

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования  
«Гомельский государственный технический  
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Сельскохозяйственные машины»

**В. Б. Попов**

## **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ**

**ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ  
по одноименному курсу  
для студентов специальности 1-36 12 01  
«Проектирование и производство  
сельскохозяйственной техники»  
дневной и заочной форм обучения**

Гомель 2009

УДК 519.8(075.8)  
ББК 22.166я73  
П58

*Рекомендовано научно-методическим советом  
механико-технологического факультета ГГТУ им. П. О. Сухого  
(протокол № 5 от 28.06.2008 г.)*

Рецензент: канд. техн. наук, доц. каф. «Информационные технологии» ГГТУ им. П. О. Сухого  
*Т. А. Трохова*

**Попов, В. Б.**

П58 Математическое моделирование : лаборатор. практикум по одному курсу для студентов специальности 1-36 12 01 «Проектирование и производство сельскохозяйственной техники» днев. и заоч. форм обучения / В. Б. Попов. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2009. – 43 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: <http://lib.gstu.local>. – Загл. с титул. экрана.

Представлены необходимые теоретические, методические и справочные сведения, а также примеры формирования функциональных математических моделей.

Для студентов специальности 1-36 12 01 «Проектирование и производство сельскохозяйственной техники» дневной и заочной форм обучения.

**УДК 519.8(075.8)  
ББК 22.166я73**

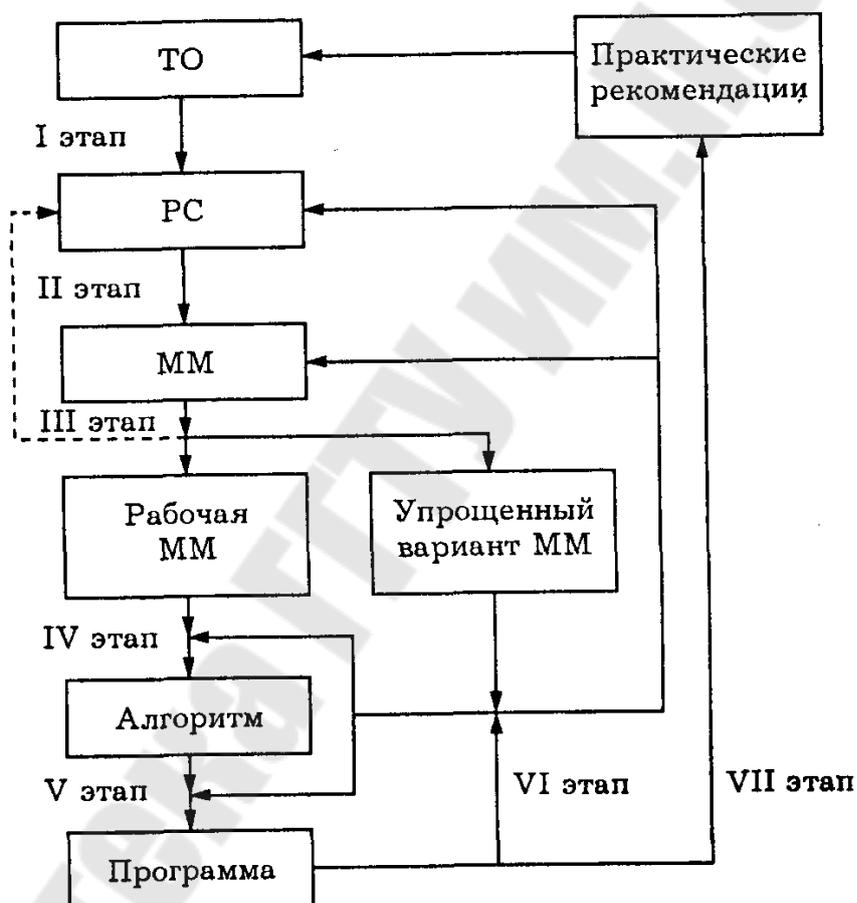
© Учреждение образования «Гомельский  
государственный технический университет  
имени П. О. Сухого», 2009

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	4
1. Подготовка к лабораторным занятиям и правила оформления отчета о выполненной работе.....	7
2. Теоретические сведения к циклу лабораторных работ.....	10
3. Лабораторная работа №1. Математическое моделирование механизма подъема жатки.....	11
4. Лабораторная работа №2. Математическое моделирование механизма вывешивания адаптера.....	14
5. Формирование функциональной математической модели механизма складывания секций КПП-6.....	17
6. Лабораторная работа №3. Математическое моделирование нагруженного гидропривода.....	20
7. Лабораторная работа №4. Оптимизация параметров механизма подъема секции косилки-плющилки ротационной.....	23
8. Лабораторная работа №5. Формирование динамических моделей мобильных с/х машин и агрегатов.....	26
9. Лабораторная работа №6. Формирование математической модели транспортного переезда мобильного с/х агрегата.....	35
Литература.....	42

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Для обоснования основных подходов к разработке проблем *математического моделирования* технических объектов (ТО) представляется целесообразным рассмотреть условную схему (см. рис), определяющую последовательность проведения отдельных этапов общей процедуры *вычислительного эксперимента*. Исходной позицией этой схемы служит ТО, под которым будем понимать конкретное техническое устройство, его агрегат или узел, систему устройств или процесс.



Основные этапы математического моделирования технических объектов

На первом этапе осуществляют неформальный переход от рассматриваемого ТО и его *расчетной схеме* (PC). При этом в зависимости от направленности вычислительного эксперимента и его цели акцентируют те свойства, условия работы и особенности ТО, которые вместе с характеризующими их параметрами должны найти отражение в PC, и, наоборот, аргументируют упрощения, позволяющие

не учитывать в РС те качества ТО, влияние которых предполагают несущественным.

В сложившихся инженерных дисциплинах (в механике материалов, электротехнике, гидравлике и электронике) помимо описательной информации для характеристики РС разработаны специальные приемы и символы наглядного графического изображения.

При разработке новых ТО успешное проведение первого этапа в значительной мере зависит от уровня подготовленности студента, его творческого потенциала и интуиции. Полнота и правильность учета в РС свойств ТО, существенных с точки зрения поставленной цели исследования, являются основной предпосылкой получения достоверных результатов математического моделирования. И наоборот, сильная идеализация ТО ради простоты РС может обесценить все последующие этапы исследования.

Содержание второго этапа состоит, в формальном, математическом описании РС. Это описание в виде математических соотношений, устанавливающих связь между параметрами, характеризующими РС ТО, и называют *математической моделью* (ММ).

Для некоторых типовых РС существуют банки ММ, что упрощает проведение второго этапа. Более того, одна и та же ММ может соответствовать РС из различных предметных областей. Однако при разработке новых ТО часто не удается ограничиться применением типовых РС и отвечающих им уже построенных ММ. Создание новых ММ должны опираться на достаточно глубокую математическую подготовку и владение математикой как универсальным языком науки.

На третьем этапе проводят качественный и оценочный количественный анализ построенной ММ. При этом могут быть выявлены противоречия, ликвидация которых потребует уточнения или пересмотра РС (штриховая линия на рис). Количественные оценки могут дать основания упростить модель, исключив из рассмотрения некоторые параметры, соотношения или их отдельные составляющие, несмотря на то, что влияние описываемых ими факторов учтено в РС. В большинстве случаев, принимая дополнительные по отношению к РС допущения, полезно построить такой упрощенный вариант ММ, который позволял бы получить или привлечь известное точное решение. Это решение затем можно использовать для сравнения при тестировании результатов на последующих этапах. Иногда удается построить несколько ММ для одного и того же ТО, отличающихся различ-

ным уровнем упрощения. В этом случае говорят об *иерархии ММ*, что в данном случае означает упорядочение ММ по признаку их сложности и полноты.

Построение иерархии ММ связано с различной детализацией свойств изучаемого ТО. Сравнение результатов исследования различных ММ может существенно расширить и обогатить знания об этом ТО. Кроме того, такое сравнение позволяет оценить достоверность результатов последующего вычислительного эксперимента: если более простая ММ правильно отражает некоторые свойства ТО, то результаты исследования этих должны быть близки к результатам, полученным при использовании более полной и сложной ММ.

Итог анализа на рассматриваемом этапе - это обоснованный выбор рабочей ММ ТО, которая подлежит в дальнейшем детальному количественному анализу. Успех в проведении третьего этапа зависит, как правило, от глубины понимания связи отдельных составляющих ММ со свойствами ТО, нашедшими отражение в его РС, что предполагает органическое сочетание владения математикой и инженерными знаниями в конкретной предметной области.

Четвертый этап состоит в обоснованном выборе метода количественного анализа ММ, в разработке эффективного алгоритма вычислительного эксперимента, а пятый этап в создании работоспособной программы, реализующей этот алгоритм средствами вычислительной техники. Для успешного проведения четвертого этапа необходимо владеть арсеналом современных методов вычислительной математики, а при математическом моделировании довольно сложных ТО выполнение пятого этапа требует профессиональной подготовки в области программирования на ЭВМ.

Получаемые на шестом этапе результаты вычислений (в итоге работы программы) должны, прежде всего, пройти тестирование путем сопоставления с данными количественного анализа упрощенного варианта ММ рассматриваемого ТО. Тестирование может выявить недочеты, как в программе, так и в алгоритме и потребовать доработки программы или же модификации алгоритма, и программы. Анализ результатов вычислений и их инженерная интерпретация могут вызвать необходимость в корректировке РС и соответствующей ММ. После устранения выявленных недочетов триаду “модель-алгоритм-программа” можно использовать в качестве рабочего инструмента для проведения вычислительного эксперимента и выработки на основе получаемой количественной информации практических рекоменда-

ций, направленных на совершенствование ТО, что составляет содержание седьмого, завершающего „цикл“ этапа математического моделирования.

Представленная последовательность этапов носит общий и универсальный характер, хотя в некоторых конкретных случаях она может и несколько видоизменяться. Если при разработке ТО можно использовать типовые РС и ММ, то отпадает необходимость в выполнении ряда этапов, а при наличии и соответствующего программного комплекса процесс вычислительного эксперимента становится в значительной степени автоматизированным. Однако математическое моделирование ТО, не имеющих близких прототипов, как правило, связано с проведением всех этапов описанного „технологического цикла“.

Цель настоящего практического пособия состоит в иллюстрации для студентов процесса постановки задачи и формирования как теоретических ФММ, так и ЭФММ на объектах достаточно часто встречающихся в практике инженерного проектирования, и на специфических агрегатах сельскохозяйственных машин. В пособии в аналитической форме представлены задачи расчета выходных характеристик и параметров машин и агрегатов. Кратко рассматриваются структурная схема и режим работы машины, определяются интересующие разработчика внешние, внутренние и выходные параметры, оцениваются связи между ними. Использование ПЭВМ при конструировании бывает особенно эффективно, когда на основе поставленной задачи и привлечении „дружелюбного“ по отношению к пользователю программного обеспечения путем вычислительного эксперимента исследуются специфические процессы, имеющие место в с/х машинах. В пособии учитываются знания, приобретенные студентами в курсе „Информатика“, поставленные задачи решаются в программной среде постоянно совершенствуемого универсального инженерного пакета „MathCAD“.

## **1. Подготовка к лабораторным занятиям и правила оформления отчета о выполненной работе**

Перед лабораторным занятием студенту следует уяснить цель работы, задание и освоить относящийся к теме работы теоретический материал по лекциям и практическому пособию. Необходимо ознакомиться с программным и аппаратным обеспечением, а также с по-

рядком выполнения работы. Для оформления работы нужно использовать бумагу для офисной техники (лист - формат А4, вес бумаги - 80 г/м<sup>2</sup>) и другие материалы в соответствии с заданием.

В начале лабораторного занятия преподаватель проверяет готовность студентов к занятиям. Для этого студенты в краткой форме письменно или устно (по указанию преподавателя) отвечают на вопросы указанные преподавателем. Вопросы приведены в конце каждой лабораторной работы. Студент, не подготовившийся к лабораторной работе, к занятию не допускается.

Отчет по лабораторной работе представляется студентом в следующей последовательности: тема работы, её цель, задание, пункты работы в соответствии с “Порядком выполнения работы”. В каждом пункте должны быть приведены необходимые формулы, графики (диаграммы), таблицы, эскизы. Допускается оформление текста отчета по лабораторной работе в среде MathCAD, а также перенос графического материала из других редакторов. Под каждым графическим изображением должен быть номер рисунка, его полное название и, при необходимости, пояснения к обозначениям.

Оформляется один титульный лист для всего цикла лабораторных работ. Пример оформления титульного листа приведен ниже.

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования  
«Гомельский государственный технический университет  
имени П.О. Сухого»

Кафедра «Сельскохозяйственные машины»

## ОТЧЕТ

по лабораторным работам по дисциплине  
“Математическое моделирование”

Выполнил: студент гр. С –31  
Кудряшов Е.А.

Принял: преподаватель  
Попов В. Б.

Гомель 2008

## 2. Теоретические сведения к циклу лабораторных работ.

Необходимым компонентом в структуре автоматизированного проектирования мобильных сельскохозяйственных агрегатов (МСХА) являются функциональные математические модели (ФММ), характеризующие основные режимы работы механизмов.

Пространственные геометрические модели механизмов преобразуем, считая оси, проходящие через центры шарниров, параллельными. В результате проецирования трехмерных моделей на плоскость получим плоские рычажные механизмы (ПРМ), структурный анализ которых, в предположении абсолютной жесткости звеньев показывает, что данные ПРМ идентифицируются как шестизвенные одноподвижные механизмы (см. рисунки).

В качестве входного звена механизма используется гидроцилиндр (или блок пружин как в механизме вывешивания адаптера), движение которого характеризуется обобщенной координатой. Массовые и геометрические характеристики выходного звена в каждом механизме однозначно связаны с изменением его обобщенной координаты. Особенности рассматриваемых механизмов являются тихоходность и относительно высокая внешняя нагрузка. Геометрический, кинематический и силовой анализ (статический режим) выполнялись по известной методике. Следует отметить, что наибольшие нагрузки в звеньях механизмов агрегатирования возникают в процессе транспортного переезда. ФММ транспортного переезда формируется на основе динамической схемы, учитывающей соответствующие характеристики энергосредства (в агрегате с навесной машиной) и микрорельефа. Система дифференциальных уравнений формируется на основе уравнения Лагранжа 2-го рода и решается методом Рунге-Кутты 4-го порядка. ММ анализа статического состояния, прямые и функциональные ограничения, а также сформированные из выходных параметров целевые функции составили основу для ММ оптимизационного параметрического синтеза рассмотренных механизмов МСХА.

Предлагаемый подход распространяется на автоматизированное проектирование четырехзвенных и восьмизвенных механизмов МСХА, а при доработке может быть использован при проектировании идентичных по структуре механизмов строительных, дорожных и землеройных машин. Упомянутые ММ были сформированы на ПЭВМ типа IBM PC в среде MCAD.

	<p>Механизм вывешивания адаптера. Для косилок КПП-4,2 и КПН-4,2. Для жаток (полу)навесных кормоуборочных комбайнов «Полесье-1400», КСК-100А, «Полесье-3000»</p>
	<p>Механизм подъема жаток косилок КПП-4,2 и КПН-4,2.</p>

### 3. Лабораторная работа №1

Математическое моделирование механизма подъема жатки.

1. Цель работы: Анализ процесса подъема жатки на основе сформированной ФММ.

#### 2. Краткие теоретические сведения

Проектирование и конструирование МПЖ связано с выбором рациональных параметров рабочего гидроцилиндра (ГЦ) привода и собственно механизма подъема. Геометрическая модель МПЖ представляет пространственный шарнирный механизм, симметричный относительно продольной плоскости симметрии жатки. Проецируя МПЖ на продольную плоскость симметрии, получаем плоский аналог пространственного механизма, который по классификации Ассур идентифицируется как одноподвижный шестизвенный. Положение его выходной координаты - центра тяжести жатки однозначно связано с изменением обобщенной координаты - расстояние между центрами шарниров гильзы и штока ГЦ.

Полагая звенья МПЖ несжимаемыми, последовательно выполняем геометрический и кинематический анализ механизма. В его основе лежит метод замкнутых векторных контуров, предложенный Зиновьевым. В результате анализа определяются координаты центра тяжести жатки и передаточное число  $I(S)$  МПЖ.

$$I(S) = \varphi'_3(S) \cdot U_{53}(S) \cdot [L_5 \cdot \cos \varphi_5(S) + U_{65}(S) \cdot L_{S6} \cdot \cos(\varphi_6(S) + \varphi_{S6})], \quad (1.1)$$

где  $\varphi'_3(S)$  - аналог угловой скорости;  $U_{53}(S), U_{65}(S)$  - передаточные отношения;  $L_5, L_{S6}$  - модули векторов (длины звеньев МПЖ);  $\varphi_5(S), \varphi_6(S)$  - углы, образуемые звеньями в правой декартовой системе координат. Аналитическое выражение для передаточного числа МПЖ позволяет определить пропорциональную ему полезную нагрузку  $F(S)$  на гидроцилиндре, а также существенно влияет на грузоподъемность  $G_S$  механизма:

$$G_S = \frac{p_{zu}^{\max} \cdot F_c - [F_{ин}^{np}(S^*) + F_{мп}^{np}(S^*)]}{I(S^*)_{\max}}, \quad (1.2)$$

где  $p_{zu}^{\max}$  - максимальное давление в ГЦ;  $F_c$  - площадь поршня ГЦ;  $F_{ин}^{np}(S^*)$  - приведенная сила инерции и  $F_{мп}^{np}(S^*)$  - приведенная сила трения, определенные для значения обобщенной координаты, соответствующей максимальной величине передаточного числа.

Приведенная к штоку ГЦ сила инерции определяется по выражению:

$$F_{ин}^{np}(S) = m_6 \cdot a_{S6}(S) \cdot I(S) + J_6 \cdot \varepsilon_6(S) \cdot \varphi'_6(S), \quad (1.3)$$

где  $a_{S6}(S), \varepsilon_6(S)$  - соответственно линейное и угловое ускорение жатки;  $m_6, J_6$  - соответственно масса и момент инерции жатки;  $\varphi'_6(S)$  - аналог угловой скорости жатки.

Для тихоходных механизмов, к которым относится МПЖ, учет силы инерции актуален только в случае, когда максимальная величина полезной нагрузки приближается к максимальной движущей силе, развиваемой гидроцилиндрами.

На рис. 1.1 приведен % загрузки гидроцилиндров в зависимости от их типоразмера в процессе подъема жатки.

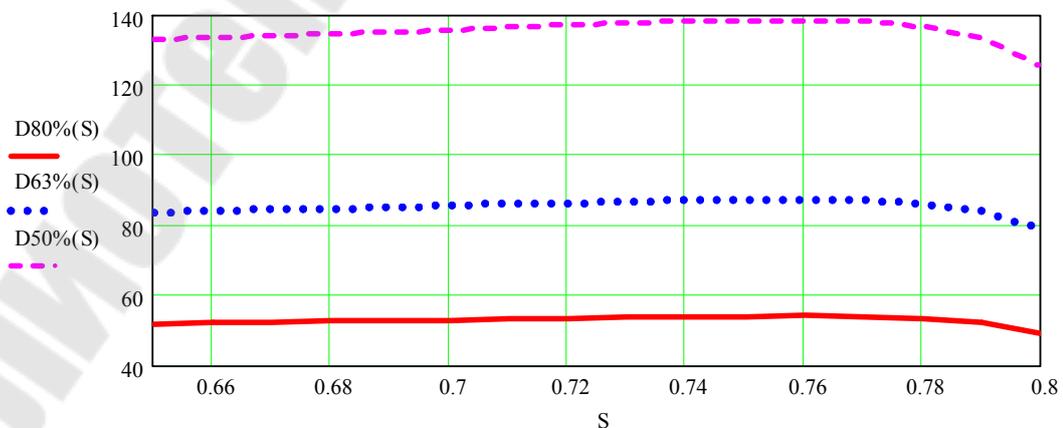


Рис.1.1 Загрузка гидроцилиндров МПЖ (D=80, D=63, D=50) в процессе подъема жатки

### 3. Задание и порядок выполнения работы

1. Познакомьтесь с формальным описанием процесса подъема жатки.
2. Ответив на вопросы преподавателя, получите допуск к лабораторной работе.
3. Просмотрите файл лабораторной работы на персональном компьютере E: users / Matmod / MM\_lab\_1.
4. Согласуйте с преподавателем исходные данные по задаче.
5. Выполните структурный и геометрический анализ МПЖ.
6. Выполните кинематический и силовой анализ МПЖ.
7. Постройте графики нагрузочных характеристик для трех типоразмеров гидроцилиндров как показано на рис 1.1.
8. Сделайте вывод о причине возможности (невозможности) подъема жатки с помощью ГЦ того или иного типоразмера.

### 4. Вопросы для контроля готовности студентов к лабораторному занятию

1. Дайте определение передаточного числа механизма подъема жатки (МПЖ)?
2. Из каких составляющих состоит приведенная к штоку гидроцилиндра МПЖ нагрузка?
3. На основе каких допущений пространственный механизм преобразуется в плоский?
4. Какой метод используется для анализа плоского аналога структурной схемы МПЖ?
5. Что произойдет, если в процессе подъема жатки давление в гидроцилиндре станет равным давлению настройки предохранительного клапана?
6. Какие из трех предложенных гидроцилиндров можно использовать в МПЖ и почему?
7. Каким образом проще всего уменьшить максимальное значение передаточного числа?
8. Чем определяется максимум движущей силы на штоке гидроцилиндра?

#### **4. Лабораторная работа №2**

##### **Математическое моделирование механизма вывешивания адаптера.**

1. Цель работы: Получение и анализ статической характеристики МВА на основе сформированной ФММ копирования башмаками жатки опорной поверхности.

#### 2. Краткие теоретические сведения

Адаптер (жатка или подборщик) кормоуборочного комбайна воздействует на почву лишь небольшой частью своего веса, в то время как большая часть через механизм вывешивания адаптера (МВА) компенсируется предварительным натяжением пружин. Во время уборки положение жатки (и закрепленного на её раме режущего аппарата), совершающей плоскопараллельное движение относительно самоходного измельчителя, непрерывно изменяется. Поддержание требуемой высоты среза минимизирует потери скашиваемого корма и обеспечивается непрерывным контактом башмака с поверхностью. При этом чрезмерное давление башмака разрушает стерню и приводит к его ускоренному износу, а недостаточное провоцирует галопирование жатки, сопровождающееся дополнительными потерями. Таким образом, величина потерь урожая и поврежденность культурного слоя почвы существенно определяются характером взаимодействия башмаков адаптера кормоуборочного комбайна с опорной поверхностью, а величина давления башмаков, в свою очередь, зависит от характеристик механизма вывешивания.

МВА предназначен для обеспечения качественного копирования башмаками почвы в заданном диапазоне их вертикального перемещения путем постоянной компенсации большей части веса адаптера в процессе движения кормоуборочного комбайна. При автоматизированном проектировании адаптеров выходные параметры и характеристики МВА определяются на этапе эскизного проекта. Для этого разработана функциональная теоретическая математическая модель (ФММ) кинематического и силового анализа МВА, по которой, в частности, определяются характер изменения реакции на башмаках в заданном диапазоне копирования рельефа.

Геометрический анализ механизма выполняется в правой декартовой системе координат на основе результатов структурного анализа по методу замкнутого векторного контура. Кинематический анализ

МВА заключается в определении аналогов угловых скоростей его подвижных звеньев, передаточных отношений и аналогов вертикальных линейных скоростей центра тяжести адаптера ( $S_6$ ) и точки контакта башмака с опорной поверхностью ( $M$ ). Растягивая пружины МВА на неподвижном кормоуборочном комбайне можно отрегулировать давление башмаков на опору до заданного уровня. Так, чтобы обеспечить начальную реакцию на башмаке ( $R_0$ ) надо в положении статического равновесия предварительно растянуть пружину на  $\Delta X$ :

$$\Delta X = \frac{P \cdot I_{S_6}(S_0) - R_0 \cdot I_M(S_0)}{C}, \quad (2.1)$$

где  $S$  – обобщенная координата;  $I_M(S)$ ,  $I_{S_6}(S)$  – передаточные числа МВА;  $P$  – вес части адаптера, приходящийся на данный башмак;  $C$ ,  $\Delta X(S)$  – жесткость и текущее растяжение пружины.

На уровне  $Y_M(S)$  отличном от приведенного выше нулевого (когда вертикальные координаты колеса движителя самоходного измельчителя и башмака адаптера равны) реакция на башмаке будет отличаться от первоначальной. В положении статического равновесия, приведенная к пружине (блоку пружин), нагрузка определяется по уравнению работ, составленному для элементов механической системы. Сила давления башмака на опорную поверхность –  $R(S)$  зависит от геометрических и кинематических параметров МВА, массово-геометрических параметров адаптера и характеристик пружины:

$$R(S) = \frac{1}{I_M(S)} \cdot [P \cdot I_{S_6}(S) - C \cdot \Delta X(S)], \quad (2.2)$$

Полученные расчетом на ФММ зависимости реакций на правом и левом башмаках жатки от их вертикального положения  $Y_M(S)$  относительно самоходного измельчителя представлены на рис. 2.1.

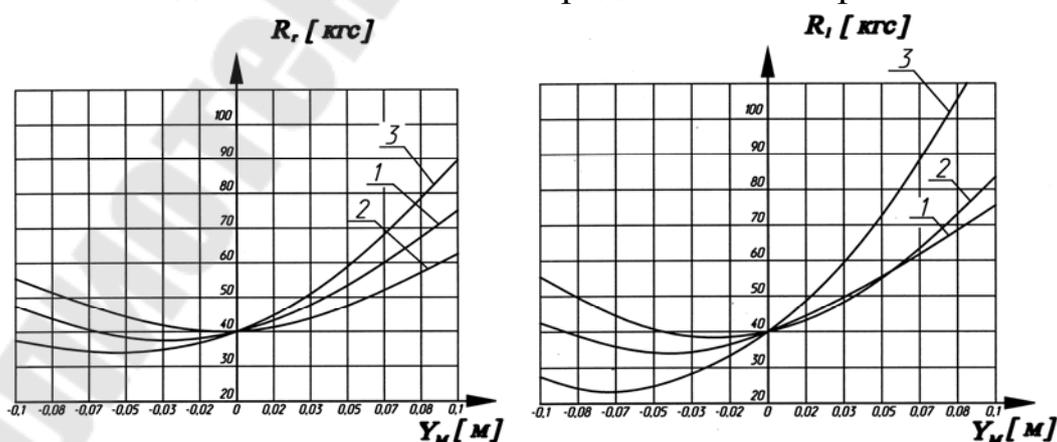


Рис. 2.1 Статические характеристики правого и левого башмаков адаптера 1,2,3 – виды настройки башмаков на соответствующую высоту среза.

### 3. Задание и порядок выполнения работы

1. Познакомьтесь с теорией вывешивания адаптера.
2. Ответив на вопросы преподавателя, получите допуск к лабораторной работе.
3. Просмотрите файл лабораторной работы на персональном компьютере E: users / Matmod / MM\_lab\_2.
4. Согласуйте с преподавателем исходные данные по задаче.
5. Выполните структурный и геометрический анализ МВА.
6. Выполните кинематический и силовой анализ МВА.
7. Постройте графики статических характеристик для правого и левого башмаков адаптера.
8. Сделайте вывод о причине различия реакций на башмаках.

### 4. Вопросы для контроля готовности студентов к лабораторному занятию

1. Дайте определение передаточного числа механизма вывешивания адаптера (МВА)?
2. Чем определяется величина силы реакции на башмаке?
3. Как распределяется нагрузка на башмаки адаптера, когда вертикальные координаты точки контакта башмаков с опорной поверхностью совпадают с координатами опорного колеса?
4. Возможна ли при использовании пружин идеальная характеристика копирования башмаками опорной поверхности?
5. Каким образом связаны между собой вертикальная скорость подъема адаптера и скорость сжатия пружины?
6. На основании каких правил формируется аналитическое выражение для статической характеристики?
7. Какой метод используется для анализа плоского аналога структурной схемы МВА?
8. Чем объясняется явление “галопирования” адаптера?

### **5. Формирование функциональной математической модели механизма складывания секций КПр-6.**

Косилка – плющилка ротационная КПр - 6 предназначена для скашивания трав с плющением стеблей скошенных растений и укладки массы в два вращающихся вала или один сдвоенный. КПр - 6 конструктивно состоит из двух рабочих секций с общей шириной захвата

6,2 м, агрегатируется с универсальным энергетическим средством “Полесье”. Во время транспортных переездов рабочие секции складываются. Для выбора параметров гидропривода формируется функциональная математическая модель (ММ) подъема секции КПП-6, в которой, помимо полезной, аналитически учитываются инерционная и диссипативная составляющие нагрузки. Описание приведенной нагрузки, зависящей от параметров гидропривода, МП и секции, поможет определить реальное влияние её составляющих. Все это позволит выполнить на ПЭВМ вычислительный эксперимент и достигнуть необходимой адекватности функциональной ММ. На плоскости МП секции представляет собой четырехзвенный шарнирно-рычажный механизм. Считая жидкость в гидроцилиндре (входное звено МП) несжимаемой, а звенья МП абсолютно жесткими, по формуле Чебышева получим одноподвижный плоский механизм, изменение положения обобщенной координаты которого однозначно определяет изменение координат шарниров подвижных звеньев МП и его характерных точек. Геометрический и кинематический анализ МП секции выполняется в правой системе координат по методу замкнутого векторного контура [3]. Начало координат расположено так, чтобы ось ОХ пересекала центр тяжести секции в начале подъема, а ось ОУ пересекала центр шарнира подпятника ГЦ (рис. 3.1). Считая процессы подъема секций КПП-6 идентичными, анализируем движение левой секции. Углы  $\varphi_{12}(S)$  и  $\varphi_3(S)$ , образуемые векторами  $\vec{S}$  и  $\vec{L}_3$  определяются на схеме элементарно. Угол между векторами  $\vec{L}_3$  и  $\vec{L}_{S3}$ , а также координаты центра тяжести  $S_3$  секции определяются по выражениям:

$$\varphi_{S3} = 2 \cdot \pi - \left[ \varphi_3(S_0) + \operatorname{arctg} \frac{Y_3}{X_3} \right] \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} X_{S3}(S) &= X_{03} + L_{S3} \cdot \cos(\varphi_3(S) + \varphi_{S3}) \\ Y_{S3}(S) &= Y_{03} + L_{S3} \cdot \sin(\varphi_3(S) + \varphi_{S3}) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Аналогично решается задача о положениях подвижных шарниров.

Задача кинематического анализа состоит в определении аналогов угловых скоростей звеньев и передаточного числа МП. Дифференцируя аналитические выражения для  $\varphi_{12}(S)$  и  $\varphi_3(S)$  по обобщенной координате получим аналоги угловой скорости гидроцилиндра и подъемного рычага:

$$\varphi'_{12}(S) = \frac{S^2 + L_3^2 - L_0^2}{\sqrt{[4 \cdot L_0^2 \cdot L_3^2 - [S^2 - (L_3^2 + L_0^2)]^2] \cdot S}} \quad (3.3)$$

$$\varphi'_3(S) = \frac{2 \cdot S}{\sqrt{4 \cdot L_0 \cdot L_3^2 - (S^2 - (L_0^2 + L_3^2))^2}} \quad (3.4)$$

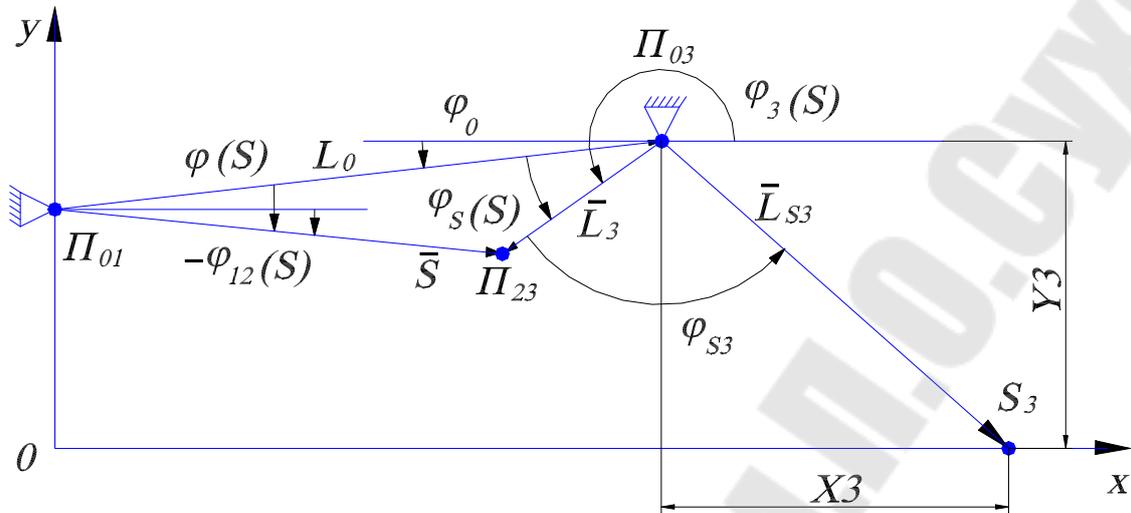


Рис 3.1. Векторная интерпретация структурной схемы МП левой секции КТР-6.

Дифференцируя выражение для вертикальной координаты центра тяжести секции (2) по  $t$ , и разделив его на скорость изменения обобщенной координаты -  $\dot{S}$  получим передаточное число МП, представляющее собой аналог вертикальной линейной скорости центра тяжести секции:

$$I(S) = \varphi'_3(S) \cdot L_{S3} \cdot \cos(\varphi_3(S) + \varphi_{S3}) \quad (3.5)$$

Величина приведенной к штоку полезной нагрузки [4] и соответствующего ей давления у гидронасоса определялись по выражениям:

$$F(S) = P_3 \cdot I(S), \quad p_2(S) = \frac{F(S)}{F_c \cdot \eta}, \quad (3.6)$$

где  $F_c$  – площадь поршня ГЦ;  $\eta$  – средний к.п.д. гидропривода и МП.

Величина приведенной нагрузки с учетом сил трения и силы инерции секции определяется по выражению:

$$F_{np}(S) = F(S) + F_{ин}^{np}(S) + F_{тр}^{np}(S), \quad (3.7)$$

где  $F_{ин}^{np}$  – приведенная сила инерции;  $F_{тр}^{np}$  – приведенная сила трения.

Расчет приведенной к штоку гидроцилиндра силы трения выполняем, считая ее равной отношению от деления суммы мгновенных мощностей трения, затрачиваемых в шарнирах МП на  $\dot{S}$  плюс трение манжеты поршня о гильзу гидроцилиндра ( $F_{мпц}$ ):

$$F_{мп}^{np}(S) = F_{мпц} + r \cdot f_m \cdot [R_{01}(S) \cdot \varphi'_{12}(S) + R_{23}(S) \cdot (\varphi'_{12}(S) + \varphi'_3(S)) + R_{03}(S) \cdot \varphi'_3(S)], \quad (3.8)$$

где  $r$  – радиус шарниров МП;  $f_m$  – коэффициент трения металла о металл (пальца шарнира о его втулку);

Ограничения, сформулированные для геометрического и кинематического анализа МП, сохраняются и в силовом анализе. Реакции в шарнирах определяются как результат действия веса секции и её силы инерции. Силу трения манжеты поршня о внутреннюю поверхность гильзы ГЦ определяем по выражению:

$$F_{\text{тр.}} = \pi \cdot D \cdot l \cdot f_c \cdot p_m, \quad (3.9)$$

где  $D$  – диаметр поршня ГЦ;  $l$  – ширина манжеты;  $f_c$  – коэффициент трения манжеты о гильзу ГЦ;  $p_m$  – среднее давление в напорной полости ГЦ.

Для расчета силы инерции рабочей секции нужно знать её линейное ускорение -  $a_{s_3}(S)$ , которое определяется из выражений:

$$a_{s_3}(S) = \sqrt{\ddot{X}_{s_3}(S)^2 + \ddot{Y}_{s_3}(S)^2} \quad (3.10)$$

$\ddot{X}_{s_3}(S), \ddot{Y}_{s_3}(S)$  – компоненты линейного ускорения центра тяжести секции соответственно по оси  $X, Y$ . Определяются двукратным дифференцированием координат центра тяжести секции по независимой переменной  $t$ :

$$\begin{aligned} \ddot{X}_{s_3}(S) &= -L_{s_3} \cdot [\varepsilon_3(S) \cdot \sin(\varphi_3(S) + \varphi_{s_3}) + \omega_3(S)^2 \cdot \cos(\varphi_3(S) + \varphi_{s_3})] \\ \ddot{Y}_{s_3}(S) &= L_{s_3} \cdot [\varepsilon_3(S) \cdot \cos(\varphi_3(S) + \varphi_{s_3}) - \omega_3(S)^2 \cdot \sin(\varphi_3(S) + \varphi_{s_3})] \end{aligned}$$

где  $\omega_3(S), \varepsilon_3(S)$  – соответственно угловая скорость и ускорение секции;

Угловое ускорение  $\varepsilon_3(S)$  определяется путем дифференцирования выражения для угловой скорости  $\omega_3(S)$  по обобщенной координате  $S$ :

$$\omega_3(S) = \varphi_3'(S) \cdot \dot{S} \quad \varepsilon_3(S) = \varphi_3''(S) \cdot \dot{S}^2 + \varphi_3'(S) \cdot \ddot{S}$$

Таким образом, получены аналитические выражения, которые используются в ФММ динамического анализа нагруженного гидропривода и параметрической оптимизации механизма подъема секции косилки-плюшки ротационной КПП-6.

## 6. Лабораторная работа №3

### Математическое моделирование нагруженного гидропривода.

1. Цель работы: Проанализировать влияние параметров механизма подъема секции и гидропривода на характер движение штока гидроцилиндра.

#### 2. Краткие теоретические сведения

Анализ выражения (3.10) обосновывает необходимость определения закона изменения  $S$ , как результата исследования движения нагруженного гидропривода. Структурная схема гидропривода МП секции приведена на рисунке 3.2. Гидропривод работает следующим образом: шестеренный насос 1 нагнетает рабочую жидкость через напорную магистраль к гидрораспределителю (ГР) 3 и, при его включенной правой секции, далее в поршневую полость гидроцилиндра (ГЦ) 5. Шток ГЦ начинает выдвигаться, причем давление в этой полости пропорционально приведенной к штоку ГЦ нагрузке

На основе динамической схемы гидропривода, методики определения потерь давления и применения уравнения Лагранжа 2-го рода к машинному агрегату, состоящему из гидропривода и МП, формируется функциональная математическая модель (ФММ) в виде системы нелинейных дифференциальных уравнений.

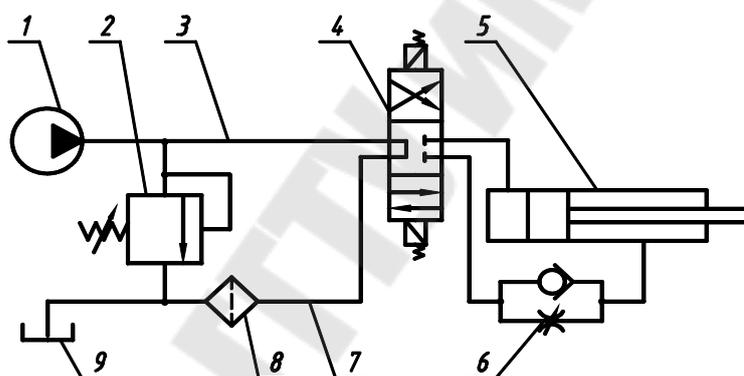


Рис. 3.2 Структурная схема гидропривода МП секции.

1 - насос шестеренный; 2 - клапан предохранительный (ПК); 3 - гидрораспределитель; 4 - напорная магистраль; 5 - гидроцилиндр; 6 -сливная магистраль; 7 -регулируемый дроссель; 8 -фильтр; 9 -бак.

Рабочая жидкость, из-за наличия в ней пузырьков нерастворенного воздуха, в этом случае считается сжимаемой. Предполагается, что структурные элементы гидропривода (ГН, ГР, ПК) работают безынерционно. Температура, плотность, вязкость рабочей жидкости и количество нерастворенного в ней воздуха принимаются постоянными. Приведенный модуль объемной упругости рабочей жидкости  $E_{np}$  считается постоянным. Объемный расход рабочей жидкости  $Q$ , поступающий в магистраль, затрачивается на перемещение поршня ГЦ  $Q_{пер}$ , деформацию рабочей жидкости и самой гидромагистрали  $Q_{сж}$ .

$$Q = Q_{пер} + Q_{сж} \text{ или } Q = F_c \cdot \dot{S} + \dot{p}_1 \cdot \frac{V_{жс}}{E_{np}} \quad Q = q \cdot n \cdot \eta_0 \quad (3.11)$$

где,  $F_c$  – площадь поршня ГЦ;  $\dot{p}_1$  – скорость изменения давления у ГН;  $V_{ж}$  – сосредоточенный объем жидкости;  $E_{np}$  – приведенный модуль объемной упругости гидроцепи;  $q, n, \eta_0$  – соответственно объемная подача за оборот вала гидронасоса, а также его частота вращения и объемный КПД.

Уравнение баланса мгновенных объемных расходов (3.11) преобразуем относительно скорости перемещения поршня [8]:

$$\dot{S} = \frac{Q}{F_c} - \frac{V_0 + F_c \cdot (S - S_0)}{F_c \cdot E_{np}} \cdot \dot{p}_1 \quad (3.12)$$

На основании исследований, выполненных в [7], запишем уравнение баланса давлений для гидропривода:

$$p_2 = p_1 - (a_1 \cdot \ddot{S} + a_2 \cdot \dot{S} + a_3 \cdot S^2), \quad (3.13)$$

где  $a_1$  – коэффициент, учитывающий инерционные свойства рабочей жидкости;  $a_2$  – коэффициент, учитывающий ламинарный характер течения рабочей жидкости;  $a_3$  – коэффициент, учитывающий турбулентный характер течения рабочей жидкости и местные гидравлические сопротивления.

Подставляя в уравнение Лагранжа выражение для кинетической энергии движущейся секции, считая при этом, что обобщенная сила равна разности между силой движущей поршень и силами сопротивления движению, после преобразования получим:

$$m(S) \cdot \ddot{S} + \frac{1}{2} \cdot \frac{dm(S)}{dS} \cdot \dot{S}^2 = F_{об} - [F(S) + F_{mp}^{np}(S)], \quad (3.14)$$

где  $m(S)$  – приведенная масса;  $F_{об}$  – движущая сила, равная произведению давления в ГЦ на площадь его поршня.

Левая часть уравнения (3.14) представляет выражение для приведенной к штоку ГЦ силы инерции. Приведенную массу, её производную по обобщенной координате и другие, необходимые для расчета промежуточные величины определяют по выражениям:

$$\begin{aligned} m(S) &= m_3 \cdot I_v^2(S) + J_3 \cdot \varphi_3'^2(S) \\ I_v(S) &= \varphi_3'(S) \cdot L_{S3} \quad I_v'(S) = \varphi_3''(S) \cdot L_{S3} \\ m'(S) &= 2 \cdot [(m_3 \cdot I_v(S) \cdot I_v'(S) + J_3 \cdot \varphi_3'(S) \cdot \varphi_3''(S))] \\ \varphi_3''(S) &= \frac{2 \cdot [S^4 - (L_3^2 - L_0^2)^2]}{\sqrt{[4 \cdot L_0^2 \cdot L_3^2 - [S^2 - (L_3^2 + L_0^2)]^2]^3}} \end{aligned} \quad (3.15)$$

где  $I_v(S)$  - аналог линейной скорости центра тяжести секции;  $I'_v(S)$  - производная от предыдущей величины по обобщенной координате;  $\varphi_3''(S)$  - аналог углового ускорения секции, получаемый дифференцированием по обобщенной координате аналога её угловой скорости (5.4).

Объединяя выражения (3.12), (3.13), (3.14) получим динамическую ММ в виде системы из трех уравнений, описывающих динамику процесса подъема секции:

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = \frac{E_{np}}{V_0 + F_c \cdot (S - S_0)} \cdot Q - \frac{F_c \cdot E_{np}}{V_0 + F_c \cdot (S - S_0)} \cdot \dot{S} \\ p_2 = p_1 - (a_1 \cdot \ddot{S} + a_2 \cdot \dot{S} + a_3 \cdot \dot{S}^2) \\ m(S) \cdot \ddot{S} + \frac{1}{2} \cdot m'(S) \cdot \dot{S}^2 = p_2 \cdot F_c - [F(S) + F_{mp}^{np}(S)] \end{cases} \quad (3.16)$$

Данная система нелинейных ДУ решается по методу Рунге-Кутта 4-го порядка в среде MathCAD.

### 3. Задание и порядок выполнения работы

1. Познакомьтесь с теорией о процессе вывешивания адаптера.
2. Ответив на вопросы преподавателя, получите допуск к лабораторной работе.
3. Просмотрите файл лабораторной работы на персональном компьютере E: users / Matmod / ММ\_lab\_3.
4. Согласуйте с преподавателем исходные данные по задаче.
5. Определите значения постоянных коэффициентов в системе нелинейных ДУ.
6. Для определения закона движения используйте стандартные операторы MathCAD – rkfixed, rkadapt.
7. Закон движения нагруженного штока ГЦ проиллюстрируйте графиками.

### 4. Вопросы для контроля готовности студентов к лабораторному занятию

1. Перечислите составляющие приведенной к гидроцилиндру нагрузки.
2. Назовите свойства и характеристики технического объекта, которыми мы пренебрегаем при формировании ФММ нагруженного гидропривода.
3. Охарактеризуйте в соответствии с классификацией ФММ нагруженного гидропривода.

4. Каким требованиям должна удовлетворять ФММ?
5. Какими параметрами характеризуется закон движения штока гидроцилиндра?
5. Каким образом формально описывается и чем представлена ФММ подъема секции КПП-6?
7. Для чего необходимо знать закон движения штока гидроцилиндра?
8. Как для формирования ФММ использовано уравнение Лагранжа 2-го рода?
9. Какие выходные параметры должны быть получены в результате кинематического анализа, чтобы определить приведенную силу трения?

## **7. Лабораторная работа №4**

### **Оптимизация параметров механизма подъема секции косилки-плющилки ротационной.**

1. Цель работы: Определение параметров МПС, обеспечивающих минимизацию приведенной нагрузки в диапазоне изменения обобщенной координаты.

#### 2. Краткие теоретические сведения

Исходя из функционального назначения КПП-6 и его секций, проектируя механизм подъема (МП) секции, инженер стремится одновременно удовлетворить ряд противоречивых условий:

- расположить МП таким образом, чтобы в момент начала и окончания движения навесная машина занимала желаемое положение, одновременно соответствующее требованиям стандарта;
- обеспечить требуемую грузоподъемность МН для заданной ограниченной мощности гидропривода;
- обеспечить устойчивость МСХА со сложенными в транспортном положении секциями, а также нормативную нагрузку на мост ведущих колес УЭС;
- минимизировать нагрузку в элементах МП и величину силового воздействия, передаваемого со стороны секции через МП на раму УЭС.

В качестве управляемых параметров МП, определяющих его конструктивный вариант предлагаются: в ГП сечение гидромагистрали  $f$ , а в МП - координаты шарниров основания поворотного рычага -

$X_{03}, Y_{03}$  расположенные на раме КПП-6, а также параметр поворотного рычага -  $L_3$ .

Каждому фиксированному значению набора  $X = \{X_{03}, Y_{03}, L_3, \varphi_{S3}\}$  управляемых параметров соответствуют определенные значения критериев оптимальности  $Y(X)$ .

$$\vec{Y} = \{I_S^{\max}, \bar{I}_S, \bar{F}_{mp}, \bar{F}_{ин}\}, \quad (4.1)$$

где  $\bar{I}_S$  - среднее значение передаточного числа на интервале изменения обобщенной координаты;  $I_S^{\max}$  - максимальное значение передаточного числа МП на интервале изменения  $S$ ;  $\bar{F}_{mp}, \bar{F}_{ин}$  - среднее значение приведенной силы трения и силы инерции.

Интегральным показателем качества является грузоподъемность на оси подвеса МП, зависящая одновременно от параметров ГП и МП:

$$G_S = \frac{p_2^{\max} \cdot F_c - [F_{ин}^{np}(S^*) + F_{mp}^{np}(S^*)]}{I_S^{\max}(S^*)} \quad (4.2)$$

где  $S^*$  - значение обобщенной координаты соответствующее  $I_S^{\max}(S^*)$

Искомые значения оптимизируемых параметров МП и ГП должны удовлетворять ряду конструктивных, технологических и эксплуатационных ограничений, которые делятся на прямые и функциональные. Прямые ограничения касаются предельных значений управляемых параметров, т.е.  $\bar{X}_{\min} \leq \bar{X} \leq \bar{X}_{\max}$

К функциональным ограничениям относятся: величина хода вертикальной координаты центра тяжести секции -  $\Delta Y_{S3}(S)$  и максимальный угол перемещения секции из горизонтального в вертикальное положение -  $\varphi_3^{\max}$  и время подъема секции.

### Задача нелинейного программирования для МП

Вектор управляемых параметров:  $X = \{X_{03}, Y_{03}, L_3, \varphi_{S3}\}$

Функциональные ограничения:

$$\begin{cases} S < l_3 + \sqrt{(Y_{03} - Y_{01})^2 + (X_{03} - X_{01})^2} \\ 1.3M \leq \Delta Y_{S3}(S) = Y_{S3}(S_{MAX}) - Y_{S3}(S_0) \leq 1.31M & \frac{(S_{\max} - S_0) \cdot F_c \cdot 2}{Q_n} < t_n < t_{\max} \\ 89^\circ \leq \Delta \varphi_3(S) = \varphi_3(S_{MAX}) - \varphi_3(S_0) \leq 91^\circ \end{cases}$$

Критерии оптимальности:

$$I(S) = \varphi_3(S) L_{S_3} \cos(\varphi_3(S) + \varphi_{S_3})$$

$$F_{mp}^{np}(S) = F_{mp} + r \cdot f_m \cdot [R_{01}(S) \cdot \varphi'_{12}(S) + R_{23}(S) \cdot (\varphi'_{12}(S) + \varphi'_3(S)) + R_{03}(S) \cdot \varphi'_3(S)]$$

$$F_{mp} = \pi \cdot D \cdot l \cdot f_c \cdot p_m$$

$$F_{ин}^{np}(S) = m_3 \cdot a_{S_3}(S) \cdot I(S) + J_3 \cdot \varepsilon_3(S) \cdot \varphi'_3(S)$$

### 3. Задание и порядок выполнения работы

1. Познакомьтесь с постановкой задачи параметрической оптимизации.

3. Ответив на вопросы преподавателя, получите допуск к лабораторной работе.

4. Просмотрите файл лабораторной работы на персональном компьютере E: users / Matmod / MM\_lab\_4.

5. Согласуйте с преподавателем исходные данные по задаче.

6. Сформируйте задачу нелинейного программирования.

7. Минимизируйте критерий оптимальности, целевую функцию.

8. Определите искомые значения управляемых параметров.

### 4. Вопросы для контроля готовности студентов к лабораторному занятию

1. Назовите составляющие математической модели параметрической оптимизации (нелинейного программирования).

2. Что такое критерий оптимальности, показатель качества?

3. Опишите функциональные ограничения в данной задаче.

4. Что такое целевая функция?

5. Чем отличается постановка многокритериальной задачи от однокритериальной?

6. Назовите возможные критерии оптимальности в данной задаче и обоснуйте это.

7. Что такое и как формируется вектор управляемых параметров?

8. Как выполняется свертка вектора критериев в скалярную целевую функцию?

9. Опишите схему параметрической оптимизации механизма подъема секции косилки-плющилки ротационной КПП-6.

## **8. Лабораторная работа №5**

Формирование динамических моделей мобильных сельскохозяйственных машин и агрегатов.

2. Цель работы: освоить методику построения динамических моделей мобильных сельскохозяйственных машин и агрегатов в пакете MathCAD.

## 2. Краткие теоретические сведения

### 2.1 Расчетные динамические схемы мобильных сельскохозяйственных машин и агрегатов.

Самоходные сельскохозяйственные машины и агрегаты, приводимые в движение собственным двигателем, называются *мобильными*. Расчетная динамическая схема (РДС) мобильного машинно-тракторного агрегата (МТА), состоящего из трактора и прицепной сельхозмашины имеет вид:

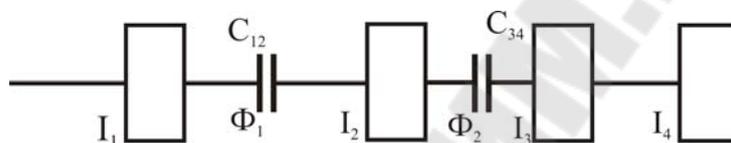


Рис.5.1. Расчетная динамическая схема мобильного МТА:

Здесь:  $I_1$  - момент инерции движущихся деталей двигателя, маховика двигателя и ведущей части муфты сцепления;  $I_2$  - приведенный момент инерции ведомой части муфты сцепления, вращающихся деталей трансмиссии трактора и его колес;  $I_3$  - приведенный момент инерции поступательно движущейся массы трактора;  $I_4$  - приведенный момент инерции вращающихся деталей трансмиссии прицепной сельхозмашины и ее поступательно движущейся массы;  $\Phi_1$  - фрикционная муфта, моделирующая работу муфты сцепления трактора;  $\Phi_2$  - фрикционная муфта, моделирующая сцепление ведущих колес трактора с почвой;  $c_{12}$  - приведенная жесткость деталей трансмиссии трактора;  $c_{34}$  - приведенная жесткость сцепного устройства и трансмиссии прицепной сельхозмашины.

Приведение всех моментов инерции и жесткостей в указанной РДС осуществляется к первичному валу коробки передач.

Если при моделировании не учитывать буксование ведущих колес МТА, то РДС приобретает следующий вид:

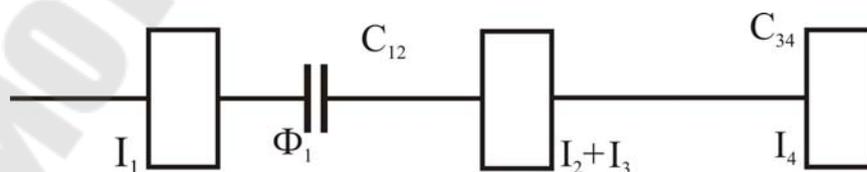


Рис.5.2 РДС мобильного МТА (без учета буксования колес).

Полученная РДС "весовым" методом, может быть еще упрощена:

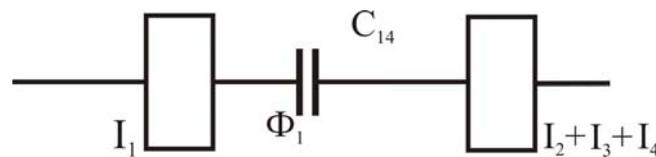


Рис.5.3. РДС мобильного МТА:  $c_{14}$  - приведенная жесткость всех деталей трансмиссий трактора и с/х-машины.

Если в упрощенной ДС не учитывать жесткости деталей, то получаем простейшую динамическую систему для мобильных МТА:

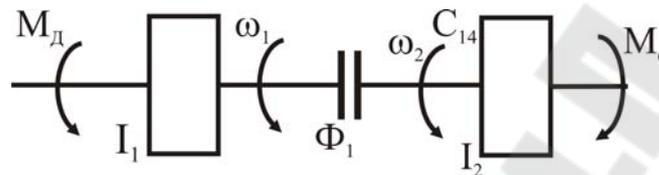


Рис. 5.4. Окончательный вариант РДС мобильного МТА.

Здесь:  $M_d$  - крутящий момент двигателя;  $M_c$  - момент сопротивления МТА;  $\omega_1$  - частота вращения двигателя;  $\omega_2$  - частота вращения первичного вала коробки передач;  $I_1$  - приведенный момент инерции двигателя;  $I_2$  - приведенный момент инерции МТА.

С достаточной для практических целей точностью значения приведенных моментов инерции могут быть рассчитаны по формулам:

$$I_1 = 1.2I_m \quad (5.1)$$

$$I_2 = 1.2(m_{mp} + m_{схм}) \frac{R^2}{u^2} \quad (5.2)$$

где  $I_m$  - момент инерции маховика двигателя;  $m_{mp}$  - масса трактора;  $m_{схм}$  - масса прицепной сельхозмашины;  $R$  - радиус качения ведущих колес трактора;  $u$  - передаточное число трансмиссии от первичного вала коробки передач до ведущих колес.

Анализ формулы (5.2) показывает, что значение  $I_2$  для данного агрегата не является постоянным, а зависит от передаточного числа  $u$ , т.е. от номера включенной передачи. На низшей передаче значение  $I_2$  имеет минимальное значение, на высшей - максимальное.

## 2.2 Математическое описание работы двигателя, муфты сцепления и момента сопротивления МТА.

При моделировании мобильных МТА *работу двигателя* можно описать по его *регуляторной характеристике*, показывающей зависимость крутящего момента от частоты вращения. Линейная

аппроксимация этой характеристики представлен на рис.5.5.

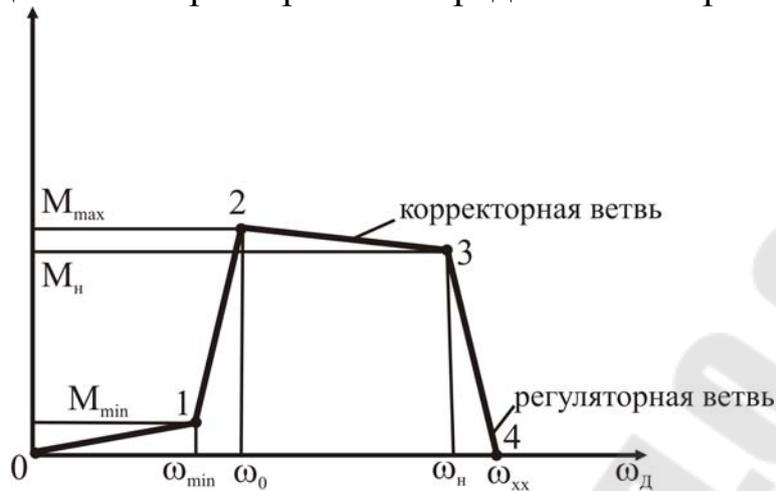


Рис. 5.5. Упрощенная регуляторная характеристика ДВС.

Здесь  $\omega_{xx}$  – максимальная частота вращения холостого хода;  $\omega_n$  – номинальная частота вращения;  $\omega_0$  – частота вращения при максимальном крутящем моменте (работает корректор топливного насоса);  $\omega_{min}$  – минимальная устойчивая частота вращения двигателя под нагрузкой. Если  $\omega_d < \omega_{min}$ , то двигатель глохнет.  $M_{max}$  – максимальный крутящий момент, развиваемый двигателем;  $M_n$  – номинальный крутящий момент ДВС;  $M_{min}$  – минимальный устойчивый крутящий момент ДВС.

Упрощенная регуляторная характеристика представляет собой ломаную линию 0-1-2-3-4, поэтому для ее аппроксимации можно использовать линейную интерполяцию.

Работа фрикционной муфты сцепления трактора может быть описана законом ее включения (рис.5.6), показывающим изменение момента трения муфты  $M_\phi$  во времени.

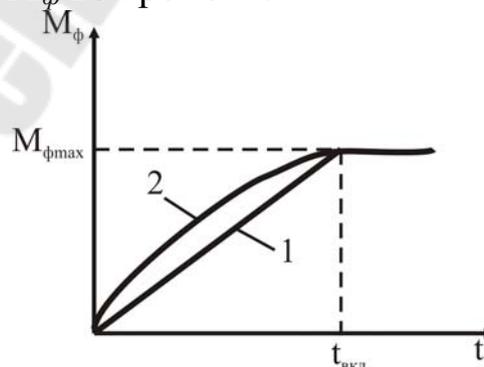


Рис.5.6. Линейный (1) и экспоненциальный (2) законы включения муфты сцепления трактора.

Реальные условия эксплуатации муфт сцепления тракторов более точно аппроксимируются экспоненциальным законом включения, описываемым следующим уравнением:

$$M_{\phi} = M_{\phi_{max}}(1 - e^{-kt}), \quad (5.3)$$

где  $M_{\phi_{max}}$  - максимальный момент трения муфты;  $k$  - коэффициент темпа включения:  $k = 5 / t_{вкл}$ ;  $t_{вкл}$  - время включения муфты (время выборки зазоров между ведущим и ведомым дисками сцепления).

Момент сопротивления МТА (сопротивление качению колес и сопротивление на рабочих органах прицепной сельхозмашины) в первом приближении может быть принят линейным относительно поступательной скорости агрегата  $V$ :

$$M_c = M_{nc} + k_v V, \quad (5.4)$$

где  $M_{nc}$  - постоянная составляющая момента сопротивления;  $V$  - поступательная скорость агрегата;  $k_v$  - коэффициент влияния скорости на момент сопротивления.

Поступательная скорость  $V$  определяется как

$$V = \omega_k R = \omega_2 \frac{R}{u},$$

где  $\omega_k$  - частота вращения ведущих колес трактора;  $R$  - радиус ведущих колес;  $\omega_2$  - частота вращения первичного вала коробки передач;  $u$  - передаточное число трансмиссии.

Поэтому формула (5.4) может быть переписана следующим образом (рис.5.7):

$$M_c = M_{nc} + k_v \omega_2 \frac{R}{u} \quad (5.5)$$

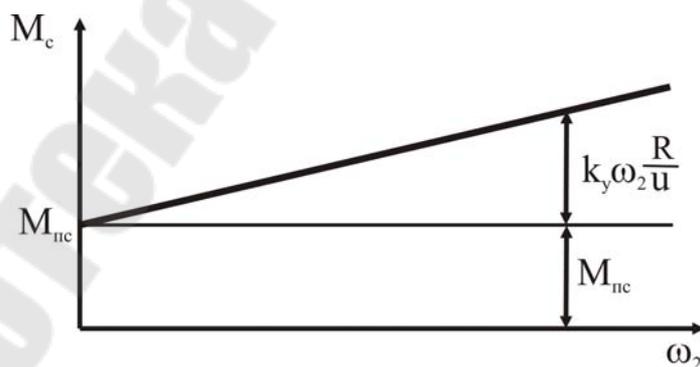


Рис.5.7. Зависимость момента сопротивления МТА от частоты вращения первичного вала коробки передач.

### 2.3 Математическая модель разгона мобильных МТА.

Процесс разгона мобильных МТА делится на два этапа:

1) - включение муфты сцепления и выравнивание угловых скоростей ведущего и ведомого дисков (при этом  $\omega_1 > \omega_2$  см. рис. 5.4, 5.9).

2) - стабилизация частоты вращения двигателя при полностью включенной муфте сцепления ( $\omega_1 = \omega_2$ ).

На первом этапе разгона (рис.5.4, 5.9) момент трения муфты сцепления  $M_\phi$  является тормозящим для двигателя (т.к. при включении сцепления  $M_\phi > M_\delta$ ) и угловое ускорение коленчатого вала двигателя описывается следующим дифференциальным уравнением (ДУ):

$$\frac{d\omega_1}{dt} = \frac{M_\delta - M_\phi}{I_1} \quad (5.6)$$

Значение этого ускорения отрицательно, поэтому частота вращения двигателя на первом этапе уменьшается, что сопровождается увеличением крутящего момента  $M_\delta$  (см. рис.5.5, 5.9).

В то же время для агрегата момент трения муфты является движущим ( $M_\phi > M_c$ ), поэтому наблюдается увеличение частоты вращения первичного вала коробки передач с ускорением, описываемым ДУ:

$$\frac{d\omega_2}{dt} = \frac{M_\phi - M_c}{I_2} \quad (5.7)$$

Однако, от начала разгона до момента, когда  $M_\phi$  превысит  $M_c$ , движение описывается только уравнением (5.6) и угловая скорость  $\omega_2 = 0$ . Полученная система ДУ (5.6 - 5.7) представляет собой математическую модель разгона мобильных МТА на первом этапе. Решается эта система методом Рунге-Кутты с начальными условиями  $t = 0$ ,  $\omega_1 = \omega_{xx}$  и  $\omega_2 = 0$ . Решением системы являются зависимости  $\omega_1 = f(t)$  и  $\omega_2 = f(t)$ .

На втором этапе разгона муфта сцепления включена

полностью, поэтому в расчетной ДС первого этапа (рис.5.4) можно объединить моменты инерции  $I_1$  и  $I_2$ :

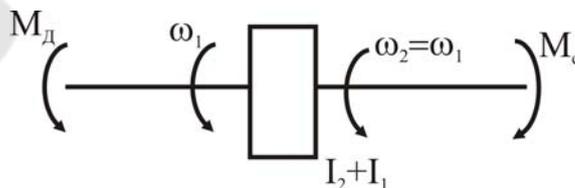


Рис.5.8. РДС второго этапа разгона мобильных МТА.

Угловое ускорение коленчатого вала двигателя и первичного вала коробки передач при этом описывается следующим ДУ:

$$\frac{d\varpi_1}{dt} = \frac{M_\delta - M_c}{I_1 + I_2}, \quad (5.8)$$

которое представляет собой математическую модель разгона мобильных МТА на втором этапе.

В начале второго этапа может быть  $M_\delta > M_c$  (ускорение положительно и двигатель начинает увеличивать частоту вращения, что сопровождается уменьшением  $M_\delta$  - см. рис.5.5, 5.9) или  $M_\delta < M_c$  (ускорение отрицательно и у двигателя продолжает уменьшаться частота вращения, в результате чего он может заглохнуть).

Условием завершения разгона является выравнивание крутящих моментов  $M_\delta = M_c$ , в результате чего ускорение становится равным нулю. Диаграмма разгона мобильного агрегата представлена на рис.5.9.

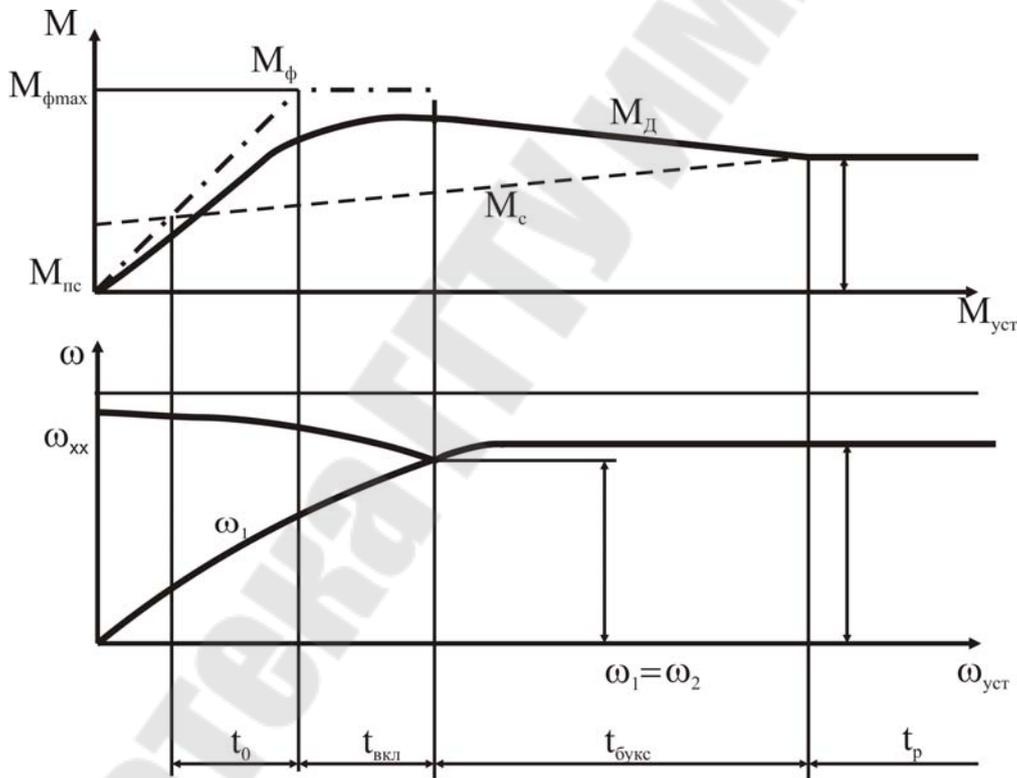


Рис.5.9. Здесь  $t_0$  — время начала вращения ведомого диска МС (когда момент трения МС начинает превышать момент сопротивления —  $M_\phi > M_c$ );  $t_{вкл}$  — время включения МС ( $M_\phi$  достигает максимума);  $t_{букс}$  — время окончания буксования МС (когда  $\omega_2 > \omega_1$ );  $t_p$  — время окончания разгона (когда  $M_d - M_c = 0$ , после этого  $M_{уст} = const$ ;  $\omega_{уст} = const$ ).

### 3. Задание и порядок выполнения работы

1. Познакомьтесь с методикой формирования РДС моделей.

2. Ответив на вопросы преподавателя, получите допуск к лабораторной работе.

3. Просмотрите файл лабораторной работы на персональном компьютере E: users / Matmod / MM\_lab\_5.

4. Согласуйте с преподавателем исходные данные по задаче.

5. Выбрать исходные данные для моделирования разгона мобильного МТА на базе трактора Т-150К (параметры трактора принимаются по табл.1-3 одинаковыми для всех вариантов, а параметры сопротивления по табл.4 согласно своего варианта).

6. Задаваясь временем включения сцепления 3.0с, промоделировать разгон трактора на передачах с 1-й до той, на которой двигатель глохнет. По результатам моделирования показать в табличном и в графическом виде *зависимость от номера передачи* следующих величин:

- момента инерции МТА;
- времени буксования сцепления;
- времени разгона МТА;
- оборотов двигателя в конце буксования;
- установившихся оборотов двигателя.

7. Для передачи при трогании на которой, двигатель глохнет, путем повторного моделирования подобрать такое время более плавного включения муфты сцепления ( $t_{вкл} > 3$  с), которое все же сможет обеспечить разгон трактора. По полученным результатам представить в табличном и графическом виде разгонные характеристики МТА, показывающие *изменение во времени* следующих величин:

- оборотов двигателя;
- оборотов первичного вала коробки передач;
- крутящего момента двигателя;
- момента трения муфты сцепления;
- момента сопротивления МТА.

В таблицу необходимо включить 5-10 расчетных точек на этапе буксования муфты и столько же - на втором этапе разгона.

## 6. Задания для выполнения работы.

Таблица 1 Регуляторная характеристика двигателя СМД-62

Обороты двиг. (об/мин)				Крутящие моменты (Нм)		
$W_{xx}$	$W_n$	$W_o$	$W_{min}$	$M_n$	$M_{max}$	$M_{min}$
2200	2100	1350	950	540	750	65

Таблица 2 Параметры трактора Т-150К

Мом.инерции мах.	Масса тракт.	Радиус колес	МАХ мом.трени.сцепл.
$I_m = 3.0$ (кгм <sup>2</sup> )	$M_{тр} = 8000$ (кг)	$R = 0.64$ (м)	$M_{фmax} = 1500$ (Нм)

Таблица 3. Передаточные числа трансмиссии трактора Т-150К

Передача	1	2	3	4	5	6	7	8
и	59.4	50.3	44.3	37.9	27.7	23.4	20.6	17.6

Таблица 4. Параметры сопротивления МТА

N	Мсхм	Мпс	Кv	N	Мсхм	Мпс	Кv	N	Мсхм	Мпс	Кv
вар.	кг	Нм		вар.	кг	Нм		вар.	кг	Нм	
1	2000	500	1.0	11	2000	450	2.0	21	2000	400	3.0
2	2500	450	1.5	12	2500	400	2.5	22	2500	350	3.5
3	3000	400	2.0	13	3000	350	3.0	23	3000	300	4.0
N	Мсхм	Мпс	Кv	N	Мсхм	Мпс	Кv	N	Мсхм	Мпс	Кv
вар.	кг	Нм		вар.	кг	Нм		вар.	кг	Нм	
4	3500	350	2.5	14	3500	300	3.5	24	3500	250	4.5
5	4000	300	3.0	15	4000	250	4.0	25	4000	200	5.0
6	4500	250	3.5	16	4500	200	4.5	26	4500	150	5.5
7	5000	200	4.0	17	5000	150	5.0	27	5000	100	6.0
8	5500	150	4.5	18	5500	100	5.5	28	5500	60	6.5
9	6000	100	5.0	19	6000	50	6.0	29	6000	30	7.0
10	6500	50	5.5	20	6500	25	6.5	30	6500	10	7.5

### Пример выполнения работы.

1. Задание для выполнения: Смоделировать разгон трактора Т-150К в агрегате с прицепной сельскохозяйственной машиной, имеющей следующие параметры: масса  $m_{схм} = 7000$  кг, пусковой момент сопротивления  $M_{nc} = 100$  Нм, коэффициент влияния скорости  $k_v = 5.0$ .

2. Используя ФММ выполните моделирование разгона трактора с временем включения муфты сцепления  $t_{вкл} = 3$  с на всех передачах, начиная с 1-ой. В результате моделирования определяем, что при трогании на пятой передаче двигатель глохнет. Признаком этого является снижение скорости  $\omega_1$  до нуля. Полученные результаты представляем в таблице 5:

Таблица 5.

N пер.	Приведен. мом.инер $\text{гм}^2$	Время, с		Частота вращения, об/мин	
		буксования	разгона	в конце букс.	установивш.
1	2.1	0.74	2.07	1780	2179
2	2.9	0.85	2.54	1648	2179
3	3.8	0.95	3.03	1520	2178
4	5.1	1.07	3.07	1362	2178
5	9.6	1.26	глохнет	955	глохнет

Постройте графики полученных зависимостей:

- приведенного момента инерции;
- времени буксования муфты сцепления и времени разгона;
- скорости вращения в конце буксования и установившейся скорости; от номера передачи (см. рис.5.10):

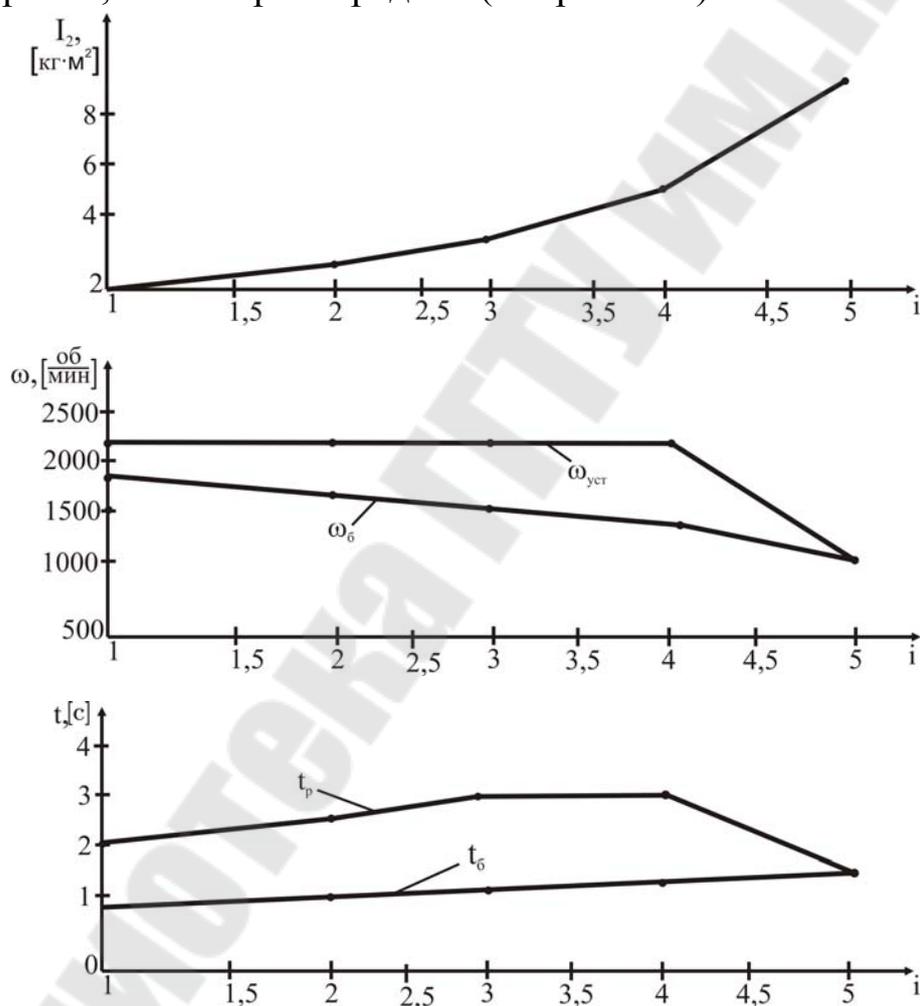


Рис.5.10

Из полученных результатов видно, что с увеличением номера передачи приведенный момент инерции  $I_2$  увеличивается, время буксо-

вания муфты сцепления и полное время разгона увеличиваются, обороты двигателя в конце буксования уменьшаются, а установившиеся обороты двигателя остаются практически постоянными (в отчете по лабораторной работе пояснить, почему происходит именно так).

3. Увеличивая время включения муфты сцепления на 5-й передаче, устанавливаем, что разгон становится возможным при времени включения 4с. Разгонные характеристики, полученные в результате моделирования, представьте в графическом виде.

В отчете по лабораторной работе поясните все характерные участки на полученных графиках.

#### 4. Вопросы для контроля готовности студентов к лабораторному занятию

1. Изобразите расчетную динамическую схему МТА.
2. Выполните приведение всех моментов и жесткостей к первичному валу коробки передач.
3. Запишите выражения приближенных значений приведенных моментов инерции.
4. Поясните параметры регуляторной характеристики и тип ее аппроксимации.
5. Поясните формулу включения муфты сцепления.
6. Поясните формулу момента сопротивления МТА.
7. Запишите уравнения движения для всех этапов разгона мобильных МТА.
8. Почему при разных передачах установившиеся обороты двигателя остаются практически постоянными?
9. Поясните диаграмму разгона мобильных МТА.
10. Поясните работу схемы на рис.5.10 и ее отдельных элементов.
11. Выполните модификацию схемы рис.5.10 и её параметров.

## 9. Лабораторная работа №6

Формирование математической модели транспортного переезда мобильного с/х агрегата.

1. Цель работы: Определение характеристик колебаний корпуса энергосредства, индуцированных неровностями, имеющими случайный характер.

### 2. Краткие теоретические сведения

Мобильный сельскохозяйственный агрегат (МСХА), состоящий из универсального энергетического средства и, агрегатируемой с ним рабочей машины, регулярно работает в режиме транспортного переезда.

Основным источником низкочастотных колебаний МСХА в этом случае являются неровности опорной поверхности - с/х фона, имеющие случайный характер. При этом профиль поля или грунтовой дороги определяется микропрофилем поверхности, индуцирующим колебания колесных движителей. Вибрация колес передается на корпус УЭС и другие элементы МСХА, что нарушает агротехнические требования, предъявляемые к технологическому процессу и отрицательно влияет, как на водителя, так и на надежность работы узлов и агрегатов МСХА.

Микропрофиль считается стационарным случайным процессом, основными характеристиками которого являются: корреляционная функция, спектральная плотность и максимальная высота неровностей. Корреляционная функция -  $R_q(\tau)$  характеризует структуру случайной функции неровности и для неё, чаще всего, выбираются аппроксимирующие выражения вида:

$$R_q(\tau) = e^{-\alpha_2(\tau)} \cdot \cos \beta\tau, \quad (6.1)$$

$$R_h(\tau) = A_1 \cdot e^{-\alpha_1(\tau)} + A_2 \cdot e^{-\alpha_2(\tau)} \cdot \cos \beta\tau \quad (6.2)$$

где  $\alpha_1, \alpha_2$  и  $\beta$  - коэффициенты, характеризующие соответственно затухание и периодичность функции;  $A_1, A_2$  - коэффициенты, характеризующие доли экспоненциальной и периодической составляющих соответственно.

Числовые значения  $\alpha$  и  $\beta$  зависят от типа с/х фона и скорости движения МСХА, поэтому для произвольной скорости определяются по их значениям, полученным из таблицы с/х фонов составленной для скорости  $V = 1 \text{ м/с}$ , используя следующие соотношения:

$$\alpha_{V_i} = \alpha_{V=1} \cdot V_i \quad \beta_{V_i} = \beta_{V=1} \cdot V_i \quad (6.3)$$

Таблица с/х фонов

Вид с/х фона	$\sigma_q$ , [мм]	$A_1$	$A_2$	$\alpha_1$ , [1/с]	$\alpha_2$ , [1/с]	$\beta$ , [1/с]
Стерня пше- ницы	24	-	1.0	-	0.42	0.29
Стерня куку- рузы	32.2	0.7	0.3	0.25	0.60	1.57
Грунтовая дорога	21.2	-	1.0	-	0.58	0.63
Пропашное поле	21.5	-	1.0	-	0.57	0.59
Залежь	51.8	1.0	-	1.3	-	-

Применяя приведенные выражения (6.1), (6.2), (6.3) к типичным для УЭС с/х фонам (различные виды стерни, грунтовая дорог, залежь) и условиям работы (средние скорости и время работы), был рассчитан среднестатистический фон, корреляционная функция которого с достаточной для инженерных расчетов точностью характеризует внешние воздействия со стороны опорной поверхности на МСХА, состоящий из УЭС и навесного уборочного комбайна. В результате были определены нормированные корреляционные функции  $R2(\tau)$ -  $R5(\tau)$  для микропрофиля опорной поверхности, соответствующие движению МСХА со скоростью от 2 до 5 м/с, которые представлены на рисунке 6.1.

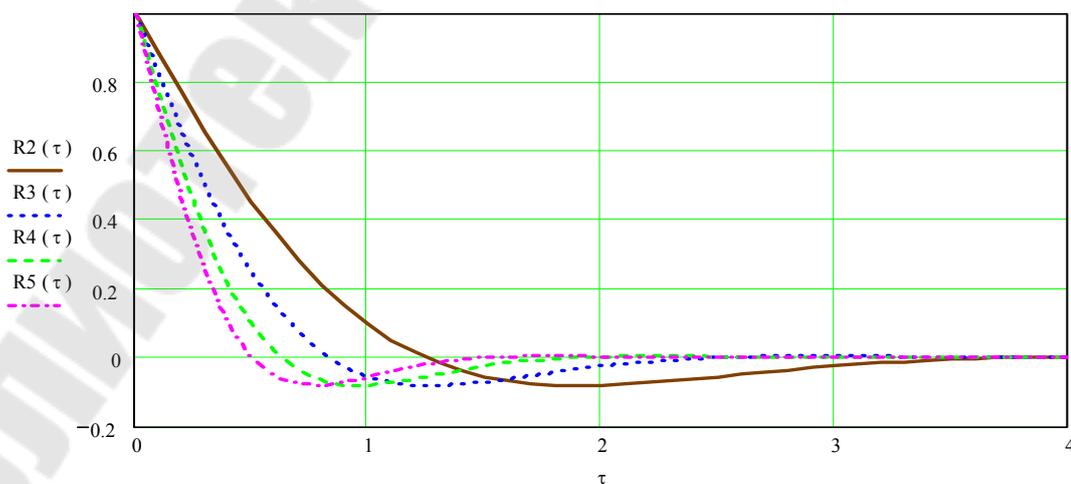


Рис. 6.1. Корреляционные функции неровностей среднестатистического агрофона для УЭС и навесного уборочного комбайна.

Спектральная плотность это наиболее полная характеристика возмущений, действующий на МСХА со стороны опорной поверхности, позволяет определить и другие числовые статистические характеристики. Применяя преобразование Фурье, связывающее, например, корреляционную функцию (6.1) и соответствующую ей спектральную плотность, получим выражение:

$$S_q(\omega) = \sigma_q^2 \cdot \frac{2 \cdot \alpha \cdot (\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2)}{[\omega^2 - (\alpha^2 + \beta^2)]^2 + 4 \cdot \alpha^2 \cdot \omega^2}, \quad (6.4)$$

где  $\sigma_q$  - среднеквадратичная высота неровностей поля.

На рисунке 6.2 приведена спектральная плотность микропрофиля опорной поверхности для скорости движения МСХА равной 2 м/с.

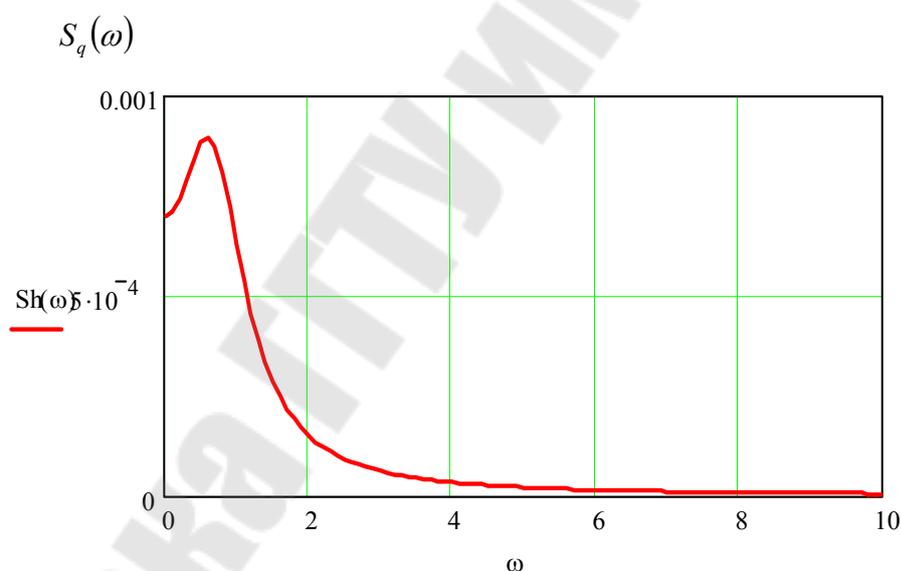


Рис. 6. 2. Спектральная плотность микропрофиля опорной поверхности

Следует отметить, что спектральная плотность ускорения - второй производной функции неровности, связана со спектральной плотностью высоты неровности выражением:

$$S_{\ddot{q}}(\omega) = \omega^4 \cdot S_q(\omega) \quad (6.5)$$

Распределение ординат микропрофиля подчиняется нормальному закону, из чего следует известная зависимость (“правило трех сигма”) для максимальной высоты неровностей:

$$q_{\max} \approx 3 \cdot \sigma_q \quad (6.6)$$

Представленная на рисунке 6.3 динамическая модель включает массу МСХА ( $m$ ), его момент инерции ( $J$ ), а также упругие ( $c_1, c_2$ ) и демпфирующие элементы  $k_1, k_2$ , воспринимающие и смягчающие толчки со стороны с/х фона ( $q_1, q_2$ ).

Для вывода ДУ колебаний корпуса энергосредства (остова трактора) используем уравнение Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\delta T}{\delta \dot{q}_i} \right) - \frac{\delta T}{\delta q_i} + \frac{\delta E_p}{\delta q_i} + \frac{\delta \Phi}{\delta q_i} = \Sigma Q_i \quad (6.7)$$

где  $T$  – кинетическая энергия системы;  $E_p$  – потенциальная энергия;  $\Phi$  – диссипативная функция, характеризующая рассеяние энергии под действием сил сопротивления;  $q_i$  – обобщенная координата;  $Q_i$  – обобщенная сила.

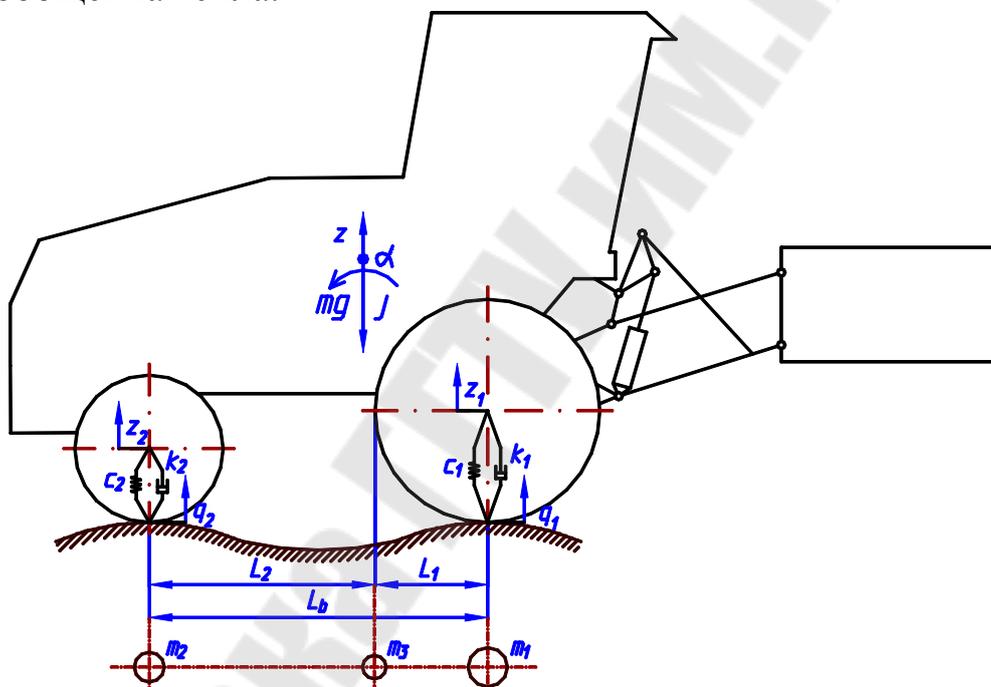


Рис. 6.3. Схема динамической модели МСХА в режиме транспортного переезда

В процессе формирования математической модели (ММ) были приняты следующие ограничения: возникающие в шинах УЭС упругие и диссипативные силы пропорциональны изменению характеристик неровности ( $q, \dot{q}$ ); крутильные колебания трансмиссии и сидения водителя не влияют на колебания рамы; влияние навесной машины учитывается изменением положения центра тяжести МСХА; в движении колеса сохраняют точечный, но постоянный контакт с опорной поверхностью.

В результате эквивалентная динамической схеме функциональная ММ описывается системой линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\ddot{z} + 2 \cdot h \cdot \dot{z} + \omega_c^2 \cdot z = 2 \cdot h \cdot \dot{q} + \omega_c^2 \cdot q, \quad (6.8)$$

где  $z$  - вертикальное перемещение корпуса;  $q, \dot{q}$  - характеристики неровности;  $\omega_c$  - частота собственных колебаний корпуса;  $h$  - коэффициент демпфирования.

В общем случае колебания задней и передней частей корпуса УЭС при  $\varepsilon \neq 1$  ( $\varepsilon$  - коэффициент распределения подрессоренных масс) связаны между собой, поэтому колебания передней и задней частей корпуса (шасси) исследуются совместно.

В этом случае, преобразованные по Лапласу при нулевых начальных условиях уравнения для передней и задней частей корпуса УЭС принимают вид:

$$(S^2 + 2 \cdot h_1 \cdot S + \omega_{c1}^2) \cdot Z_1(S) + \chi_1 \cdot S^2 \cdot Z_2(S) = (2 \cdot h_1 \cdot S + \omega_{c1}^2) \cdot Q(S) \quad (6.9)$$

$$(S^2 + 2 \cdot h_2 \cdot S + \omega_{c2}^2) \cdot Z_2(S) + \chi_2 \cdot S^2 \cdot Z_1(S) = (2 \cdot h_2 \cdot S + \omega_{c2}^2) \cdot Q(S) \cdot e^{-t_0 \cdot S}, \quad (6.10)$$

где  $t_0$  - время переезда колесами переднего моста расстояния равного базе УЭС.

Из приведенных выражений определяются передаточные функции -  $W_{z1}(S)$  и  $W_{z2}(S)$  и соответствующие амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) -  $|W_{z1}(j\omega)|$ ,  $|W_{z2}(j\omega)|$  передней и задней частей корпуса УЭС. Посредством АЧХ связываются спектральные плотности характеристик неровностей с/х фона и параметров вибрации корпуса УЭС:

$$S_z(\omega) = |W_z(j\omega)|^2 \cdot S_q(\omega) \quad (6.11)$$

$$S_{\ddot{z}}(\omega) = |W_{\ddot{z}}(j\omega)|^2 \cdot S_{\ddot{q}}(\omega), \quad (6.12)$$

где  $S_q(\omega), S_{\ddot{q}}(\omega)$  - спектральные плотности характеристик неровностей.

На рисунке 6.4 представлена спектральная плотность амплитуд вертикальных перемещений центра тяжести МСХА, имеющая выраженный максимум до 11.4 мм на частоте 8.9 рад/с.

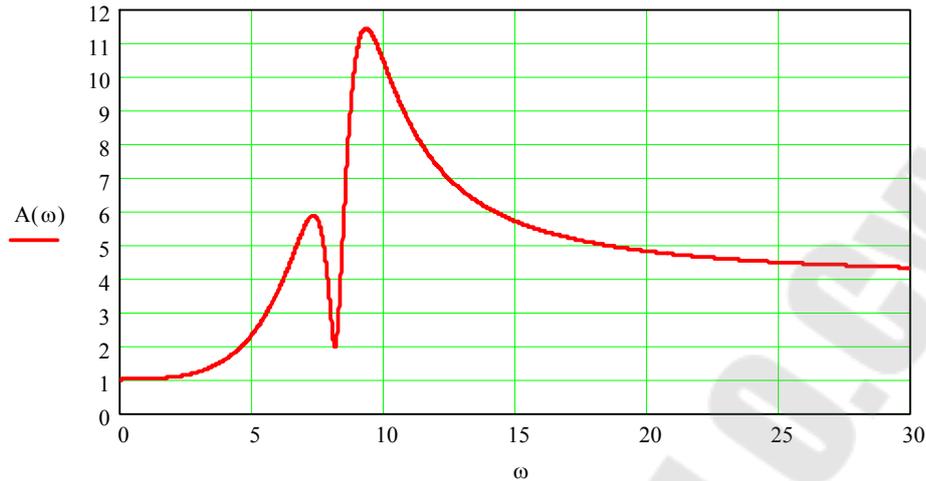


Рис. 6.4 Спектральная плотность амплитуд вертикальных перемещений МСХА.

Дисперсия вертикальных перемещений подрессоренной массы определяется по известному выражению:

$$\sigma_z^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_z(\omega) d\omega \quad (6.13)$$

### 3. Задание и порядок выполнения работы

1. Познакомьтесь с методикой формирования модели транс портного переезда МСХА.

2. Ответив на вопросы преподавателя, получите допуск к лабораторной работе.

3. Просмотрите файл лабораторной работы на персональном компьютере E: users / Matmod / ММ\_lab\_6.

4. Согласуйте с преподавателем исходные данные по задаче.

5. Определите структуру системы уравнений.

6. Рассчитайте постоянные коэффициенты в ДУ, начальные условия и параметры внешних воздействий.

7. Найдите численное решение системы ДУ при помощи операторов MathCAD rkfixed, rkadapt или аппарата передаточных функций.

8. Приведите графическую характеристику амплитуд вертикальных перемещений центра тяжести МСХА

### 4. Вопросы для контроля готовности студентов к лабораторному занятию

1. Как математически описываются неровности микропрофиля?

2. Колебания каких узлов и агрегатов МСХА не учитываются в ФММ транспортного переезда?

3. С какой целью принимается предположение о малых угловых перемещениях корпуса энергосредства (остова трактора)?

4. Как связаны между собой корреляционная функция и спектральная плотность?

5. Какие изменения произойдут в системе нелинейных дифференциальных уравнений - ФММ транспортного переезда при изменении распределения массы по опорам энергосредства?

6. Как связаны между собой спектральная плотность неровности и первая производная от функции неровности?

7. Как по таблице сельскохозяйственных фонов определить максимальную высоту неровности опорной поверхности?

8. Назовите входные и выходные параметры ФММ транспортного переезда.

9. На каком основании движение корпуса энергосредства, изначально обладающего 6 степенями свободы, описывается двумя координатами?

## ЛИТЕРАТУРА

1. Артоболевский И.И. Теория механизмов и машин: учебник для вузов - М.: Наука, главная редакция физико-математической литературы, 1988. -640с.
2. Барский И.Б., Анилович В.Я., Кутьков Г.М. Динамика трактора. М., “Машиностроение”, 1973, 280с.
3. Гуськов В.В. и др. Тракторы, часть 2, Теория: учебное пособие для вузов. - Мн.: Высшая школа, 1977. -384с.
4. Тракторы. Проектирование, конструирование и расчет, под ред. И.П. Ксеновича. М.: Машиностроение, 1992. 544с.
5. Попов В.Б. Математическое моделирование динамики подъема навесной машины. Материалы международной научно-технической конференции «Современные проблемы машиноведения», Т II, сс. 80-83, Гомель 1998
6. Попов В.Б. Математическое моделирование мобильного сельскохозяйственного агрегата в режиме транспортного переезда //Вестник ГГТУ им. П.О. Сухого 2005, №3 сс. 13-18.
7. Попов В.Б. Функциональная математическая модель подъема рабочей секции косилки-плющилки ротационной КПр- 6. // Агронарама” 2006 №1, сс. 23-27.
8. Попов В.Б. Параметрическая оптимизация механизма подъема секции косилки-плющилки ротационной КПр-6.0 Современные проблемы машиноведения: Тезисы докладов МНТК.- ГГТУ им. П.О. Сухого, сс. 70-71, Гомель 2002.
9. Попов В.Б. Аналитические выражения кинематических передаточных функций механизмов навески энергоносителей // Вестник ГГТУ им. П.О.Сухого 2000, №2, сс 25-29.
10. Попов В.Б. Математическое моделирование механизма вывешивания косилки-плющилки прицепной КПП-4,2. // Вестник ГГТУ им. П.О. Сухого 2001, №3-4, сс17-22.
11. Тарасик В.П. Математическое моделирование технических систем: Учебник для вузов. - Мн.: Дизайн про, 1997. - 640с.
12. Чудаков Д.А. Основы теории и расчета трактора и автомобиля: учебное пособие. - М.: Колос, 1975.-384с.

**Попов Виктор Борисович**

## **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ**

**Лабораторный практикум  
по одноименному курсу  
для студентов специальности 1-36 12 01  
«Проектирование и производство  
сельскохозяйственной техники»  
дневной и заочной форм обучения**

Подписано в печать 11.06.09.

Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».

Ризография. Усл. печ. л. 2,56. Уч.-изд. л. 2,43.

Изд. № 149.

E-mail: [ic@gstu.gomel.by](mailto:ic@gstu.gomel.by)

<http://www.gstu.gomel.by>

Отпечатано на цифровом дуплекаторе  
с макета оригинала авторского для внутреннего использования.

Учреждение образования «Гомельский государственный  
технический университет имени П. О. Сухого».

246746, г. Гомель, пр. Октября, 48.