-j16^\circ 30'} \cdot 11,4e^{j25^\circ 20'} = 67e^{j8^\circ 50'} \text{ В};$$

$$\underline{I}_{2m(1)} = \underline{U}_{abm(1)} / \underline{Z}_{2(1)} = 67e^{j8^\circ 50'} / (5 + j12) = 5,15e^{-j58^\circ 30'} \text{ А};$$

$$\underline{I}_{3m(1)} = \underline{U}_{abm(1)} / \underline{Z}_{3(1)} = 67e^{j8^\circ 50'} / 20 = 3,35e^{j8^\circ 50'} \text{ A};$$

$$\underline{I}_{4m(1)} = \underline{U}_{abm(1)} / \underline{Z}_{4(1)} = 67e^{j8^\circ 50'} / (-j30) = 2,23e^{j98^\circ 50'} \text{ A}.$$

Расчет для третьей гармоники проводится аналогично:

$$\underline{Z}_{1(3)} = 6 \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_{2(3)} = R_2 + j3\omega_1 L = 5 + j36 = 36,5e^{j82^\circ 10'} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{3(3)} = 20 \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_{4(3)} = -j1/(3\omega_1 C) = -j1/3 \cdot 30 = -j10 \text{ Ом};$$

$$1/\underline{Z}_{ab(3)} = 1/(5 + j36) + 1/20 + 1/(-j10) = (53,77 + j72,8) \cdot 10^{-3} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{ab(3)} = 6,56 - j8,9 = 11,05e^{-j53^\circ 35'} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{\dot{y}\hat{e}(3)} = \underline{Z}_{1(3)} + \underline{Z}_{ab(3)} = 12,56 - j8,9 = 15,35e^{-j35^\circ 5'} \text{ Ом};$$

$$\underline{I}_{1m(3)} = 40e^{j20^\circ} / 15,35e^{-j35^\circ 5'} = 2,6e^{j55^\circ 5'} \text{ A};$$

$$\underline{U}_{abm(3)} = 2,6e^{j55^\circ 5'} \cdot 11,05e^{-j53^\circ 35'} = 28,7e^{j1^\circ 30'} \text{ Ом};$$

$$\underline{I}_{2m(3)} = \underline{U}_{abm(3)} / \underline{Z}_{2(3)} = 28,7e^{j1^\circ 30'} / 36,5e^{j82^\circ 10'} = 0,79e^{-j80^\circ 40'} \text{ A};$$

$$\underline{I}_{3m(3)} = \underline{U}_{abm(3)} / \underline{Z}_{3(3)} = 28,7e^{j1^\circ 30'} / 20 = 1,44e^{j1^\circ 30'} \text{ A};$$

$$\underline{I}_{4m(3)} = \underline{U}_{abm(3)} / \underline{Z}_{4(3)} = 28,7e^{j1^\circ 30'} / 10e^{-j90^\circ} = 2,87e^{j91^\circ 30'} \text{ A}.$$

Ток неразветвленной части схемы:

$$i(t) = [3 + 5,88\sin(\omega_1 t - 16^\circ 30') + 2,6\sin(3\omega_1 t + 55^\circ 5')] \text{ A}.$$

Действующие значения токов:

$$I_1 = \sqrt{3^2 + \frac{5,88^2 + 2,6^2}{2}} = 5,45 \text{ A}; \quad I_2 = \sqrt{2,4^2 + \frac{5,15^2 + 0,79^2}{2}} = 4,4 \text{ A};$$

$$I_3 = \sqrt{0,6^2 + \frac{3,52^2 + 1,44^2}{2}} = 2,64 \text{ A}; \quad I_4 = \sqrt{\frac{2,32^2 + 2,87^2}{2}} = 2,57 \text{ A}.$$

Мощность, расходуемая в схеме:

$$P = 30 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 5,88 \cos 16^\circ 30' + \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 2,6 \cos 33^\circ 5' = 415 \text{ Вт.}$$

Проверка:

$$\begin{aligned} P &= I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 = 5,45^2 \cdot 6 + 4,4^2 \cdot 5 + 2,64^2 \cdot 20 = \\ &= 178 + 97 + 140 = 415 \text{ Вт.} \end{aligned}$$

3.6. Рассчитать мгновенные значения токов i_1 и i_3 (рис. 3.6.1), активную мощность P и коэффициент мощности $\cos \varphi$, если на первой гармонике $X_L = 5 \text{ Ом}$, $X_C = 25 \text{ Ом}$, $R = 20 \text{ Ом}$, $i_2 = 10 \sin \omega t + 5 \sin 5\omega t \text{ А}$.

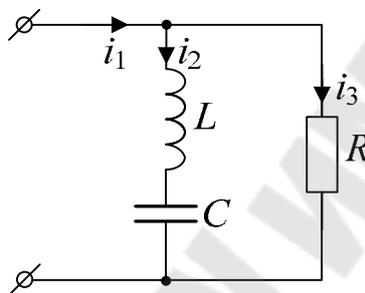


Рис. 3.6.1

Решение

Первая гармоника:

$$\underline{I}_{2m(1)} = 10 \text{ А}; \quad \underline{Z}_{2(1)} = +j5 - j25 = -j20 = 20e^{-j90^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{U}_{2m(1)} = \underline{I}_{2m(1)} \cdot \underline{Z}_{2m(1)} = 10 \cdot 20e^{-j90^\circ} = 200e^{-j90^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{I}_{3m(1)} = \frac{\underline{U}_{2m(1)}}{R} = \frac{200e^{-j90^\circ}}{20} = 10e^{-j90^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_{1m(1)} = \underline{I}_{2m(1)} + \underline{I}_{3m(1)} = 10 - j10 = 10\sqrt{2}e^{-j45^\circ} \text{ А.}$$

Пятая гармоника:

$$\underline{I}_{2m(5)} = 5 \text{ А}; \quad \underline{Z}_{2(5)} = j25 - j5 = j20 = 20e^{j90^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{U}_{2m(5)} = \underline{I}_{2m(5)} \cdot \underline{Z}_{2m(5)} = 5 \cdot 20e^{j90^\circ} = 100e^{j90^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{I}_{3m(5)} = \frac{100e^{j90^\circ}}{20} = 5e^{j90^\circ} \text{ A};$$

$$\underline{I}_{1m(5)} = \underline{I}_{2m(5)} + \underline{I}_{3m(5)} = 5 + j5 = 5\sqrt{2}e^{j45^\circ} \text{ A}.$$

Искомые величины:

$$i_1 = 10\sqrt{2} \sin(\omega t - 45^\circ) + 5\sqrt{2} \sin(5\omega t + 45^\circ) \text{ A};$$

$$i_3 = 10 \sin(\omega t - 90^\circ) + 5 \sin(5\omega t + 90^\circ) \text{ A}.$$

Активная мощность выделяется только в сопротивлении R , поэтому

$$P = U_{2(1)} I_{1(1)} \cos \varphi_{(1)} + U_{2(5)} I_{1(5)} \cos \varphi_{(5)}$$

либо

$$P = P_{R(1)} + P_{R(5)} = U_{23(1)} I_{3(1)} \cos \varphi_{3(1)} + U_{23(5)} I_{3(5)} \cos \varphi_{3(5)}.$$

Имеем:

$$P = P_R = I_{3(1)}^2 R + I_{3(5)}^2 R = \left(\frac{10}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot 20 + \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot 20 = 1000 + 250 = 1250 \text{ Вт}.$$

Рассчитаем полную мощность $S = U_2 \cdot I_1$:

$$U_2 = \sqrt{\left(\frac{200}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{100}{\sqrt{2}}\right)^2} = 158 \text{ В}; \quad I_1 = \sqrt{10^2 + 5^2} = 11,2 \text{ А};$$

$$S = U_2 \cdot I_1 = 158 \cdot 11,2 = 1770 \text{ ВА}.$$

Следовательно, коэффициент мощности $\cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{1250}{1770} = 0,706$.

3.7. Для схемы рис. 3.7.1 определить мгновенные значения токов в ветвях, если $e(t) = 20 \sin(2\omega t - 90^\circ)$ В; $j(t) = 10 + 10 \sin(\omega t + 60^\circ)$, А; $\omega L = \frac{1}{\omega C} = 2$ Ом; $R_1 = R_2 = 4$ Ом.

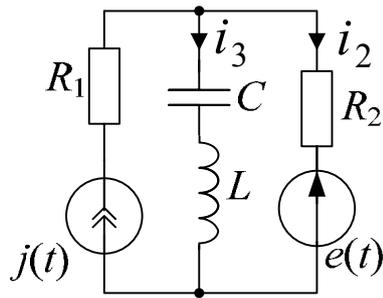


Рис. 3.7.1

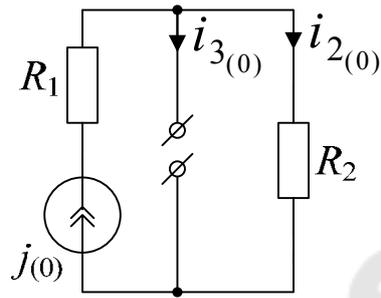


Рис. 3.7.2

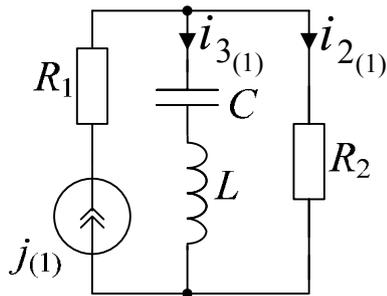


Рис. 3.7.3

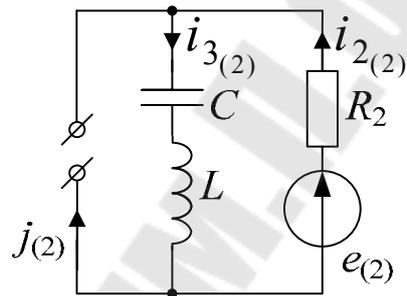


Рис. 3.7.4

Решение

По условию, источник тока содержит нулевую и первую гармоники, а источник ЭДС – только вторую гармонику. С учётом этого токораспределение заданной схемы найдём путём наложения трёх режимов, соответствующих нулевой (рис. 3.7.2), первой (рис. 3.7.3) и второй (рис. 3.7.4) гармоникам.

Для постоянных составляющих имеем: $I_{2(0)} = j_{(0)} = 10 \text{ А}$, $I_{3(0)} = 0$. Для расчёта первой и второй гармоник вначале определим комплексные сопротивления ветвей:

$$\underline{Z}_{1(1)} = \underline{Z}_{2(1)} = R_1 = R_2 = 40 \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_{3(1)} = j\omega L - \frac{j}{j\omega C} = j2 - j2 = 0;$$

$$\underline{Z}_{2(2)} = 4 \text{ Ом}, \quad \underline{Z}_{3(2)} = j2\omega L - j\frac{1}{2\omega C} = j4 - j1 = j3 \text{ Ом}.$$

Следовательно,

$$\underline{I}_{2(1)} = 0, \quad \underline{I}_{3(1)} = \underline{J}_{(1)} = \frac{10}{\sqrt{2}} e^{j60^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{J}_{1(2)} = 0; \quad \underline{I}_{2(2)} = \underline{I}_{3(2)} = \frac{\underline{E}_{(2)}}{\underline{Z}_{2(2)} + \underline{Z}_{3(2)}} = \frac{\left(\frac{20}{\sqrt{2}}\right)e^{-j90^\circ}}{4 + j3} = \frac{4}{\sqrt{2}}e^{-j127^\circ} \text{ А.}$$

Мгновенные значения токов в ветвях без источника тока:

$$i_2 = I_{2(0)} + i_{2(1)} - i_{2(2)} = 10 - 4 \sin(2\omega t - 127^\circ), \text{ А;}$$

$$i_3 = I_{3(0)} + i_{3(1)} + i_{3(2)} = 10 \sin(\omega t + 60^\circ) + 4 \sin(2\omega t - 127^\circ), \text{ А.}$$

Действующие значения токов:

$$I_2 = \sqrt{I_{2(0)}^2 + \left(\frac{I_{2m(2)}}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{10^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2} = 10,39 \text{ А;}$$

$$I_3 = \sqrt{I_{3(0)}^2 + \left(\frac{I_{3m(2)}}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{10}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2} = 7,615 \text{ А.}$$

3.8. Определить показания электромагнитных приборов в схеме рис. 3.8.1, если $u(t) = 4 + 5\sqrt{2} \sin \omega t - 3\sqrt{2} \sin 2\omega t$, В; $R = 5$ Ом, на первой гармонике $X_{L_2} = X_{C_2} = 2$ Ом; $X_{C_3} = 6$ Ом.

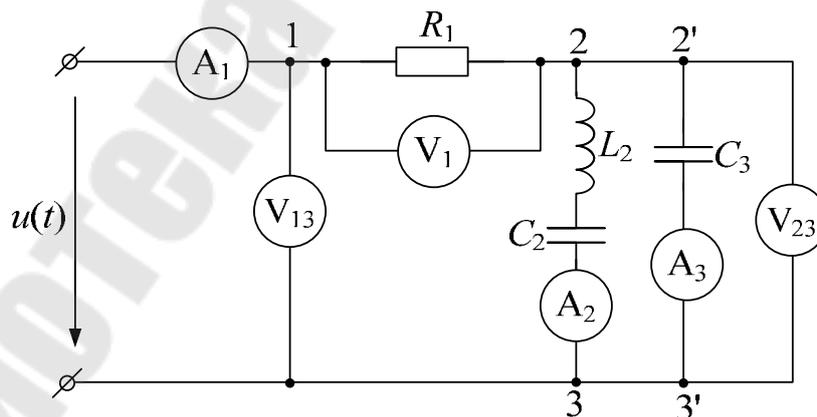


Рис. 3.8.1

Решение

Так как постоянный ток через емкость не протекает,

$$I_{1(0)} = I_{2(0)} = I_{3(0)} = 0; \quad U_{1(0)} = 0; \quad U_{13(0)} = U_{23(0)} = 4 \text{ В.}$$

Расчёт первой гармоники:

В ветви 2–3 резонанс напряжений:

$$X_{2(1)} = X_{L2(1)} - X_{C2(1)} = 0.$$

Следовательно, ветвь 2'–3' закорочена:

$$I_{3(1)} = 0; \quad I_{1(1)} = I_{2(1)} = \frac{U_{(1)}}{R_1} = \frac{5}{5} = 1 \text{ А};$$

$$U_{23(1)} = 0; \quad U_{13(1)} = U_{(1)} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 5 \text{ В.}$$

Расчёт второй гармоники:

$$X_{2(2)} = X_{L2(2)} - X_{C2(2)} = 4 - 1 = 3 \text{ Ом}; \quad X_{3(2)} = X_{C3(2)} = \frac{6}{2} = 3 \text{ Ом.}$$

В параллельных ветвях резонанс токов:

$$\underline{Z}_{23(2)} = \infty; \quad I_{1(2)} = 0, \quad U_{12(2)} = 0; \quad U_{23(2)} = U_{(2)} = 3 \text{ В};$$

$$\underline{I}_{2(2)} = \frac{U_{23(2)}}{X_{2(2)}} = \frac{3}{3} = 1 \text{ А}; \quad \underline{I}_{3(2)} = \frac{U_{23(2)}}{X_{3(2)}} = \frac{3}{3} = 1 \text{ А.}$$

Показания приборов:

$$I_{A1} = \sqrt{I_{1(0)}^2 + I_{1(1)}^2 + I_{1(2)}^2} = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} = 1 \text{ А};$$

$$I_{A2} = \sqrt{I_{2(0)}^2 + I_{2(1)}^2 + I_{2(2)}^2} = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2} = 1,41 \text{ А};$$

$$I_{A3} = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1 \text{ А};$$

$$U_{V1} = \sqrt{U_{1(0)}^2 + U_{1(1)}^2 + U_{1(2)}^2} = \sqrt{0^2 + 5^2 + 0^2} = 5 \text{ В};$$

$$U_{V23} = \sqrt{4^2 + 0^2 + 3^2} = 5 \text{ В}; \quad U = \sqrt{4^2 + 5^2 + 3^2} = 7,07 \text{ В.}$$

3.9. Схема рис. 3.9.1 подключена к источнику питания с напряжением $u(t) = 20 + 80 \sin 500t + 30 \sin(2 \cdot 500t - 45^\circ)$, В. Элементы схемы имеют параметры $R = 20$ Ом, $L_1 = 40$ мГн, $L_2 = 20$ мГн, $C_1 = 100$ мкФ, $C_2 = 50$ мкФ. Определить ток $i(t)$.

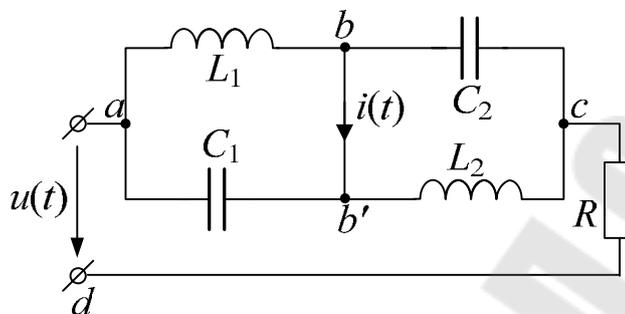


Рис. 3.9.1

Решение

Напряжение источника задано в виде усечённого ряда Фурье, содержащего постоянную составляющую ($U_{(0)} = 20$ В), первую ($u_{(1)} = 80 \sin 500t$ В) и вторую ($u_{(2)} = 30 \sin(2 \cdot 500t - 45^\circ)$, В) гармоники. Поэтому ток $i(t) = I_{(0)} + i_{(1)} + i_{(2)}$.

Постоянная составляющая $I_{(0)}$ течет по пути $a - b - b' - c - d$ и равна

$$I_{(0)} = \frac{U_{(0)}}{R} = \frac{20}{20} = 1 \text{ А.}$$

На частоте первой гармоники ($\omega = 500$ рад \cdot с $^{-1}$)

$$X_{L1(1)} = \omega L_1 = 500 \cdot 40 \cdot 10^{-3} = 20 \text{ Ом;}$$

$$X_{C1(1)} = \frac{1}{\omega C_1} = \frac{1}{500 \cdot 100 \cdot 10^{-6}} = 20 \text{ Ом,}$$

т. е. контур $L_1 C_1$ настроен в резонанс. Его общее сопротивление на этой частоте бесконечно велико, напряжение первой гармоники $u_{(1)}$ будет приложено к зажимам этого контура. При этом ток на участке $b - b'$ будет иметь комплексную амплитуду

$$\underline{I}_{m(1)} = \frac{\underline{U}_{m(1)}}{jX_{L1(1)}} = \frac{80}{j20} = 4e^{-j90^\circ} \text{ A}$$

и мгновенное значение

$$i_{(1)} = 4 \sin(500t - 90^\circ), \text{ A.}$$

На частоте второй гармоники ($\omega = \omega_{(2)} = 2 \cdot 500 \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1}$)

$$X_{L2(2)} = 2\omega L_2 = 2 \cdot 500 \cdot 20 \cdot 10^{-3} = 20 \text{ Ом} ;$$

$$X_{C2(2)} = \frac{1}{2\omega C_2} = \frac{1}{2 \cdot 500 \cdot 50 \cdot 10^{-6}} = 20 \text{ Ом} ;$$

т. е. контур $L_2 C_2$ настроен в резонанс. Его общее сопротивление бесконечно велико и напряжение второй гармоники $U_{(2)}$ приложено к зажимам этого контура. Ток на участке $b-b'$ будет иметь комплексную амплитуду

$$\underline{I}_{m(2)} = \frac{\underline{U}_{m(2)}}{jX_{L2(2)}} = \frac{30e^{-j45^\circ}}{j20} = 1,5e^{-j135^\circ} \text{ A}$$

и мгновенное значение

$$i_{(2)} = 1,5 \sin(2 \cdot 500t - 135^\circ), \text{ A.}$$

В итоге

$$i(t) = I_{(0)} + i_{(1)} + i_{(2)} = 1 + 4 \sin(500t - 90^\circ) + 1,5 \sin(2 \cdot 500t - 135^\circ), \text{ A.}$$

3.10. В схеме рис. 3.10.1 $R = 100 \text{ Ом}$, $L_1 = 0,1 \text{ мГн}$, $\omega = 2\pi \cdot 10^3 \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1}$, $u(t) = 100 \sin \omega t + 50 \sin 3\omega t + 30 \sin 5\omega t$, В. Рассчитать значения C_1 , C_2 , L_2 , при которых в резисторе R будет протекать лишь ток третьей гармоники, причём его величина должна быть наибольшей. Определить мгновенное значение этого тока.

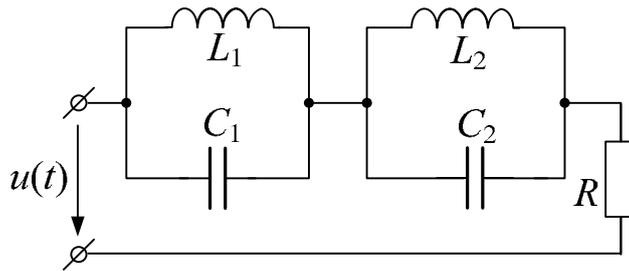


Рис.3.10.1

Решение

Для того, чтобы в резисторе R отсутствовали токи первой и пятой гармоник, оба параллельных контура (L_1C_1 и L_2C_2) должны быть настроены в резонанс токов на соответствующих частотах. Кроме того, ток третьей гармоникой в резисторе R будет наибольшим, если реактивное сопротивление схемы на частоте 3ω будет равно 0, т. е. при резонансе напряжений. Рассмотрим два решения.

1. Контур L_1C_1 настроен в резонанс на частоте ω , а контур L_2C_2 – на частоте 5ω .

Из условия резонанса токов следует:

$$\frac{1}{L_1C_1} = \omega^2, \quad (3.1)$$

$$\frac{1}{L_2C_2} = 25\omega^2. \quad (3.2)$$

Из условия резонанса напряжений следует:

$$\frac{\frac{3 \cdot \omega L_1}{3\omega C_1}}{3\omega L_1 - \frac{1}{3\omega C_1}} + \frac{\frac{3 \cdot \omega L_2}{3\omega C_2}}{3\omega L_2 - \frac{1}{3\omega C_2}} = 0$$

или после преобразований:

$$\frac{L_2}{9\omega^2 L_1 C_1 - 1} + \frac{L_2}{9\omega^2 L_1 C_2} = 0. \quad (3.3)$$

Решая совместно уравнения (1) – (3), нетрудно получить:

$$C_1 \approx 0,253 \cdot 10^{-6} \text{ } \hat{\text{O}}; \quad C_2 \approx 0,127 \cdot 10^{-6} \text{ } \hat{\text{O}}; \quad L_2 = 0,008 \text{ } \hat{\text{A}}\dot{\text{i}}.$$

2. Контур L_1C_1 настроен в резонанс на частоте 5ω , а контур L_2C_2 – на частоте ω . В этом случае условие (3) не изменится, а вместо равенств (1) и (2) будем иметь:

$$\frac{1}{L_1C_1} = 25\omega^2; \quad \frac{1}{L_2C_2} = \omega^2. \quad (3.4)$$

Решая совместно уравнения (3) и (4), получим:

$$C_1 \approx 0,01 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}; \quad C_2 \approx 0,02 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}; \quad L_2 = 1,25 \text{ А́í.}$$

Для обоих решений общее сопротивление контуров L_1C_1 и L_2C_2 равно нулю. Следовательно, мгновенное значение тока в резисторе

$$i = \frac{u_{(3)}}{R} = \frac{50 \sin 3\omega t}{100} = 0,5 \sin 3\omega t, \text{ А.}$$

3.11. В схеме рис. 3.11.1 $L_1 = 2,5 \text{ А́í}$. На вход схемы подано напряжение $u(t) = 100 \sin \omega t + 50 \sin 3\omega t, \text{ В}$; $\omega = 314 \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1}$. Рассчитать значения ёмкостей C_1 и C_2 , при которых напряжение на сопротивлении R_H не зависит от значения R_H и равно $U_i = 100 \sin \omega t, \text{ В}$.

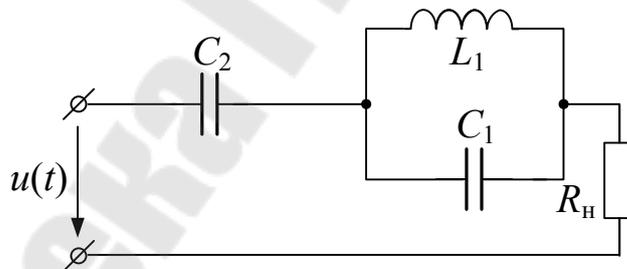


Рис. 3.11.1

Решение

Напряжение U_i не будет содержать третьей гармоники в том случае, когда параллельный контур L_1C_1 настроен в резонанс, т. е. при условии

$$3\omega\tilde{N}_1 = \frac{1}{3\omega L_1},$$

откуда

$$C_1 = \frac{1}{9\omega^2 L_1} = \frac{1}{9 \cdot 314^2 \cdot 2,5} \approx 0,45 \cdot 10^{-6} \text{ Ф.}$$

Вместе с тем, напряжение U_1 равно первой гармонике напряжения источника тогда, когда сопротивление схемы является чисто активным, т. е. при резонансе напряжений. Из условия резонанса напряжений на первой гармонике следует, что

$$\frac{\frac{L_1}{C_1}}{\frac{1}{\omega C_1} - \omega L_1} - \frac{1}{\omega C_2} = 0,$$

откуда

$$C_2 = \frac{1}{\omega^2 L_1} - C_1 = \frac{1}{314^2 \cdot 2,5} - 0,45 \cdot 10^{-6} \approx 3,6 \cdot 10^{-6} \text{ Ф.}$$

3.12. Написать выражения мгновенных значений тока i и напряжения u_{ab} на участке ab схемы (рис. 3.12.1), если на вход схемы подано напряжение $u = 120 + 200\sin\omega_1 t + 50\sin(3\omega_1 t + 30^\circ)$ В, $R_1 = 30$ Ом, $L = 60$ мГн, $R = 18$ Ом, а частота основной гармоники $f_1 = 50$ Гц. Определить показания приборов, если A_1 и V_1 – приборы магнитоэлектрической системы, A_2 и V_2 – приборы индукционной системы, A_3 и V_3 – приборы электромагнитной системы. Вычислить активную мощность, расходуемую в схеме.

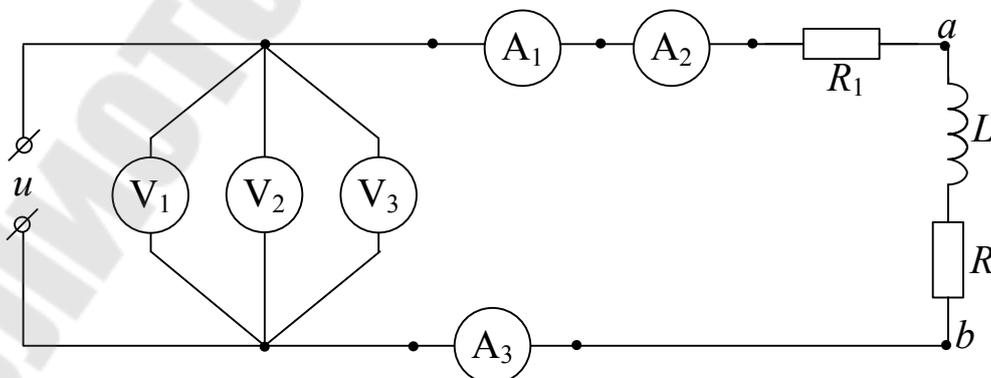


Рис. 3.12.1

Решение

Постоянные составляющие тока и напряжения на участке ab :

$$I_{(0)} = U_{(0)} / (R_1 + R) = 120 / (30 + 18) = 2,5 \text{ А}; U_{ab(0)} = R_1 I_{(0)} = 75 \text{ В.}$$

Расчет первой гармоники:

$$I_{m(1)} = U_{m(1)} / \underline{Z}_{(1)} = 200 / (18 + 30 + j314 \cdot 0,06) = 3,88e^{-j21^\circ 25'}, \text{ А,}$$

$$\underline{U}_{abm(1)} = \underline{I}_{m(1)} \underline{Z}_{ab(1)} = \underline{I}_{m(1)} (R_1 + j\omega L_1) =$$

$$= 3,88e^{-j21^\circ 25'} (30 + j314 \cdot 0,06) = 101e^{j24^\circ 55'}, \text{ В.}$$

Расчет третьей гармоники:

$$\underline{I}_{m(3)} = \frac{U_{m(3)}}{\underline{Z}_{(3)}} = \frac{U_{m(3)}}{R + R_1 + j3\omega_1 L_1};$$

$$\underline{U}_{abm(3)} = \underline{I}_{m(3)} \underline{Z}_{(3)} = \underline{I}_{m(3)} (R_1 + j3\omega_1 L_1).$$

Подставляя числовые данные, получим:

$$\underline{I}_{m(3)} = \frac{50e^{j30^\circ}}{18 + 30 + j3 \cdot 314 \cdot 0,06} = 0,674e^{-j19^\circ 40'} \text{ А};$$

$$\underline{U}_{abm(3)} = 0,674e^{-j19^\circ 40'} \cdot (30 + j3 \cdot 314 \cdot 0,06) = 40e^{j52^\circ 40'} \text{ В.}$$

Искомые мгновенные значения:

$$i = [2,5 + 3,88 \sin(\omega_1 t - 21^\circ 25') + 0,674 \sin(3\omega_1 t - 19^\circ 40')], \text{ А};$$

$$u_{ab} = [75 + 101 \sin(\omega_1 t + 24^\circ 55') + 40 \sin(3\omega_1 t + 52^\circ 40')], \text{ В.}$$

Найдем показания приборов.

Приборы магнитоэлектрической системы показывают постоянную составляющую, поэтому амперметр A_1 покажет

$$I = I_{(0)} = 2,5 \text{ А,}$$

вольтметр V_1 покажет

$$U = U_{(0)} = 120 \text{ В.}$$

Приборы индукционной системы показывают действующее значение переменной составляющей, поэтому амперметр A_2 покажет

$$I = \sqrt{\frac{3,88^2}{2} + \frac{0,674^2}{2}} = 2,78 \text{ А,}$$

вольтметр V_2 покажет

$$U = \sqrt{\frac{200^2}{2} + \frac{50^2}{2}} = 146 \text{ В.}$$

Приборы электромагнитной системы показывают действующее значение тока и напряжения, поэтому амперметр A_3 покажет

$$I = \sqrt{2,5^2 + \frac{3,88^2}{2} + \frac{0,674^2}{2}} = 3,74 \text{ А,}$$

вольтметр V_3 покажет

$$U = \sqrt{120^2 + \frac{200^2}{2} + \frac{50^2}{2}} = 189 \text{ В.}$$

Мощность, расходуемая в схеме:

$$\begin{aligned} P &= U_{(0)} I_{(0)} + U_{(1)} I_{(1)} \cos \varphi_{(1)} + U_{(3)} I_{(3)} \cos \varphi_{(3)} = \\ &= 120 \cdot 2,5 + \frac{200}{\sqrt{2}} \cdot \frac{3,88}{\sqrt{2}} \cos 21^\circ 25' + \frac{50}{\sqrt{2}} \cdot \frac{0,674}{\sqrt{2}} \cos 19^\circ 40' = 677 \text{ Вт.} \end{aligned}$$

ГЛАВА 4. ТРЁХФАЗНЫЕ ЦЕПИ

ВВОДНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Обычно обмотки трёхфазного источника соединяют звездой (рис. 4.1). В таком случае линейные напряжения выражаются разностями соответствующих фазных напряжений:

$$\underline{U}_{AB} = \underline{U}_A - \underline{U}_B; \quad \underline{U}_{BC} = \underline{U}_B - \underline{U}_C; \quad \underline{U}_{CA} = \underline{U}_C - \underline{U}_A. \quad (4.1)$$

Для симметричного источника с фазным напряжением U_ϕ фазные напряжения

$$\underline{U}_A = U_\phi e^{j0^\circ}; \quad \underline{U}_B = U_\phi e^{-j120^\circ}; \quad \underline{U}_C = U_\phi e^{j120^\circ},$$

а линейные напряжения

$$\underline{U}_{AB} = U_\ell e^{j30^\circ}; \quad \underline{U}_{BC} = U_\ell e^{-j90^\circ}; \quad \underline{U}_{CA} = U_\ell e^{j150^\circ}.$$

По модулю линейные напряжения U_ℓ больше фазных U_ϕ в $\sqrt{3}$ раз:

$$U_\ell = \sqrt{3}U_\phi.$$

При соединении обмоток источника треугольником (рис. 4.2) линейные напряжения равны фазным.

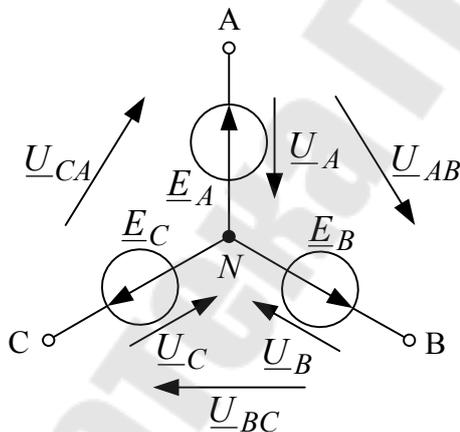


Рис. 4.1

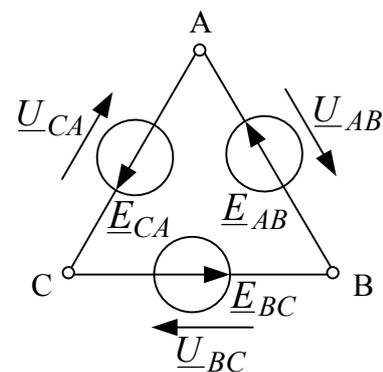


Рис. 4.2

Симметричный режим. Для симметричного приемника ($\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C = \underline{Z}$), соединенного звездой (рис. 4.3), токи в фазах

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_A}{\underline{Z} + \underline{Z}_\ell}; \quad \underline{I}_B = \frac{\underline{U}_B}{\underline{Z} + \underline{Z}_\ell}; \quad \underline{I}_C = \frac{\underline{U}_C}{\underline{Z} + \underline{Z}_\ell},$$

где $\underline{Z}_л$ – сопротивление симметричной линии. По модулю эти токи одинаковы и имеют сдвиг по фазе относительно друг друга, равный 120° .

Для симметричного приемника, соединенного треугольником (рис. 4.4), $\underline{Z}_{ab} = \underline{Z}_{bc} = \underline{Z}_{ca} = \underline{Z}$. Если $\underline{Z}_л = 0$, то фазные токи приемника

$$\underline{I}_{ab} = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}}; \quad \underline{I}_{bc} = \frac{\underline{U}_{BC}}{\underline{Z}}; \quad \underline{I}_{ca} = \frac{\underline{U}_{CA}}{\underline{Z}}.$$

По модулю эти токи одинаковы и имеют сдвиг по фазе относительно друг друга, равный 120° .

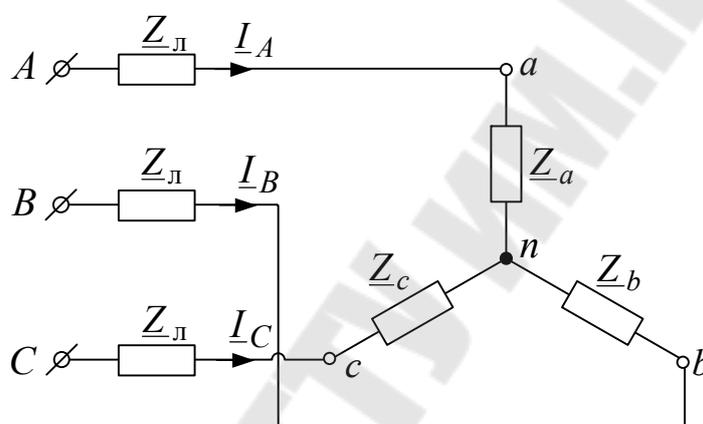


Рис. 4.3

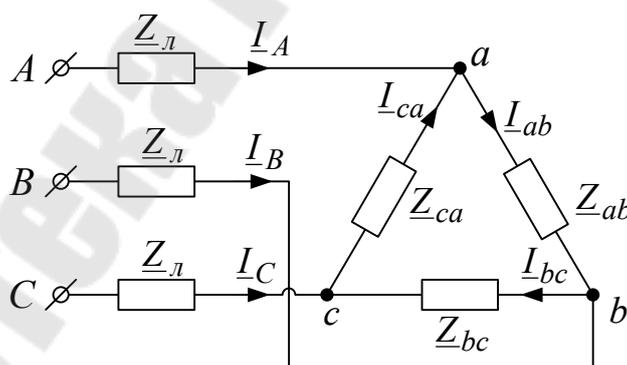


Рис. 4.4

Линейные токи приемника, соединённого треугольником, выражаются разностями его фазных токов:

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{ab} - \underline{I}_{ca}; \quad \underline{I}_B = \underline{I}_{bc} - \underline{I}_{ab}; \quad \underline{I}_C = \underline{I}_{ca} - \underline{I}_{bc}. \quad (4.2)$$

При этом для симметричного приёмника

$$\underline{I}_A = \sqrt{3}\underline{I}_{ab}e^{-j30^\circ}; \quad \underline{I}_B = \underline{I}_A e^{-j120^\circ}; \quad \underline{I}_C = \underline{I}_A e^{j120^\circ}.$$

Соответственно, фазные токи выражаются через линейные следующим образом:

$$\underline{I}_{ab} = \frac{\underline{I}_A}{\sqrt{3}}e^{j30^\circ}; \quad \underline{I}_{bc} = \underline{I}_{ab}e^{-j120^\circ}; \quad \underline{I}_{ca} = \underline{I}_{ab}e^{j120^\circ};$$

Если $\underline{Z}_л \neq 0$, то после преобразования треугольника сопротивлений в эквивалентную звезду линейные токи находят по формулам

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_A}{\frac{\underline{Z}}{3} + \underline{Z}_л}; \quad \underline{I}_B = \frac{\underline{U}_B}{\frac{\underline{Z}}{3} + \underline{Z}_л}; \quad \underline{I}_C = \frac{\underline{U}_C}{\frac{\underline{Z}}{3} + \underline{Z}_л};$$

Несимметричный режим. При соединении приемника звездой с нейтральным проводом (рис. 4.5) напряжение смещения нейтрали выражается равенством

$$\underline{U}_{nN} = \frac{\underline{U}_A \underline{Y}_A + \underline{U}_B \underline{Y}_B + \underline{U}_C \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N},$$

где

$$\underline{Y}_A = \frac{1}{(\underline{Z}_a + \underline{Z}_л)}; \quad \underline{Y}_B = \frac{1}{(\underline{Z}_b + \underline{Z}_л)}; \quad \underline{Y}_C = \frac{1}{(\underline{Z}_c + \underline{Z}_л)}; \quad \underline{Y}_N = \frac{1}{\underline{Z}_N}.$$

Линейные токи и ток в нейтральном проводе выражаются равенствами

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_A - \underline{U}_{nN}}{\underline{Z}_a + \underline{Z}_л}; \quad \underline{I}_B = \frac{\underline{U}_B - \underline{U}_{nN}}{\underline{Z}_b + \underline{Z}_л}; \quad \underline{I}_C = \frac{\underline{U}_C - \underline{U}_{nN}}{\underline{Z}_c + \underline{Z}_л}; \quad \underline{I}_N = \frac{\underline{U}_{nN}}{\underline{Z}_N}; \quad (4.3)$$

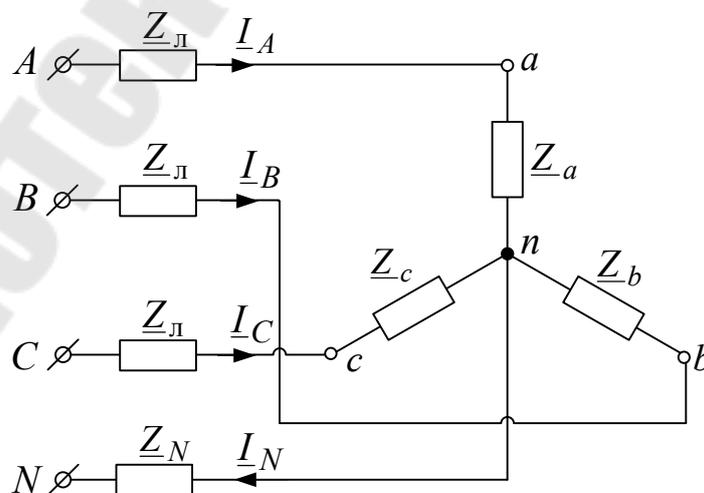


Рис. 4.5

При этом по первому закону Кирхгофа

$$\underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C. \quad (4.4)$$

Если сопротивление $\underline{Z}_N = 0$, то $\underline{Y}_N = \infty$, $\underline{U}_{nN} = 0$ и

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_A}{\underline{Z}_a + \underline{Z}_l}; \quad \underline{I}_B = \frac{\underline{U}_B}{\underline{Z}_b + \underline{Z}_l}; \quad \underline{I}_C = \frac{\underline{U}_C}{\underline{Z}_c + \underline{Z}_l},$$

а ток \underline{I}_N определяется по (4.4).

Если в цепи рис. 4.5 $\underline{Z}_N = \infty$, т.е. $\underline{Y}_N = 0$, то получается схема соединения звездой без нейтрального провода (рис. 4.3), для которой

$$\underline{U}_{nN} = \frac{\underline{U}_A \underline{Y}_A + \underline{U}_B \underline{Y}_B + \underline{U}_C \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C},$$

а линейные токи определяются по формулам (4.3). При этом $\underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 0$.

При соединении приемника треугольником (рис. 4.4) и идеальных проводах линии ($\underline{Z}_l = 0$) фазные токи

$$\underline{I}_{ab} = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_{ab}}; \quad \underline{I}_{bc} = \frac{\underline{U}_{BC}}{\underline{Z}_{bc}}; \quad \underline{I}_{ca} = \frac{\underline{U}_{CA}}{\underline{Z}_{ca}},$$

а линейные токи определяются по (4.2). Если же $\underline{Z}_l \neq 0$, то для расчёта цепи треугольник сопротивлений следует преобразовать в эквивалентную звезду, после чего для полученной эквивалентной схемы линейные токи рассчитывают, как показано выше. Фазные токи определяются по предварительно найденным фазным напряжениям приемника:

$$\underline{U}_{ab} = \underline{Z}'_A \underline{I}_A - \underline{Z}'_B \underline{I}_B; \quad \underline{U}_{bc} = \underline{Z}'_B \underline{I}_B - \underline{Z}'_C \underline{I}_C; \quad \underline{U}_{ca} = \underline{Z}'_C \underline{I}_C - \underline{Z}'_A \underline{I}_A;$$

$$\underline{I}_{ab} = \frac{\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}_{ab}}; \quad \underline{I}_{bc} = \frac{\underline{U}_{bc}}{\underline{Z}_{bc}}; \quad \underline{I}_{ca} = \frac{\underline{U}_{ca}}{\underline{Z}_{ca}},$$

где \underline{Z}'_A , \underline{Z}'_B , \underline{Z}'_C – сопротивления лучей звезды, эквивалентной исходному треугольнику нагрузки.

Активная, реактивная и полная мощности симметричного приемника независимо от вида соединения

$$P = 3U_\phi I_\phi \cos \varphi = \sqrt{3}U_l I_l \cos \varphi;$$

$$Q = 3U_{\phi}I_{\phi} \sin \varphi = \sqrt{3}U_{л}I_{л} \sin \varphi; S = 3U_{\phi}I_{\phi} = \sqrt{3}U_{л}I_{л},$$

где φ – сдвиг фаз между напряжением и током фазы 0.

В симметричных трехфазных цепях при соединении приемников звездой $P_a = P_b = P_c = P_{\phi}$, а при соединении приемников треугольником $P_{ab} = P_{bc} = P_{ca} = P_{\phi}$. Поэтому для определения активной мощности симметричного приемника достаточно утроить показания ваттметра, включенного в любую из фаз нагрузки (метод одного ваттметра – рис. 4.6): $P_{нагр} = 3P_{\phi}$.

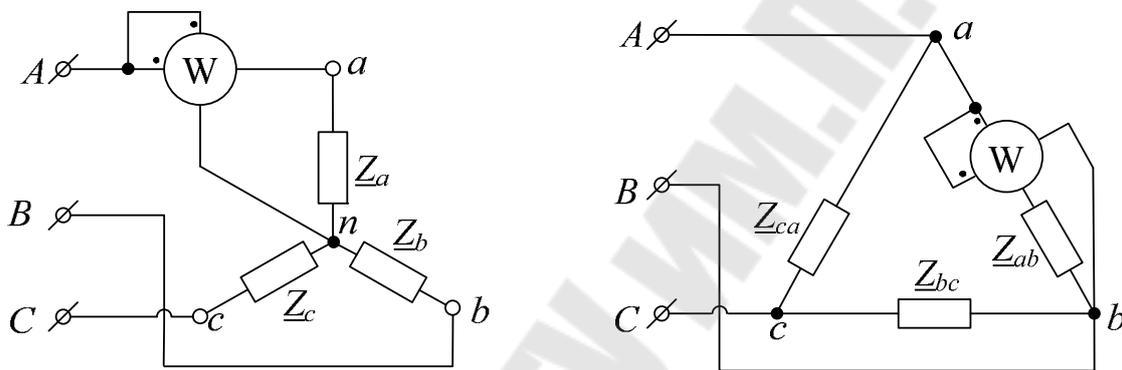


Рис. 4.6

В четырехпроводных трехфазных цепях с несимметричной нагрузкой измеряется мощность каждой фазы (метод трех ваттметров; см. рис. 4.7). Активная мощность нагрузки определяется арифметической суммой показаний ваттметров: $P_{нагр} = P_a + P_b + P_c$.

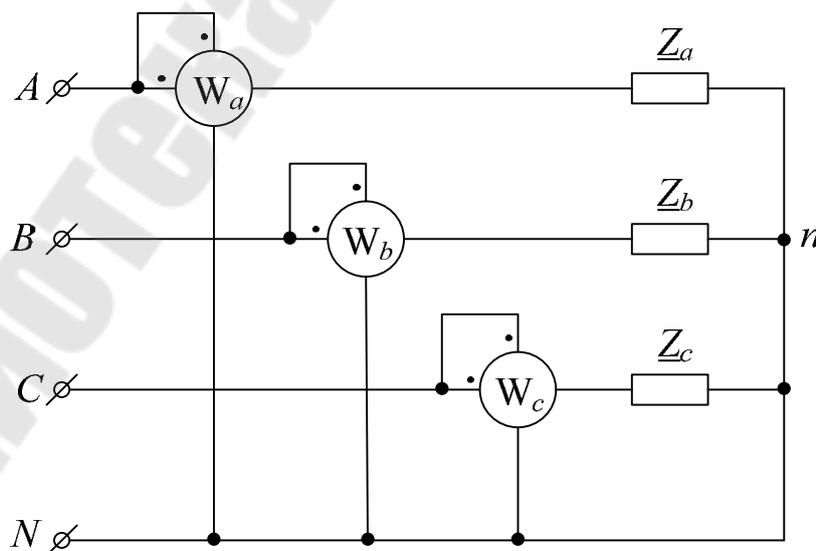


Рис. 4.7

В трехпроводных трехфазных цепях с несимметричной нагрузкой измерение мощности производится *методом двух ваттметров*. Активная мощность такой цепи выражается алгебраической суммой показаний обоих приборов: $P_{нагр} = P_{w1} + P_{w2}$. При этом пара приборов может быть включена в трехпроводную цепь тремя равноценными способами, показанными на рис. 4.8 а – в.

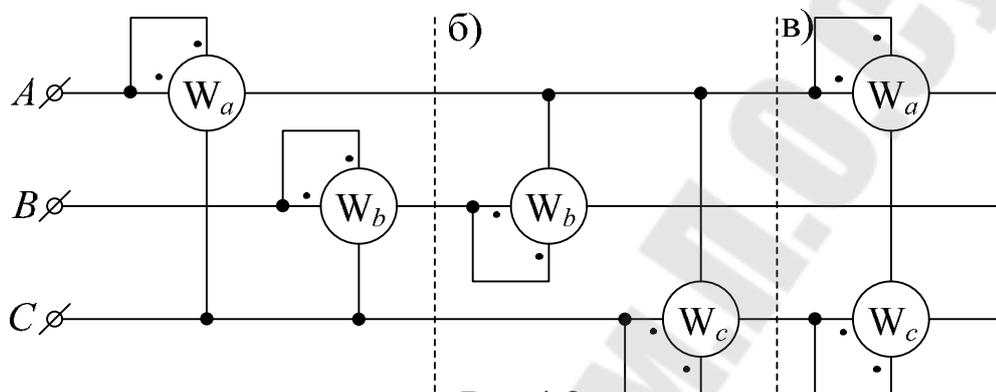


Рис 4.8

Нумерация ваттметров в паре определяется порядком включения их токовых цепей в линейные провода с учетом прямой последовательности фаз, что удобно представить в виде следующей таблицы.

Способ включения ваттметров в трёхпроводную цепь	$a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a \rightarrow \dots$			
а)	№ 1	№ 2		№ 1
б)		№ 1	№ 2	
в)	№ 2		№ 1	№ 2

Метод двух ваттметров применяется также в цепях с симметричной нагрузкой, особенно в тех случаях, когда нужно измерить не только активную, но и реактивную мощность. Реактивная мощность симметричной нагрузки при этом равна

$$Q = \sqrt{3}(P_{W1} - P_{W2}).$$

Реактивную мощность симметричной нагрузки можно измерить и одним ваттметром. Три равноценных способа включения ваттметра в такую цепь показаны на рис. 4.9. При этом

$$P_{WA} = P_{WB} = P_{WC} = P_W; \quad Q = \sqrt{3}P_W.$$

Если же нагрузка несимметрична, то для измерения ее реактивной мощности применяются все три показанных на рис. 4.9 включения ваттметра. Реактивная мощность несимметричной нагрузки равна

$$Q = \frac{P_{W_A} + P_{W_B} + P_{W_C}}{\sqrt{3}}.$$

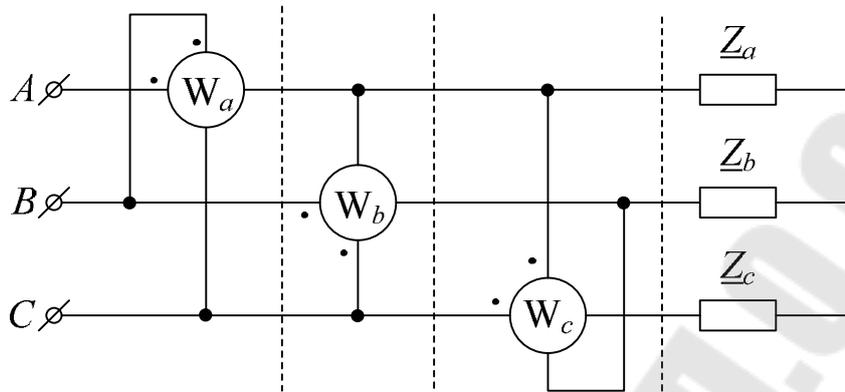


Рис. 4.9

Высшие гармоники в трехфазных цепях. ЭДС фазы реального трехфазного генератора в той или иной мере несинусоидальна. Постоянная составляющая при этом отсутствует, а каждая из трех ЭДС e_A, e_B, e_C повторяет по форме остальные со сдвигом на $\pm \frac{1}{3}$ периода, так что сдвигу фазы на 120° для основной гармоники соответствует сдвиг на $k \cdot 120^\circ$ для k -й гармоники. Этим обусловлены следующие закономерности.

1. Гармоники, кратные трём, $\{k = 3n \ (n = 0, 1, 2, \dots)\}$ образуют нулевую последовательность:

$$\underline{E}_{A(3,6,9\dots)} = \underline{E}_{B(3,6,9\dots)} = \underline{E}_{C(3,6,9\dots)}.$$

2. Гармоники $k = 3n + 1 \ (1, 4, 7, \dots)$ образуют прямую последовательность: k -я гармоника фазы C опережает k -ю гармонику фазы A на 120° , k -я гармоника фазы B отстает от k -й гармоники фазы A на 120° .

3. Гармоники $k = 3n + 2 \ (2, 5, 8, \dots)$ образуют обратную последовательность: k -я гармоника фазы B опережает k -ю гармонику фазы A на 120° , k -я гармоника фазы C отстает от k -й гармоники фазы A на 120° .

При соединении звездой фаз источника линейные напряжения не содержат гармоник, кратных трём, т.к. эти гармоники синфазны и потому взаимно погашаются при выражении линейных напряжений разностями фазных напряжений источника (см. (4.1)).

При соединении звездой фаз приемника гармоники, кратные трём, за счет своей синфазности складываются на участке nN . В результате в трехпроводной цепи эти гармоники вносят вклад в U_{nN} (при симметричной нагрузке U_{nN} образовано именно трехкратными гармониками!), а в четырехпроводной цепи трехкратные гармоники токов вносят вклад в I_N : при симметричной нагрузке по нейтральному проводу протекает ток

$$I_N = I_{N(3)} = \frac{3\underline{E}_{(3)}}{\underline{Z}_{\phi(3)} + \underline{Z}_{N(3)}},$$

а в линейных проводах симметричной четырехпроводной звезды протекают токи

$$\underline{I}_A = \underline{I}_B = \underline{I}_C = \frac{\underline{I}_N}{3}.$$

В то же время, в отсутствие нейтрального провода линейные токи не содержат гармоник, кратных трём, т.к. их не может быть в линейных напряжениях!

При соединении треугольником фаз источника синфазные гармоники, кратные трём, складываются, создавая ток $\underline{I}_{(3)}$ в контуре источника. При этом, однако, линейные напряжения нагрузки не содержат гармоник, кратных трём, т.к. их не содержит фазное напряжение источника. В самом деле, если внутреннее сопротивление фазы генератора для третьей гармоники равно $\underline{Z}_{z(3)}$ (см. рис. 4.10), то тогда

$$\underline{\varphi}_{A(3)} = \varphi_{B(3)} + \underline{E}_{(3)} - \underline{I}_{(3)}\underline{Z}_{z(3)} = \varphi_{B(3)}, \quad \text{т.к. } \underline{I}_{(3)} = \frac{3\underline{E}_{(3)}}{3\underline{Z}_{z(3)}}.$$

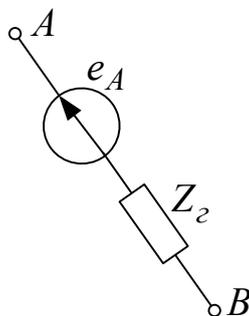


Рис. 4.10

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

4.1. В схеме рис. 4.1.1. фазное напряжение генератора $U_{\phi z} = 127$ В, а нагрузка симметрична: $Z_{ab} = Z_{bc} = Z_{ca} = R = 20$ Ом. Найти фазные и линейные токи цепи при ее нормальном режиме, при обрыве линейного провода и при обрыве фазы.

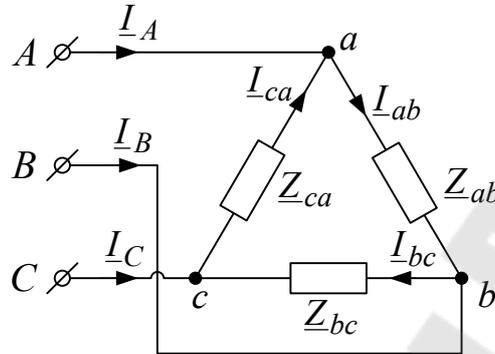


Рис. 4.1.1

Решение

Линейное напряжение генератора:

$$U_{лз} = \sqrt{3}U_{\phi z} = \sqrt{3} \cdot 127 = 220 \text{ В.}$$

Обычно полагают

$$\underline{U}_A = U_{\phi z} e^{j0^\circ} \text{ В,} \quad \underline{U}_B = U_{\phi z} e^{-j120^\circ} \text{ В,} \quad \underline{U}_C = U_{\phi z} e^{j120^\circ} \text{ В,} \quad (1)$$

после чего на основании равенств

$$\underline{U}_{AB} = \sqrt{3}e^{j30^\circ} \underline{U}_A, \quad \underline{U}_{BC} = \sqrt{3}e^{j30^\circ} \underline{U}_B, \quad \underline{U}_{CA} = \sqrt{3}e^{j30^\circ} \underline{U}_C$$

переходят от (1) к системе линейных напряжений

$$\underline{U}_{AB} = \sqrt{3}U_{\phi z} e^{j30^\circ}, \quad \underline{U}_{BC} = \sqrt{3}U_{\phi z} e^{-j90^\circ}, \quad \underline{U}_{CA} = \sqrt{3}U_{\phi z} e^{j150^\circ}. \quad (2)$$

Однако если нагрузка соединена треугольником, то можно принять нулевой фазу линейного напряжения \underline{U}_{AB} , а не фазу напряжения \underline{U}_A , как это подразумевается системой (1). В данном расчёте вместо (2) мы принимаем

$$\underline{U}_{AB} = U_{лз} e^{j0^\circ} = 220 e^{j0^\circ} \text{ В,}$$

$$\underline{U}_{BC} = 220e^{-j120^\circ} \text{ В},$$

$$\underline{U}_{CA} = 220e^{j120^\circ} \text{ В}.$$

1) Нормальный режим.

Фазные токи нагрузки находим по закону Ома:

$$\underline{I}_{ab} = \frac{U_{ab}}{R} = \frac{U_{AB}}{R} = \frac{220e^{j0^\circ}}{20} = 11e^{j0^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_{bc} = \frac{U_{bc}}{R} = \frac{U_{BC}}{R} = \frac{220e^{-j120^\circ}}{20} = 11e^{-j120^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_{ca} = \frac{U_{ca}}{R} = \frac{U_{CA}}{R} = \frac{220e^{j120^\circ}}{20} = 11e^{j120^\circ} \text{ А}.$$

В общем случае линейные токи определяются по первому закону Кирхгофа:

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{ab} - \underline{I}_{ca}; \quad \underline{I}_B = \underline{I}_{bc} - \underline{I}_{ab}; \quad \underline{I}_C = \underline{I}_{ca} - \underline{I}_{bc}.$$

Если же треугольник нагрузки – симметричный, то линейные токи проще определить по формулам

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{ab} \sqrt{3}e^{-j30^\circ} = 11e^{j0^\circ} \sqrt{3}e^{-j30^\circ} = 19e^{-j30^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_B = \underline{I}_{bc} \sqrt{3}e^{-j30^\circ} = 11e^{-j120^\circ} \sqrt{3}e^{-j30^\circ} = 19e^{-j150^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_C = \underline{I}_{ca} \sqrt{3}e^{-j30^\circ} = 11e^{j120^\circ} \sqrt{3}e^{-j30^\circ} = 19e^{j90^\circ} \text{ А}.$$

2) Обрыв линейного провода Bb.

Схема замещения цепи в случае обрыва провода Bb показана на рис. 4.1.2.

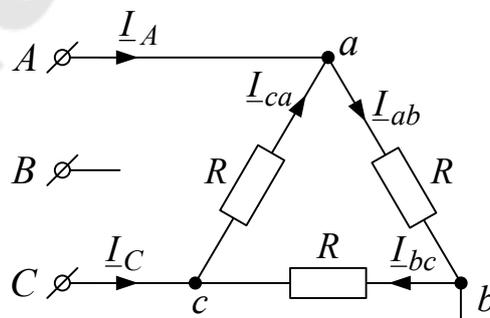


Рис. 4.1.2

Фазные токи находим по закону Ома:

$$\underline{I}_{ab} = \underline{I}_{bc} = \frac{-\underline{U}_{CA}}{2R} = \frac{-220e^{j120^\circ}}{2 \cdot 20} = \frac{220e^{-j60^\circ}}{40} = 5,5e^{-j60^\circ} = (2,75 - j4,76) \text{ A},$$

$$\underline{I}_{ca} = \frac{\underline{U}_{CA}}{R} = \frac{220e^{j120^\circ}}{20} = 11e^{j120^\circ} = (-5,5 + j9,52) \text{ A}.$$

Линейные токи находим по первому закону Кирхгофа:

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{ab} - \underline{I}_{ca} = 5,5e^{-j60^\circ} - 11e^{j120^\circ} = 16,5e^{-j60^\circ} = (8 - j14,28) \text{ A},$$

$$\underline{I}_B = 0 \text{ A},$$

$$\underline{I}_C = \underline{I}_{ca} - \underline{I}_{bc} = -\underline{I}_A = -16,5e^{-j60^\circ} = 16,5e^{j120^\circ} = (-8 + j14,28) \text{ A}.$$

3) Обрыв фазы ab .

Схема замещения заданной цепи при обрыве в ней фазы ab показана на рис. 4.1.3.

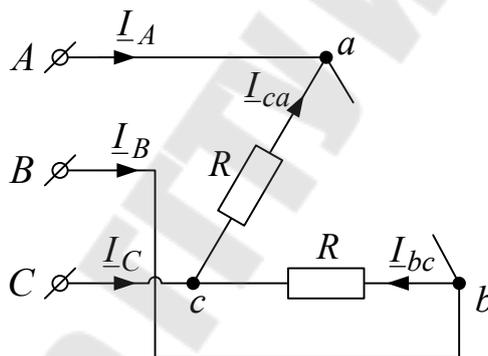


Рис. 4.1.3

Токи неповрежденных фаз имеют те же значения, что и при нормальном режиме:

$$\underline{I}_{bc} = 11e^{-j120^\circ} \text{ A}, \quad \underline{I}_{ca} = 11e^{j120^\circ} \text{ A}.$$

Линейные токи находим по первому закону Кирхгофа:

$$\underline{I}_A = -\underline{I}_{ca} = -11e^{j120^\circ} = 11e^{-j60^\circ} \text{ A}, \quad \underline{I}_B = \underline{I}_{bc} = 11e^{-j120^\circ} \text{ A},$$

$$\underline{I}_C = \underline{I}_{ca} - \underline{I}_{bc} = 11e^{j120^\circ} - 11e^{-j120^\circ} = 19e^{j90^\circ} \text{ A}.$$

4.2. В схеме рис. 4.2.1 фазное напряжение источника $U_{\phi 2} = 127$ В. Определить показание прибора в двух случаях: 1) $X_L = X_C = 173$ Ом, $R = 100$ Ом; 2) $X_L = X_C = \sqrt{3}R$.

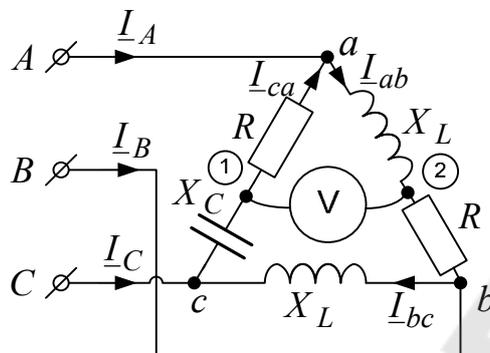


Рис. 4.2.1

Решение

Для решения задачи необходимо найти напряжение между точками 1 и 2 в схеме, показанной на рис. 4.2.2.

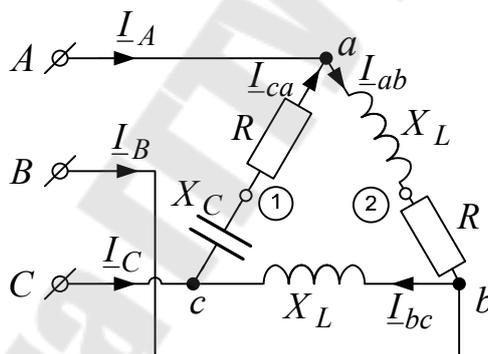


Рис. 4.2.2

Искомое напряжение

$$\underline{U}_{12} = jX_L \underline{I}_{ab} + R \underline{I}_{ca}. \quad (1)$$

Неизвестные токи \underline{I}_{ab} и \underline{I}_{ca} выразим по закону Ома:

$$\underline{I}_{ab} = \frac{\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}_{ab}} = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_{ab}}; \quad \underline{I}_{ca} = \frac{\underline{U}_{ca}}{\underline{Z}_{ca}} = \frac{\underline{U}_{CA}}{\underline{Z}_{ca}}. \quad (2)$$

Линейное напряжение генератора $U_{л2} = \sqrt{3}U_{\phi 2} = \sqrt{3} \cdot 127 = 220$ В.
Принимаем (см. начало решения задачи 4.1)

$$\underline{U}_{AB} = U_{\text{иг}} e^{j0^\circ} = 220 e^{j0^\circ} \text{ В.} \quad (3)$$

Тогда

$$\underline{U}_{CA} = 220 e^{j120^\circ} \text{ В.} \quad (4)$$

1 случай.

Определим комплексные сопротивления фаз нагрузки:

$$\underline{Z}_{ab} = R + jX_L = (100 + j173) \text{ Ом.} \quad (5)$$

$$\underline{Z}_{ca} = R - jX_C = (100 - j173) \text{ Ом.} \quad (6)$$

Подставляя (3) – (6) в (2), находим:

$$\underline{I}_{ab} = \frac{220 e^{j0^\circ}}{100 + j173} = 1,1 e^{-j60^\circ} \text{ А;} \quad \underline{I}_{ca} = \frac{220 e^{j120^\circ}}{100 - j173} = 1,1 e^{j180^\circ} \text{ А.}$$

Возвращаясь к (1), получаем:

$$\underline{U}_{12} = j173 \cdot 1,1 e^{-j60^\circ} + 100 \cdot 1,1 e^{j180^\circ} = 55 + j95,3 = 110 e^{j60^\circ} \text{ В.}$$

Следовательно, $U_V = 110 \text{ В.}$

Векторная диаграмма цепи представлена на рис. 4.2.3;

$$m_U = 30 \frac{\text{В}}{\text{см}}, \quad m_I = 0,2 \frac{\text{А}}{\text{см}}.$$

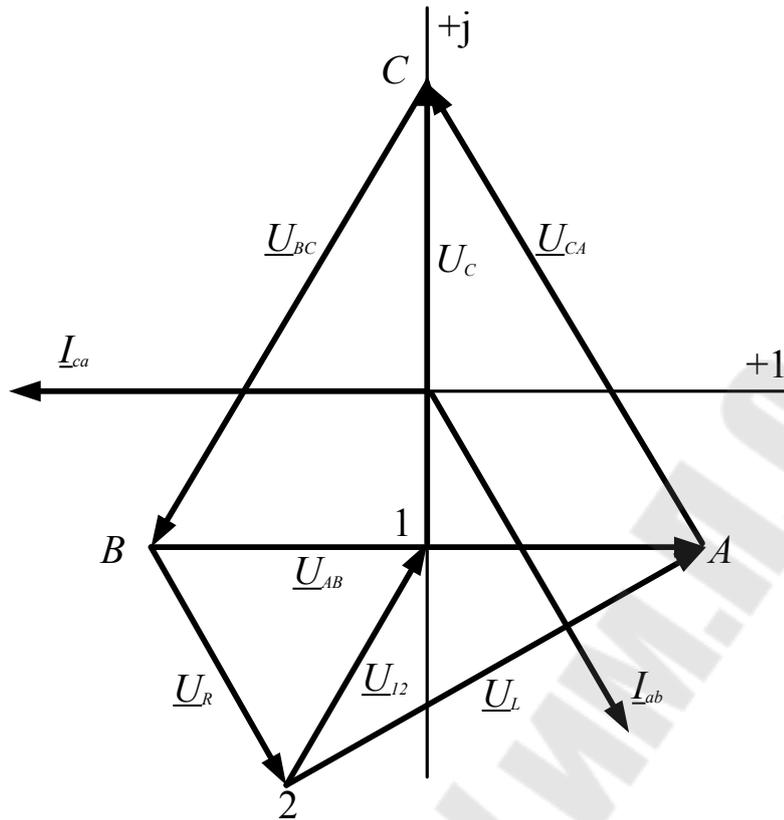


Рис. 4.2.3.

2 случай.

Комплексные сопротивления фаз нагрузки:

$$\underline{Z}_{ab} = R + jX_L = R + j\sqrt{3}R = R(1 + j\sqrt{3}) = 2R \cdot e^{j60^\circ} \text{ Ом.} \quad (7)$$

$$\underline{Z}_{ca} = R - jX_C = R - j\sqrt{3}R = R(1 - j\sqrt{3}) = 2R \cdot e^{-j60^\circ} \text{ Ом.} \quad (8)$$

Подставляя (3), (4), (7) и (8) в (2), находим:

$$\underline{I}_{ab} = \frac{220e^{j0^\circ}}{2R \cdot e^{j60^\circ}} = \frac{110}{R} e^{-j60^\circ} \text{ А; } \underline{I}_{ca} = \frac{220e^{j120^\circ}}{2R \cdot e^{-j60^\circ}} = \frac{110}{R} e^{j180^\circ} \text{ А.}$$

Возвращаясь к (1), получаем:

$$\underline{U}_{12} = R \cdot \frac{110}{R} (j\sqrt{3}e^{-j60^\circ} + e^{j180^\circ}) = 55 + j95,3 = 110e^{j60^\circ} \text{ В.}$$

Следовательно,

$$U_V = 110 \text{ В.}$$

4.3. В схеме рис. 4.3.1 $I_A = 20$ А, $R_{ab} = X_{bc} = R_{ca} = 40$ Ом. Определить линейные токи I_B и I_C , а также фазное напряжение генератора U_ϕ , обмотки которого соединены звездой.

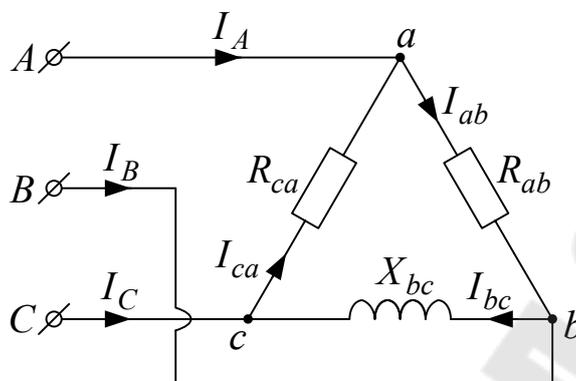


Рисунок 4.3.1

Решение

По закону Ома

$$\underline{I}_{ab} = \frac{\underline{U}_{ab}}{R} = \frac{\underline{U}_{AB}}{R}; \quad \underline{I}_{ca} = \frac{\underline{U}_{ca}}{R} = \frac{\underline{U}_{CA}}{R}.$$

Примем

$$\underline{U}_{AB} = U_\phi e^{j0^\circ}; \quad \underline{U}_{BC} = U_\phi e^{-j120^\circ}; \quad \underline{U}_{CA} = U_\phi e^{j120^\circ}. \quad (1)$$

Тогда

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{ab} - \underline{I}_{ca} = \frac{1}{R} (\underline{U}_{AB} - \underline{U}_{CA}) = \frac{U_\phi}{R} (e^{j0^\circ} - e^{j120^\circ}) = \frac{\sqrt{3}U_\phi}{R} e^{-j30^\circ}.$$

Таким образом, в нашем случае

$$I_A = \sqrt{3}I_{ab}.$$

По условию нагрузка равномерна, следовательно,

$$I_{ab} = I_{bc} = I_{ca} = \frac{I_A}{\sqrt{3}} = \frac{20}{\sqrt{3}} = 11,5 \text{ А}.$$

Тогда

$$U_\phi = RI_{ab} = 40 \cdot 11,5 = 460 \text{ В},$$

так что вместо (1) будем иметь:

$$\underline{U}_{AB} = 460e^{j0^\circ} \text{ В}; \quad \underline{U}_{BC} = 460e^{-j120^\circ} \text{ В}; \quad \underline{U}_{CA} = 460e^{j120^\circ} \text{ В}. \quad (2)$$

Тогда

$$\underline{I}_{ab} = \frac{\underline{U}_{AB}}{R} = 11,5e^{j0^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_{bc} = \frac{\underline{U}_{BC}}{jX_L} = 11,5e^{j150^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_{ca} = \frac{\underline{U}_{CA}}{R} = 11,5e^{j120^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_B = \underline{I}_{bc} - \underline{I}_{ab} = 11,5(e^{j150^\circ} - e^{j0^\circ}) = 22,2e^{j165^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_C = \underline{I}_{ca} - \underline{I}_{bc} = 11,5(e^{j120^\circ} - e^{j150^\circ}) = 5,95e^{j45^\circ} \text{ А}.$$

Фазное напряжение генератора:

$$U_\phi = \frac{U_{\text{л}}}{\sqrt{3}} = \frac{460}{\sqrt{3}} = 266 \text{ В}.$$

4.4. В схеме рис. 4.4.1 фазное напряжение генератора $U_{\phi z} = 220$ В, а нагрузка несимметрична: $\underline{Z}_a = 100$ Ом, $\underline{Z}_b = 50$ Ом, $\underline{Z}_c = j50$ Ом. Найти все токи цепи в ее нормальном режиме и при обрыве фазы c в обоих возможных случаях: а) нейтральный провод включен; б) нейтральный провод отключен.

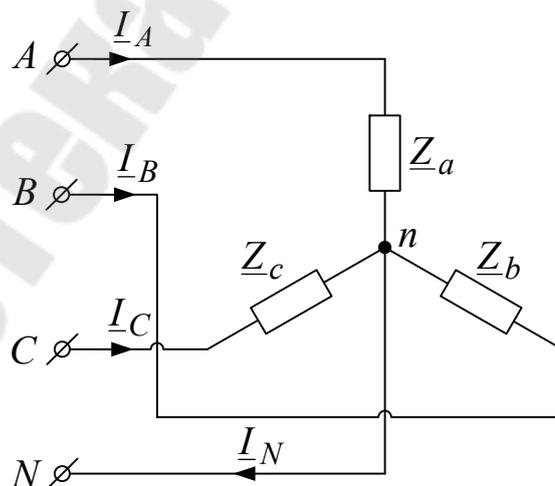


Рис. 4.4.1

Решение

Примем

$$\underline{U}_A = U_{\text{фз}} e^{j0^\circ} = 220 e^{j0^\circ} \text{ В.}$$

$$\underline{U}_B = 220 e^{-j120^\circ} \text{ В,}$$

$$\underline{U}_C = 220 e^{j120^\circ} \text{ В.}$$

1. Нормальный режим.

1а) нейтральный провод включен.

При наличии идеального нейтрального провода фазные напряжения в звезде нагрузки совпадают с соответствующими фазными напряжениями генератора:

$$\underline{U}_a = \underline{U}_A, \quad \underline{U}_b = \underline{U}_B, \quad \underline{U}_c = \underline{U}_C. \quad (1)$$

С учетом этого линейные токи выражаются с помощью закона Ома следующим образом:

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_A}{\underline{Z}_a} = \frac{220}{100} = 2,2 \text{ А;}$$

$$\underline{I}_B = \frac{\underline{U}_B}{\underline{Z}_b} = \frac{220 e^{-j120^\circ}}{50} = 4,4 e^{-j120^\circ} = (-2,2 - j3,81) \text{ А;}$$

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{U}_C}{\underline{Z}_c} = \frac{220 e^{j120^\circ}}{50 e^{j90^\circ}} = 4,4 e^{j30^\circ} = (3,81 + j2,2) \text{ А.}$$

Ток нейтрального провода находим по первому закону Кирхгофа:

$$\underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 2,2 - 2,2 - j3,81 + 3,81 + j2,2 = 3,81 - j1,61 = 4,1 e^{-j23^\circ} \text{ А.}$$

Векторная диаграмма цепи представлена на рис. 4.4.2;
 $m_U = 40 \frac{\text{В}}{\text{см}}, m_I = 1 \frac{\text{А}}{\text{см}}.$

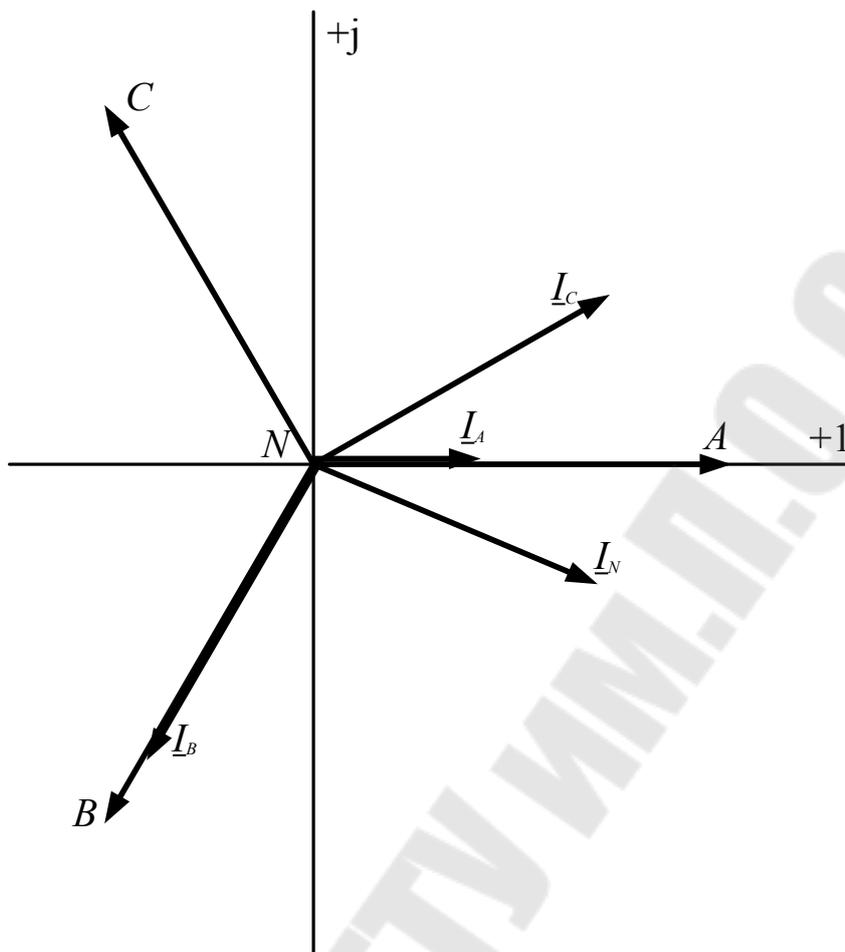


Рис. 4.4.2

1б) нейтральный провод отключен.
Вместо (1) следует использовать равенства

$$\underline{U}_a = \underline{U}_A - \underline{U}_{nN}; \quad \underline{U}_b = \underline{U}_B - \underline{U}_{nN}; \quad \underline{U}_c = \underline{U}_C - \underline{U}_{nN}; \quad (2)$$

Напряжение смещения нейтрали

$$\underline{U}_{nN} = \frac{\underline{U}_A \underline{Y}_A + \underline{U}_B \underline{Y}_B + \underline{U}_C \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C}, \quad (3)$$

где

$$\underline{Y}_A = \frac{1}{\underline{Z}_a} = \frac{1}{100} = 0,01 \text{ См}, \quad \underline{Y}_B = \frac{1}{\underline{Z}_b} = \frac{1}{50} = 0,02 \text{ См},$$

$$\underline{Y}_C = \frac{1}{\underline{Z}_c} = \frac{1}{j50} = -j0,02 \text{ См}.$$

После подстановки находим:

$$\begin{aligned}\underline{U}_{nN} &= \frac{220 \cdot 0,01 + 220e^{-j120^\circ} \cdot 0,02 + 220e^{j120^\circ} \cdot 0,02e^{-j90^\circ}}{0,01 + 0,02 + 0,02e^{-j90^\circ}} = \\ &= 114e^{j10,7^\circ} = (112 + j21,4) \text{ В.}\end{aligned}$$

Линейные токи определяем по закону Ома:

$$\underline{I}_A = \frac{U_a}{Z_a}; \quad \underline{I}_B = \frac{U_b}{Z_b}; \quad \underline{I}_C = \frac{U_c}{Z_c}. \quad (4)$$

Подставляя в (4) числовые значения, получаем:

$$\begin{aligned}\underline{I}_A &= \frac{220 - 112 - j21,4}{100} = \frac{110e^{-j11^\circ}}{100} = 1,1e^{-j11^\circ} = (1,08 - j0,21) \text{ А}; \\ \underline{I}_B &= \frac{-110 - j190 - 112 - j21,4}{50} = \frac{307e^{-j136,4^\circ}}{50} = 6,1e^{-j136,4^\circ} = (-4,44 - j4,23) \text{ А}; \\ \underline{I}_C &= \frac{-110 + j190 - 112 - j21,4}{j50} = \frac{279e^{j142,8^\circ}}{50e^{j90^\circ}} = 5,6e^{j52,8^\circ} = (3,39 + j4,46) \text{ А}.\end{aligned}$$

Векторная диаграмма цепи представлена на рис. 4.4.3;
 $m_U = 40 \text{ В/см}$, $m_I = 1 \text{ А/см}$.

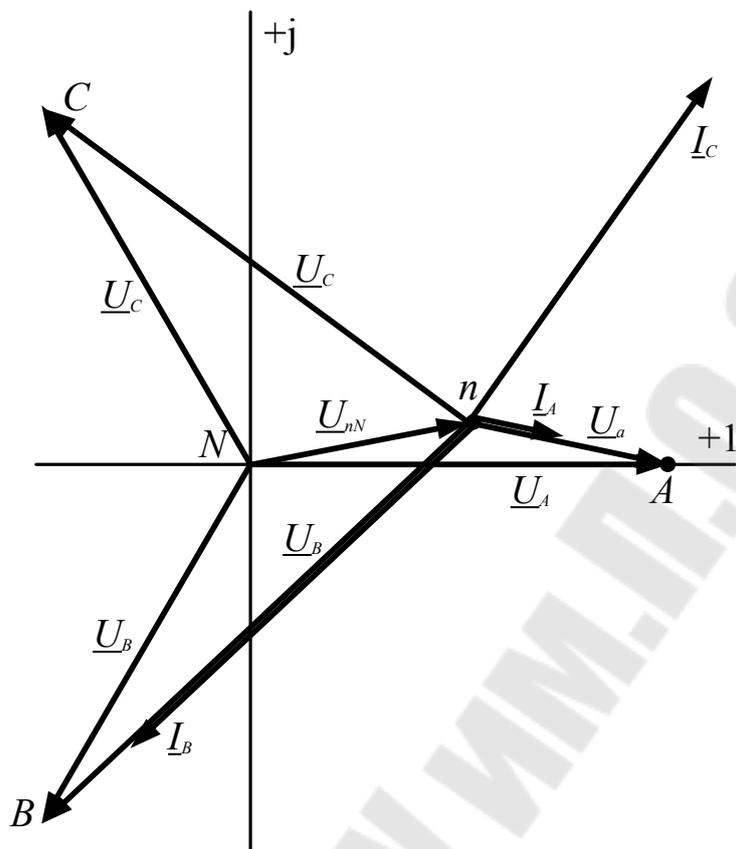


Рис. 4.4.3

2. Обрыв фазы *c*.

2а) нейтральный провод включен.

При наличии идеального нейтрального провода токи в фазах звезды нагрузки взаимонезависимы. Благодаря этому при обрыве какой-либо фазы нагрузки токи в неповрежденных фазах остаются неизменными (см. случай 1а). Ток в нейтральном проводе находим по первому закону Кирхгофа, учитывая, что $I_C = 0$:

$$I_N = I_A + I_B = 2,2 - 2,2 - j3,81 = -j3,81 = 3,81e^{-j90^\circ} \text{ А.}$$

2б) нейтральный провод отключен.

Расчет этого случая можно провести по формулам (2) – (4), полагая с учетом обрыва фазы $Z_c = \infty$, $Y_c = 0$, но значительно проще провести расчёт по схеме замещения цепи, представленной на рис. 4.4.4.

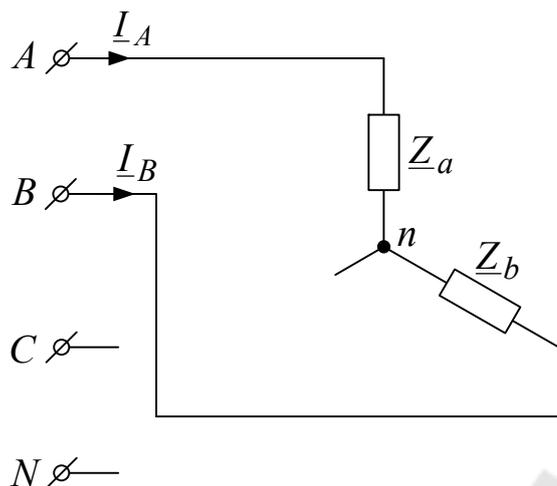


Рис. 4.4.4

Для этой схемы сразу находим:

$$\underline{I}_A = -\underline{I}_B = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_a + \underline{Z}_b} = \frac{\underline{U}_A \sqrt{3} e^{j30^\circ}}{\underline{Z}_a + \underline{Z}_b} = \frac{380 e^{j30^\circ}}{100 + 50} = 2,53 e^{j30^\circ} \text{ А.}$$

4.5. Решить задачу 4.4 (случай *a*), полагая сопротивление нейтрального провода $\underline{Z}_{nN} = 100$ Ом.

Решение

Примем

$$\underline{U}_A = U_{\phi 2} e^{j0^\circ} = 220 e^{j0^\circ} \text{ В.}$$

1. Нормальный режим.

Поскольку нейтральный провод не идеальный ($\underline{Z}_{nN} > 0$), в заданной цепи возникает смещение нейтрали, напряжение которого равно

$$\underline{U}_{nN} = \frac{\underline{U}_A \underline{Y}_A + \underline{U}_B \underline{Y}_B + \underline{U}_C \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N},$$

где

$$\underline{Y}_A = \frac{1}{\underline{Z}_a} = \frac{1}{100} = 0,01 \text{ См}, \quad \underline{Y}_B = \frac{1}{\underline{Z}_b} = \frac{1}{50} = 0,02 \text{ См},$$

$$\underline{Y}_C = \frac{1}{\underline{Z}_c} = \frac{1}{j50} = -j0,02 \text{ См}, \quad \underline{Y}_N = \frac{1}{\underline{Z}_N} = \frac{1}{100} = 0,01 \text{ См.}$$

После подстановки находим:

$$\underline{U}_{nN} = \frac{220 \cdot 0,01 + 220e^{-j120^\circ} \cdot 0,02 + 220e^{j120^\circ} \cdot 0,02e^{-j90^\circ}}{0,01 + 0,02 + 0,02e^{-j90^\circ} + 0,01} = 92,5e^{j4^\circ} \text{ В.}$$

Далее находим фазные напряжения нагрузки:

$$\underline{U}_a = \underline{U}_A - \underline{U}_{nN} = (127,69 - j5,89) \text{ В,}$$

$$\underline{U}_b = \underline{U}_B - \underline{U}_{nN} = (-202,31 - j196,42) \text{ В,}$$

$$\underline{U}_c = \underline{U}_C - \underline{U}_{nN} = (-202,31 - j184,62) \text{ В.}$$

Линейные токи определяем по закону Ома:

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_a}{\underline{Z}_a}; \quad \underline{I}_B = \frac{\underline{U}_b}{\underline{Z}_b}; \quad \underline{I}_C = \frac{\underline{U}_c}{\underline{Z}_c}.$$

Подставляя числовые значения, получаем:

$$\underline{I}_A = \frac{127,69 - j5,89}{100} = (1,277 - j0,59) \text{ А;}$$

$$\underline{I}_B = \frac{-202,31 - j196,42}{50} = (-4,06 - j3,93) \text{ А;}$$

$$\underline{I}_C = \frac{-202,31 - j184,62}{j50} = (3,692 + j4,046) \text{ А.}$$

Ток в нейтральном проводе можно найти двумя способами: по первому закону Кирхгофа

$$\underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = (0,923 + j0,059) = 0,923e^{j4^\circ} \text{ А,}$$

либо по закону Ома

$$\underline{I}_N = \underline{U}_{nN} \underline{Y}_N = 92,5e^{j4^\circ} \cdot 0,01 = 0,923e^{j4^\circ} \text{ А.}$$

2. Обрыв фазы c.

Расчет этого случая полностью аналогичен проведенному выше:

$$\underline{U}_{nN} = -j95,26 \text{ В;}$$

$$\underline{U}_a = \underline{U}_A - \underline{U}_{nN} = (127,68 - j5,89) \text{ В;}$$

$$\underline{U}_b = \underline{U}_B - \underline{U}_{nN} = (-110 - j95,26) \text{ В;}$$

$$\underline{I}_A = \frac{U_a}{Z_a} = \frac{127,68 - j5,89}{100} = (1,277 - j0,059) \text{ A};$$

$$\underline{I}_B = \frac{U_b}{Z_b} = \frac{-110 - j95,26}{50} = (2,2 - j1,91) \text{ A};$$

$$\underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B = (-0,92 - j1,96) \text{ A}; \quad \underline{I}_C = 0.$$

4.6. В схеме задачи 4.4 после отключения нейтрального провода произошло короткое замыкание фазы *a*. Найти линейные токи.

Решение.

При указанном в условии аварийном режиме схема замещения цепи принимает вид, показанный на рис. 4.6.1.

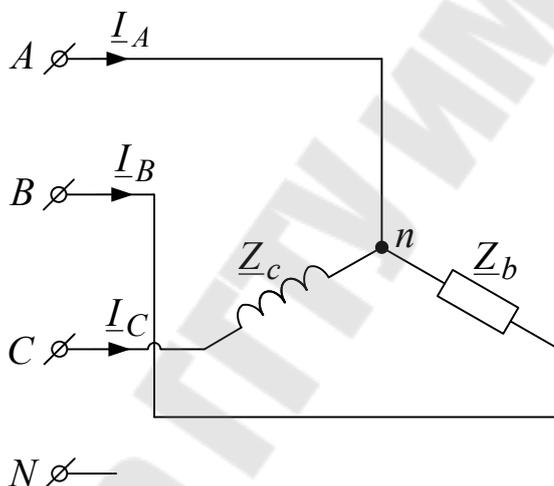


Рис. 4.6.1

Токи неповрежденных фаз в этом случае определяются линейными (а не фазными!) напряжениями источника:

$$\underline{I}_B = -\frac{U_{AB}}{Z_b}; \quad \underline{I}_C = \frac{U_{CA}}{Z_c}. \quad (1)$$

Задано $U_{\phi\phi} = 220 \text{ В}$, следовательно $U_{л\phi} = \sqrt{3}U_{\phi\phi} = \sqrt{3} \cdot 220 = 380$

В. Принимаем

$$\underline{U}_{AB} = U_{\phi\phi} e^{j30^\circ} = 380 e^{j30^\circ} \text{ В}. \quad (2)$$

Тогда

$$\underline{U}_{CA} = 380 e^{j150^\circ} \text{ В}. \quad (3)$$

Подставляя (2) и (3) в (1), получаем:

$$\underline{I}_B = -\frac{380e^{j30^\circ}}{50} = 7,6e^{-j150^\circ} = (-6,6 - j3,8) \text{ А},$$

$$\underline{I}_C = \frac{380e^{j150^\circ}}{50e^{j90^\circ}} = 7,6e^{j60^\circ} = (3,8 + j6,6) \text{ А}.$$

Ток короткозамкнутой линии находим по первому закону Кирхгофа:

$$\underline{I}_A = -(\underline{I}_B + \underline{I}_C) = -(-6,6 - j3,8 + 3,8 + j6,6) = 2,8 - j2,8 = 4e^{-j45^\circ} \text{ А}.$$

Векторная диаграмма цепи представлена на рис. 4.6.2;
 $m_U = 40 \frac{\text{В}}{\text{см}}, m_I = 2 \frac{\text{А}}{\text{см}}.$

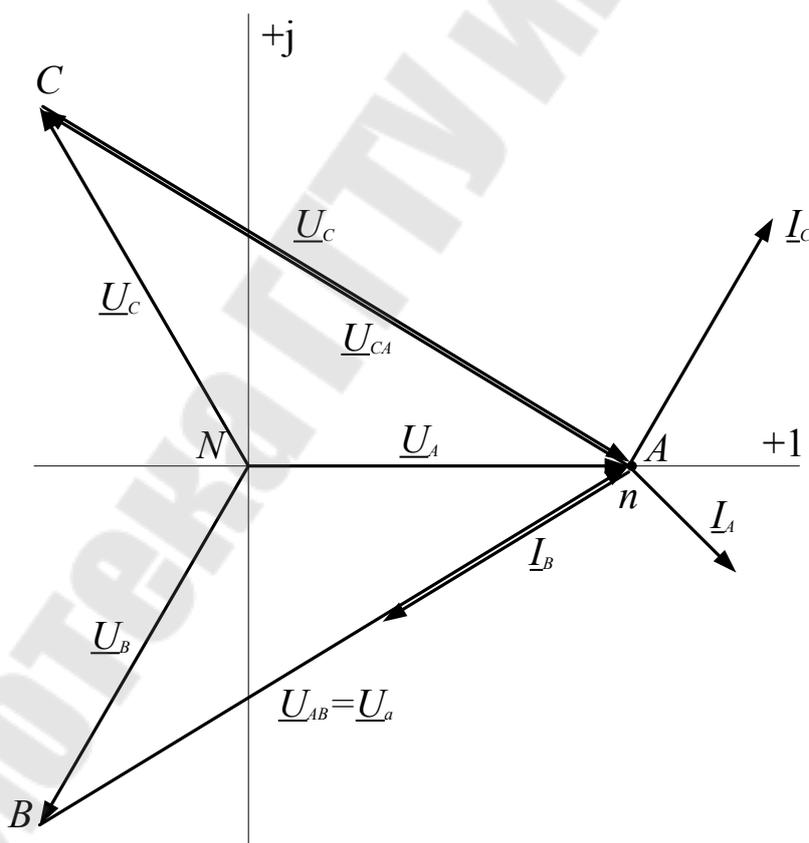


Рис. 4.6.2

4.7. Определить показания приборов в схеме рис. 4.7.1, если $U_{лг} = 380 \text{ В}, R = X = 25 \text{ Ом}.$

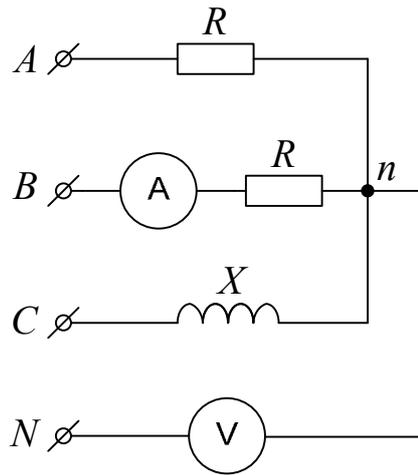


Рис. 4.7.1

Решение

В заданной цепи амперметр измеряет линейный ток I_B , а вольтметр – напряжение смещения нейтрали. Схема замещения цепи представлена на рис. 4.7.2.

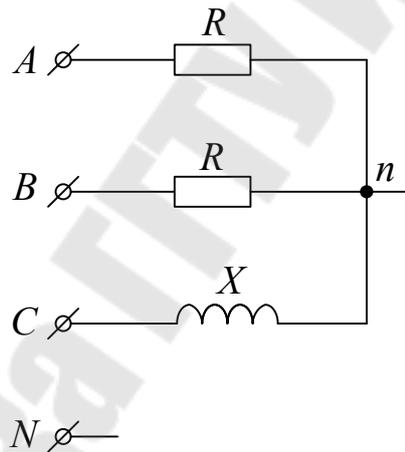


Рис. 4.7.2

Для такой схемы

$$\underline{U}_V = \underline{U}_{nN} = \frac{\underline{U}_A \underline{Y}_A + \underline{U}_B \underline{Y}_B + \underline{U}_C \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C}, \quad (1)$$

где $\underline{Y}_A = \frac{1}{\underline{Z}_A} = 0,04 \text{ См}$; $\underline{Y}_B = \frac{1}{\underline{Z}_B} = 0,04 \text{ См}$; $\underline{Y}_C = \frac{1}{\underline{Z}_C} = 0,04e^{-j90^\circ} \text{ См}$.

Фазное напряжение генератора

$$U_{\phi z} = \frac{U_{лз}}{\sqrt{3}} = \frac{380}{\sqrt{3}} = 220 \text{ В.}$$

Полагаем

$$\underline{U}_A = U_{\phi z} e^{j0^\circ} = 220e^{j0^\circ} \text{ В.} \quad (2)$$

Тогда

$$\underline{U}_B = 220e^{-j120^\circ} \text{ В,} \quad \underline{U}_C = 220e^{j120^\circ} \text{ В.} \quad (3)$$

Подставляя (2) и (3) в (1), получаем:

$$\underline{U}_{nN} = \frac{220 \cdot 0,04 + 220e^{-j120^\circ} \cdot 0,04 + 220e^{j120^\circ} \cdot 0,04e^{-j90^\circ}}{0,04 + 0,04 + 0,04e^{-j90^\circ}} = 138,5e^{j11,6^\circ} \text{ В.}$$

Следовательно, $U_V = 138,5 \text{ В.}$

Искомый ток определяем по закону Ома:

$$\begin{aligned} I_B &= \frac{U_b}{Z_B} = \frac{U_B - U_{nN}}{R} = \frac{220e^{-j120^\circ} - 138,5e^{j11,6^\circ}}{25} = \\ &= \frac{-110 - j190,5 - 136 - j28}{25} = 13,2e^{-j138,4^\circ} \text{ А.} \end{aligned}$$

Следовательно, показание амперметра составляет 13,2 А.

4.8. В схеме рис. 4.8.1 $I_A = 3 \text{ А}$, $I_B = 5 \text{ А}$, $I_C = 4 \text{ А}$. Определить показание амперметра.

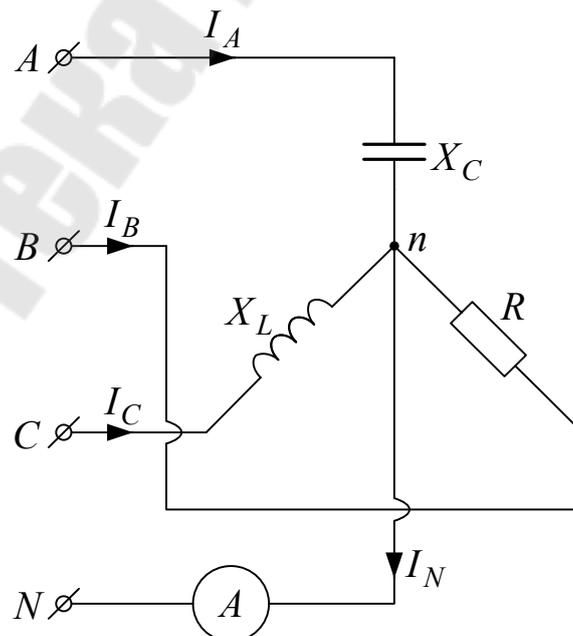


Рисунок 4.8.1

Решение

Примем

$$\underline{U}_A = U_\Gamma e^{j0^\circ}; \quad \underline{U}_B = U_\Gamma e^{-j120^\circ}; \quad \underline{U}_C = U_\Gamma e^{j120^\circ}.$$

Тогда

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_A}{-jX_C} = \frac{U_\Gamma e^{j0^\circ}}{X_C e^{-j90^\circ}} = I_A e^{j90^\circ}; \quad \underline{I}_B = \frac{\underline{U}_B}{R} = \frac{U_\Gamma e^{-j120^\circ}}{R} = I_B e^{-j120^\circ};$$

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{U}_C}{jX_L} = \frac{U_\Gamma e^{j120^\circ}}{X_L e^{j90^\circ}} = I_C e^{j30^\circ}.$$

Отсюда следует, что в нашем случае

$$\underline{I}_A = 3e^{j90^\circ} \text{ А}; \quad \underline{I}_B = 5e^{-j120^\circ} \text{ А}; \quad \underline{I}_C = 4e^{j30^\circ} \text{ А}.$$

Используя первый закон Кирхгофа, окончательно получаем:

$$\underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 1,2e^{j35^\circ},$$

т.е. показание амперметра составляет 1,2 А.

4.9. В схеме рис. 4.9.1 $U_{\text{фг}} = 127 \text{ В}$, $I_{\text{л}} = 12 \text{ А}$, $P_W = 1116 \text{ Вт}$. Как изменится показание ваттметра после короткого замыкания фазы "с"?

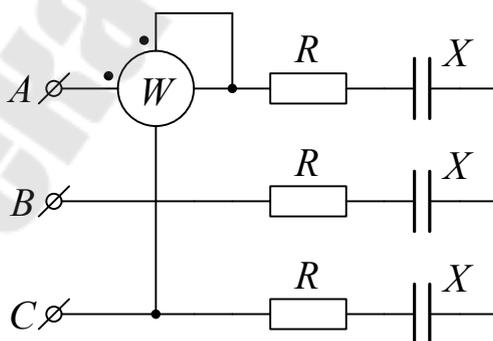


Рисунок 4.9.1

Решение

Примем

$$\underline{U}_A = 127e^{j0^\circ} \text{ В}; \quad \underline{U}_B = 127e^{-j120^\circ} \text{ В}; \quad \underline{U}_C = 127e^{j120^\circ} \text{ В}. \quad (1)$$

Тогда

$$\underline{U}_{AB} = 220e^{j30^\circ} \text{ В}; \quad \underline{U}_{BC} = 220e^{-j90^\circ} \text{ В}; \quad \underline{U}_{CA} = 220e^{j150^\circ} \text{ В}.$$

Показание ваттметра

$$P_W = \operatorname{Re}[\underline{U}_{AC} I_A^*] = \operatorname{Re}[220e^{-j30^\circ} \cdot 12e^{-j\psi_{i_A}}] = 220 \cdot 12 \cdot \cos(-30^\circ - \psi_{i_A}).$$

Отсюда

$$\cos(30^\circ + \psi_{i_A}) = \frac{1116}{220 \cdot 12} = 0,423.$$

Следовательно,

$$\psi_{i_A} = \psi'_{i_A} = 35^\circ \text{ либо } \psi_{i_A} = \psi''_{i_A} = -95^\circ,$$

т.е. комплекс действующего значения тока I_A равен

$$\underline{I}'_A = 12e^{j35^\circ} \text{ А либо } \underline{I}''_A = 12e^{-j95^\circ} \text{ А}.$$

В начале расчёта в качестве исходной была принята система напряжений (1). Для тока I_A имеем:

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_A}{\underline{Z}_A} = \frac{127e^{j0^\circ}}{Z_\phi e^{j\psi_z}} = \frac{127}{Z_\phi} e^{-j\psi_z}.$$

Отсюда следует, что в нашем случае $\psi_{i_A} = -\psi_z$. А поскольку всегда $0 \leq |\psi_z| \leq 90^\circ$, должно выполняться требование

$$0 \leq |\psi_i| \leq 90^\circ.$$

Это означает, что вариант $\psi_{i_A} = \psi''_{i_A}$, $\underline{I}_A = \underline{I}''_A$ в нашем случае невозможен. Тогда

$$\underline{Z}_\phi = \frac{\underline{U}_A}{\underline{I}_A} = \frac{127}{12e^{j35^\circ}} = 10,6e^{-j35^\circ} \text{ Ом}.$$

4.10. В схеме рис. 4.10.1 определить параметры симметричного приемника, соединенного треугольником, если $U_n = 380 \text{ В}$, $P_{W_A} = 418 \text{ Вт}$, $P_{W_C} = 836 \text{ Вт}$.

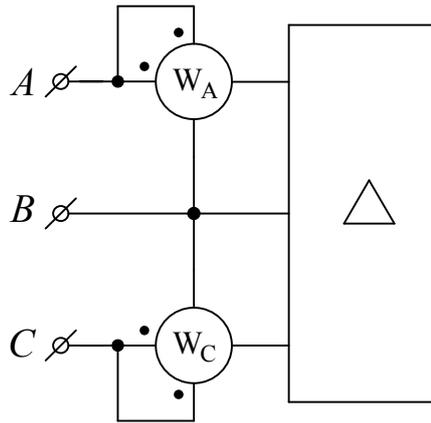


Рис. 4.10.1

Решение

Активная мощность, потребляемая нагрузкой, равна

$$P_{нагр} = P_{W_A} + P_{W_C}. \quad (1)$$

Если нагрузка симметрична, то

$$P_{нагр} = 3P_{\phi}, \quad (2)$$

где P_{ϕ} – активная мощность, потребляемая каждой из трех фаз. Из (1) и (2) находим:

$$P_{\phi} = \frac{P_{W_A} + P_{W_C}}{3} = \frac{418 + 836}{3} = 418 \text{ Вт.}$$

Воспользуемся тем, что

$$P_{\phi} = U_{\phi} I_{\phi} \cos \varphi_{\phi} = \frac{U_{\phi}^2}{Z_{\phi}} \cos \varphi_{\phi}; \quad \varphi_{\phi} = \arctg \frac{Q_{\phi}}{P_{\phi}}.$$

Т. к. нагрузка симметрична,

$$\varphi_{\phi} = \arctg \frac{Q}{P} = \arctg \frac{\sqrt{3}(P_{W_C} - P_{W_A})}{P_{W_A} + P_{W_C}} = \arctg \frac{\sqrt{3}(836 - 418)}{418 + 836} = 30^{\circ}.$$

Тогда

$$Z_{\phi} = \frac{U_{\phi}^2}{P_{\phi}} \cos \varphi_{\phi} = \frac{380^2}{418} \cos 30^{\circ} = 299 \text{ Ом,}$$

$$\underline{Z}_\phi = Z_\phi e^{j\varphi_\phi} = 299e^{30^\circ} = (259 + j149,5) \text{ Ом.}$$

Т.к. $\varphi > 0$, фаза приемника имеет активно-индуктивный характер, а параметры ее последовательной схемы замещения таковы:

$$R = \operatorname{Re} Z_\phi = 259 \text{ Ом,} \quad X_\phi = \operatorname{Im} Z_\phi = 149,5 \text{ Ом.}$$

4.11. Определить показание второго ваттметра в схеме рис. 4.11.1, если $U_\lambda = 380 \text{ В}$, $P_{W_1} = -1560 \text{ Вт}$, а каждая фаза симметричной звезды нагрузки имеет коэффициент мощности $\cos \varphi_\phi = 0,174$.

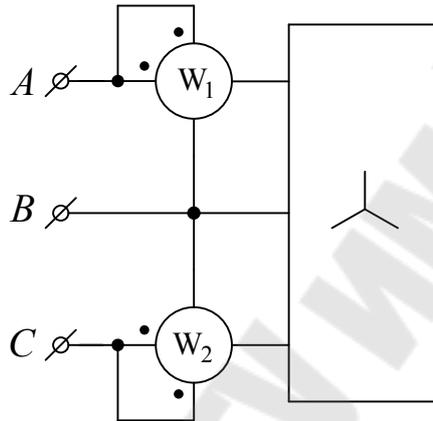


Рис. 4.11.1

Решение

По условию $\varphi_\phi = \arccos 0,174 = \pm 80^\circ$. Воспользуемся тем, что

$$P_{W_1} = U_{AB} I_A \cos(\psi_{u_{AB}} - \psi_{i_A}), \quad (1)$$

где $\psi_{u_{AB}}$ — начальная фаза напряжения U_{AB} , ψ_{i_A} — начальная фаза тока i_A . Примем

$$\psi_{u_{AB}} = 30^\circ, \quad (2)$$

т.е. положим

$$\underline{U}_{AB} = U_\lambda e^{j30^\circ} = 380e^{j30^\circ} \text{ В.}$$

Тогда

$$\underline{U}_A = \frac{\underline{U}_{AB}}{\sqrt{3}} e^{-j30^\circ} = 220e^{j0^\circ} \text{ В.} \quad (3)$$

Т. к. нагрузка симметрична, из (3) следует, что

$$\underline{I}_A = I_A e^{\mp j\varphi_\phi}, \text{ т.е. } \varphi_{i_A} = \mp\varphi_\phi = \mp 80^\circ. \quad (4)$$

В выражениях (4) верхний знак соответствуют случаю

$$\varphi_\phi = 80^\circ, \quad (5)$$

а нижний знак – случаю

$$\varphi_\phi = -80^\circ. \quad (6)$$

Подставляя (2) и (4) в (1), получим для случая (5)

$$P_{W_1} = 380 I_A \cos(30^\circ - (-80^\circ)) = 380 I_A \cos 110^\circ < 0, \quad (7)$$

а для случая (6)

$$P_{W_1} = 380 I_A \cos(30^\circ - 80^\circ) = 380 I_A \cos 50^\circ > 0. \quad (8)$$

По условию $P_{W_1} < 0$, следовательно, вариант (6), (8) должен быть исключен. На этом основании делаем вывод, что

$$\varphi_\phi = 80^\circ, \quad \varphi_{i_A} = -80^\circ,$$

т. е.

$$I_A = \frac{P_{W_1}}{U_{AB} \cos(\psi_{u_{AB}} - \psi_{i_A})} = \frac{-1560}{380 \cos 110^\circ} = 12 \text{ А}, \quad \underline{I}_A = 12 e^{-j80^\circ},$$

$$\underline{Z}_\phi = \frac{\underline{U}_\phi}{\underline{I}_\phi} = \frac{\underline{U}_A}{\underline{I}_A} = \frac{220 e^{j0^\circ}}{12 e^{-j80^\circ}} = 18,33 e^{j80^\circ} = (3,2 + j18,1) \text{ Ом},$$

$$R_\phi = \operatorname{Re} Z_\phi = 3,2 \text{ Ом}, \quad X_\phi = \operatorname{Im} Z_\phi = 18,1 \text{ Ом}.$$

Находим показания второго ваттметра:

$$P_{W_2} = P'_{W_1} = U_{CB} I_C \cos(\varphi_{u_{CB}} - \varphi_{i_C}),$$

$$\underline{U}_{CB} = -\underline{U}_{BC} = -380 e^{-j90^\circ} = 380 e^{j90^\circ} \text{ В},$$

$$\underline{I}_C = \underline{I}_A e^{j120^\circ} = 12e^{j40^\circ} \text{ А,}$$

следовательно,

$$\varphi_{u_{CB}} = 90^\circ, \quad \varphi_{i_C} = 40^\circ,$$

$$P_{W_2} = 380 \cdot 12 \cos(90^\circ - 40^\circ) = 2931 \text{ Вт.}$$

4.12. Симметрия эдс генератора с фазным напряжением $U_{\phi 2} = 220 \text{ В}$ нарушена, т.к. обмотка фазы a подключена к нейтральной точке не тем концом. Симметричная нагрузка соединена звездой с нейтральным проводом, сопротивление которого $\underline{Z}_N = j0,025 \text{ Ом}$. Сопротивление токам нулевой, прямой и обратной последовательностей таковы: для фазы генератора $\underline{Z}_{z_0} = j0,5 \text{ Ом}$, $\underline{Z}_{z_1} = j9 \text{ Ом}$, $\underline{Z}_{z_2} = j1 \text{ Ом}$; для линии $\underline{Z}_{л_0} = j2 \text{ Ом}$, $\underline{Z}_{л_1} = \underline{Z}_{л_2} = j1 \text{ Ом}$; для фазы нагрузки $\underline{Z}_0 = j0,5 \text{ Ом}$, $\underline{Z}_1 = j4 \text{ Ом}$, $\underline{Z}_2 = j1 \text{ Ом}$. Найти симметричные составляющие токов.

Решение

Приняв исходную систему фазных напряжений генератора

$$\underline{U}_A = -220 \text{ В,} \quad \underline{U}_B = 220e^{-j120^\circ} \text{ В,} \quad \underline{U}_C = 220e^{j120^\circ} \text{ В,}$$

находим векторы нулевой, прямой и обратной последовательностей:

$$\underline{U}_0 = \frac{\underline{U}_A + \underline{U}_B + \underline{U}_C}{3} = \frac{-220 + 220e^{-j120^\circ} + 220e^{j120^\circ}}{3} = -146,67 \text{ В,}$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \frac{\underline{U}_A + a\underline{U}_B + a^2\underline{U}_C}{3} = \frac{-220 + e^{j120^\circ} \cdot 220e^{-j120^\circ} + e^{-j120^\circ} \cdot 220e^{j120^\circ}}{3} = \\ &= 73,3 \text{ В,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_2 &= \frac{\underline{U}_A + a^2\underline{U}_B + a\underline{U}_C}{3} = \frac{-220 + e^{-j120^\circ} \cdot 220e^{-j120^\circ} + e^{j120^\circ} \cdot 220e^{j120^\circ}}{3} = \\ &= -146,67 \text{ В.} \end{aligned}$$

Находим симметричные составляющие токов:

$$\underline{I}_{A0} = \underline{I}_{B0} = \underline{I}_{C0} = \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}_{z_0} + \underline{Z}_{л_0} + \underline{Z}_0 + 3\underline{Z}_N} = \frac{-146,67}{j0,5 + j2 + j0,5 + j0,25} =$$

$$= j117,2 \text{ A};$$

$$\underline{I}_{A1} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_{z_1} + \underline{Z}_{л_1} + \underline{Z}_1} = \frac{73,3}{j9 + j1 + j4} = -j5,24 = 5,24e^{-j90^\circ} \text{ A},$$

$$\underline{I}_{B1} = \underline{I}_{A1} e^{-j120^\circ} = 5,24e^{-j90^\circ} \cdot e^{-j120^\circ} = 5,24e^{j150^\circ} \text{ A},$$

$$\underline{I}_{C1} = \underline{I}_{A1} e^{j120^\circ} = 5,24e^{-j90^\circ} \cdot e^{j120^\circ} = 5,24e^{j30^\circ} \text{ A},$$

$$\underline{I}_{A2} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_{z_2} + \underline{Z}_{л_2} + \underline{Z}_2} = \frac{-146,67}{j1 + j1 + j1} = j48,8 = 48,8e^{j90^\circ} \text{ A},$$

$$\underline{I}_{B2} = \underline{I}_{A2} e^{j120^\circ} = 48,8e^{j90^\circ} \cdot e^{j120^\circ} = 48,8e^{-j150^\circ} \text{ A},$$

$$\underline{I}_{C2} = \underline{I}_{A2} e^{-j120^\circ} = 48,8e^{j90^\circ} \cdot e^{-j120^\circ} = 48,8e^{-j30^\circ} \text{ A}.$$

4.13. Трехпроводная трехфазная сеть с линейными напряжениями $\underline{U}_{AB} = 220e^{j0^\circ}$ В, $\underline{U}_{BC} = 220e^{-j90^\circ}$ В, $\underline{U}_{CA} = 311e^{j135^\circ}$ В питает электродвигатель, фазы которого соединены звездой и имеют сопротивление $\underline{Z}_1 = 4e^{j45^\circ}$ Ом для токов прямой последовательности и $\underline{Z}_2 = 2e^{j60^\circ}$ Ом для токов обратной последовательности. Найти токи в фазах двигателя.

Решение

Находим комплексы векторов нулевой, прямой и обратной последовательностей для заданной системы линейных напряжений:

$$\underline{U}_0 = \frac{\underline{U}_{AB} + \underline{U}_{BC} + \underline{U}_{CA}}{3} = \frac{220e^{j0^\circ} + 220e^{-j90^\circ} + 311e^{j135^\circ}}{3} = 0 \text{ В},$$

$$\underline{U}_1 = \frac{\underline{U}_{AB} + a\underline{U}_{BC} + a^2\underline{U}_{CA}}{3} =$$

$$= \frac{220e^{j0^\circ} + e^{j120^\circ} \cdot 220e^{-j90^\circ} + e^{-j120^\circ} \cdot 311e^{j135^\circ}}{3} = 245e^{j15^\circ} \text{ В,}$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_2 &= \frac{\underline{U}_{AB} + a^2 \underline{U}_{BC} + a \underline{U}_{CA}}{3} = \frac{220e^{j0^\circ} + e^{-j120^\circ} \cdot 220e^{-j90^\circ}}{3} + \\ &+ \frac{e^{j120^\circ} \cdot 311e^{j135^\circ}}{3} = 66e^{-j105^\circ} \text{ В.} \end{aligned}$$

Тогда заданные линейные напряжения

$$\underline{U}_{AB} = \underline{U}_0 + \underline{U}_1 + \underline{U}_2 = 245e^{j15^\circ} + 66e^{-j105^\circ} \text{ В,}$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_{BC} &= \underline{U}_0 + a^2 \underline{U}_1 + a \underline{U}_2 = e^{-j120^\circ} \cdot 245e^{j15^\circ} + e^{j120^\circ} \cdot 66e^{-j105^\circ} = \\ &= 245e^{-j105^\circ} + 66e^{j15^\circ} \text{ В,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_{CA} &= \underline{U}_0 + a \underline{U}_1 + a^2 \underline{U}_2 = e^{j120^\circ} \cdot 245e^{j15^\circ} + e^{-j120^\circ} \cdot 66e^{-j105^\circ} = \\ &= 245e^{j135^\circ} + 66e^{j135^\circ} = 311e^{j135^\circ} \text{ В.} \end{aligned}$$

Чтобы найти симметричные составляющие фазных напряжений генератора $\underline{U}_{\phi_{21}}$ и $\underline{U}_{\phi_{22}}$, воспользуемся соотношениями между фазными и линейными напряжениями в симметричных системах прямой и обратной последовательностей:

$$\underline{U}_{\phi_{21}} = \frac{\underline{U}_1}{\sqrt{3}} e^{-j30^\circ} = \frac{245e^{j15^\circ}}{\sqrt{3}} e^{-j30^\circ} = 141,5e^{-j15^\circ} \text{ В,}$$

$$\underline{U}_{\phi_{22}} = \frac{\underline{U}_2}{\sqrt{3}} e^{j30^\circ} = \frac{66e^{-j105^\circ}}{\sqrt{3}} e^{j30^\circ} = 38e^{-j75^\circ} \text{ В.}$$

При этом составляющую $\underline{U}_{\phi_{20}}$ в данной задаче определять не нужно, т.к. из-за отсутствия нейтрального провода $\underline{I}_0 = 0$.

Симметричные составляющие токов находим по закону Ома:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{\phi_{21}}}{\underline{Z}_1} = \frac{141,5e^{-j15^\circ}}{4e^{j45^\circ}} = 35,4e^{-j60^\circ} \text{ А,}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{\phi 22}}{\underline{Z}_2} = \frac{38e^{-j75^\circ}}{2e^{j60^\circ}} = 19e^{-j135^\circ} \text{ А.}$$

Находим фазные токи двигателя:

$$\underline{I}_A = \underline{I}_0 + \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 35,4e^{-j60^\circ} + 19e^{-j135^\circ} = 44,3e^{-j84,5^\circ} \text{ А,}$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_B &= \underline{I}_0 + a^2 \underline{I}_1 + a \underline{I}_2 = e^{-j120^\circ} \cdot 35,4e^{-j60^\circ} + e^{j120^\circ} \cdot 19e^{-j135^\circ} = \\ &= 17,7e^{-j164^\circ} \text{ А,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_C &= \underline{I}_0 + a \underline{I}_1 + a^2 \underline{I}_2 = e^{j120^\circ} \cdot 35,4e^{-j60^\circ} + e^{-j120^\circ} \cdot 19e^{-j135^\circ} = \\ &= 50,7e^{j75,5^\circ} \text{ А.} \end{aligned}$$

4.14. Обмотки симметричного трехфазного генератора соединены звездой. Найти мгновенные значения всех фазных и линейных напряжений и действующие значения фазного и линейного напряжений, если $u_A = 100\sin \omega t + 20\sin 3\omega t + 15\sin 5\omega t$, В.

Решение

1-е гармоники напряжения образуют систему прямой последовательности, 3-и – нулевой, а 5-е – обратной, следовательно,

$$u_B = 100\sin(\omega t - 120^\circ) + 20\sin 3\omega t + 15\sin(5\omega t + 120^\circ) \text{ В;}$$

$$u_C = 100\sin(\omega t + 120^\circ) + 20\sin 3\omega t + 15\sin(5\omega t - 120^\circ) \text{ В.}$$

Линейные напряжения найдем как разность фазных:

$$\underline{U}_{AB(1)} = \frac{100}{\sqrt{2}} e^{j0^\circ} - \frac{100}{\sqrt{2}} e^{-j120^\circ} = \frac{100}{\sqrt{2}} \sqrt{3} e^{j30^\circ} \text{ В;}$$

$$\underline{U}_{AB(3)} = \frac{20}{\sqrt{2}} e^{j0^\circ} - \frac{20}{\sqrt{2}} e^{j0^\circ} = 0 \text{ В;}$$

$$\underline{U}_{AB(5)} = \frac{15}{\sqrt{2}} e^{j0^\circ} - \frac{15}{\sqrt{2}} e^{j120^\circ} = \frac{15}{\sqrt{2}} \sqrt{3} e^{-j30^\circ} \text{ В.}$$

Следовательно,

$$u_{AB} = 173 \sin(\omega t + 30^\circ) + 26 \sin(5\omega t - 30^\circ) \text{ В};$$

$$u_{BC} = 173 \sin(\omega t - 90^\circ) + 26 \sin(5\omega t + 90^\circ) \text{ В};$$

$$u_{CA} = 173 \sin(\omega t + 150^\circ) + 26 \sin(5\omega t - 150^\circ) \text{ В}.$$

Действующие значения

$$U_\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{100^2 + 20^2 + 15^2} = 72,9 \text{ В}; \quad U_L = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{173^2 + 26^2} = 123,1 \text{ В}.$$

4.15. Фазное напряжение генератора содержит первую и третью гармоники. Найти амплитуды гармоник, если при измерении вольтметром были получены значения $U_{\phi 2} = 125 \text{ В}$, $U_{L2} = 210 \text{ В}$.

Решение

$$U_{\phi 2} = \sqrt{\frac{U_{(1)}^2}{2} + \frac{U_{(3)}^2}{2}} \quad (1)$$

$$U_{L2} = \sqrt{3} \sqrt{\frac{U_{(1)}^2}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} U_{(1)} \quad (2)$$

Из (2) находим амплитуду первой гармоники:

$$U_{(1)} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot U_{L2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 210 = 171,5 \text{ В}.$$

Подставляя результат в (1), находим амплитуду третьей гармоники:

$$U_{(3)} = \sqrt{2U_{\phi 2}^2 - U_{(1)}^2} = \sqrt{2 \cdot 15625 - 29412,25} = 42,87 \text{ В}.$$

4.16. Найти мгновенные значения токов и показания приборов (рис. 4.16.1), если $e_A = 120 \sin \omega t + 30 \sin 3\omega t + 20 \sin 5\omega t \text{ В}$, сопротивление проводов линии $R_L = 10 \text{ Ом}$, $R = 60 \text{ Ом}$, $\omega L = 30 \text{ Ом}$.

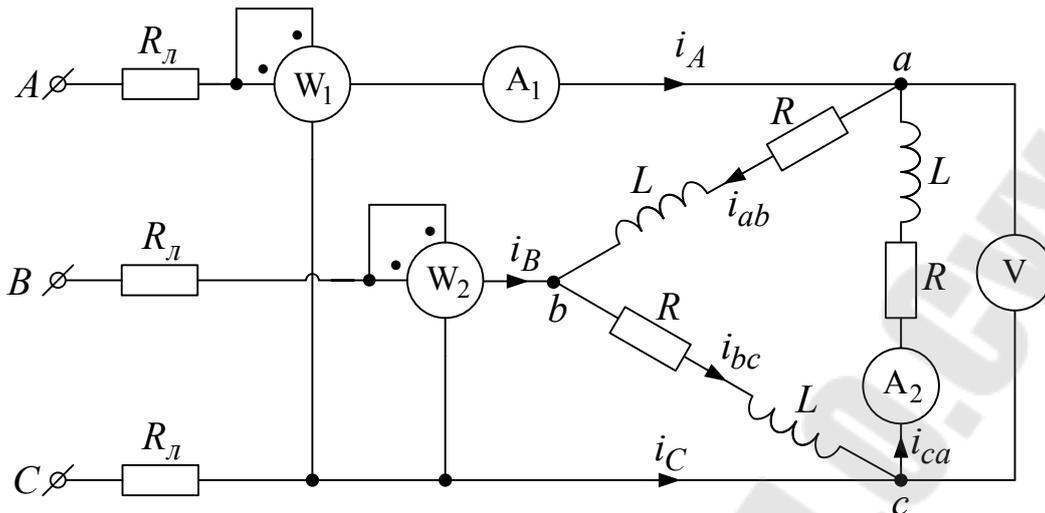


Рис. 4.16.1

Третьи гармоники образуют систему нулевой последовательности, которая проявляется только в четырёхпроводных цепях. Поэтому расчет проводим для 1-й и 5-й гармоник. При этом учитываем, что

$$\underline{Z}_{(1)} = R + j\omega L = (60 + j30) \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{(5)} = R + j5\omega L = (60 + j150) \text{ Ом}.$$

Преобразуем сопротивления нагрузки, соединенные треугольником, в эквивалентную звезду:

$$\underline{Z}'_{(1)} = \frac{\underline{Z}_{(1)}}{3} = (20 + j10) = 22,4e^{j26,35^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}'_{(5)} = \frac{\underline{Z}_{(5)}}{3} = (20 + j50) = 53,9e^{j68,10^\circ} \text{ Ом}.$$

Линейные токи

$$\underline{I}_{A(1)} = \frac{\underline{E}_{A(1)}}{\underline{Z}'_{(1)} + R_l} = \frac{120e^{j0^\circ}}{\sqrt{2}(30 + j10)} = 2,68e^{-j18,20^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_{A(5)} = \frac{\underline{E}_{A(5)}}{\underline{Z}'_{(5)} + R_l} = \frac{120e^{j0^\circ}}{\sqrt{2}(30 + j50)} = 0,243e^{-j59^\circ} \text{ А}.$$

Амперметр A_1 показывает действующее значение линейного тока $I_1 = \sqrt{2,68^2 + 0,243^2} = 2,69$ А. Мгновенное значение тока в линейном проводе A

$$i_A = 3,79 \sin(\omega t - 18,20^\circ) + 0,343 \sin(5\omega t - 59^\circ) \text{ А.}$$

Учитывая, что

$$\underline{I}_{B(1)} = a^2 \underline{I}_{A(1)}; \quad \underline{I}_{C(1)} = a \underline{I}_{A(1)}; \quad \underline{I}_{B(5)} = a \underline{I}_{A(5)}; \quad \underline{I}_{C(5)} = a^2 \underline{I}_{A(5)},$$

где $a = e^{j120^\circ}$, получаем:

$$i_B = 3,79 \sin(\omega t - 138,20^\circ) + 0,343 \sin(5\omega t + 61^\circ) \text{ А;}$$

$$i_C = 3,79 \sin(\omega t + 101,40^\circ) + 0,343 \sin(5\omega t - 179^\circ) \text{ А.}$$

Из равенства

$$i_A = i_{ab} - i_{bc}$$

вытекает, что при симметричной нагрузке

$$\underline{I}_{A(1)} = \underline{I}_{ab(1)} \sqrt{3} e^{-j30^\circ}, \quad \underline{I}_{A(5)} = \underline{I}_{ab(5)} \sqrt{3} e^{j30^\circ},$$

следовательно,

$$\underline{I}_{ab(1)} = \frac{\underline{I}_{A(1)}}{\sqrt{3}} e^{j30^\circ} = 1,55 e^{j11,40^\circ} \text{ А,}$$

$$\underline{I}_{ab(5)} = \frac{\underline{I}_{A(5)}}{\sqrt{3}} e^{-j30^\circ} = 0,140 e^{-j89^\circ} \text{ А.}$$

Мгновенные значения токов:

$$i_{ab} = 2,19 \sin(\omega t + 11,40^\circ) + 0,198 \sin(5\omega t - 89^\circ) \text{ А;}$$

$$i_{bc} = 2,19 \sin(\omega t - 108,2^\circ) + 0,198 \sin(5\omega t + 31^\circ) \text{ А;}$$

$$i_{ca} = 2,19 \sin(\omega t + 131,4^\circ) + 0,198 \sin(5\omega t + 151^\circ) \text{ А.}$$

Амперметр A_2 показывает действующее значение фазного тока

$$I_2 = \sqrt{1,55^2 + 0,14^2} = 1,56 \text{ А. Показания ваттметров:}$$

$$P_{W_1} = \operatorname{Re}(\underline{U}_{ac(1)} \underline{I}_{A(1)}^*) + \operatorname{Re}(\underline{U}_{ac(5)} \underline{I}_{A(5)}^*);$$

$$P_{W_2} = \operatorname{Re}(\underline{U}_{bc(1)} \underline{I}_{B(1)}^*) + \operatorname{Re}(\underline{U}_{bc(5)} \underline{I}_{B(5)}^*),$$

где

$$\underline{U}_{ac(1)} = -\underline{Z}_{(1)} \underline{I}_{ca(1)} = 104e^{-j21,45^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{U}_{ac(5)} = -\underline{Z}_{(5)} \underline{I}_{ca(5)} = 22,6e^{j40,10^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{U}_{bc(1)} = \underline{U}_{ac(1)} e^{-j60^\circ} = 104e^{-j81,45^\circ} \text{ В},$$

$$\underline{U}_{bc(5)} = \underline{U}_{ac(5)} e^{j60^\circ} = 22,6e^{j100,10^\circ} \text{ В}.$$

Следовательно,

$$P_{W_1} = 104 \cdot 2,68 \cos(-24,45^\circ + 18,25^\circ) + 22,6 \cdot 0,243 \cos(40,10^\circ + 59^\circ) = 227 \text{ Вт}$$

$$P_{W_2} = 104 \cdot 2,68 \cos 56,35^\circ + 22,6 \cdot 0,243 \cos 43,10^\circ = 157 \text{ Вт}.$$

Баланс активных мощностей: $P_{W_1} + P_{W_2} = P$;

$$P_{W_1} + P_{W_2} = 434 \text{ Вт}; \quad P = 3(RI_2^2) = 3 \cdot 1,56^2 \cdot 60 = 432 \text{ Вт}.$$

4.17. Фазное напряжение генератора, соединенного треугольником, задано: $u_\phi = 254,6 \sin \omega t + 84,9 \sin 3\omega t + 50,9 \sin 5\omega t$, В. Найти фазные и линейные токи нагрузки, соединенной треугольником, в двух случаях: 1) нагрузка симметрична (рис. 4.17.1), $R = 5 \text{ Ом}$, $\frac{1}{\omega C} = 25 \text{ Ом}$; 2) нагрузка равномерна (рис. 4.17.2), $R = \omega L = \frac{1}{\omega C} = 20 \text{ Ом}$.

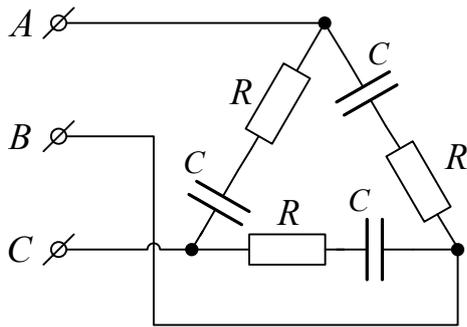


Рис. 4.17.1

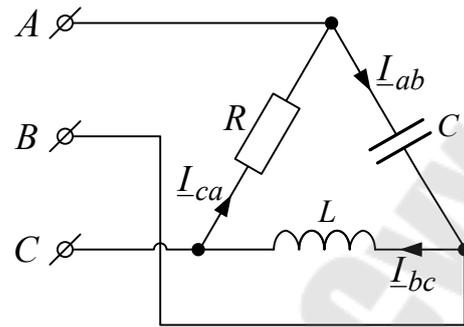


Рис. 4.17.2

Решение

Каждую фазу нагрузки питает линейное напряжение генератора, содержащее только некратные трем гармоники:

$$U_{AB} = 254,6 \sin \omega t + 50,9 \sin 5\omega t, \text{ В,}$$

$$U_{BC} = 254,6 \sin(\omega t - 120^\circ) + 50,9 \sin(5\omega t + 120^\circ), \text{ В,}$$

$$U_{CA} = 254,6 \sin(\omega t + 120^\circ) + 50,9 \sin(5\omega t - 120^\circ), \text{ В.}$$

1 случай.

На первой гармонике

$$I_{\phi(1)} = \frac{U_{\phi(1)}}{Z_{\phi(1)}} = \frac{\frac{254,6}{\sqrt{2}}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{254,6}{\sqrt{2} \sqrt{5^2 + 25^2}} = 7,06 \text{ А,}$$

$$I_{L(1)} = \sqrt{3} I_{\phi(1)} = \sqrt{3} \cdot 7,06 = 12,23 \text{ А.}$$

На пятой гармонике

$$I_{\phi(5)} = \frac{U_{\phi(5)}}{Z_{\phi(5)}} = \frac{\frac{50,9}{\sqrt{2}}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{5\omega C}\right)^2}} = \frac{50,9}{\sqrt{2} \sqrt{5^2 + 5^2}} = 5,09 \text{ А,}$$

$$I_{L(5)} = \sqrt{3} I_{\phi(5)} = \sqrt{3} \cdot 5,09 = 8,82 \text{ А.}$$

Следовательно,

$$I_{\phi} = \sqrt{I_{\phi(1)}^2 + I_{\phi(5)}^2} = \sqrt{7,06^2 + 5,09^2} = 8,7 \text{ А},$$

$$I_L = \sqrt{I_{L(1)}^2 + I_{L(5)}^2} = \sqrt{12,23^2 + 8,82^2} = 15,09 \text{ А}.$$

2 случай

На первой гармонике

$$\underline{I}_{ab(1)} = \frac{\underline{U}_{AB(1)}}{\underline{Z}_{ab(1)}} = \frac{\frac{254,6}{\sqrt{2}} e^{j0^\circ}}{20 e^{-j90^\circ}} = 9 e^{j90^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_{bc(1)} = \frac{\underline{U}_{BC(1)}}{\underline{Z}_{bc(1)}} = \frac{\frac{254,6}{\sqrt{2}} e^{-j120^\circ}}{20 e^{j90^\circ}} = 9 e^{j150^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_{ca(1)} = \frac{\underline{U}_{CA(1)}}{\underline{Z}_{ca(1)}} = \frac{\frac{254,6}{\sqrt{2}} e^{j120^\circ}}{20} = 9 e^{j120^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_{A(1)} = \underline{I}_{ab(1)} - \underline{I}_{ca(1)} = 9 e^{j90^\circ} - 9 e^{j120^\circ} = 4,5 + j1,2 = 4,66 e^{j12^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_{B(1)} = \underline{I}_{bc(1)} - \underline{I}_{ab(1)} = 9 e^{j150^\circ} - 9 e^{j90^\circ} = -7,8 - j4,5 = 9 e^{-j150^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_{C(1)} = \underline{I}_{ca(1)} - \underline{I}_{bc(1)} = 9 e^{j120^\circ} - 9 e^{j150^\circ} = 3,3 + j3,3 = 4,67 e^{j45^\circ} \text{ А}.$$

На пятой гармонике

$$\underline{I}_{ab(5)} = \frac{\underline{U}_{AB(5)}}{\underline{Z}_{ab(5)}} = \frac{\frac{50,9}{\sqrt{2}} e^{j0^\circ}}{\frac{20}{5} e^{-j90^\circ}} = 9 e^{j90^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_{bc(5)} = \frac{\underline{U}_{BC(5)}}{\underline{Z}_{bc(5)}} = \frac{\frac{50,9}{\sqrt{2}} e^{j120^\circ}}{5 \cdot 20 e^{j90^\circ}} = 0,36 e^{j30^\circ} \text{ A};$$

$$\underline{I}_{ca(5)} = \frac{\underline{U}_{CA(5)}}{\underline{Z}_{ca(5)}} = \frac{\frac{50,9}{\sqrt{2}} e^{-j120^\circ}}{20} = 1,8 e^{-j120^\circ} \text{ A};$$

$$\underline{I}_{A(5)} = \underline{I}_{ab(5)} - \underline{I}_{ca(5)} = 9 e^{j90^\circ} - 1,8 e^{j120^\circ} = 0,9 + j10,56 = 10,6 e^{j85,13^\circ} \text{ A};$$

$$\underline{I}_{B(5)} = \underline{I}_{bc(5)} - \underline{I}_{ab(5)} = 0,36 e^{j30^\circ} - 9 e^{j90^\circ} = 0,31 - j8,82 = 8,83 e^{-j88^\circ} \text{ A};$$

$$\underline{I}_{C(5)} = \underline{I}_{ca(5)} - \underline{I}_{bc(5)} = 1,8 e^{-j120^\circ} - 0,36 e^{j30^\circ} = -1,21 - j1,74 = 2,12 e^{-j55,2^\circ} \text{ A}.$$

Фазные и линейные токи:

$$I_{ab} = \sqrt{I_{ab(1)}^2 + I_{ab(5)}^2} = \sqrt{9^2 + 9^2} = 12,73 \text{ A};$$

$$I_{bc} = \sqrt{I_{bc(1)}^2 + I_{bc(5)}^2} = \sqrt{9^2 + 0,36^2} = 9,01 \text{ A};$$

$$I_{ca} = \sqrt{I_{ca(1)}^2 + I_{ca(5)}^2} = \sqrt{9^2 + 1,8^2} = 9,18 \text{ A};$$

$$I_A = \sqrt{I_{A(1)}^2 + I_{A(5)}^2} = \sqrt{4,66^2 + 10,6^2} = 11,6 \text{ A};$$

$$I_B = \sqrt{I_{B(1)}^2 + I_{B(5)}^2} = \sqrt{9^2 + 8,83^2} = 12,6 \text{ A};$$

$$I_C = \sqrt{I_{C(1)}^2 + I_{C(5)}^2} = \sqrt{4,67^2 + 2,12^2} = 5,13 \text{ A}.$$

4.18. К источнику, фазы которого соединены звездой, подключен приемник, фазы которого также соединены звездой. Фазное напряжение источника $u_\phi = 254,6 \sin \omega t + 84,9 \sin 3\omega t + 50,9 \sin 5\omega t$. Между нейтральными точками источника и приемника включают сначала вольтметр, а затем амперметр. Определить показания каждого из Ука-

занных приборов и линейный ток I_B в двух случаях: 1) нагрузка симметрична, $\underline{Z}_\phi = R + j\omega L = (10 + j2)$ Ом; 2) нагрузка равномерна, $\underline{Z}_a = R$, $\underline{Z}_b = j\omega L$, $\underline{Z}_c = -\frac{j}{\omega C}$, $R = \omega L = \frac{1}{\omega C} = 12$ Ом.

Решение

Вольтметр, включенный между нейтральными точками источника и приемника, измеряет напряжение смещения нейтрали. Амперметр, включенный между теми же точками, превращает трехпроводную цепь в четырехпроводную и измеряет силу тока в нейтральном проводе.

1 случай

При симметричной нагрузке смещение нейтрали обусловлено гармониками, кратными трем. В нашем случае

$$U_{nN} = U_{nN(3)} = U_V = \frac{84,9}{\sqrt{2}} = 60 \text{ В.}$$

На первой гармонике

$$I_{\phi(1)} = \frac{U_{\phi(1)}}{Z_{\phi(1)}} = \frac{\frac{254,6}{\sqrt{2}}}{\sqrt{10^2 + 2^2}} = 17,65 \text{ А.} \quad (1)$$

На пятой гармонике

$$I_{\phi(5)} = \frac{U_{\phi(5)}}{Z_{\phi(5)}} = \frac{\frac{50,9}{\sqrt{2}}}{\sqrt{10^2 + (5 \cdot 2)^2}} = 2,55 \text{ А.} \quad (2)$$

Отсюда

$$I_B = I_n = \sqrt{I_{\phi(1)}^2 + I_{\phi(5)}^2} = \sqrt{17,65^2 + 2,55^2} = 17,83 \text{ А.} \quad (3)$$

При наличии нейтрального провода фазные токи приемника содержат не только первую и пятую [см. (1) и (2)], но и третью гармонику:

$$I_{\phi(3)} = \frac{U_{\phi(3)}}{Z_{\phi(3)}} = \frac{\frac{84,9}{\sqrt{2}}}{\sqrt{10^2 + (3 \cdot 2)^2}} = 5,15 \text{ А.}$$

В этом случае вместо (3) будем иметь:

$$I_B = I_L = \sqrt{I_{\phi(1)}^2 + I_{\phi(3)}^2 + I_{\phi(5)}^2} = \sqrt{17,65^2 + 5,15^2 + 2,55^2} = 18,56 \text{ А.}$$

При этом в нейтральном проводе протекает ток

$$I_N = 3I_{\phi(3)} = 3 \cdot 5,15 = 15,45 \text{ А.}$$

Следовательно, показание амперметра составляет 15,45 А.

2 случай

При несимметричной нагрузке, в отсутствие нейтрального провода, смещение нейтрали создают все имеющиеся гармоники:

$$\underline{U}_{nN(1)} = \frac{\underline{U}_{A(1)} \underline{Y}_{A(1)} + \underline{U}_{B(1)} \underline{Y}_{B(1)} + \underline{U}_{C(1)} \underline{Y}_{C(1)}}{\underline{Y}_{A(1)} + \underline{Y}_{B(1)} + \underline{Y}_{C(1)}}, \quad (4)$$

$$\underline{U}_{nN(3)} = 60 \text{ В [см. 1 случай]},$$

$$\underline{U}_{nN(5)} = \frac{\underline{U}_{A(5)} \underline{Y}_{A(5)} + \underline{U}_{B(5)} \underline{Y}_{B(5)} + \underline{U}_{C(5)} \underline{Y}_{C(5)}}{\underline{Y}_{A(5)} + \underline{Y}_{B(5)} + \underline{Y}_{C(5)}}, \quad (5)$$

$$\underline{U}_{A(1)} = \frac{254,6}{\sqrt{2}} e^{j0^\circ} = 180 e^{j0^\circ} \text{ В,}$$

$$\underline{U}_{B(1)} = 180 e^{-j120^\circ} \text{ В,} \quad \underline{U}_{C(1)} = 180 e^{j120^\circ} \text{ В,}$$

$$\underline{U}_{A(5)} = \frac{50,9}{\sqrt{2}} e^{j0^\circ} = 36 e^{j0^\circ} \text{ В,}$$

$$\underline{U}_{B(5)} = 36 e^{j120^\circ} \text{ В,} \quad \underline{U}_{C(5)} = 36 e^{-j120^\circ} \text{ В,}$$

$$\underline{Y}_{A(1)} = \underline{Y}_{A(5)} = \frac{1}{R} = \frac{1}{12} = 0,083 \text{ См},$$

$$\underline{Y}_{B(1)} = \frac{-j}{\omega L} = 0,083e^{-j90^\circ} \text{ См}, \quad \underline{Y}_{C(1)} = j\omega C = 0,083e^{j90^\circ} \text{ См},$$

$$\underline{Y}_{B(5)} = \frac{-j}{5\omega L} = 0,017e^{-j90^\circ} \text{ См}, \quad \underline{Y}_{C(5)} = j5\omega C = 0,417e^{j90^\circ} \text{ См}.$$

После подстановки в (4) и (5) получаем:

$$\underline{U}_{nN(1)} = \frac{14,94e^{j0^\circ} + 14,94e^{j150^\circ} + 14,94e^{-j150^\circ}}{0,083e^{j0^\circ}} = \frac{-10,93}{0,083e^{j0^\circ}} = 131,68e^{j180^\circ} \text{ В},$$

$$\underline{U}_{nN(5)} = \frac{2,988 + 0,61e^{j30^\circ} + 15,01e^{-j30^\circ}}{0,41e^{j78,27^\circ}} = \frac{18,0e^{-j23,55^\circ}}{0,41e^{j78,27^\circ}} = 44,14e^{-j101,52^\circ} \text{ В}.$$

В итоге имеем:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{nN} &= \underline{U}_{nN(1)} + \underline{U}_{nN(3)} + \underline{U}_{nN(5)} = 131,68e^{j180^\circ} + 60 + 44,14e^{-j101,52^\circ} = \\ &= 91,56e^{-j151,54^\circ} \text{ В}. \end{aligned}$$

Следовательно, $U_V = 91,56 \text{ В}$.

Линейные токи содержат только некрратные трем гармоники. В частности,

$$\underline{I}_B = \underline{I}_{B(1)} + \underline{I}_{B(5)},$$

$$\underline{I}_{B(1)} = (\underline{U}_{B(1)} - \underline{U}_{nN(1)})\underline{Y}_{B(1)} = 13,39e^{-j165,03^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_{B(5)} = (\underline{U}_{B(5)} - \underline{U}_{nN(5)})\underline{Y}_{B(5)} = 1,27e^{j6,86^\circ} \text{ А},$$

откуда

$$\underline{I}_B = 13,39e^{-j165,03^\circ} + 1,27e^{j6,86^\circ} = 12,13e^{-j164,18^\circ} \text{ А}.$$

При наличии нейтрального провода линейные (фазные) токи содержат все имеющиеся гармоники.

На первой гармонике

$$I_{\phi(1)} = \frac{U_{\phi(1)}}{Z_{\phi(1)}} = \frac{254,6}{12} = 15 \text{ A},$$

$$\underline{I}_{A(1)} = 15e^{j0^\circ} \text{ A}, \quad \underline{I}_{B(1)} = I_{\phi(1)} e^{-j120^\circ} e^{-j90^\circ} = 15e^{j150^\circ} \text{ A},$$

$$\underline{I}_{C(1)} = I_{\phi(1)} e^{j120^\circ} e^{j90^\circ} = 15e^{-j150^\circ} \text{ A},$$

$$\underline{I}_{N(1)} = \underline{I}_{A(1)} + \underline{I}_{B(1)} + \underline{I}_{C(1)} = 15 + 15e^{j150^\circ} + 15e^{-j150^\circ} = -11 \text{ A}.$$

На третьей гармонике

$$\underline{I}_{A(3)} = \frac{U_{A(3)}}{Z_{a(3)}} = \frac{84,9}{12} = 5 \text{ A}, \quad \underline{I}_{B(3)} = \frac{U_{B(3)}}{Z_{b(3)}} = \frac{84,9}{3 \cdot 12 e^{j90^\circ}} = 1,67e^{-j90^\circ} \text{ A},$$

$$\underline{I}_{C(3)} = \frac{U_{C(3)}}{Z_{c(3)}} = \frac{84,9}{\frac{12}{3} e^{-j90^\circ}} = 15e^{j90^\circ} \text{ A},$$

$$\underline{I}_{N(3)} = \underline{I}_{A(3)} + \underline{I}_{B(3)} + \underline{I}_{C(3)} = 5 + 1,67e^{-j90^\circ} + 15e^{j90^\circ} = 14,2e^{j69,4^\circ} \text{ A}.$$

На пятой гармонике

$$\underline{I}_{A(5)} = \frac{U_{A(5)}}{Z_{a(5)}} = \frac{36e^{j0^\circ}}{12} = 3 \text{ A}, \quad \underline{I}_{B(5)} = \frac{U_{B(5)}}{Z_{b(5)}} = \frac{36e^{j120^\circ}}{5 \cdot 12 e^{j90^\circ}} = 0,6e^{j30^\circ} \text{ A},$$

$$\underline{I}_{C(5)} = \frac{U_{C(5)}}{Z_{c(5)}} = \frac{36e^{-j120^\circ}}{\frac{12}{5} e^{-j90^\circ}} = 15e^{-j30^\circ} \text{ A},$$

$$\underline{I}_{N(5)} = \underline{I}_{A(5)} + \underline{I}_{B(5)} + \underline{I}_{C(5)} = 3 + 0,6e^{j30^\circ} + 15e^{-j30^\circ} = 18e^{-j23,6^\circ} \text{ A}.$$

В итоге

$$\underline{I}_B = \underline{I}_{B(1)} + \underline{I}_{B(3)} + \underline{I}_{B(5)} = 15e^{j150^\circ} + 1,67e^{-j90^\circ} + 0,6e^{j30^\circ} = 13,89e^{j153,82^\circ}, \text{ A.}$$

$$\underline{I}_N = \underline{I}_{N(1)} + \underline{I}_{N(3)} + \underline{I}_{N(5)} = -11 + 14,2e^{j69,4^\circ} + 18e^{-j23,6^\circ} = 22,9e^{j78,54^\circ}, \text{ A.}$$

Показание амперметра составляет 22,9 А.

ГЛАВА 5. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ

ВВОДНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

1. Классический метод расчета переходных процессов

Искомый послекоммутационный ток (или послекоммутационное напряжение) представляют суммой установившейся и свободной составляющих:

$$i = i_y + i_{св}, \quad u = u_y + u_{св}.$$

Установившийся режим обусловлен действием источников энергии, поэтому составляющие i_y и u_y определяют путём расчета послекоммутационной цепи обычными методами. Свободный режим обусловлен несоответствием предкоммутационного запаса электромагнитной энергии цепи его послекоммутационному значению. Общее выражение свободного тока имеет вид

$$i_{св}(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t},$$

где n – порядок характеристического уравнения цепи; p_k – корни характеристического уравнения; A_k — постоянные интегрирования.

Для составления характеристического уравнения цепи выражают входное сопротивление послекоммутационной цепи в комплексном виде, производят замену множителя $j\omega$ на p , а полученное выражение $Z(p)$ приравнивают нулю: $Z(p) = 0$. Характеристическое уравнение можно получить путем приравнивания нулю входного сопротивления $Z(p)$ относительно воображаемого разрыва любой ветви послекоммутационной цепи. Однако если в послекоммутационной цепи имеется источник тока, то характеристическое сопротивление следует рассчитывать относительно любой ветви схемы, не содержащей источника тока, полагая при этом ветвь с источником тока разомкнутой. В случаях, когда разветвленная цепь имеет лишь один реактивный элемент, целесообразно выражать входное сопротивление относительно ветви с этим элементом.

Выражение свободного тока определяется видом корней характеристического уравнения.

При различных вещественных корнях выражение свободного тока имеет вид

$$i_{св} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \dots + A_n e^{p_n t}.$$

Если m корней характеристического уравнения равны между собой (т. е. корень p имеет кратность m), то

$$i_{св} = (A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \dots + A_m t^m) e^{pt}.$$

Паре комплексно-сопряженных корней $p_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_{св}$ соответствует

$$i_{св} = A e^{-\delta t} \sin(\omega_{св} t + \psi).$$

В этом случае постоянными интегрирования являются A и ψ .

Для определения постоянных интегрирования используют начальные условия. В качестве независимых начальных условий берут значения токов индуктивных катушек $i_L(0)$ и напряжений на конденсаторах $u_C(0)$ к моменту коммутации:

$$i_L(-0) = i_L(+0), \quad u_C(-0) = u_C(+0).$$

2. Операторный метод расчета переходных процессов

Функция $f(t)$ [ток $i(t)$ или напряжение $u(t)$] вещественного переменного t (время), называемая *оригиналом*, заменяется соответствующей ей функцией $F(p)$ комплексного переменного p , называемой *изображением*.

Эти функции связаны прямым преобразованием Лапласа

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt.$$

В таблице 5.1 приводятся оригиналы важнейших функций и их изображения.

Уравнения для изображения тока и напряжения получают по законам Ома и Кирхгофа, записанным для операторных схем замещения. Все переменные величины заменяются их операторными изображениями [$i(t)$ на $I(p)$, $u(t)$ и $e(t)$ соответственно на $U(p)$ и $E(p)$], индуктивные сопротивления заменяются последовательными схемами, состоящими из операторного сопротивления pL и источника напряжения с ЭДС $Li(-0)$, емкостные сопротивления заменяются последовательными схемами, состоящими из операторного сопротивления $\frac{1}{pC}$ и источника напряжения с ЭДС $\frac{u_C(-0)}{p}$. Направление ЭДС $Li(-0)$ совпадает с направлением тока $i(t)$, а направление ЭДС

$\frac{u_C(-0)}{p}$ противоположно направлению напряжения u_C . При этом

$$u_L(p) = pLI(p) - Li(-0); \quad u_C(p) = \frac{1}{pC}I(p) + \frac{U_C(-0)}{p}.$$

Операторная схема замещения произвольной ветви (рис. 5.1) показана на рис. 5.2.

Таблица 5.1.

№ п/п	Оригинал	Изображение	№ п/п	Оригинал	Изображение
1	$\delta(t)$	1	10	$\frac{1}{a}(1 - e^{-at})$	$\frac{1}{p(p+a)}$
2	1	$\frac{1}{p}$	11	$\frac{1}{a^2}(1 - e^{-at} \times$ $\times (1 + at))$	$\frac{1}{p(p+a)^2}$
3	t	$\frac{1}{p^2}$	12	$\frac{1}{a-b}(e^{-bt} - e^{-at})$	$\frac{1}{(p+a)(p+b)}$
4	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	13	$\frac{ae^{-at} - be^{-bt}}{a-b}$	$\frac{p}{(p+a)(p+b)}$
5	$e^{\mp at}$	$\frac{1}{p \pm a}$	14	$\cos \omega_0 t$	$\frac{p}{p^2 + \omega_0^2}$
6	$e^{\mp j\omega_0 t}$	$\frac{1}{p \pm j\omega_0}$	15	$\sin \omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$
7	$e^{j(\omega_0 t + \psi)}$	$\frac{j\psi}{p - j\omega_0}$	16	$\sin(\omega_0 t + \psi)$	$\frac{p \sin \psi + \omega_0 \cos \psi}{p^2 + \omega_0^2}$
8	te^{-at}	$\frac{1}{(p+a)^2}$	17	$e^{-at} \sin \omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{(p+a)^2 + \omega_0^2}$
9	$(1-at)e^{-at}$	$\frac{p}{(p+a)^2}$	18	$e^{-at} \cos \omega_0 t$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega_0^2}$

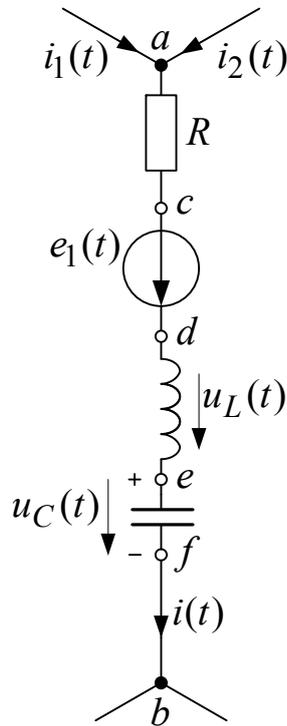


Рис. 5.1

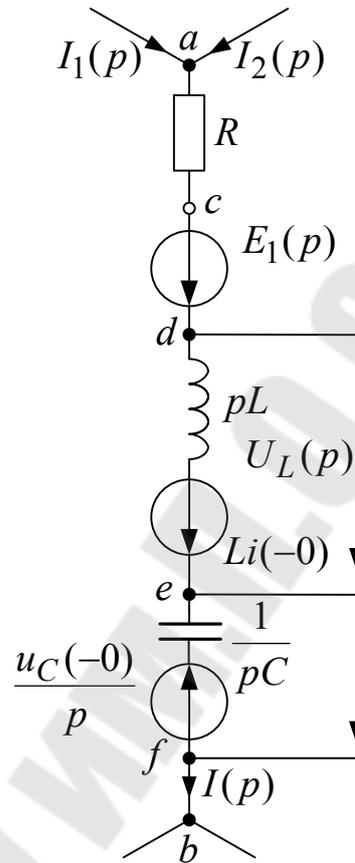


Рис. 5.2

Обычно изображение искомого тока или напряжения имеет вид рациональной дроби

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m}{p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m}{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)},$$

причем степень многочлена $F_1(p)$ ниже степени многочлена $F_2(p)$. Тогда оригинал определяется выражением

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t},$$

где p_1, p_2, \dots, p_n – корни уравнения $F_2(p) = 0$.

Если уравнение $F_2(p) = 0$ имеет один нулевой корень, т.е. если $F_2(p) = pF_3(p)$, то оригинал находят по формуле

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{F_1(p)}{pF_3(p)} = \frac{F_1(0)}{F_3(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{p_k F_3'(p_k)} e^{p_k t}.$$

Если же в наборе n корней уравнения $F_2(p) = 0$ корень p_1 имеет кратность m_1 , корень p_2 – кратность m_2 , ..., корень p_n – кратность m_n , то оригинал вычисляют по формуле

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(m_k - 1)!} \left[\frac{d^{m_k-1}}{dp^{m_k-1}} \frac{F_1(p)e^{pt}}{F_2(p)} \right]_{p=p_k},$$

причём выражение, стоящее в знаменателе квадратной скобки, дифференцируют после сокращения на $(p - p_k)^{m_k}$.

Если уравнение $F_2(p) = 0$ имеет одновременно и простые, и кратные корни, то слагаемые, соответствующие разным видам корней, определяют по разным формулам получения оригиналов.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

5.1. В схеме рис. 5.1.1 найти $i_1(t)$ и $i_L(t)$, если $U = 100$ В, $R_1 = 20$ Ом, $R_2 = 30$ Ом, $L = 15$ мГн.

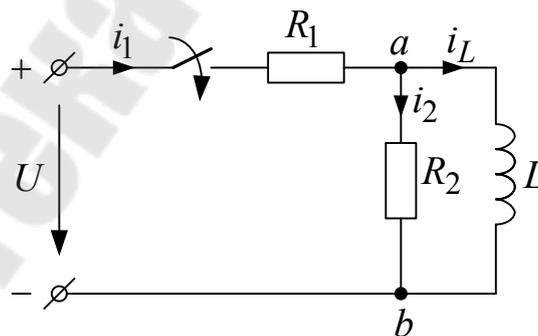


Рис. 5.1.1

Решение

Исходим из выражений

$$i_1 = i_{1y} + i_{1cv}, \quad i_L = i_{Ly} + i_{Lcv}. \quad (1)$$

Поскольку задана цепь постоянного тока, в установившемся режиме участок ab послекоммутационной цепи закорочен идеальной катушкой: $R_{ab} = 0$. Поэтому установившиеся составляющие искомым токов

$$i_{1y} = i_{Ly} = \frac{U}{R_1} = \frac{100}{20} = 5 \text{ A.}$$

Характеристическое уравнение послекоммутационной цепи, составленное по отношению к воображаемому разрыву в этой цепи ветви с катушкой (рис. 5.1.2), имеет вид

$$Z_{b'b''}(p) = pL + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 0. \quad (2)$$

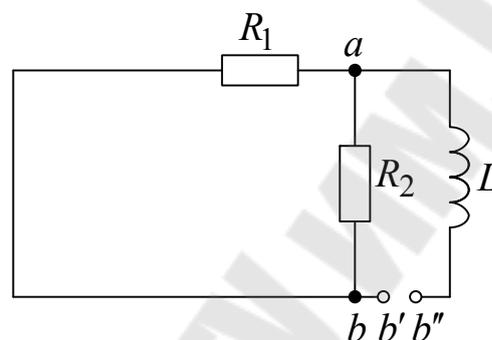


Рис. 5.1.2

Подставляя числовые данные условия в уравнение (2), получим:

$$0,015p + \frac{20 \cdot 30}{20 + 30} = 0,015p + 12 = 0.$$

Отсюда

$$p = p_1 = -\frac{12}{0,015} = -800 \text{ c}^{-1}.$$

Т.к. характеристический корень – единственный, свободные составляющие всех переходных характеристик цепи имеют вид $A e^{p_1 t}$. В частности,

$$i_{L_{св}}(t) = A_L e^{-800t}.$$

Возвращаясь к (1), получаем:

$$i_L(t) = 5 + A_L e^{-800t}. \quad (3)$$

Постоянную интегрирования A_L найдем, воспользовавшись начальным условием. По первому закону коммутации

$$i_L(-0) = i_L(+0). \quad (4)$$

Рассматривая докоммутационную цепь, находим:

$$i_L(-0) = 0. \quad (5)$$

С другой стороны, из (3) получаем:

$$i_L(+0) = 5 + A_L. \quad (6)$$

Используя (4) – (6), находим: $A_L = -5$, следовательно,

$$i_L(t) = 5(1 - e^{-800t}), \text{ А.} \quad (7)$$

Тогда

$$i_1 = i_2 + i_L = \frac{U_{ab}}{R} + i_L = \frac{1}{R} L \frac{di_L}{dt} + i_L = 5 - 3e^{-800t}, \text{ А.}$$

5.2. В схеме рис. 5.2.1 с параметрами: $E = 120 \text{ В}$; $R_1 = 250 \text{ Ом}$; $R_2 = 250 \text{ Ом}$; $R_3 = 500 \text{ Ом}$; $C = 10 \text{ мкФ}$ происходит замыкание ключа. Найти напряжение на ёмкости и все токи.

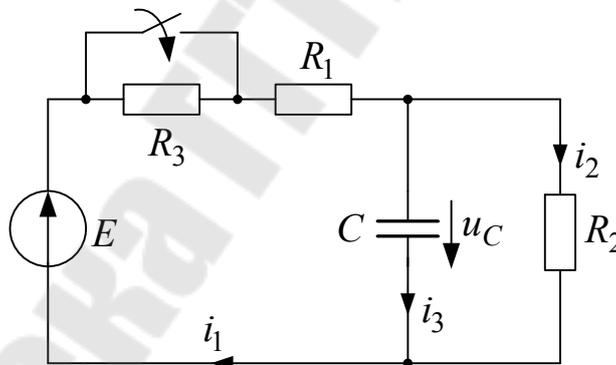


Рис. 5.2.1

Решение

Напряжение на ёмкости до коммутации

$$u_C(-0) = ER_2 / (R_3 + R_1 + R_2) = 30 \text{ В.}$$

Уравнения Кирхгофа для схемы после коммутации:

$$-i_1 + i_2 + i_3 = 0; \quad (1)$$

$$R_1 i_1 + R_2 i_2 = E; \quad (2)$$

$$u_C - R_2 i_2 = 0, \quad (3)$$

где $i_3 = C du_C / dt$.

Разрешив систему уравнений (1) – (3) относительно одной переменной, например u_C , получим дифференциальное уравнение

$$R_1 C \frac{du_C}{dt} + (1 + R_1/R_2)u_C = E. \quad (4)$$

Напряжение и токи представим в виде сумм установившейся и свободной составляющих:

$$u_C = u_{C_y} + u_{C_{св}};$$

$$i_1 = i_{1_y} + i_{1_{св}}; \quad i_2 = i_{2_y} + i_{2_{св}}; \quad i_3 = i_{3_y} + i_{3_{св}}.$$

В установившемся режиме токи и напряжение постоянны:

$$i_{1_y} = i_{2_y} = E/(R_1 + R_2) = 0,24 \text{ А}; \quad i_{3_y} = 0; \quad u_{C_y} = R_2 i_{2_y} = 60 \text{ В}.$$

Для дифференциального уравнения (4) характеристическое уравнение

$$R_1 C p + (1 + R_1/R_2) = 0$$

имеет один корень $p_1 = -800 \text{ с}^{-1}$, т.е. свободные составляющие $u_{C_{св}} = Ae^{p_1 t}$; $i_{1_{св}} = Be^{p_1 t}$; $i_{2_{св}} = Ce^{p_1 t}$; $i_{3_{св}} = De^{p_1 t}$.

Следовательно,

$$u_C = 60 + Ae^{p_1 t}; \quad i_1 = 0,24 + Be^{p_1 t}; \quad i_2 = 0,24 + Ce^{p_1 t}; \quad i_3 = De^{p_1 t},$$

и при $t = 0$ начальные значения:

$$u_C(0) = 60 + A; \quad i_1(0) = 0,24 + B; \quad i_2(0) = 0,24 + C; \quad i_3(0) = D.$$

Независимое начальное условие – напряжение на ёмкости находим из закона коммутации $u_C(0) = u_C(-0) = 30 \text{ В}$.

Зависимые начальные условия – начальные значения токов определим из системы уравнений Кирхгофа (1) – (3), записанных для момента времени $t = 0$:

$$-i_1(0) + i_2(0) + i_3(0) = 0; \quad R_1 i_1(0) + R_2 i_2(0) = E; \quad u_C(0) - R_2 i_2(0) = 0,$$

откуда $i_2(0) = 0,12 \text{ А}$; $i_1(0) = 0,36 \text{ А}$; $i_3(0) = 0,24 \text{ А}$, и постоянные интегрирования $A = -30 \text{ В}$; $B = 0,12 \text{ А}$; $C = -0,12 \text{ А}$; $D = 0,24 \text{ А}$.

Записываем искомые величины:

$$u_C = 60 - 30e^{-800t} \text{ В}; \quad i_1 = 0,24 + 0,12e^{-800t} \text{ А};$$

$$i_2 = 0,24 - 0,12e^{-800t} \text{ А}; \quad i_3 = 0,24e^{-800t} \text{ А}.$$

5.3. В схеме рис. 5.3.1 определить закон изменения тока в цепи после коммутации, если $R_1 = R_2 = 2 \text{ Ом}$; $\omega L = 3 \text{ Ом}$; $e(t) = 127 \sin(\omega t - 50^\circ) \text{ В}$; $\omega = 314 \text{ рад/с}$.

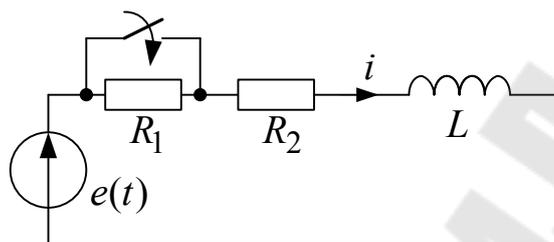


Рис. 5.3.1

Решение

Характеристическое уравнение послекоммутационной цепи

$$pL + R_2 = 0$$

имеет корень

$$p = -\frac{R_2}{L} = -\frac{R_2}{\frac{\omega L}{\omega}} = -\frac{2 \cdot 314}{3} = -210 \text{ с}^{-1}.$$

Следовательно,

$$i_{cb}(t) = Ae^{pt},$$

где

$$A = i_{cb}(+0).$$

Комплексная амплитуда тока в цепи до коммутации

$$\underline{I}_m = \frac{127e^{-j50^\circ}}{4 + 3j} = 25,4e^{-j86,50^\circ} \text{ А}.$$

Следовательно, мгновенное значение тока до коммутации

$$i = 25,4 \sin(\omega t - 86,50^\circ), \text{ А}.$$

В момент коммутации (при $\omega t = 0$)

$$i(-0) = 25,4 \sin(-86,50^\circ) = -25,35 \text{ А.}$$

После коммутации установившийся ток имеет комплексную амплитуду

$$\underline{I}_m = \frac{127e^{-j50^\circ}}{2+3j} = 35,2e^{-j106,20^\circ} \text{ А,}$$

поэтому мгновенное значение установившегося тока

$$i_y = 35,2 \sin(\omega t - 106,20^\circ) \text{ А.}$$

Следовательно,

$$i_y(+0) = 35,2 \sin(-106,20^\circ) = -33,8 \text{ А.}$$

По первому закону коммутации

$$i(-0) = i(+0) = -25,35 \text{ А.}$$

При этом

$$i(+0) = i_y(+0) + i_{cв}(+0).$$

Следовательно,

$$i_{cв}(+0) = i(+0) - i_y(+0) = -25,35 + 33,8 = 8,45 \text{ А.}$$

В итоге имеем:

$$i = i_y + i_{cв} = 35,2 \sin(\omega t - 106,20^\circ) + 8,45e^{-210t} \text{ А.}$$

5.4. Участок с параметрами $R_2 = 30 \text{ Ом}$; $L = 0,04 \text{ Гн}$ неразветвлённой цепи переменного тока, в которой действует ЭДС $e(t) = 100 \sin(2500t + 60^\circ) \text{ В}$, замыкается накоротко (рис. 5.4.1). Определить ток $i(t)$ в участке цепи с параметрами $R_1 = 20 \text{ Ом}$; $C = 4 \text{ мкФ}$ и напряжение $u_C(t)$ на конденсаторе.

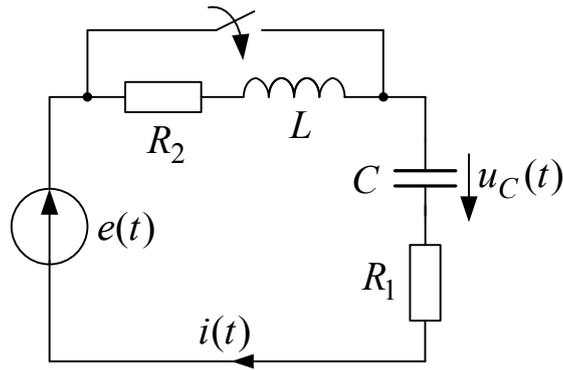


Рис. 5.4.1
Решение

Из режима цепи до коммутации определим начальное напряжение $u_C(-0)$. Комплексная амплитуда напряжения $u_C(t)$ до коммутации

$$\underline{U}_{C_m} = \frac{\underline{E}_m(-j/\omega C)}{R_1 + R_2 + j\omega L - j/\omega C} = \frac{100e^{j60^\circ}(-j100)}{20 + 30 + j100 - j100} = 200e^{-j30^\circ} \text{ В.}$$

Мгновенное значение напряжения

$$u_C(t) = 200 \sin(2500t - 30^\circ) \text{ В.}$$

Следовательно, при $t = 0$ напряжение

$$u_C(-0) = 200 \sin(-30^\circ) = -100 \text{ В.}$$

Уравнение Кирхгофа для цепи после коммутации

$$R_1 C du_C/dt + u_C = e. \quad (1)$$

Решения для искомых величин запишем в виде

$$i = i_y + i_{cv}; \quad u_C = u_{C_y} + u_{C_{cv}}.$$

Рассчитаем ток и напряжение установившегося режима:

$$\underline{I}_{m_y} = \frac{\underline{E}_m}{R_1 - j/\omega C} = \frac{100e^{j60^\circ}}{20 - j100} = 0,98e^{j138,7^\circ} \text{ А;}$$

$$i_y(t) = 0,98 \sin(2500t + 138,7^\circ) \text{ А;}$$

$$\underline{U}_{C_{m_y}} = \underline{I}_{m_y}(-j/\omega C) = 0,98e^{j138,7^\circ} \cdot 100e^{-j90^\circ} = 98e^{j48,7^\circ} \text{ В;}$$

$$u_{C_y}(t) = 98 \sin(2500t + 48,7^\circ) \text{ В.}$$

Характеристическое уравнение

$$R_1 C p + 1 = 0$$

имеет один корень $p_1 = -12500 \text{ с}^{-1}$. Поэтому свободные составляющие

$$u_{C_{св}} = A e^{p_1 t}; \quad i_{св} = B e^{p_1 t},$$

и

$$u_C(t) = 98 \sin(2500t + 48,7^\circ) + A e^{p_1 t};$$

$$i(t) = 0,98 \sin(2500t + 138,7^\circ) + B e^{p_1 t}.$$

При $t = 0$

$$\left. \begin{aligned} u_C(0) &= 98 \sin 48,7^\circ + A; \\ i(0) &= 0,98 \sin 138,7^\circ + B. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Начальное напряжение на ёмкости находим из закона коммутации:

$$u_C(0) = u_C(-0) = -100 \text{ В.}$$

Начальное значение тока найдём из уравнения (1), записанного для момента времени $t = 0$:

$$u_C(0) + R i(0) = e(0),$$

откуда $i(0) = 9,33 \text{ А}$ и из (2) постоянные интегрирования $A = -173,6 \text{ В}$; $B = 8,68 \text{ А}$. Следовательно,

$$u_C(t) = 98 \sin(2500t + 48,7^\circ) - 173,6 e^{-12500t} \text{ В};$$

$$i(t) = 0,98 \sin(2500t + 138,7^\circ) + 8,68 e^{-12500t} \text{ А.}$$

5.5. В схеме рис. 5.5.1 происходит размыкание ключа. Параметры схемы: $J = 2 \text{ А}$; $e(t) = 120 \sin(1000t + 30^\circ) \text{ В}$; $R_1 = R_2 = 50 \text{ Ом}$; $C = 10 \text{ мкФ}$. Найти зависимости $u_C(t)$ и $i_1(t)$.

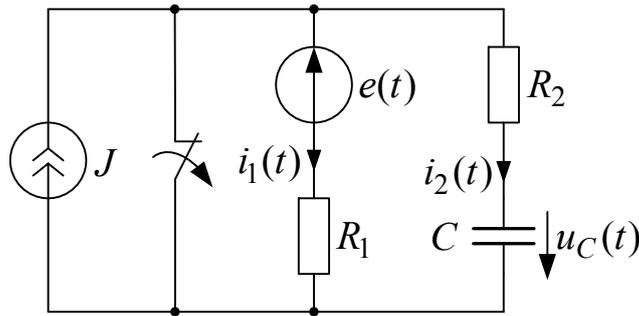


Рис. 5.5.1

Решение

Определим напряжение на ёмкости до коммутации $u_C(-0)$. Поскольку в этом режиме ветвь R_2C закорочена, то $u_C(-0) = 0$.

Уравнения Кирхгофа для схемы после коммутации:

$$-J + i_1 + i_2 = 0; \quad (1)$$

$$R_2 i_2 + u_C - R_1 i_1 = e. \quad (2)$$

Решение будем искать в виде

$$u_C = u_{C_y} + u_{C_{св}}; \quad i_1 = i_{1_y} + i_{1_{св}}.$$

Найдём установившийся режим после коммутации, применяя метод наложения. От действия источника постоянного тока J имеем:

$$i'_{1_y} = J = 2 \text{ A}; \quad u'_{C_y} = R_1 i'_{1_y} = 100 \text{ В}.$$

От действия гармонической ЭДС $e(t)$ имеем

$$\underline{I}''_{1_m} = -\underline{I}''_{2_m} = \frac{-\underline{E}_m}{R_1 + R_2 - j/\omega C} = -0,848 e^{j75^\circ} \text{ A};$$

$$\underline{U}''_{C_m} = \underline{I}''_{2_m} (-j/\omega C) = 84,8 e^{-j15^\circ} \text{ В},$$

т.е.

$$i''_{1_y} = -0,848 \sin(1000t + 75^\circ) \text{ A};$$

$$u''_{C_y} = 84,8 \sin(1000t - 15^\circ) \text{ В}.$$

Таким образом,

$$u_{C_y} = u'_{C_y} + u''_{C_y} = 100 + 84,8 \sin(1000t - 15^\circ) \text{ В};$$

$$i_{1_y} = i'_{1_y} + i''_{1_y} = 2 - 0,848 \sin(1000t + 75^\circ) \text{ А}.$$

Методом входного сопротивления составим характеристическое уравнение

$$Z(p) = R_2 + 1/pC + R_1 = 0,$$

корень которого $p_1 = -1000 \text{ с}^{-1}$.

Следовательно,

$$u_{C_{св}} = Ae^{p_1 t}; \quad i_{1_{св}} = Be^{p_1 t}.$$

Искомые величины:

$$u_C(t) = 100 + 84,8 \sin(1000t - 15^\circ) + Ae^{p_1 t};$$

$$i_1(t) = 2 - 0,848 \sin(1000t + 75^\circ) + Be^{p_1 t},$$

и, в частности, при $t = 0$ имеем:

$$\left. \begin{aligned} u_C(0) &= 100 + 84,8 \sin(-15^\circ) + A; \\ i_1(0) &= 2 - 0,848 \sin 75^\circ + B. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Начальное значение напряжения на ёмкости найдём из закона коммутации: $u_C(0) = u_C(-0) = 0$. Начальное значение тока $i_1(0)$ найдём из уравнений Кирхгофа (1) и (2). При $t = 0$ из уравнений

$$-J + i_1(0) + i_2(0) = 0;$$

$$R_2 i_2(0) + u_C(0) - R_1 i_1(0) = e(0)$$

получим $i_1(0) = 0,4 \text{ А}$ и из (3) постоянные интегрирования $A = -78 \text{ В}$; $B = -0,78 \text{ А}$.

Записываем искомые зависимости:

$$u_C(t) = 100 + 84,8 \sin(1000t - 15^\circ) - 78e^{-1000t} \text{ В};$$

$$i_1(t) = 2 - 0,848 \sin(1000t + 75^\circ) - 0,78e^{-1000t} \text{ А}.$$

5.6. Цепь (рис. 5.6.1) подключается к источнику постоянного напряжения $U = 125 \text{ В}$. Найти напряжение на конденсаторе для трёх случаев: 1) $R = 250 \text{ Ом}$, $L = 667 \text{ мГн}$, $C = 2 \text{ мкФ}$; 2) $R = 100 \text{ Ом}$, $L = 40 \text{ мГн}$, $C = 1 \text{ мкФ}$; 3) $R = 100 \text{ Ом}$, $L = 40 \text{ мГн}$, $C = 5 \text{ мкФ}$.

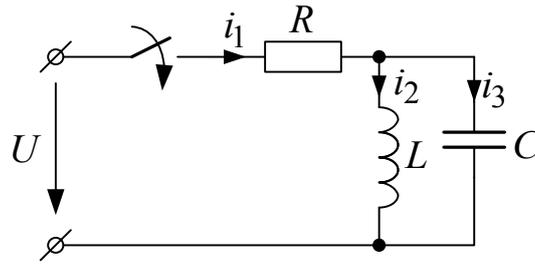


Рис. 5.6.1

Решение

Напряжение на конденсаторе

$$u_C = u_{C_y} + u_{C_{св}}. \quad (1)$$

При этом $u_{C_y} = 0$, так как в послеконмутационной цепи конденсатор коротко замкнут идеальной катушкой.

Характеристическое уравнение цепи

$$Z(p) = R + \frac{pL \frac{1}{pC}}{pL + \frac{1}{pC}} = \frac{RLCp^2 + Lp + R}{p^2LC + 1} = 0 \quad (2)$$

имеет два корня:

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\frac{1}{4R^2C^2} + \frac{1}{LC}}. \quad (3)$$

Далее задачу решаем в такой последовательности.

Для каждого из трех заданных случаев из (3) определим вид корней и в соответствии с ним найдем $u_{C_{н\acute{a}}}$. Для определения постоянных интегрирования составим уравнения по законам Кирхгофа:

$$i_1 = i_2 + i_3, \quad U = Ri_1 + u_C. \quad (4)$$

Запишем независимые начальные условия

$$u_C(-0) = u_C(+0) = 0, \quad (I)$$

$$i_2(-0) = i_2(+0) = 0. \quad (II)$$

Подставим их в уравнения (4) для начального момента времени (после коммутации):

$$i_1(+0) = i_2(+0) + i_3(+0), \quad U = Ri_1(+0) + u_C(+0). \quad (5)$$

Решив их, находим $i_3(+0)$. Затем, используя зависимость

$i_3 = C \frac{du_C}{dt}$ для момента $t = +0$, получим

$$i_3(+0) = C \left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=+0}. \quad (6)$$

В завершение определим две неизвестные постоянные интегрирования.

1. Подставим в уравнение (3) числовые значения первого случая.

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2 \cdot 250 \cdot 2 \cdot 10^{-6}} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2 \cdot 250 \cdot 2 \cdot 10^{-6}} \right)^2 - \frac{1}{667 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-6}}} =$$

$$= (-1000 \pm 500) \text{ с}^{-1}, \text{ т.е. } p_1 = -500 \text{ с}^{-1}; p_2 = -1500 \text{ с}^{-1}.$$

Так как корни действительные и различные,

$$u_{C_{св}} = A_1 e^{-500t} + A_2 e^{-1500t}. \quad (7)$$

Из уравнения (5) с учетом начальных условий (I) и (II) получим:

$$i_1(+0) = i_2(+0) + i_3(+0) = 0 + i_3(+0);$$

$$U = Ri_1(+0) + u_C(+0) = 250i_1(+0) + 0 = 125.$$

Решая эту систему уравнений, находим:

$$i_3(+0) = 0,5 \text{ А}.$$

Далее записываем:

$$u_C = u_{C_y} + u_{C_{св}} = 0 + A_1 e^{-500t} + A_2 e^{-1500t};$$

$$i_3 = C \frac{du_C}{dt} = 2 \cdot 10^{-6} (-500A_1 e^{-500t} - 1500A_2 e^{-1500t}).$$

Перепишем эти уравнения для момента $t = +0$ и подставим в них $u_C(+0) = 0$ и $i_3(+0) = 0,5 \text{ А}$. Получим:

$$0 = A_1 + A_2; \quad 0,5 = -10^{-3} A_1 - 3 \cdot 10^{-3} A_2.$$

Отсюда $A_1 = -A_2 = 250$. Таким образом, по (1) и (7) искомое напряжение

$$u_C = u_{C_{св}} = (250e^{-500t} - 250e^{-1500t}) \text{ В.} \quad (8)$$

Теперь вычислим все токи:

$$\begin{aligned} i_3 &= C \frac{du_C}{dt} = 2 \cdot 10^{-6} \frac{d}{dt} (250e^{-500t} - 250e^{-1500t}) = \\ &= (0,75e^{-1500t} - 0,25e^{-500t}) \text{ А;} \end{aligned}$$

$$i_1 = \frac{U - u_C}{R} = \frac{125 - (250e^{-500t} - 250e^{-1500t})}{250} = (0,5 - e^{-500t} + e^{-1500t}) \text{ А;}$$

$$i_2 = i_1 - i_3 = (0,5 - 0,75e^{-500t} + 0,25e^{-1500t}) \text{ А.}$$

2. Подставим в формулу (3) числовые значения второго случая:

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= -\frac{1}{2 \cdot 100 \cdot 1 \cdot 10^{-6}} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2 \cdot 100 \cdot 1 \cdot 10^{-6}}\right)^2 - \frac{1}{40 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 10^{-6}}} = \\ &= -5 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}. \end{aligned}$$

Характеристический корень – двукратный, поэтому решение ищем в виде

$$u_{C_{св}} = B_1 e^{-5000t} + B_2 t e^{-5000t}. \quad (9)$$

Как и в первом случае, из уравнения (5) с учетом начальных условий (I) и (II) находим:

$$i_3(+0) = 1,25 \text{ А.}$$

Подставив в уравнение (1) и в выражение i_3 уравнение (9), получим

$$\begin{aligned} u_C &= u_{C_y} + u_{C_{св}} = 0 + B_1 e^{-5000t} + B_2 t e^{-5000t}; \\ i_3 &= C \frac{du_C}{dt} = 10^{-6} (B_2 - 5000B_1 - 5000B_2 t) e^{-5000t}. \end{aligned}$$

Полагая в этих уравнениях $t = 0$ и подставляя в полученные выражения значения $u_C(0) = 0$ и $i_3(0) = 1,25$ А, приходим к уравнениям

$$0 = B_1; \quad 1,25 = 10^{-6}(B_2 - 5000B_1).$$

Следовательно, $B_1 = 0$; $B_2 = 1,25 \cdot 10^6$. Таким образом, искомое напряжение по (1) и (9)

$$u_C = u_{C_{св}} = 1,25 \cdot 10^6 te^{-5000t} \text{ В.}$$

3. Рассмотрим третий случай числовых значений.

Подставляя эти значения в уравнение (3), находим

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2 \cdot 100 \cdot 5 \cdot 10^{-6}} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2 \cdot 100 \cdot 5 \cdot 10^{-6}}\right)^2 - \frac{1}{40 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-6}}} =$$

$$= (-1000 \pm j2000) \text{ с}^{-1}.$$

Корни характеристического уравнения комплексно-сопряженные ($p_{1,2} = -\delta \pm j\omega$), поэтому свободную составляющую напряжения на конденсаторе следует искать в виде

$$u_{C_{св}} = Ae^{-\delta t} \sin(\omega t + \psi) = Ae^{-1000t} \sin(2000t + \psi). \quad (10)$$

По аналогии с предыдущими случаями из уравнений (5) с учетом начальных условий (I) и (II) получим: $i_3(0) = 1,25$ А.

Подставив в (1) и в выражение i_3 уравнение (10), получим

$$u_C = u_{C_y} + u_{C_{св}} = 0 + Ae^{-1000t} \sin(2000t + \psi);$$

$$i_3 = C \frac{du_C}{dt} = 5 \cdot 10^{-6} A [2000 \cos(2000t + \psi) - 1000 \sin(2000t + \psi)] e^{-1000t}.$$

Переписывая эти уравнения для момента $t = +0$ и подставляя в них значения $u_C(0) = 0$ и $i_3(0) = 1,25$ А, получим:

$$0 = 5 \cdot 10^{-6} A \sin \psi; \quad 1,25 = 5 \cdot 10^{-6} (2000A \cos \psi - 1000A \sin \psi).$$

Решая их, находим:

$$\psi = 0, \quad A = 125.$$

Таким образом, по (1) и (10) искомое напряжение

$$u_C = 125e^{-1000t} \sin 2000t \text{ В.}$$

5.7. В схеме рис. 5.7.1 размыкается ключ. Параметры схемы: $J(t) = 2 \sin(2500t + 30^\circ) \text{ А}$; $R = 100 \text{ Ом}$; $C = 1 \text{ мкФ}$; $L = 0,2 \text{ Гн}$. Найти зависимости $u_C(t)$ и $i_2(t)$.

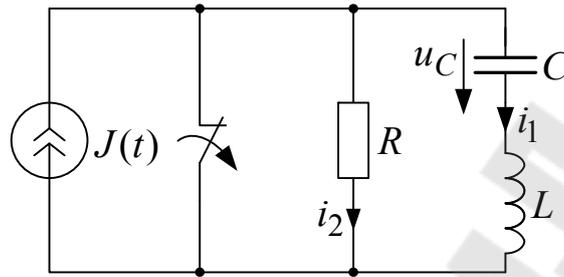


Рис. 5.7.1

Решение

Напряжение на ёмкости и ток в индуктивности в момент $t = 0$ до коммутации: $u_C(-0) = 0$, $i_1(-0) = 0$.

Искомые величины представим в виде суммы установившейся и свободной составляющих:

$$u_C = u_{C_y} + u_{C_{св}}; \quad i_2 = i_{2_y} + i_{2_{св}}.$$

Найдём комплексные амплитуды и мгновенные значения токов и напряжения на конденсаторе для установившегося режима после коммутации:

$$\underline{I}_{1_m} = \underline{J}_m \frac{R}{R + jX_L - jX_C} = 2e^{j30^\circ} \frac{100}{100 + j500 - j400} = \sqrt{2}e^{-j15^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_{2_m} = \underline{J}_m \frac{jX_L - jX_C}{R + jX_L - jX_C} = 2e^{j30^\circ} \frac{j500 - j400}{100 + j500 - j400} = \sqrt{2}e^{j75^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{U}_{C_m} = \underline{I}_{1_m} (-jX_C) = \sqrt{2}e^{-j15^\circ} (-j400) = 400\sqrt{2}e^{-j105^\circ} \text{ В};$$

$$i_{1_y} = \sqrt{2} \sin(2500t - 15^\circ) \text{ А};$$

$$i_{2_y} = \sqrt{2} \sin(2500t + 75^\circ) \text{ А};$$

$$u_{C_y} = 400\sqrt{2} \sin(2500t - 105^\circ) \text{ В.}$$

Методом входного сопротивления составим характеристическое уравнение

$$Z(p) = R + pL + 1/pC = 0.$$

Это характеристическое уравнение

$$p^2 + 500p + 5 \cdot 10^6 = 0$$

имеет корни комплексные сопряжённые $p_{1,2} = -250 \pm j2220 \text{ с}^{-1}$.

Следовательно, свободные составляющие можно записать в виде

$$u_{C_{св}} = Ae^{-250t} \sin(2220t + \alpha);$$

$$i_{2_{св}} = Be^{-250t} \sin(2220t + \beta).$$

Найдём свободные составляющие. Составим системы уравнений для определения постоянных интегрирования A , α , B , β . Для определения двух постоянных интегрирования каждой из искомым величин вычислим производные:

$$\frac{du_{C_{св}}}{dt} = -250Ae^{-250t} \sin(2220t + \alpha) + 2220Ae^{-250t} \cos(2220t + \alpha);$$

$$\frac{di_{2_{св}}}{dt} = -250Be^{-250t} \sin(2220t + \beta) + 2220Be^{-250t} \cos(2220t + \beta).$$

Уравнения для определения постоянных интегрирования (момент времени $t = 0$) имеют следующий вид:

$$u_{C_{св}}(0) = A \sin \alpha;$$

$$\left. \frac{du_{C_{св}}}{dt} \right|_0 = -250A \sin \alpha + 2220A \cos \alpha;$$

$$i_{2_{св}}(0) = B \sin \beta;$$

$$\left. \frac{di_{2_{св}}}{dt} \right|_0 = -250B \sin \beta + 2220B \cos \beta.$$

Для вычисления постоянных интегрирования найдём начальные условия для свободных составляющих. Из законов коммутации сле-

дует, что $u_C(0) = u_C(-0) = 0$; $i_1(0) = i_1(-0) = 0$. Поэтому начальные значения свободных составляющих тока в индуктивности и напряжения на ёмкости

$$i_{1_{cв}}(0) = i_1(0) - i_{1_y}(0) = -\sqrt{2} \sin(-15^\circ) = 0,366 \text{ A};$$

$$u_{C_{cв}}(0) = u_C(0) - u_{C_y}(0) = -400\sqrt{2} \sin(-105^\circ) = 546 \text{ В}.$$

Запишем уравнения Кирхгофа для свободных составляющих, отключив ветвь с идеальным источником тока:

$$-i_{2_{cв}} - i_{1_{cв}} = 0; \quad (1)$$

$$u_{C_{cв}} + L \frac{di_{1_{cв}}}{dt} - Ri_{2_{cв}} = 0, \quad (2)$$

где

$$i_{1_{cв}} = C \frac{du_{C_{cв}}}{dt} \quad (3)$$

и, в частности, для момента времени $t = 0$

$$-i_{2_{cв}}(0) - i_{1_{cв}}(0) = 0; \quad (1a)$$

$$u_{C_{cв}}(0) + L \left. \frac{di_{1_{cв}}}{dt} \right|_0 - Ri_{2_{cв}}(0) = 0; \quad (2a)$$

$$i_{1_{cв}}(0) = C \left. \frac{du_{C_{cв}}}{dt} \right|_0, \quad (3a)$$

причём в этих уравнениях известны $u_{C_{cв}}(0)$ и $i_{1_{cв}}(0)$.

Из (1a), (2a) и (3a) находим $i_{2_{cв}}(0) = -0,366 \text{ A}$;

$$\left. \frac{di_{1_{cв}}}{dt} \right|_0 = -2913 \text{ A/c}; \quad \left. \frac{du_{C_{cв}}}{dt} \right|_0 = 366 \cdot 10^3 \text{ В/c}.$$

Для определения производной второго тока дифференцируем уравнение (1): $\frac{di_{2_{cв}}}{dt} = -\frac{di_{1_{cв}}}{dt}$, откуда следует, что для момента време-

$$\text{ни } t = 0 \text{ производная } \left. \frac{di_{2_{cв}}}{dt} \right|_0 = -\left. \frac{di_{1_{cв}}}{dt} \right|_0 = 2913 \text{ A/c}.$$

Из уравнений для определения постоянных интегрирования находим: $A = 591 \text{ В}$; $\alpha = 67,5^\circ$; $B = 1,321 \text{ А}$; $\beta = -16,08^\circ$.

Записываем искомые величины:

$$u_C(t) = 400\sqrt{2} \sin(2500t - 105^\circ) + 591e^{-250t} \sin(2220t + 67,5^\circ) \text{ В};$$

$$i_2(t) = \sqrt{2} \sin(2500t + 75^\circ) + 1,321e^{-250t} \sin(2220t - 16,08^\circ) \text{ А}.$$

5.8. Рассчитать операторным методом ток i_C в схеме рис. 5.8.1, если $J = 3 \text{ А}$; $R_1 = 12 \text{ Ом}$; $R_2 = 8 \text{ Ом}$, $C = 100 \text{ мкФ}$.

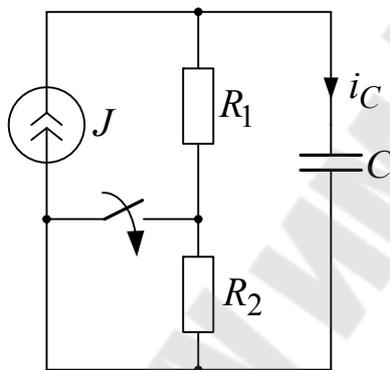


Рис. 5.8.1

Решение

До коммутации

$$i_C = 0,$$

$$u_C = (R_1 + R_2)J = (12 + 8) \cdot 3 = 60 \text{ В}.$$

Следовательно,

$$u_C(+0) = u_C(-0) = 60 \text{ В}.$$

Операторная схема замещения послекоммутационной цепи представлена на рис. 5.8.2.

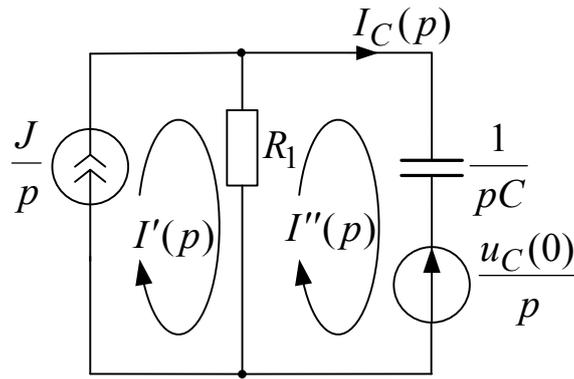


Рис. 5.8.2

Для этой схемы

$$\begin{cases} I'(p) = \frac{J}{p}, \\ I''(p) \left(R_1 + \frac{1}{pC} \right) - R_1 I'(p) = -\frac{U_C(0)}{p}. \end{cases}$$

Отсюда

$$I''(p) = \frac{R_1 J - U_C(0)}{R_1 \left(p + \frac{1}{R_1 C} \right)} = \frac{12 \cdot 3 + 60}{12 \left(p + \frac{1}{12 \cdot 100 \cdot 10^{-6}} \right)} = -\frac{2}{p + 833,3}.$$

Поскольку

$$i_C(t) \doteq I''(p),$$

окончательно получаем:

$$i_C(t) = -2e^{-833,3t}, \text{ А.}$$

5.9. Решить задачу 5.6 операторным методом.

Решение

Поскольку заданная цепь содержит только один источник ЭДС, для её расчёта можно применить закон Ома в операторном виде:

$$I_1(p) = \frac{U(p)}{Z(p)},$$

где $U(p)$ – изображение входного напряжения:

$$U(p) = \frac{U}{p}.$$

Найдем операторное сопротивление цепи:

$$Z(p) = R + \frac{pL \frac{1}{pC}}{pL + \frac{1}{pC}} = \frac{RLCp^2 + Lp + R}{p^2LC + 1}.$$

Тогда

$$I_1(p) = \frac{U(p)}{Z(p)} = \frac{U(p^2LC + 1)}{p(RLCp^2 + Lp + R)}.$$

Изображение напряжения на конденсаторе получим, умножая изображение тока на операторное сопротивление участка с параллельным соединением ветвей:

$$U_C(p) = I_1(p) \frac{pL \frac{1}{pC}}{pL + \frac{1}{pC}} = \frac{U}{RC \left(p^2 + p \frac{1}{RC} + \frac{1}{LC} \right)} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}, \quad (1)$$

где

$$F_1(p) = \frac{U}{RC}, \quad F_2(p) = p^2 + \frac{1}{RC}p + \frac{1}{LC} = (p - p_1)(p - p_2). \quad (2)$$

Уравнение $F_2(p) = 0$ имеет корни

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}. \quad (3)$$

1. Решим задачу для первого варианта числовых значений.

По формулам (2) и (3) определяем:

$$F_1(p) = \frac{125}{(250 \cdot 2 \cdot 10^{-6})} = 0,25 \cdot 10^6;$$

$$F_2(p) = p^2 + p \frac{1}{250 \cdot 2 \cdot 10^{-6}} + \frac{1}{667 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-6}} = p^2 + 2000p + 0,75 \cdot 10^6.$$

Найдем корни уравнения $F_2(p) = p^2 + 2000p + 0,75 \cdot 10^6 = 0$:

$$p_1 = -500 \text{ с}^{-1}, \quad p_2 = -1500 \text{ с}^{-1}.$$

Вычислим производную $F_2'(p)$ и ее значения при $p = p_1$ и $p = p_2$:

$$F_2'(p) = 2p + 2000,$$

$$F_2'(p_1) = 2(-500) + 2000 = 1000; \quad F_2'(p_2) = 2(-1500) + 2000 = -1000.$$

По формуле (1) определяем:

$$U_C(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{0,25 \cdot 10^6}{p^2 + 2000p + 0,75 \cdot 10^6}.$$

По формуле разложения

$$\begin{aligned} U_C(p) &= \frac{F_1(p_1)}{F_2(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{F_1(p_2)}{F_2(p_2)} e^{p_2 t} = \frac{0,25 \cdot 10^6 e^{-500t}}{1000} + \frac{0,25 \cdot 10^6 e^{-1500t}}{-1000} = \\ &= 250(e^{-500t} - e^{-1500t}) \text{ В.} \end{aligned}$$

2. Решим задачу для второго варианта числовых значений.

По формулам (2) и (3) определяем:

$$F_1(p) = \frac{125}{100 \cdot 1 \cdot 10^{-6}} = 1,25 \cdot 10^6; \quad F_2(p) = (p + 5000)^2;$$

$$p_1 = p_2 = -5000 \text{ с}^{-1}.$$

Изображение напряжения на конденсаторе

$$U_C(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{1,25 \cdot 10^6}{(p + 5000)^2}.$$

Т.к. корни – кратные (порядок кратности $m_k = m_1 = 2$),

$$\frac{F_2(p)}{(p - p_1)^{m_k}} = \frac{(p + 5000)^2}{(p + 5000)^2} = 1.$$

Таким образом,

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} \cdot \left[\frac{d}{d p} \frac{F_1(p)e^{pt}}{1} \right]_{p=p_1} = \left[\frac{d}{d p} (1,25 \cdot 10^6 e^{p_1 t}) \right]_{p=p_1} =$$

$$= (1,25 \cdot 10^6 t e^{p_1 t})_{p=p_1} = 1,25 \cdot 10^6 t e^{-5000t} = u_C(t).$$

3. Рассмотрим третий вариант числовых значений.

По формулам (2) и (3) находим:

$$F_1(p) = \frac{125}{100 \cdot 5 \cdot 10^{-6}} = 0,25 \cdot 10^6; \quad F_2(p) = p^2 + 2000p + 5 \cdot 10^6;$$

$$p_{1,2} = -1000 \pm j2000 \text{ с}^{-1}.$$

Производная от $F_2(p)$ и ее значения при $p = p_1$ и $p = p_2$ равны:

$$F_2'(p) = 2p + 2000;$$

$$F_2'(p_1) = 2(-1000 + j2000) + 2000 = j4000;$$

$$F_2'(p_2) = 2(-1000 - j2000) + 2000 = -j4000.$$

Искомый оригинал имеет вид:

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{0,25 \cdot 10^6}{p^2 + 2000p + 5 \cdot 10^6} =$$

$$= \frac{0,25 \cdot 10^6}{j4000} e^{(-1000+j2000)t} + \frac{0,25 \cdot 10^6}{-j4000} e^{(-1000-j2000)t} =$$

$$= 2 \operatorname{Re} \left[0,25 \cdot 10^6 e^{-1000t} \frac{e^{j2000t}}{4000 e^{j90^\circ}} \right] =$$

$$= \frac{2 \cdot 0,25 \cdot 10^6 e^{-1000t}}{4000} \cos(2000t - 90^\circ) = 125 e^{-1000t} \sin 2000t = u_C(t).$$

5.10. В схеме рис. 5.10.1 происходит замыкание ключа. Определить операторным методом ток i_3 , если $E = 200$ В; $J = 1$ А; $L = 0,5$ Гн; $C = 400$ мкФ; $R_1 = 100$ Ом; $R_2 = 100$ Ом.

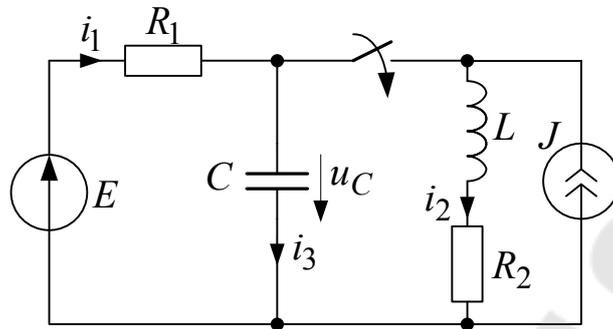


Рис. 5.10.1

Решение

До коммутации

$$i_2(-0) = J = 1 \text{ А}, \quad u_C(-0) = E = 200 \text{ В}.$$

В установившемся режиме после коммутации токи целесообразно рассчитать методом наложения:

$$i_{1y} = \frac{E}{R_1 + R_2} - J \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{200}{100 + 100} - \frac{100}{100 + 100} = 0,5 \text{ А},$$

$$i_{2y} = \frac{E}{R_1 + R_2} + J \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{200}{100 + 100} + \frac{100}{100 + 100} = 1,5 \text{ А},$$

$$i_{3y} = 0, \quad u_{C_y} = R_2 i_{2y} = 100 \cdot 1,5 = 150 \text{ В}.$$

По законам коммутации

$$i_2(+0) = i_2(-0) = 1 \text{ А}; \quad u_C(+0) = u_C(-0) = 200 \text{ В}.$$

Следовательно, начальные значения свободных составляющих тока в индуктивности и напряжения на емкости соответственно равны:

$$i_{2_{cs}}(0) = i_2(0) - i_{2y}(0) = 1 - 1,5 = -0,5 \text{ А};$$

$$u_{C_{cs}}(0) = u_C(0) - u_{C_y}(0) = 200 - 150 = 50 \text{ В}.$$

Составим эквивалентную операторную схему замещения для свободных составляющих (рис. 5.10.2).

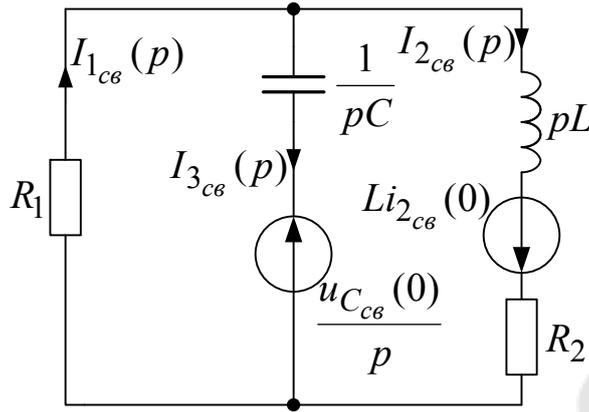


Рис. 5.10.2

Для этой схемы находим операторное изображение искомого тока:

$$I_{3_{cs}}(p) = \frac{-p[R_1 L C i_{2_{cs}}(0) + L C u_{C_{cs}}(0)] - (R_1 + R_2) C u_{C_{cs}}(0)}{p^2 R_1 L C + p(R_1 R_2 C + L) + (R_1 + R_2)} =$$

$$= \frac{-4}{p^2 \cdot 0,02 + p \cdot 4,5 + 200} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}.$$

Решая уравнение $F_2(p) = 0$, т.е.

$$p^2 \cdot 0,02 + p \cdot 4,5 + 200 = 0,$$

находим характеристические корни: $p_1 = -61 \text{ с}^{-1}$; $p_2 = -164 \text{ с}^{-1}$.

Оригинал искомого тока найдем по теореме разложения:

$$i_{3_{cs}} = \frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{F_1(p_2)}{F_2'(p_2)} e^{p_2 t},$$

где $F_2'(p) = 0,04p + 4,5$. Имеем:

$$i_3 = i_{3_{cs}} = 1,942 e^{-61t} + 1,942 e^{-164t}, \text{ А.}$$

5.11. Решить задачу 5.7 операторным методом.

Решение

До коммутации: $i_1(-0) = 0$, $u_C(-0) = 0$.

В установившемся режиме после коммутации комплексы амплитуд искомым величин равны

$$\underline{I}_{1m} = \underline{J}_m \frac{R}{R + j(X_L - X_C)} = 2e^{j30^\circ} \frac{100}{100 + j(500 - 400)} = 1,414e^{-j15^\circ} \text{ А,}$$

$$\underline{I}_{2m} = \underline{J}_m \frac{j(X_L - X_C)}{R + j(X_L - X_C)} = 2e^{j30^\circ} \frac{j(500 - 400)}{100 + j(500 - 400)} = 1,414e^{j75^\circ} \text{ А,}$$

$$\underline{U}_{Cm} = -jX_C \cdot \underline{I}_{1m} = 400e^{-j90^\circ} \cdot 1,414e^{-j15^\circ} = 565,7e^{-j105^\circ} \text{ В.}$$

Следовательно, мгновенные значения искомым величин выражаются равенствами

$$i_{1y} = 1,414 \sin(2500t - 15^\circ), \text{ А; } \quad i_{2y} = 1,414 \sin(2500t + 75^\circ), \text{ А;}$$

$$u_{Cy} = 565,7 \sin(2500t - 105^\circ), \text{ А.}$$

По законам коммутации

$$i_1(0) = i_1(-0) = 0; \quad u_C(0) = u_C(-0) = 0.$$

Следовательно, начальные значения свободных составляющих тока в индуктивности и напряжения на емкости соответственно равны:

$$i_{1св}(0) = i_1(0) - i_{1y}(0) = 0 - 1,414 \sin(-15^\circ) = 0,366 \text{ А;}$$

$$u_{Cсв}(0) = u_C(0) - u_{Cy}(0) = 0 - 565,7 \sin(-105^\circ) = 546 \text{ В.}$$

Эквивалентная операторная схема для свободных составляющих представлена на рис. 5.11.1.

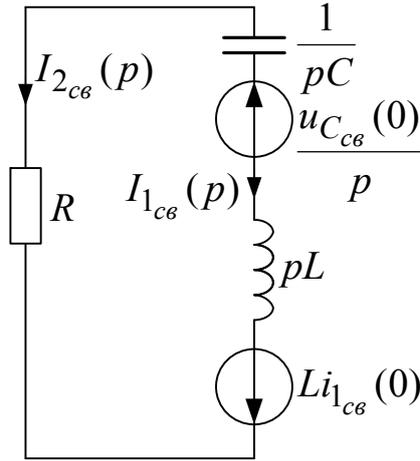


Рис. 5.11.1

В этой схеме $i_{1_{св}}(0) = 0,366$ А, $u_{C_{св}}(0) = 546$ В.

Из схемы рис. 5.11.1 следует, что

$$I_{2_{св}}(p) = \frac{\frac{u_{C_{св}}(0)}{p} - Li_{1_{св}}(0)}{R + pL + \frac{1}{pC}} = \frac{-0,0732 \cdot 10^{-6} p + 546 \cdot 10^{-6}}{0,2 \cdot 10^{-6} p^2 + 10^{-4} p + 1} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}.$$

Уравнение $F_2(p) = 0$, т.е.

$$0,2 \cdot 10^{-6} p^2 + 10^{-4} p + 1 = 0,$$

имеет корни $p_{1,2} = -250 \pm j2220 \text{ с}^{-1}$. Оригинал тока $i_{2_{св}}$ находим по теореме разложения:

$$i_{2_{св}} = 2 \operatorname{Re} \frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)} e^{p_1 t},$$

где $F_2'(p_1) = 0,4 \cdot 10^{-6} p + 10^{-4}$. Имеем:

$$\begin{aligned} i_{2_{св}} &= 2 \operatorname{Re} \frac{-0,0732 \cdot 10^{-6} (-250 + j2220) + 546 \cdot 10^{-6}}{0,4 \cdot 10^{-6} (-250 + j2220) + 10^{-4}} e^{-250t} e^{j2220t} = \\ &= 2 \operatorname{Re} 0,660 e^{-106,08^\circ} e^{-250t} e^{j2220t} = 2 \operatorname{Re} 0,660 e^{-250t} e^{j(2220t - 106,08^\circ)} = \\ &= 1,321 e^{-250t} \cos(2220t - 106,08^\circ) = 1,321 e^{-250t} \sin(2220t - 75^\circ) \text{ А.} \end{aligned}$$

Ток установившегося режима $i_{2y} = \sqrt{2} \sin(2500t + 75^\circ)$. Следовательно,

$$i_2 = i_{2y} + i_{2cv} = \sqrt{2} \sin(2500t + 75^\circ) + 1,321e^{-250t} \sin(2220t - 16,08^\circ), \text{ А.}$$

5.12. Определить ток в цепи рис. 5.12.1 после размыкания ключа, если $E = 100 \text{ В}$, $R = 200 \text{ Ом}$, $L = 0,3 \text{ Гн}$, $L_2 = 0,2 \text{ Гн}$.

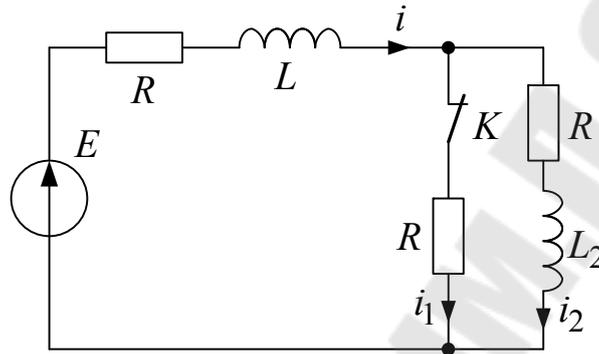


Рис. 5.12.1

Решение

До размыкания ключа в цепи протекали токи

$$i = \frac{E}{R + \frac{R^2}{2R}} = \frac{2E}{3R} = \frac{2 \cdot 100}{3 \cdot 200} = 0,333 \text{ А.}$$

$$i_1 = i_2 = \frac{i}{2} = \frac{0,333}{2} = 0,167 \text{ А.}$$

Следовательно,

$$i(-0) = 0,333 \text{ А}, \quad i_2(-0) = 0,167 \text{ А.} \quad (1)$$

Послекоммутационная цепь имеет единственный контур. При этом по первому закону коммутации

$$Li(-0) + L_2i_2(-0) = (L + L_2) \cdot i(+0).$$

Отсюда

$$i(+0) = \frac{Li(-0) + L_2i_2(-0)}{L + L_2}. \quad (2)$$

Подставляя (1) в (2), находим:

$$i(+0) = \frac{0,3 \cdot 0,333 + 0,2 \cdot 0,167}{0,3 + 0,2} = 0,267 \text{ А.} \quad (3)$$

Характеристическое уравнение послекоммутационной цепи

$$2R + p(L + L_2) = 0$$

имеет единственный корень $p = p_1 = -\frac{2R}{L + L_2} = -\frac{2 \cdot 200}{0,3 + 0,2} = -800 \text{ с}^{-1}$.

Следовательно,

$$i_{ce} = Ae^{p_1 t} = Ae^{-800t}. \quad (4)$$

В установившемся режиме в послекоммутационной цепи протекает ток

$$i_y = \frac{E}{2R} = \frac{100}{2 \cdot 200} = 0,25 \text{ А.} \quad (5)$$

Из (4) и (5) находим зависимость тока от времени:

$$i(t) = i_y + i_{ce} = 0,25 + Ae^{-800t}. \quad (6)$$

Постоянную интегрирования A находим с помощью начального условия (3), полагая в выражении (6) $t = 0$:

$$0,267 = 0,25 + A.$$

Отсюда $A = 0,017$. В итоге имеем:

$$i(t) = 0,25 + 0,017e^{-800t} \text{ А.}$$

5.13. Найти напряжения u_{C_1} и u_{C_2} после замыкания ключа в схеме рис. 5.13.1, если $E = 80 \text{ В}$, $C_1 = 5 \text{ мкФ}$, $C_2 = 3 \text{ мкФ}$, $R = 90 \text{ Ом}$.

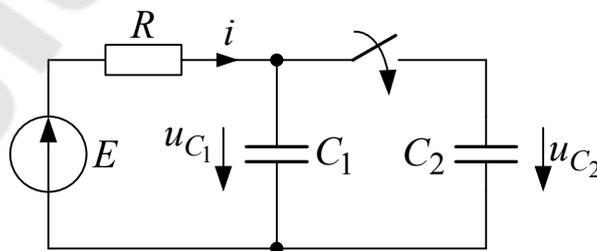


Рис. 5.13.1

Решение

Рассматривая докоммутационную цепь, сразу находим:

$$u_{C_1}(-0) = E = 80 \text{ В}, \quad u_{C_2}(+0) = 0. \quad (1)$$

По второму закону коммутации

$$C_1 \cdot u_{C_1}(-0) = (C_1 + C_2) \cdot u_C(+0), \quad (2)$$

где

$$u_C(+0) = u_{C_1}(+0) = u_{C_2}(+0).$$

Подставляя (1) в (2), находим:

$$u_C(+0) = \frac{EC_1}{C_1 + C_2} = \frac{80 \cdot 5 \cdot 10^{-6}}{5 \cdot 10^{-6} + 3 \cdot 10^{-6}} = 50 \text{ В}. \quad (3)$$

Характеристическое уравнение послекоммутационной цепи

$$R + \frac{1}{p(C_1 + C_2)} = 0$$

имеет единственный корень

$$p = p_1 = -\frac{1}{R(C_1 + C_2)} = -\frac{1}{90(5 \cdot 10^{-6} + 3 \cdot 10^{-6})} = -1388,8 \text{ с}^{-1}.$$

Следовательно,

$$u_{C_{св}} = Ae^{p_1 t} = Ae^{-1388,8t} \text{ В}. \quad (4)$$

В установившемся режиме в послекоммутационной цепи

$$u_{C_y} = E = 80 \text{ В}. \quad (5)$$

Из (4) и (5) находим:

$$u_C(t) = u_{C_y} + u_{C_{св}} = E + Ae^{-1388,8t} = 80 + Ae^{-1388,8t} \text{ В}. \quad (6)$$

Постоянную интегрирования A находим с помощью начального условия (3), полагая в выражении (6) $t = 0$:

$$50 = 80 + A.$$

Отсюда $A = -30$. В итоге имеем:

$$u_C(t) = 80 - 30e^{-1388,8t}, \text{ В}.$$

5.14. Определить токи i_1 и i_2 в схеме цепи рис. 5.14.1, если $E = 60$ В; $L_1 = 0,6$ Гн; $L_2 = 0,5$ Гн; $M = 0,45$ Гн; $R_1 = 50$ Ом; $R_2 = R_3 = 20$ Ом.

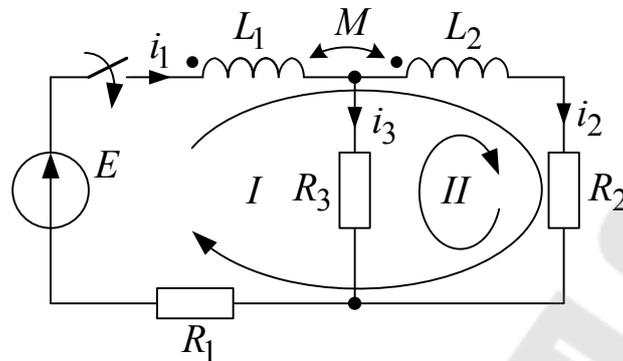


Рис. 5.14.1

Решение

Докоммутационные токи $i_1(-0) = 0$, $i_2(-0) = 0$. Следовательно,

$$i_1(0) = 0; \quad i_2(0) = 0.$$

После коммутации

$$i_1 = i_{1y} + i_{1cv}; \quad i_2 = i_{2y} + i_{2cv},$$

$$\text{где } i_{1y} = \frac{E}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} = 1 \text{ А; } i_{2y} = i_{1y} \frac{R_3}{R_2 + R_3} = 0,5 \text{ А.}$$

Чтобы получить характеристическое уравнение, составим главный определитель цепи, выбрав контуры I и II , как показано на рис. 5.14.1, и заменим $j\omega$ на p :

$$\begin{vmatrix} R_1 + R_2 + p(L_1 + L_2 + 2M) & R_2 + p(L_2 + M) \\ R_2 + p(L_2 + M) & R_2 + R_3 + pL_2 \end{vmatrix}.$$

Приравняв этот определитель нулю, получим характеристическое уравнение

$$p^2 + 790p + 24615 = 0.$$

Оно имеет действительные корни $p_1 = -33 \text{ с}^{-1}$, $p_2 = -757 \text{ с}^{-1}$, поэтому свободные составляющие токов запишем в виде

$$i_{1cv} = A_1 e^{-33t} + A_2 e^{-757t}; \quad i_{2cv} = B_1 e^{-33t} + B_2 e^{-757t}.$$

Найдем начальные значения свободных составляющих токов в индуктивностях:

$$i_{1_{св}}(0) = i_1(0) - i_{1_y}(0) = -1 \text{ А}; \quad i_{2_{св}}(0) = i_2(0) - i_{2_y}(0) = -0,5 \text{ А}.$$

Составим систему уравнений для определения постоянных интегрирования

$$\left. \begin{aligned} i_{1_{св}}(0) &= A_1 + A_2; \\ \left. \frac{di_{1_{св}}}{dt} \right|_0 &= -33A_1 - 757A_2; \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} i_{2_{св}}(0) &= B_1 + B_2; \\ \left. \frac{di_{2_{св}}}{dt} \right|_0 &= -33B_1 - 757B_2. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Уравнения Кирхгофа для свободных составляющих имеют вид:

$$\begin{aligned} -i_{1_{св}} + i_{2_{св}} + i_{3_{св}} &= 0; \\ R_1 i_{1_{св}} + L_1 \frac{di_{1_{св}}}{dt} + M \frac{di_{2_{св}}}{dt} + R_3 i_{3_{св}} &= 0; \\ L_2 \frac{di_{2_{св}}}{dt} + M \frac{di_{1_{св}}}{dt} + R_2 i_{2_{св}} - R_3 i_{3_{св}} &= 0, \end{aligned}$$

и, в частности, для начального момента времени ($t = 0$)

$$\begin{aligned} -i_{1_{св}}(0) + i_{2_{св}}(0) + i_{3_{св}}(0) &= 0; \\ R_1 i_{1_{св}}(0) + L_1 \left. \frac{di_{1_{св}}}{dt} \right|_0 + M \left. \frac{di_{2_{св}}}{dt} \right|_0 + R_3 i_{3_{св}}(0) &= 0; \\ L_2 \left. \frac{di_{2_{св}}}{dt} \right|_0 + M \left. \frac{di_{1_{св}}}{dt} \right|_0 + R_2 i_{2_{св}}(0) - R_3 i_{3_{св}}(0) &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда находим зависимые начальные условия:

$$\left. \frac{di_{1_{св}}}{dt} \right|_0 = 308 \text{ А/с}; \quad \left. \frac{di_{2_{св}}}{dt} \right|_0 = -277 \text{ А/с}.$$

Из систем уравнений (1) и (2) находим: $A_1 = -0,62$ А; $A_2 = -0,38$ А; $B_1 = -0,905$ А; $B_2 = 0,405$ А. Искомые токи:

$$i_1 = 1 - 0,62e^{-33t} - 0,38e^{-757t} \text{ А};$$

$$i_2 = 0,5 - 0,905e^{-33t} + 0,405e^{-757t} \text{ А}.$$

5.15. В цепи рис. 5.15.1 найти ток i_2 после замыкания контакта K , если $E = 30$ В, $R = 100$ Ом, $R_1 = 200$ Ом, $L_1 = L_2 = 0,3$ Гн, $M = 0,1$ Гн.

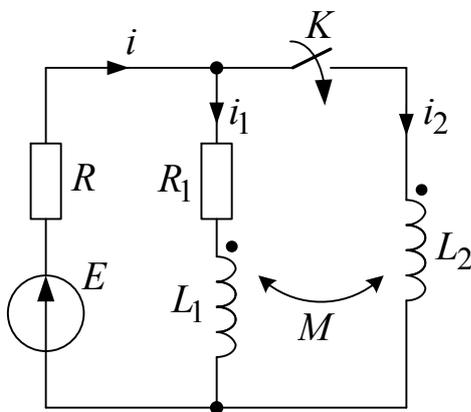


Рис. 5.15.1

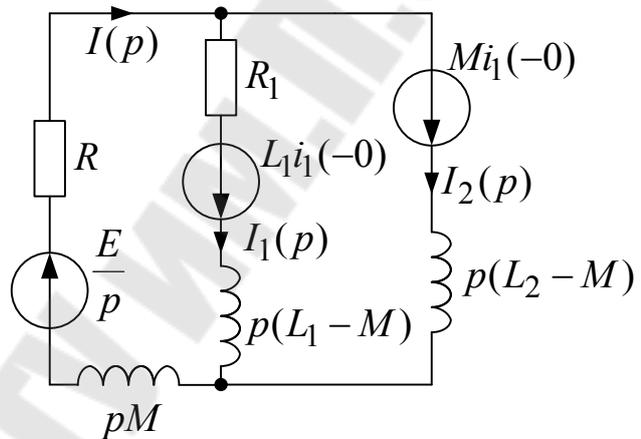


Рис. 5.15.2

Решение

До коммутации

$$i_1 = i_1(-0) = \frac{E}{R + R_1} = \frac{30}{100 + 200} = 0,1 \text{ А}.$$

Из операторной схемы замещения послекоммутационной цепи (рис. 5.15.2) получаем:

$$I(p) = I_1(p) + I_2(p),$$

$$RI(p) + R_1I_1(p) + pL_1I_1(p) - L_1i_1(-0) + pMI_2(p) = E(p),$$

$$RI(p) + pL_2I_2(p) + pMI_1(p) - Mi_1(-0) = E(p),$$

где $E(p) = \frac{E}{p}$. Решая эти уравнения относительно $I_2(p)$, находим:

$$I_2(p) = \frac{p(E(L_1 - M) - [R(L_1 - M) + R_1 M])i_1(-0) + ER_1}{p(p^2(L_1 L_2 - M^2) + p(L_1 R + L_2 R + L_2 R_1 - 2MR) + RR_1)}.$$

Подставив числовые значения и сократив числитель и знаменатель на общий множитель $(p + 1000)$, получим:

$$I_2(p) = \frac{75}{p(p + 250)},$$

откуда $i_2 = 0,3(1 - e^{-250t})$ А.

5.16. В схеме рис. 5.16.1 найти операторным методом ток неразветвлённой части цепи, если $R_1 = 10$ Ом; $R_2 = 5$ Ом; $R_3 = 15$ Ом; $e(t) = 170 \sin(314 + 30^\circ)$, В; $L_1 = 30$ мГн; $L_2 = 50$ мГн; $M = 25$ мГн.

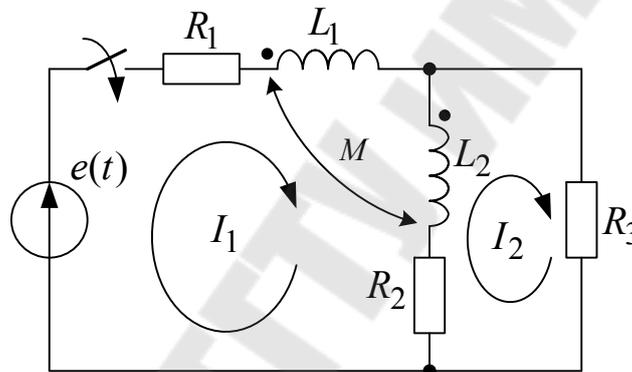


Рис. 5.16.1

Решение

Составляем операторные уравнения по методу контурных токов:

$$I_1(p)(R_1 + R_2 + p(L_1 + L_2 + 2M)) - I_2(p)(R_2 + p(L_2 + M)) = E(p);$$

$$-I_1(p)(R_2 + p(L_2 + M)) + I_2(p)(R_2 + R_3 + pL_2) = 0,$$

где $E(p) = \frac{170e^{j30^\circ}}{(p - j\omega)}$. Совместное решение этих уравнений дает:

$$I_1(p) = \frac{170(20 + 0,05p)}{(p - j\omega)(0,000875p^2 + 2,6p + 275)} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}.$$

Уравнение $F_2(p) = 0$ имеет корни $p_1 = 314j$, $p_2 = -2860 \text{ с}^{-1}$ и $p_3 = -114 \text{ с}^{-1}$. Далее находим:

$$F_1(p_1) = 4301e^{j68^\circ 20'}; \quad F_1(p_2) = 20910e^{j210^\circ}; \quad F_1(p_3) = 2429.3e^{j30^\circ};$$

$$F_2'(p) = 0,000875p^2 + 2,6p + 275 + (p - j\omega)(0,000175p + 2,6);$$

$$F_2'(p_1) = 820,94e^{j96^\circ}; \quad F_2'(p_2) = 6317e^{j174^\circ};$$

$$F_2'(p_3) = 995,86e^{-j125,56^\circ}.$$

Искомый ток

$$\begin{aligned} i(t) &= \text{Im} \left(\frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{F_1(p_2)}{F_2'(p_2)} e^{p_2 t} + \frac{F_1(p_3)}{F_2'(p_3)} e^{p_3 t} \right) = \\ &= \text{Im} \left(5,1e^{j(\omega t - 8^\circ 40')} + 3,03e^{j203^\circ 44'} e^{-2860t} + 3,01e^{j140^\circ} e^{-114t} \right) = \\ &= 5,13 \sin(\omega t - 8^\circ 40') - 1,16e^{-2860t} + 1,97e^{-114t}, \text{ А.} \end{aligned}$$

Шабловский Ярослав Олегович
Козлов Андрей Владимирович

ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

ПРАКТИКУМ

**по курсу «Теоретические основы электротехники»
для студентов специальности 1-53 01 05
«Автоматизированные электроприводы»
заочной формы обучения**

Подписано к размещению в электронную библиотеку
ГГТУ им. П. О. Сухого в качестве электронного
учебно-методического документа 23.03.15.

Пер. № 146Е.

<http://www.gstu.by>