СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ В ОТКРЫТЫХ СЕТЯХ С ГРУППОВЫМ ПОСТУПЛЕНИЕМ ЗАЯВОК В ВИДЕ ДВУХ НЕЗАВИСИМЫХ ПОТОКОВ И ГРУППОВЫМ ОБСЛУЖИВАНИЕМ В ФОРМЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ СМЕЩЕННЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Е. В. Коробейникова

Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого, Беларусь

Рассмотрим открытую сеть массового обслуживания с конечным множеством узлов, занумерованных элементами множества $J = \{1, 2, ..., N\}$. В узлы сети поступают независимые пуассоновские потоки групп заявок с параметром λ_i для узла $i \in J$. Далее предполагается, что когда система пуста, то в нее поступает простейший дополнительный поток групп интенсивности λ^*_i для узла $i \in J$. Длительности обслуживания групп в узлах сети независимы, имеют показательное распределение с параметром μ_i для узла $i \in J$. Размеры поступающих групп и требуемых для обслуживания групп – независимые, положительные, целочисленные случайные величины, распределенные по законам с функциями распределения A_i, A^*_i и B_i и функциями вероятностных масс a_i, a^*_i и b_i, соответственно для узла i.

Обслуженная в i-м узле неполная группа из k заявок мгновенно с вероятностью $\pi_{i,j}$ направляется в j-й узел, а с вероятностью $\pi_{i,0}$ покидает сеть ($i, j = \overline{1,N}$; $\sum_{j=0}^{N}\pi_{i,j} = 1$; $\pi_{i,i} = 0$). Обслуженная в i-м узле полная группа из k заявок (вся очередь) с вероятностью $\frac{b_i(k)}{\overline{B}_i(k)}\alpha_i\pi_{ij}$ направляется в j-й узел, а с вероятностью $1 - \frac{b_i(k)}{\overline{B}_i(k)}\alpha_i\sum_{j\neq i}^{N}\pi_{ij}$ покидает сеть.

Очевидно, что для рассматриваемой модели сети, при $i, j \in J$ и $n = (n_1, n_2 ... n_N) \in Z_+^N$ вероятности перехода в сети будут:

$$q(\overline{n}, \overline{n} - k\overline{e}_i + k\overline{e}_j) = \mu_i\pi_{i,j}b_i(k), \quad 1 \le k < n_i,$$
$$q(\overline{n}, \overline{n} - k\cdot\overline{e}_i + k\cdot\overline{e}_j) = \mu_i b_i(k)\alpha_i\pi_{ij}, \quad k = n_i,$$
$$q(\overline{n}, \overline{n} - k\cdot\overline{e}_i) = \mu_i(\overline{B}_i(k) - \alpha_i(1-\pi_{i0})b_i(k)), \quad k = n_i,$$
$$q(\overline{n}, \overline{n} - k\cdot\overline{e}_i) = \pi_{i0}\mu_i b_i(k), \quad 1 \le k < n_i,$$
$$q(\overline{n}, \overline{n} + k\overline{e}_i) = \lambda_i a_i(k), \quad n_i \ge 1; k \ge 1,$$
$$q(\overline{n}, \overline{n} + k\overline{e}_i) = \lambda_i a_i(k) + \lambda^*_i a^*_i(k)1_{\{0\}}(n_i), \quad k \ge 1, \tag{1}$$

где $\overline{B}_i(n_i) = 1 - \sum_{m=1}^{n_i-1} b_i(m)$; $0 < \alpha_i < 1$; $i = 1, 2, \dots, N$; $\overline{e}_i$ – единичный вектор, i-я координата которого равна 1; 1_A – индикаторная функция множества A.

Предположим, что решение существует в виде

$$P(n) = P_1(n_1)\cdot P_2(n_2)...P_N(n_N), \tag{2}$$

где

$$P_i(0) = \frac{\alpha_i(1-c_i)}{c_i + (1-c_i)\alpha_i}; \quad P_i(n_i) = \frac{(1-c_i)c_i^n}{c_i + (1-c_i)\alpha_i}.$$

Найдем поток заявок размера k на i-й узел:

$$\gamma_i(k) = \lambda_i a_i(k) + \sum_{j\neq i}\pi_{ji}\mu_j b_j(k)c_j^k.$$

Полный поток заявок на i-й узел:

$$\gamma_i = \lambda_i + \sum_{j \neq i} \pi_{ji} \mu_j \breve{B}_j(c_j). \tag{3}$$

Следует ожидать, что для i-го узла будет справедливо следующее уравнение:

$$\mu_i(1 - \breve{B}_i(c_i)) = \frac{\alpha_i(1 - c_i)}{c_i}(\gamma_i + \lambda_i^*). \tag{4}$$

Лемма 1. Для того чтобы при всех $j \in J$ уравнения (4) имели корни $c_j \in (0, 1)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$\breve{\Gamma}_j(1) + \lambda_j^* < \frac{\mu_j}{\alpha_j} m_{B_j}. \tag{5}$$

Эти корни при фиксированных $\breve{\Gamma}_j(1)$, λ^*_j, α_j и μ_j единственные.

Теорема 1. Для того чтобы $\left\{ P(n) = \prod_{j \in J} \frac{(1 - c_j) c_j{}^n}{c_j + (1 - c_j)\alpha_j} \right\}$ являлось стационарным распределением $X(t)$, достаточно выполнение условий эргодичности $\breve{\Gamma}_j'(1) < \mu_j m_{B_j}$, выполнения неравенства (5) и

$$((\lambda_j^* + \gamma_j)(1 - c_j) + \gamma_j \frac{c_j}{\alpha_j}) c_j{}^{n-1} + \frac{1 - \alpha_j}{\alpha_j} \gamma_j(n_j) \geq \frac{1}{\alpha_j} \sum_{k=1}^{n} \gamma_j(k) c_j{}^{n_j - k}, \tag{6}$$

где c_j – корни уравнений (4), принадлежащие (0,1). При фиксированных λ_j^* эти корни существуют, единственны и удовлетворяют неравенствам (5). При выполнении условий теоремы параметры дополнительного потока определяются из соотношения

$$\lambda_i^* \alpha_i^*(n_i) = ((\lambda_i^* + \gamma_i)(1 - c_i) + \gamma_i \frac{c_i}{\alpha_i}) c_i{}^{n-1} + \frac{1 - \alpha_i}{\alpha_i} \gamma_i(n_i) - \frac{1}{\alpha_i} \sum_{k=1}^{n} \gamma_i(k) c_i{}^{n_i - k}. \tag{7}$$