АКАДЕМИЯ НАУК БЕЛОРУССКОЙ ССР
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукописи

ВЕЛИКОВИЧ Лев Липович

СТРУКТУРА ГРАФА, ОПРЕДЕЛЯЕМАЯ ГРУППОЙ АВТОМОРФИЗМОВ

01.01.09 - математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Минск - 1990

В-2

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

А к т у а л ь н о с т ь   т е м ы. Изучение связей между свойствами группы автоморфизмов алгебраической системы и свойствами самой системы является важным направлением любой ветви алгебры - теории групп, колец, алгебр и др. При этом структуру группы автоморфизмов рассматривают на двух уровнях: как абстрактную группу и как группу подстановок (в последнем случае на первый план выступает действие группы).

В теории графов данная проблематика берет начало с основополагающей работы Р.Фрухта (1938), в которой доказано, что для любой абстрактной группы A существует такой граф G, что $A \cong AutG$. Как показали последующие работы в этом направлении (Р.Фрухт (1949, 1952), Г.Сабидусси (1957-1960, 1964), Х.Избицкий (1957, 1959, 1960) и др.) изоморфизм $A \cong Aut\,G$ сохраняется при многих дополнительных условиях, накладываемых на граф G. В качестве таких условий выступали: регулярность, связность, хроматическое число и др. К 1970 году устоялось мнение, что графу G можно приписать чуть-ли не любое свойство и все равно изоморфизм $A \cong AutG$ будет иметь место. Но в 1972г. Л.Бабаи, отвечая на вопрос, поставленный П.Тураном в 1969г., доказал, что существуют бесконечно много конечных групп, которые не изоморфны $AutG$ для любого планарного графа G. Затем Бабаи удалось получить (1973, 1974) еще несколько результатов аналогичного характера, а также следующую теорему (1976): для любых двух абстрактных групп A и B существует граф G, имеющий ребро e, такой, что $AutG \cong A$ и $Aut(G-e)\cong B$. Теорема Фрухта стимулировала также исследования, связанные с определением различных числовых характеристик абстрактных групп (Фрухт (1938, 1949, 1952), Сабидусси (1959), Бабаи (1974), В.Арлингхауз (1985) и др.).

Статья Фрухта (1938) была ответом на вопрос, поставленный Д.Кёнигом в 1936 г. (теперь этот вопрос называют задачей Кёнига). В данной статье Фрухт также обратил внимание и на второй аспект задачи Кёнига - так называемую подстановочную версию: пусть A - группа подстановок множества V; существует ли граф $G=(V,X)$ такой, что A совпадает с $AutG$? Фрухт сразу же заметил, что в общем случае ответ на этот вопрос отрицателен. Значит решение следует искать в ~~таком виде: для каких~~ групп подстановок задача Кёнига разрешима? В этом направлении работали И.Н.Каньо (1946, 1947, 1955), Ч.-Ю. Чао (1964, 1965, 1971), В.Альспах (1974), С.П.Моханти, М.Р.Шрихаран, С.К.Шукла (1978, 1980), М.Х.Клин, Р.Пёшель (1981), Ле Тхук Зук (1983), А.З.Зеликовский (1987) и др. О чрезвычайной сложности подстановочной версии говорит уже тот факт, что даже для регулярных групп подстановок ее решение оказалось достаточно сложным делом (Сабидусси (1964), М.Х.Мак-Эндрю (1965), В.Имрих (1970) и многие другие, в том числе, М.Е.Уоткинс, Л.А.Новиц, В.Имрих (1970-1980), Д.Хетцел (1976), С.Д.Годсил (1978, 1980)).

Начиная с 1947 г. интенсивно развивалось еще одно направление, связанное с подстановочной версией задачи Кёнига. А именно, У.Т.Татт рассмотрел (как оказалось, очень полезную) специализацию понятия кратной транзитивности для групп автоморфизмов графов – s-транзитивность (1947, 1959, 1961, 1967). Не перечисляя его многочисленных последователей, отметим только, что используя и развивая технику Татта, Д.Хигман и Ч.Симс открыли в 1968 г. новую простую группу. Другую интересную специализацию понятия кратной транзитивности для групп автоморфизмов графов (так называемую, дистанционную транзитивность) предложили в семидесятых годах Н.Л.Биггс и Д.Х.Смит.

Ц е л ь р а б о т ы. Исследования, проведенные в настоящей диссертации, вносят определенный вклад в подстановочную версию задачи Кёнига. Целью работы является дальнейшее изучение структуры графа при условии, что известно действие группы автоморфизмов. При этом графы изучаются с позиций теории алгебраических систем: изучены свойства фактор-графов в смысле Серра, определенные типы подсистем (орбитальные подграфы и фрагменты), новый тип кратной транзитивности для групп автоморфизмов графов – звездная транзитивность. В работе рассматриваются только обыкновенные графы.

Н а у ч н а я н о в и з н а. Все результаты диссертации являются новыми. Перечислим основные результаты:

1. Доказана теорема: для любого графа H существует такой граф G, что H изоморфен фактор-графу $G/\mathrm{Aut}G$.

2. Установлена связь между циклическим строением графа и его фактор-графов.

3. Введен и изучен новый класс графов, коорбитальных дереву, – квазидеревья.

4. Описано строение орбитальных подграфов и фрагментов кактусов.

5. Изучен новый тип транзитивного действия группы автоморфизмов графа - звездная транзитивность, а также получен новый критерий $\frac{3}{2}$ -транзитивности произвольных групп подстановок.

Теоретическое и практическое значение. Работа носит теоретический характер. Основное ее научное значение состоит в том, что предложен новый подход к вопросам анализа структуры произвольных графов, при котором декомпозиция графов рассматривается как расслоение на фактор-объекты и подобъекты, определяемые группой автоморфизмов. Ее результаты и методы могут быть применены в исследованиях как по алгебраической теории графов (группы автоморфизмов, вопросы регулярности строения и др.), так и по теории групп подстановок (унипримитивные, $\frac{3}{2}$ -транзитивные группы подстановок, группы ранга 3 и т.д.).

Публикации. По теме диссертации опубликованы 7 работ.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на цикле расширенных заседаний Одесского научно-исследовательского семинара по графам, гиперграфам и дискретным оптимизационным задачам (I977), IУ Всесоюзном семинаре по комбинаторной математике (МГУ, I978), семинаре кафедры алгебры и логики Киевского государственного университета (I978); У совместном цикле расширенных заседаний Одесского научно-исследовательского семинара по дискретной математике и Кишиневского научно-исследовательского семинара по графам и гиперграфам в г.Одессе (I98I); I Всесоюзной конференции по дискретной математике и ее приложениям (МГУ, I984), алгебраическом семинаре в г.Риге (I988), алгебраическом семинаре в г.Минске, (БГУ, I989), совместном алгебраическом семинаре Института математики АН МССР с университетом в г.Кишиневе (I989).

Объем работы. Диссертация изложена на I33 страницах и состоит из введения, двух глав, сводки обозначений и основных определений и списка цитируемой литературы, содержащего I38 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В диссертации рассматриваются только обыкновенные графы (т.е. конечные графы без петель и кратных ребер) и конечные группы. Первый параграф носит вспомогательный характер. В нем даны основные определения и обозначения, приведен ряд известных результатов, используемых в дальнейшем.

Глава I (§§ 2-6) посвящена орбитальной структуре графа. Во втором параграфе изучаются фактор-графы в смысле Ж.-П. Серра (1973). Пусть $G = (V(G), X(G))$ – граф с множеством вершин $V(G)$, множеством ребер $X(G)$ и группой автоморфизмов $Aut\, G$. Говорят, что группа A действует на графе G, если задан какой-либо гомоморфизм $A \to Aut\, G$. Обозначим через $O(G, A) = \{\theta_i \mid i \in J\}$ множество орбит при действии A на $V(G)$. Следуя Серру, определим фактор-граф G/A так: множеством вершин графа G/A является $O(G, A)$ и две орбиты θ_i, θ_j смежны, если существуют $u_i \in \theta_i$, $u_j \in \theta_j$, которые смежны в G.

Пусть $\theta \in O(G, A)$. Подграф графа G, порожденный множеством вершин, принадлежащих орбите θ, будем обозначать через $\hat{\theta}$ и называть орбитальным подграфом; множество всех таких подграфов обозначим через $\langle O(G, A) \rangle$.

На первый взгляд, может показаться, что при переходе от графов к фактор-графам должно произойти сужение класса графов. В действительности это не так. В § 2 доказана

Теорема 2.1. Для любого графа H существует такой граф G, что $H \cong G/Aut\, G$.

Более того, оказывается, что графов с указанным свойством существует бесконечно много. Доказательство теоремы носит конструктивный характер.

Далее в § 2 устанавливаются связи между циклическим строением графа и его фактор-графов.

Теорема 2.3. Пусть группа A действует на графе G и пусть фактор-граф G/A содержит простой цикл $\theta_1 \theta_2 \ldots \theta_l \theta_1$, где $\theta_i \in O(G, A)$, $1 \le i \le l$. Тогда и сам граф G содержит простой цикл, множество вершин которого принадлежит объединению $\bigcup_{i=1}^{l} \theta_i$, проходящий через каждую из орбит θ_i.

Из данной теоремы сразу следует, что фактор-графы ациклического графа ацикличны, в частности, фактор-графы дерева являются деревьями. Последнее утверждение для бесконечных графов неверно, а значит, и теорема 2.3 для бесконечных графов неверна.

Еще одним следствием теоремы 2.3 (правда, уже не таким непосредственным) является утверждение: любой фактор-граф кактуса есть кактус (следствие 2.3.3).

В § 3 получено описание орбитальных подграфов и фрагментов деревьев (фрагменты – это подграфы, порожденные смежными орбитами). Оказалось, что орбитальными подграфами дерева могут быть (с одним исключением) лишь вполне несвязные графы (теорема 3.I), а фрагментами – либо звезды $K_{1,m}$, либо графы $nK_{1,m}$ $(n \geq 2,\ m \geq 1)$, либо двойные звезды $S(m,m)$ (Теорема 3.2). Эти результаты используются в следующем параграфе при изучении квазидеревьев.

Напомним одно определение (см. Д.А.Супруненко. Группы матриц – М: Наука, 1972, с.14). Пусть A_i – группа подстановок множества $V_i\ (i = 1,2)$. Говорят, что группы A_1, A_2 имеют один и тот же орбитальный тип, если существует такая биекция $\varphi: V_1 \to V_2$, которая переводит всякую орбиту группы A_1 в орбиту группы A_2. В § 4 рассматривается специализация этого понятия для случая, когда группа A_i действуют на графе G_i с множеством вершин $V_i\ (i = 1,2)$. В этом предположении группы A_1, A_2 назовем коорбитальными, если выполнены условия: I) A_1 и A_2 имеют один и тот же орбитальный тип; 2) соответствующие орбитальные подграфы изоморфны; 3) сохраняется отношение смежности между орбитальными подграфами. Сами графы G_1, G_2 в данной ситуации будем называть коорбитальными (более точно, (A_1 , A_2)-коорбитальными). Граф, коорбитальный дереву мы называем квазидеревом.

Доказано (лемма 4.4), что квазидеревья – связные графы. Центральным результатом параграфа 4 является следующий результат.

Теорема 4.6. Любые два коорбитальных дерева изоморфны.

Доказательство этой теоремы опирается на четыре предшествующих предложения (леммы 4.4, 4.5, следствия 4.5.I, 4.5.2) и существенно связано со многими результатами второго и третьего параграфов.

Далее в § 4 изучены свойства нетривиальных (т.е. не являющихся деревьями) квазидеревьев. Так, в предложении 4.7 установлено строение фрагментов квазидерева, что позволяет получить следующее генетическое описание квазидеревьев:

Пусть Q – нетривиальное квазидерево, коорбитальное дереву T. Тогда Q содержит остовное дерево T', изоморфное T и Q может быть получено из T' добавлением соединяющих ребер в фрагментах (следствие 4.7.I).

В следующем предложении доказана единственность "прообраза" для нетривиального квазидерева.

Предложение 4.8. Если Q – нетривиальное квазидерево, то существует единственное (с точностью до изоморфизма) дерево T, коорбитальное Q.

Предложение 4.9 описывает структуру нетривиальных квазидеревьев. Оказывается, что квазидерево является либо двудольным графом, либо может быть получено из двудольного добавлением ребра в одной из долей.

В § 5 получено описание орбитальных подграфов и фрагментов кактусов (Теоремы 5.I и 5.2). Сформулируем вторую из этих теорем. Для ее формулировки нам потребуется конструкция, предложенная Л.А.Шеметковым. Условимся граф $K_1 = C_1$ считать циклом длины один, граф $K_2 = C_2$ – циклом длины два, и пусть, как обычно, $C_n\ (n \geq 3)$ – цикл длины n. Пусть C_m и C_n есть циклы длины m и $n\ (m \geq 1, n \geq 1)$. Рассмотрим граф, состоящий из цикла C_m, каждой вершине которого инцидентно некоторое количество циклов C_n, причем циклы C_n не имеют других общих вершин. Такой граф, следуя Л.А.Шеметкову, будем называть (m,n)-звездой. Если число циклов C_n в каждой вершине цикла C_m одно и то же, то такую (m,n)-звезду назовем регулярной.

Теорема 5.2. Пусть G – кактус, $\langle F(G,A)\rangle$ – множество его A-фрагментов. Тогда любой граф из $\langle F(G,A)\rangle$ принадлежит к одному из следующих типов: I) $tD\ (t \geq 1)$, где D – регулярная (m,n)-звезда, причем $m \geq 1, n \in \{2,3\}$; 2) циклы $C_{2n}\ (n \geq 2)$; 3) циклы $C_{3n}\ (n \geq 1)$.

Итак, фрагментами кактуса являются некоторые специальные виды регулярных (m,n)-звезд.

В шестом параграфе главы I показано, как изученные объекты связаны с традиционными объектами теории групп подстановок. В частности, установлены необходимые и достаточные условия транзитивности (предложение 6.I) и $\frac{3}{2}$ – транзитивности (предложение 6.6) произвольных групп подстановок.

Предложение 6.6. Транзитивная группа подстановок (A, Ω) будет $\frac{3}{2}$-транзитивной тогда и только тогда, когда все антирефлексивные 2-орбиты этой группы являются регулярными орграфами одной и той же степени ≥ 2.

Если в первой главе диссертации структура графа (определяемая интранзитивным действием некоторой группы) рассматривалась на уровне подсистем, то во второй главе (§§ 7-II) изучается такое (транзитивное) действие группы, которое позволяет определить структуру графа на уровне элементов (т.е. вершин и ребер). В этой главе вводится общее определение кратной транзитивности для групп автоморфизмов графов. Известные типы транзитивности (реберная транзитивность, s-транзитивность, дистанционная транзитивность (см. § 7) и др.) укладываются в рамки нашего определения. Более того, общее определение позволяет выделить не изучавшийся ранее новый тип кратной транзитивности. Пусть $(u_1, \ldots, u_m, x_1, \ldots, x_n)$ – упорядоченный набор различных элементов графа G, где $u_i \in V(G)$, $x_j \in X(G)$, причем ни одна вершина u_i не инцидентна ни одному ребру x_j, ребра x_j $(1 \le j \le n)$, инцидентны одной вершине, т.е. образуют звезду, а вершины u_i $(1 \le i \le m)$ находятся между собой в некотором фиксированном отношении R_0, инвариантном относительно автоморфизмов. Если группа A, действующая на графе G, действует транзитивно на множестве всех таких наборов, то граф G будем называть (m, n, R_0)-звездно транзитивным. В случае, когда в наборах $(u_1, \ldots, u_m, x_1, \ldots, x_n)$ вершины u_i $(1 \le i \le m)$ неупорядочены, будем говорить о $(\tilde{m}, n, R_0)$-звездной транзитивности.

В соответствии с общей задачей (восходящей к Кёнигу) изучения графов с данной группой подстановок в качестве группы автоморфизмов, в главе 2 исследуется класс графов, группы автоморфизмов которых обладают свойством звездной транзитивности. В § 8 подготавливается необходимый метрический материал. Полученные результаты используются в дальнейшем для "аппроксимации" свойств транзитивности комбинаторными инвариантами (задача аппроксимации алгебраических свойств комбинаторными поставлена Л.А.Калужниным в 1980 г.).

Основными результатами главы 2 являются следующие теоремы.

Теорема 7.1. Если группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}\, G$ связного графа G действует транзитивно на множестве всех его подграфов вида $K_1 \cup K_{1,n}$, то G – либо полный граф, либо полный двудольный граф.

Теорема 7.2. Пусть G – связный регулярный граф степени $n \ge 2$. Если группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}\, G$ действует транзитивно на множестве всех его подграфов вида $\varkappa K_1 \cup K_{1,n}$, то $G = K_{n,n}$.

Для формулировки теоремы 7.3 нам необходимо определить новый класс графов. Рассмотрим некоторое конечное множество циклов длины 5 (пятиугольников). Пронумеруем вершины каждого пятиугольника цифрами от 1 до 5. Вершины пятиугольников, обозначенные одной и той же цифрой, будем называть соответствующими. Соединим каждую вершину любого из данных циклов с двумя вершинами любого другого цикла, которые смежны с соответствующей ей вершиной. Полученный граф назовем пентаграфом. Минимальный пентаграф, будучи регулярным графом степени 4, содержит 10 вершин и 20 ребер. В общем случае пентаграф, степень которого n, содержит $\frac{5n}{2}$ вершин, $\frac{5n^2}{4}$ ребер; его группа автоморфизмов является сплетением группы диэдра D_5 и симметрической группы $S_{\frac{n}{2}}$.

Теорема 7.3. Пусть G –связный регулярный граф степени $n \geq 3$. Если группа автоморфизмов $Aut\, G$ действует транзитивно на множестве всех его подграфов вида $K_2 \cup K_{1,n}$, то G – пентаграф.

Доказательство теоремы 7.I осуществляется индуктивным путем (см. § 9). При $n = 1, 2$ соответствующие утверждения сразу вытекают из результатов § 8. Затем доказывается

Лемма 9.3. Пусть G – связный $(1, n, \emptyset)$ –звездно транзитивный граф, не являющийся полным двудольным. Тогда G $(1, n-1, \emptyset)$–звездно транзитивен (знак $\emptyset$ означает отсутствие соответствующего отношения).

В § 10 описаны не только регулярные степени $n \geq 2$ связные $(\bar{2}, n, \bar{a}_0)$ –звездно транзитивные графы (теорема 7.2), но и произвольные связные $(\bar{2}, 1, \bar{a}_0)$ –звездно транзитивные графы, где $\bar{a}_0$ – отношение несмежности для вершин (лемма 10.I).

Изучение $(\bar{2}, n, a_0)$ –звездно транзитивных графов, где a_0 – отношение смежности на множестве вершин, производится в § II по следующей схеме. Сначала полностью описываются связные $(\bar{2}, 1, a_0)$- и $(\bar{2}, 2, a_0)$ –звездно транзитивные графы (случай $n = 1$ является следствием леммы 8.3, а случай $n = 2$ удается к нему свести). Так $(\bar{2}, 1, a_0)$ –звездно транзитивными связными графами являются следующие графы и притом только они (лемма II.I):

$$C_5;\ K_p;\ K_{m,n}\ (m, n \geq 2);\ \bar{K}_{p-2} + K_2;\ S(\tfrac{p}{2}-1;\ \tfrac{p}{2}-1)$$

В лемме II.2 доказано, что единственные $(\bar{2}, 2, a_0)$ –звездно транзитивные связные графы, не являющиеся $(\bar{2}, 1, a_0)$ –звездно транзитивными, есть графы $K_{1,p-1} + X$ и $\dot{K}_{1,p-2}$.

После того, как строение $(\bar{2}, n, a_0)$ –звездно транзитивных графов при малых n изучено, следующий этап – это ответ на вопрос: существуют ли $(\bar{2}, n, a_0)$ –звездно транзитивные графы для произвольных n ? Оказывается да: в § II строятся примеры таких графов, которые к тому же являются регулярными – это пентаграфы. Теперь необходимо выяснить: имеются ли $(2, n, a_0)$ -звездно транзитивные связные регулярные графы степени n, отличные от пентаграфов. Отрицательный ответ на этот вопрос дает теорема 7.3.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

I. Великович Л.Л. О диапазонах графа //Тез.докл. Всесоюз. алгебр.симп., Гомель, 30 июня - 2 июля I975г. - Минск, I975 - Ч.2.- С386-387.

2. Великович Л.Л. Звездно транзитивные графы //Мат.заметки. - I980. - Т.28, № 2. - С.265-270.

3. Великович Л.Л. О некоторых специальных случаях проблемы транзитивности в теории графов //Кибернетика. - I982. - № 3. - С.32-33.

4. Великович Л.Л. Об одном типе звездной транзитивности //Машинные методы обнаружения закономерностей, анализа структур и проектирования (Вычислительные системы, 92). - Новосибирск, I982. - С.62-69.

5. Великович Л.Л. $(2, n)$ - звездно транзитивные графы // Časopis pro pěstování matematiky. - I983. - I08. - С.I37-I45.

6. Великович Л.Л. Граф орбит группы автоморфизмов графа и другие смежные вопросы //Кибернетика. - I988. - № 2. - С.I27-I28.

7. Великович Л.Л. Разбиение графа, определяемое группой автоморфизмов. - Ред.ж."Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат.н." Минск, I988 (Рукопись деп. в ВИНИТИ II.05.88, № 363I-I388). - 37 с.

Подписано в печать 25.I0.90 г. Формат 60x84/I6.
Усл.печ.л.0.70. Усл.кр.-отт. 0,82. Уч.-изд.л. 0.50
Тираж I00 экз. Заказ I72. Бесплатно.

Институт математики АН БССР.
220604, Минск, ул.Сурганова, II
Отпечатано на ротапринте Института математики АН БССР
220604, Минск, ул.Сурганова, II.