Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Техническая механика»

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

КУРС ЛЕКЦИЙ
по одноименной дисциплине для студентов инженерно-технических специальностей заочной формы обучения
Часть 3/2 – Динамика системы

Гомель 2014

УДК 531(075.8)
ББК 22.21я73
Т33

Рекомендовано научно-методическим советом машиностроительного факультета ГГТУ им. П. О. Сухого (*протокол № 1 от 08.09.2014 г.*)

Составитель: С. Ф. Андреев

Рецензент: канд. техн. наук, доц. каф. «Гидропневмоавтоматика» ГГТУ им. П. О. Сухого
В.В. Пинчук

Т33 **Теоретическая** механика : курс лекций по одноим. дисциплине для студентов инженер.-техн. специальностей заоч. формы обучения. Ч. 3/2 – Динамика системы / сост. С. Ф. Андреев. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2014. – 89 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: http://library.gstu.by/StartEK/. – Загл. с титул. экрана.

Рассмотрены основные понятия о свойствах механических систем, принципах и методах изучения движения и взаимодействия тел, находящихся в различных состояниях. Даны многочисленные примеры исследования движения механических систем.

Для студентов инженерно-технических специальностей заочной формы обучения.

УДК 531(075.8)
ББК 22.21я73

1. МЕХАНИЧЕСКАЯ СИСТЕМА И ЕЁ ХАРАКТЕРИСТИКИ

1.1. Механическая система. Основные определения

Динамика системы точек занимает в механике центральное место. Главной задачей динамики систем является изучение общих свойств движения механических систем, а также методов составления и исследования уравнений их движения.

Материальная точка является одной из основных моделей материальных тел в динамике. Однако во многих случаях ее недостаточно, поэтому наряду с материальной точкой в динамике рассматривают более общую модель — механическую систему.

Механическая система (или материальная система, или система материальных точек) – это такое множество материальных точек, выделенных по какому-либо признаку и объединяемых общими законами взаимодействия (положение или движение каждой из точек или тела зависит от положения и движения всех остальных).

То есть точки системы обязательно должны взаимодействовать друг с другом. Горсть песчинок, рассыпанных по ветру, нельзя назвать системой материальных точек, так как каждая песчинка движется независимо от других.

В динамике систем рассматриваются также механизмы, то есть группы взаимодействующих материальных тел, называемых звеньями. В зависимости от характера поставленной задачи за механическую систему можно принять как весь механизм в целом, так и некоторую группу его звеньев.

Число точек или тел, входящих в систему, будем обозначать буквой «N». Выбор механической системы произволен, он зависит от исследователя, изучающего движение и взаимодействие определенного числа N материальных точек (тел). Точки, не вошедшие в систему, взаимодействуют с выбранной системой как внешние. Точки, вошедшие в систему, являются внутренними точками данной системы.

Механические системы могут быть свободными и несвободными.

Несвободная механическая система - механическая система, в которой вследствие каких-либо ограничений точки или тела, её составляющие, не могут занять произвольного положения в пространстве и иметь произвольные скорости. На каждую точку или тело такой системы наложены ограничения, которые называются связями. Связь налагает ограничения на изменение координат и скоростей точек. Аналитически эти ограничения записываются в виде уравнений или неравенств.

Свободная механическая система - механическая система, в которой каждая точка или тело может занять любое положение в пространстве и иметь любую скорость. Движение точек (тел) в такой системе не ограничивается никакими связями. Классическим примером свободной системы может служить солнечная планетная система. Между всеми планетами и Солнцем существуют внутренние для рассматриваемой системы силы ньютоновского тяготения, положения же и скорости самих планет и Солнца ничем не ограничены.

Кроме того, механические системы классифицируют как изменяемые и неизменяемые.

Неизменяемая механическая система – механическая система, в которой материальные точки имеют постоянные массы, а связи между точками постоянны. То есть в неизменяемой механической системе точки, образующие систему, не перемещаются относительно друг друга.

Абсолютно твердое тело- это неизменяемая система материальных точек, расстояния между которыми постоянны.

К изменяемой механической системе относится любое деформируемое тело, то есть тело, изменяющее свою форму.

Приведем примеры условного выбора механических систем.

1. Солнечная система, в которой планеты и Солнце рассматриваются как материальные точки.

2. Механическая модель идеального газа, в которой молекулы рассматриваются как материальные точки.

3. Материальное тело также представляется множеством материальных точек.

4. Механизм, состоящий из определенного числа взаимодействующих звеньев, где каждое звено является твердым телом.

5. Самая простая механическая система состоит из двух материальных точек (задача двух тел).

1.2 Классификация сил. Свойства внутренних сил.

Известно, что механическое взаимодействие материальных точек выражается силами. Все силы, действующие на точки механической системы, делят на *внешние и внутренние силы*.

Внешними называют силы, действующие на точки данной механической системы со стороны материальных тел, не входящих в данную механическую систему, в том числе внешних связей, наложенных на систему.

Действие внешних связей на точки системы выражается силами, называемыми реакциями связей. Таким образом, все силы, действующие на систему несвободных точек, можно разделить на задаваемые силы и реакции связей.

К внешним силам относятся *активные* (задаваемые) силы и *реакции внешних связей*.

Равнодействующие всех активных сил, приложенных к точке, условимся обозначать $\vec{F}_k^E$, реакции внешних связей – $\vec{R}_k^E$. Здесь k - индекс точки системы.

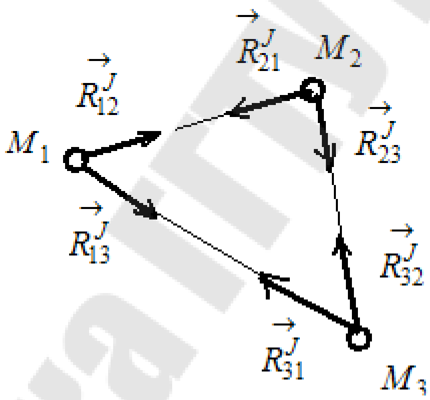

Рис 1.2.1

Внутренними силами называют силы взаимодействия между точками данной механической системы.

Равнодействующие внутренних сил, действующих на k-тую точку, условимся обозначать $\vec{R}_k^J$, такие силы называют внутренними силами (рис 1.2.1).

Одна и та же сила может быть как внешней, так и внутренней, в зависимости от того, какая механическая система рассматривается.

Необходимо отметить, что на основании третьего закона Ньютона о равенстве действия и противодействия, каждой внутренней силе соответствует другая внутренняя сила, равная ей по модулю и противоположная по направлению (Рис. 1.2):

$$\vec{R}_{12}^{J} = -\vec{R}_{21}^{J},\ \vec{R}_{13}^{J} = -\vec{R}_{31}^{J},\ \vec{R}_{23}^{J} = -\vec{R}_{32}^{J} \qquad (1.2.1)$$

Очевидно, что к каждой точке механической системы приложена равнодействующая сила, равная сумме сил $\vec{F}_{k}^{J} = \sum_{i=1}^{N-1} \vec{R}_{ki}$, где индекс «$i$» обозначает точки, взаимодействующие с точкой M_k.

Из условий (1.2.1) следуют *свойства внутренних сил*:

1. Главный вектор всех внутренних сил системы и суммы их проекций на координатные оси равны нулю:

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{k}^{J} = 0.$$

2. Главные моменты всех внутренних сил системы относительно любого центра и координатных осей равны нулю:

$$\vec{M}_O = \sum_{k=1}^{N} \vec{M}_O(\vec{F}_{k}^{J}) = 0.$$

Однако надо иметь в виду, что внутренние силы $\vec{F}_{k}^{J}$ не уравновешиваются, так как они приложены к различным точкам системы и могут вызывать перемещения этих точек относительно друг друга.

1.3. Дифференциальные уравнения движения системы материальных точек

Рассмотрим систему, состоящую из N материальных точек.

Применим принцип освобождаемости и заменим связи их реакциями. Возьмем k -ю точку системы с массой m_k , положение которой определяется радиус-вектором $\vec{r}_k$. Тогда каждую точку можно рассматривать как свободную, движущуюся под действием внешних и внутренних сил $\vec{F}_{k}^{E}$, $\vec{R}_{k}^{E}$ и $\vec{R}_{k}^{J}$.

Применим к каждой точке второй закон Ньютона в дифференциальной форме:

$$m_k \frac{d^2 \vec{r_k}}{dt^2} = \vec{F_k^E} + \vec{R_k^E} + \vec{R_k^J}, \quad k=1,2,..., N. \qquad (1.3.1.)$$

Будем считать, что приложенные к системе силы $\vec{F_k^E} = \vec{F_k^E}(\vec{r_k}, \vec{V_k}, t)$ и $\vec{R_k^E} = \vec{R_k^E}(\vec{r_k}, \vec{V_k}, t)$ известны и в общем случае являются непрерывными функциями координат и скоростей точек, а также времени t. Кроме того, будем считать заданными начальные условия движения:

$$t=0, \quad \vec{r_k} = \vec{r_k}(0), \quad \vec{V_k} = \vec{V_k}(0).$$

Система уравнений второго порядка (1.3.1) называется дифференциальными уравнениями движения механической системы в векторной форме. Эта система уравнений эквивалентна системе $3N$ скалярных дифференциальных уравнений второго порядка, полученных проектированием векторных уравнений на оси декартовой системы координат:

$$m_k \ddot{X}_k = F_{kX}^E + R_{kX}^E + R_{kX}^J, \qquad m_k \ddot{Y}_k = F_{kY}^E + R_{kY}^E + R_{kY}^J,$$

$$m_k \ddot{Z}_k = F_{kZ}^E + R_{kZ}^E + R_{kZ}^J. \qquad (1.3.2.)$$

Уравнения (1.3.2.) представляют собой дифференциальные уравнения движения материальных точек системы в координатной форме.

Уравнения (1.3.1) и (1.3.2) определяют математическую модель «система материальных точек». Для решения второй задачи динамики, то есть интегрирования уравнений, необходимо определить $6N$ неизвестных функций: $X_k(t)$, $Y_k(t)$, $Z_k(t)$, R_{kX}^J, R_{kY}^J, R_{kZ}^J.

Дифференциальные уравнения движения (1.3.1) и (1.3.2) практически мало используются. Их применение или неэффективно из-за высокого порядка связанной системы дифференциальных уравнений, или невозможно из-за отсутствия информации о внутренних силах. Сложность использования дифференциальных уравнений движения (1.3.1.) или (1.3.2.) состоит, прежде всего, в том, что, как правило, мы не знаем аналитического выражения внутренних сил $\vec{R_k^J}$.

Полное решение основной задачи динамики для системы будет состоять в том, чтобы, зная заданные силы и наложенные связи, проинтегрировать соответствующие дифференциальные уравнения и определить в результате закон движения каждой из точек системы и реакции связей. Сделать это аналитически удается лишь в отдельных случаях, когда число точек системы невелико, или же интегрируя уравнения численно с помощью ЭВМ.

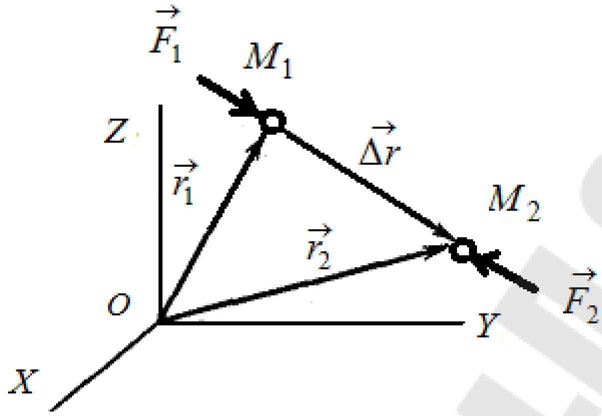

Рис.1.3.1

Практически реализовать такой путь исследования удается только для систем, состоящих из небольшого числа материальных точек, свободных или имеющих сравнительно простые связи.

В качестве примера на составление дифференциальных уравнений движения рассмотрим задачу двух тел (рис.1.3.1).

Пусть две свободные материальные точки M_1 и M_2 с массами m_1 и m_2 соответственно движутся под действием сил ньютоновского притяжения.

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = \gamma \frac{m_1 m_2}{(\Delta r)^2} \cdot \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta r}.$$

Здесь $\Delta r = \left|\vec{\Delta r}\right|$ - модуль вектора $\vec{\Delta r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ (рис.1.3.33),

γ - гравитационная постоянная,

$\dfrac{\vec{\Delta r}}{\Delta r}$ - единичный вектор, определяющий направление силы $\vec{F}_1$.

Дифференциальные уравнения (1.2.1) в этом случае будут иметь вид

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \gamma \frac{m_1 m_2}{(\Delta r)^2} \cdot \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|} \quad \text{и} \quad m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = \gamma \frac{m_1 m_2}{(\Delta r)^2} \cdot \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|}.$$

То есть мы имеем два уравнения с двумя неизвестными $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$.

1.4 Уравнения связей

Для решения задачи о движении механической системы часто возникает необходимость установить взаимодействие точек системы с внешней средой, ограничивающей свободу перемещения точек. Такие ограничения движения называются связями.

Математически связи могут быть выражены уравнениями или неравенствами, в которые входят время, координаты всех или части точек системы и их производные по времени различных порядков. Для одной точки уравнение связи в общем случае можно выразить в форме.

Уравнения линии или поверхности, по которым совершает движение точка, называются уравнениями связи. Если точка принуждена оставаться в некоторой области пространства, то связь аналитически задается в виде неравенств.

При движении точки по поверхности уравнением связи является уравнение этой поверхности $f(X,Y,Z) = 0$.

Рассмотрим, например, материальную точку $M(X,Y,Z)$, находящуюся на конце нерастяжимого стержня длины l, другой конец которого с помощью шарнира закреплен в неподвижной точке O (рис. 1.2.1). Точка движется по поверхности сферы радиусом l.

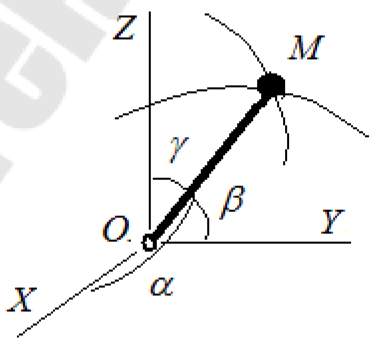

Рис.1.4.1

Уравнение сферы

$$(X - X_o)^2 + (Y - Y_o)^2 + (Z - Z_o)^2 - l^2 = 0 \qquad (1.4.1)$$

в рассмотренном выше примере является уравнением связи.

Если вместо стержня взять гибкую нерастяжимую нить, то точка получит возможность совершать движение не только по поверхности, но и внутри сферы радиуса, равного длине l нити.

Связь в этом случае аналитически задается неравенством

$$(X - X_o)^2 + (Y - Y_o)^2 + (Z - Z_o)^2 - l^2 \le 0.$$

Следовательно, если какая-либо поверхность, определяемая уравнением $f(X,Y,Z) = 0$, ограничивает область движения точки, то для уравнения связи следует взять одно из неравенств:

$$f(X,Y,Z) \le 0 \quad \text{или} \quad f(X,Y,Z) \ge 0.$$

Если материальная точка $M(X,Y,Z)$ движется по линии, то уравнения связи записываются как уравнения двух поверхностей, пересекающихся по этой линии:

$$f_1(X,Y,Z) = 0, \qquad f_2(X,Y,Z) = 0.$$

В случае движения точки по плоскости XOY уравнение связи можно записать в форме уравнения кривой $f(X,Y) = 0$.

Например, в кривошипно-шатунном механизме (рис. 1.4.2) точка M_1 кривошипа движется по окружности радиуса, равного длине кривошипа $r = OM_1$.

Уравнение связи получает вид

$$(X_1 - X_0)^2 + (Y_1 - Y_0)^2 - r^2 = 0. \tag{1.4.2}$$

Ползун M_2 движется вдоль оси OX, и для него уравнение связи имеет вид $Y_2 = 0$.

Неизменность расстояния между M_1 и M_2 выражается уравнением

$$(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2 - l^2 = 0, \tag{1.4.3}$$

где $l = M_1M_2$ - длина шатуна.

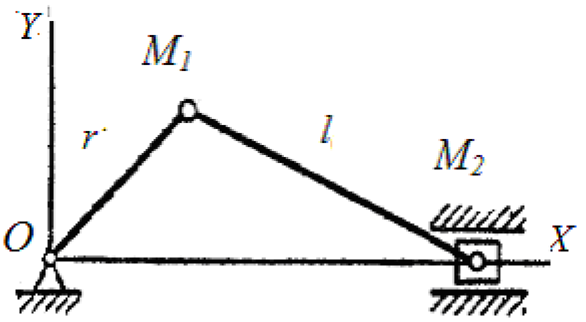

Рис.1.4.2

В приведенных примерах система двух точек $M(X_1,Y_1,Z_1)$ и $M_2(X_2,Y_2,Z_2)$ является неизменяемой системой. Условие связи такой системы состоит в неизменяемости расстояния l между точками.

В общем случае для системы N материальных точек уравнение неизменяемой связи записывается в виде

$$f(X_k, Y_k, Z_k) = 0. \quad k = 1,2,..., N. \qquad (1.4.4)$$

Запишем формулу (1.2.1) в виде неравенства

$$(X - X_o)^2 + (Y - Y_o)^2 + (Z - Z_o)^2 - l^2 \le 0 \ . \qquad (1.4.5)$$

Если уравнение связи имеет вид равенства-неравенства, то связь называется неудерживающей или односторонней.

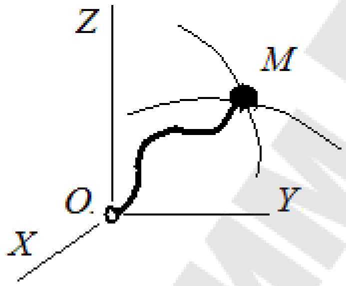

Рис.1.4.3

Из уравнения (1.4.5) видно, что расстояние между точками O и $M(X,Y,Z)$ может изменяться, то есть точка $M(X,Y,Z)$ может находиться как на поверхности сферы, так и внутри неё.

Например, точка $M(X,Y,Z)$ связана с точкой O гибкой связью, нитью (рис.1.2.3).

В общем виде неудерживающие связи определяются уравнениями:

$$f(X_k, Y_k, Z_k) \le 0 \qquad (1.4.6)$$

или

$$f(X_k, Y_k, Z_k) \ge 0. \qquad (1.4.7)$$

Связи, накладывающие ограничения на координаты точек системы, называются геометрическими или голономными. Механические системы с такими связями также называются *голономными*.

Связь, уравнение которой кроме координат содержит скорости точек, то есть, производные по времени от координат, называется кинематической или неголономной:

$$f(X_k, Y_k, Z_k, \dot{X}_k, \dot{Y}_k, \dot{Z}_k) = 0, \qquad f(X_k, Y_k, Z_k, \dot{X}_k, \dot{Y}_k, \dot{Z}_k) \ge 0;$$

$$f(X_k, Y_k, Z_k, \dot{X}_k, \dot{Y}_k, \dot{Z}_k) \le 0.$$

Примером неголономной связи может быть колесо радиуса *R,* которое катится без скольжения по прямолинейному рельсу (рис. 1.4.4).

Положение колеса в плоскости движения *OXY* определяется координатами $\underline{X_C}$, Y_C центра *C* колеса и углом поворота φ радиуса.

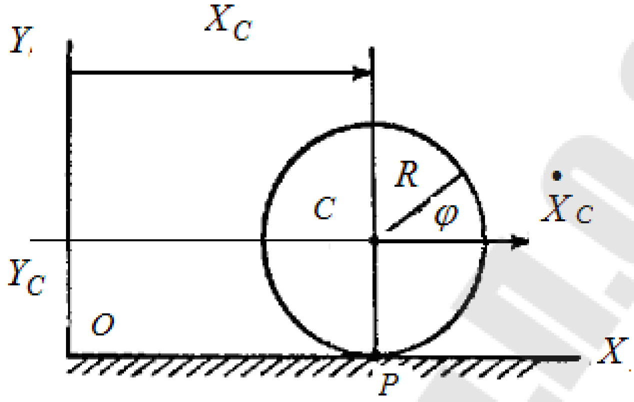

Рис.1.4.4.

Из рисунка видно, что координата точки *C* постоянна, то есть $Y_C = R$. Это уравнение является уравнением геометрической связи.

Кинематический характер такой определяется из того, что скорость точки касания тела с поверхностью должна равняться нулю, то есть $\dot{X}_C = R\dot{\varphi}$. Это уравнение интегрируется и приводит к соотношению между координатами, имеющему вид $X_C - R\varphi = const$. Таким образом, рассмотренная система является голономной.

В приведенных выше примерах при движении системы координаты и скорости являются функциями времени. В этих уравнениях отсутствует параметр *t.* Время в эти уравнения связи входит неявно через производные от координат. Такие связи называются склерономными или стационарными.

Предположим теперь, что длина нити, соединяющей две точки (рис.1.2.3) зависит от времени, как функция

$$l = l_0 - V \cdot t, \quad \text{где} \quad V = \sqrt{V_X^2 + V_Y^2 + V_Z^2}.$$

Тогда уравнение (1.2.5) примет вид

$$(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2 + (Z_1 - Z_2)^2 - (l(\dot{X}_k, \dot{Y}_k, \dot{Z}_k, t))^2 \leq 0. \quad (1.4.8)$$

Если, уравнение связи явно зависит от времени *t*, то такая связь называется реономной или нестационарной. В общем виде уравнения реономной связи имеют вид:

$$f(X_k, Y_k, Z_k, t) = 0; \quad f(X_k, Y_k, Z_k, t) \geq 0; \quad f(X_k, Y_k, Z_k, t) \leq 0;$$

$$f(X_k, Y_k, Z_k, \dot{X}_k, \dot{Y}_k, \dot{Z}_k, t) = 0; \qquad f(X_k, Y_k, Z_k, \dot{X}_k, \dot{Y}_k, \dot{Z}_k, t) \geq 0;$$
$$f(X_k, Y_k, Z_k, \dot{X}_k, \dot{Y}_k, \dot{Z}_k, t) \leq 0.$$

1.5 Число степеней свободы механической системы

Важным понятием при составлении математической модели механической системы является *число степеней свободы механической системы.* Для голономной материальной системы это число независимых параметров, полностью определяющих положение каждой точки системы. Это значит, что не все координаты точек системы независимы друг от друга.

Как известно, свободная материальная точка имеет три независимые координаты, и ее движение может описываться тремя уравнениями движения

$$X = X(t), \quad Y = Y(t), \quad Z = Z(t).$$

В этом случае материальная точка имеет три степени свободы. Взаимодействие такой точки со связями уменьшает число степеней свободы. Например, если точка движется по плоскости *XOY*, то эта плоскость является наложенной на точку связью, которая ограничивает движение точки вдоль оси *OZ*. В этом случае число степеней свободы равно двум, и мы будем иметь два независимых уравнения движения точки

$$X = X(t), \quad Y = Y(t).$$

Следовательно, если на механическую систему, состоящую из *N* материальных точек, наложено *J* связей, то число степеней свободы этой системы будет определяться по формуле $S = 3N - J$.

Например, на рис 1.4.4 изображен колесо, совершающее плоскопараллельное движение, кинематические уравнения движения которого, имеют, как известно, вид

$$X_C = X_C(t), \quad Y_C = Y_C(t), \quad \varphi = \varphi(t).$$

Так как колесо движется без скольжения, то, как известно из раздела «Кинематика» мгновенный центр колеса находится в точке *P* его касания с поверхностью, то составляется ещё одно уравнении связи, связывающее координаты X_C и φ: $X_C(t) = R \cdot \varphi(t)$.

Таким образом, движение изображенного на рис.1.4.4. колеса характеризуется всего лишь одной независимой координатой, X_C или φ, и имеет одну степень свободы, *S*=1.

2. МАССА И МОМЕНТ ИНЕРЦИИ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

2.1. Масса и центр масс механической системы.

Рассмотрим систему N материальных точек.

Часто встречающимся понятием в динамике является масса механической системы, под которой понимается сумма масс всех точек, входящих в систему, т. е. $m = m_1 + m_2 + ... + m_N$, или $m = \sum_{k=1}^{N} m_k$.

В дальнейшем условимся для краткости при суммировании по N точкам системы вместо знака $\sum_{k=1}^{N}$ применять знак $\sum$.

Поэтому можно записать $m = \sum m_k$. (2.1.1)

Каждая точка M_k механической системы имеет определенную массу m_k, а ее положение по отношению к инерциальной системе отсчета $OXYZ$ в каждый момент времени определяется радиус-вектором $\vec{r}_k$ или тремя координатами $X_k,\ Y_k,\ Z_k$. (рис.2.1.1.).

При рассмотрении движения механических систем, важное значение имеет точка, называемая центром масс.

За центр масс механической системы принимают геометрическую точку C, радиус-вектор которой равен

$$\vec{r}_C = \frac{m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2 + ... + m_N \cdot \vec{r}_N}{m_1 + m_2 + ... + m_N},$$

или,

$$\vec{r}_C = \frac{\sum m_k \vec{r}_k}{m} \quad . \qquad (2.1.2.)$$

Учитывая, что

$$\vec{r}_C = X_C \vec{i} + Y_C \vec{j} + Z_C \vec{k} \quad \text{и} \quad \vec{r}_k = X_k \vec{i} + Y_k \vec{j} + Z_k \vec{k},$$

проецируем формулу (1.2.2) на координатные оси, получим формулы, определяющие *координаты центра масс механической системы*:

$$X_c = \frac{\sum m_k X_k}{m}, \quad Y_C = \frac{\sum m_k Y_k}{m}, \quad Z_C = \frac{\sum m_k Z_k}{m}. \qquad (2.1.3.)$$

Здесь $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ - единичные векторы системы отсчета;

X_k, Y_k, Z_k – координаты конца радиус-вектора $\vec{r_k}$, k-й точки механической системы;

X_C, Y_C, Z_C – координаты конца радиус-вектора $\vec{r_C}$, центра масс механической системы.

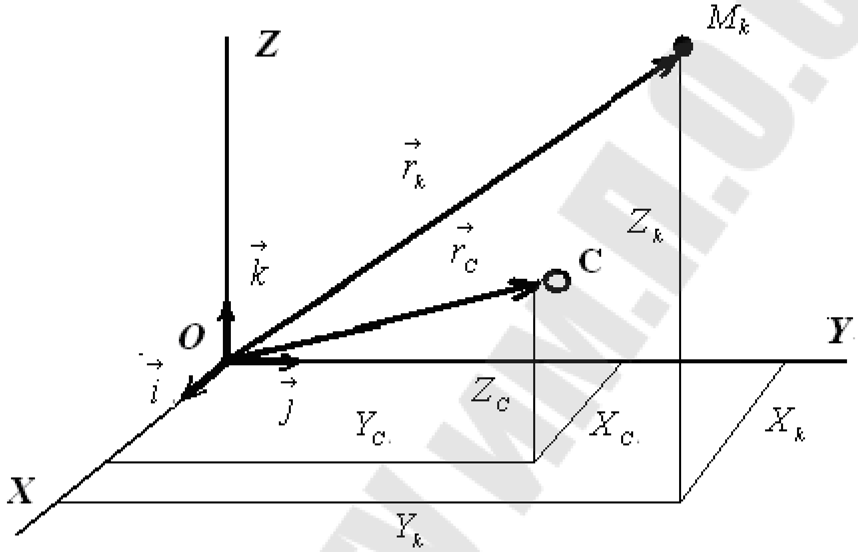

Рис.2.1.1.

Центр масс является не материальной точкой, а геометрической. Он может не совпадать ни g одной материальной точкой системы, как, например, в случае кольца.

Центр масс системы характеризует распределение масс в системе.

Из формул (2.1.2) и (2.1.3) видим, что положение центра масс механической системы зависит только от положения и массы каждой точки этой системы. Поэтому центр инерции также, называют центром масс.

Например, центр масс системы двух материальных точек (рис-2.1.2). $M_1(X_1,Y_1,Z_1)$ и $M_2(X_2,Y_2,Z_2)$, находится на прямой, соединяющей эти точки, а его координаты находятся по формулам

$$X_C = \frac{m_1 X_1 + m_2 X_2}{m_1 + m_2},\ \ Y_C = \frac{m_1 Y_1 + m_2 Y_2}{m_1 + m_2},\ \ Z_C = \frac{m_1 Z_1 + m_2 Z_2}{m_1 + m_2}.$$

Векторная величина $\vec{S_O} = \sum m_k \cdot \vec{r_k}$ называется статическим моментом массы относительно точки O.

Скалярные величины

$$S_{OXZ}=\sum m_k\cdot Y_k\,,\ \ S_{OYZ}=\sum m_k\cdot X_k\,,\ S_{OYX}=\sum m_k\cdot Z_k \qquad (2.1.4)$$

называются статическими моментами массы относительно координатных плоскостей.

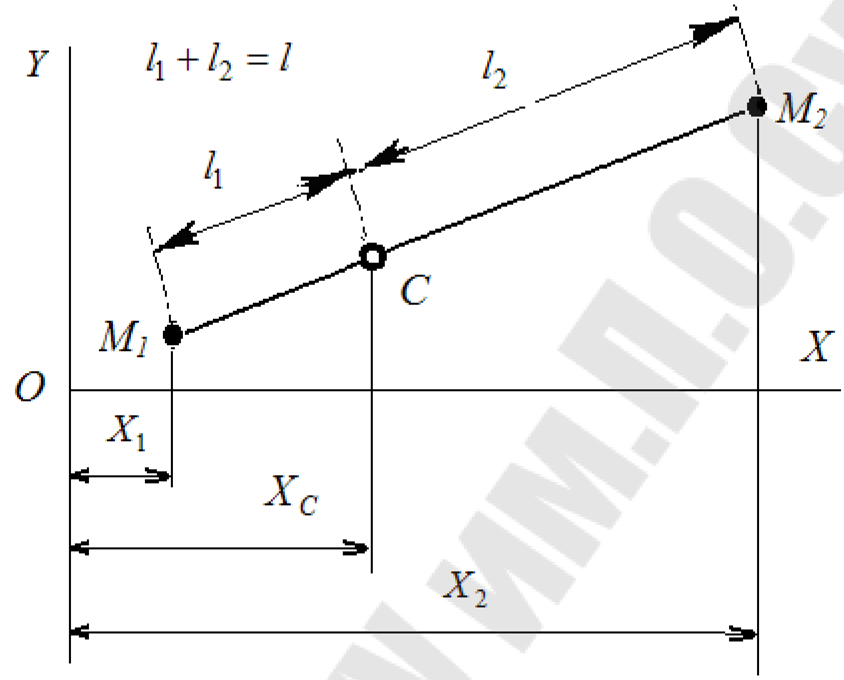

Рис.2.1.2

Радиус-вектор и координаты центра масс через статические моменты массы выражаются формулами

$$\vec{r}_C=\frac{\vec{S}_O}{m},\quad X_C=\frac{S_{OYZ}}{m},\ Y_C=\frac{S_{OXZ}}{m}\ ,\ Z_C=\frac{S_{OXY}}{m}.$$

Если механическая система движется (покоится) в однородном поле силы тяжести $(g=const)$, то центр масс ее совпадает с центром тяжести механической системы. Это легко доказывается умножением на g числителя и знаменателя в равенствах (2.1.2) и (2.1.3).

Понятие «*центр масс механической системы*» более широкое по сравнению с понятием «*центр тяжести*» и применимо для любой системы материальных точек независимо от того, находится ли она под действием каких-либо сил или нет.

Понятие «центр тяжести» применяется лишь для механической системы, находящейся в однородном поле сил тяжести.

Дифференцируя по времени равенства (2.1.2.)и (2.1.3.), определим для центра масс механической системы:

Векторы скорости $\vec{V}_C$ и ускорения $\vec{a}_C$ центра масс механической системы, их проекции на координатные оси, модули и направляющие косинусы:

- вектор скорости $$\vec{V}_C = \frac{d\vec{r}_C}{dt} = \frac{\sum m_k \vec{V}_k}{m}; \qquad (2.1.5)$$
- вектор ускорения $$\vec{a}_C = \frac{d^2\vec{r}_C}{dt^2} = \frac{\sum m_k \vec{a}_k}{m}; \qquad (2.1.6)$$
- проекции вектора скорости на координатные оси
$$\dot{X}_C = \frac{\sum m_k \dot{X}_k}{m}, \qquad \dot{Y}_C = \frac{\sum m_k \dot{Y}_k}{m}, \qquad \dot{Z}_C = \frac{\sum m_k \dot{Z}_k}{m};$$
- проекции вектора ускорения на координатные оси
$$\ddot{X}_C = \frac{\sum m_k \ddot{X}_k}{m}, \qquad \ddot{Y}_C = \frac{\sum m_k \ddot{Y}_k}{m}, \qquad \ddot{Z}_C = \frac{\sum m_k \ddot{Z}_k}{m};$$
- модуль скорости и направляющие косинусы
$$V_C = \sqrt{(\dot{X}_k)^2 + (\dot{Y}_k)^2 + (\dot{Z}_k)^2},$$
$$\cos(\vec{V}_C, X) = \frac{\dot{X}_C}{V_C}, \quad \cos(\vec{V}_C, Y) = \frac{\dot{Y}_C}{V_C}, \quad \cos(\vec{V}_C, Z) = \frac{\dot{Z}_C}{V_C}$$
- модуль ускорения и направляющие косинусы
$$a_C = \sqrt{(\ddot{X}_k)^2 + (\ddot{Y}_k)^2 + (\ddot{Z}_k)^2},$$
$$\cos(\vec{a}_C, X) = \frac{\ddot{X}_C}{a_C}, \quad \cos(\vec{a}_C, Y) = \frac{\ddot{Y}_C}{a_C}, \quad \cos(\vec{a}_C, Z) = \frac{\ddot{Z}_C}{a_C}$$

2.2. Геометрия масс. Момент инерции механической системы

Геометрия масс изучает распределение масс материальных точек системы по данному объему, который занимает эта система. То есть в геометрии масс исследуют суммы вида $\sum m_k \cdot f(X_k, Y_k, Z_k)$, где $f(X_k, Y_k, Z_k)$ - некоторая функция координат.

Например, в формулах координат центра масс в числителе записаны суммы, которые получаются в предположении, что $f(X_k, Y_k, Z_k)$ есть линейные функция координат:

$$\sum m_k \cdot X_k, \quad \sum m_k \cdot Y_k, \quad \sum m_k \cdot Z_k.$$

При исследовании движения механической системы в механике кроме массы системы используется понятие «момент инерции»: момент инерции тела относительно оси, момент инерции механической системы относительно центра, центробежный момент инерции тела и т. п.

Известно, что масса точки является ее мерой инертности.

Инертность твердого тела совершающего поступательное движение также характеризуется массой тела.

Момент инерции тела (системы) - это мера инерции механической системы, если система движется не поступательно. Момент инерции тела относительно входит в качестве коэффициента во все динамические характеристики тела, связанные с вращательным движением.

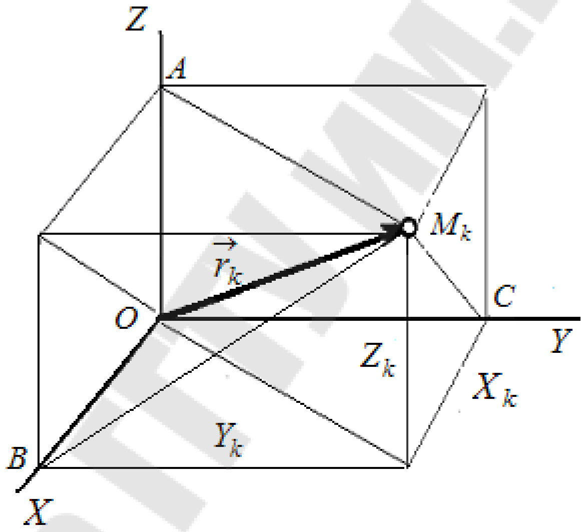

Рис.2.2.1.

Теория моментов инерции, созданная Гюйгенсом, относится к суммам, получающимся в предположении, что $f(X_k, Y_k, Z_k)$ является целой функцией второй степени относительно координат

Рассмотрим систему материальных точек M_k с массами m_k и координатами X_k, Y_k, Z_k (рис. 2.2.1).

Тогда модуль радиус-вектора произвольной точки M_k будет определен по формуле

$$r_k = \sqrt{X_k^2 + Y_k^2 + Z_k^2}\,.$$

Момент инерции механической системы относительно полюса O – величина, равная сумме произведений масс всех материальных точек, образующих механическую систему, на квадраты их расстояний r_k от данного полюса,

$$J_O = \sum m_k \cdot r_k^2 ,$$

или

$$J_O = \sum m_k \cdot (X_k^2 + Y_k^2 + Z_k^2) \qquad (2.2.1)$$

Аналогично, момент инерции относительно плоскости – величина, равная сумме произведений масс материальных точек, на квадраты их расстояний от данной плоскости. Следовательно, моменты инерции механической системы относительно координатных плоскостей будут равны

$$J_{XOY} = \sum m_k \cdot Z_k^2 ,\; J_{XOZ} = \sum m_k \cdot Y_k^2 ,\; J_{YOZ} = \sum m_k \cdot X_k^2 . \qquad (2.2.2)$$

Заметим, что квадраты расстояний точки M_k до координатных осей, будут соответственно равны

$$(BM_k)^2 = (Y_k^2 + Z_k^2),\; (CM_k)^2 = (X_k^2 + Z_k^2),\; (AM_k)^2 = (X_k^2 + Y_k^2).$$

Согласно определению моменты инерции относительно соответствующих координатных осей (осевые моменты) осей определяются выражениями

$$\begin{aligned} J_X &= \sum m_k \cdot (BM_k)^2 = \sum m_k \cdot (Y_k^2 + Z_k^2), \\ J_Y &= \sum m_k \cdot (CM_k)^2 = \sum m_k \cdot (X_k^2 + Z_k^2), \\ J_Z &= \sum m_k \cdot (AM_k)^2 = \sum m_k \cdot (X_k^2 + Y_k^2). \end{aligned} \qquad (2.2.3)$$

Моменты инерции относительно оси характеризует распределение масс материальных точек относительно этой оси. Момент инерции твёрдого тела относительно оси, проходящей через его центр масс, всегда имеет минимальное значение.

Из определения следует, что моменты инерции относительно полюса, плоскости или оси являются величиной положительной и не $[J] = кг \cdot м^2$.

Используя формулы (2.2.1)-(2.2.3), можно вывести следующее важное для соотношение между моментами инерции механической системы относительно центра и осей координат:

$$J_O = \sum m_k \cdot (X_k^2 + Y_k^2 + Z_k^2) = \sum m_k \cdot X_k^2 + \sum m_k \cdot Y_k^2 + \sum m_k \cdot Z_k^2 ;$$

$$2J_O = \sum m_k \cdot (X_k^2 + Y_k^2 + Z_k^2) = 2\sum m_k \cdot X_k^2 + 2\sum m_k \cdot Y_k^2 + 2\sum m_k \cdot Z_k^2 =$$

$$= \sum m_k \cdot (Z_k^2 + Y_k^2) + \sum m_k \cdot (Z_k^2 + X_k^2) + \sum m_k \cdot (X_k^2 + Y_k^2);$$

В результате получаем формулы, определяющие:

$$J_O = J_{XOY} + J_{YOZ} + J_{XOZ} ; \qquad J_O = \frac{1}{2}(J_X + J_Y + J_Z).;$$

$$J_X = J_{XOZ} + J_{XOY}; \qquad J_Y = J_{YOZ} + J_{XOY}; \qquad J_Z = J_{YOZ} + J_{XOZ}.$$

Согласно формулам (2.2.1)-(2.2.3) моменты инерции механической системы равны сумме моментов инерции её частей. Если надо вычислить момент инерции механической системы, состоящей из нескольких твёрдых тел, то его определяют как сумму моментов инерции всех твёрдых тел, входящих в систему. Например,

$$J_X = \sum J_{iX}, \quad J_Y = \sum J_{iY}, \quad J_Z = \sum J_{iZ},$$

где J_{iX}, J_{iY}, J_{iZ} - моменты инерции i-го тела механической системы относительно координатных осей.

В механике используются также центробежные моменты инерции, характеризующие распределение масс точек тела относительно двух осей.

$$J_{XY} = \sum m_k \cdot X_k \cdot Y_k, \; J_{XZ} = \sum m_k \cdot X_k \cdot Z_k, \; J_{YZ} = \sum m_k \cdot Y_k \cdot Z_k. \quad (2.2.4)$$

В отличие от осевых, центробежные моменты инерции могут быть как положительными, так и отрицательными величинами и, в частности, при определенным образом выбранных осях $OXYZ$ могут обращаться в нули.

Для механических систем в теоретической механике используют понятие «радиус инерции механической системы относительно оси вращения».

Радиус инерции механической системы относительно оси вращения – величина, квадрат которой равен отношению момента инерции механической системы относительно данной оси к массе этой системы. Следовательно,

$$\rho_{J_X} = \sqrt{\frac{J_X}{m}}, \quad \rho_{J_Y} = \sqrt{\frac{J_Y}{m}}, \quad \rho_{J_Z} = \sqrt{\frac{J_Z}{m}}.$$

Аналогично находится радиус инерции для полюса O

$$\rho_{J_O} = \sqrt{\frac{J_O}{m}}.$$

Из определения следует, что радиус инерции геометрически равен расстоянию от оси той точки, в которой надо сосредоточить массу всего тела, чтобы момент инерции одной этой точки был равен моменту инерции всего тела:

$$J_X = m \cdot \rho_{J_X}^2, \quad J_Y = m \cdot \rho_{J_Y}^2, \quad J_Z = m \cdot \rho_{J_Z}^2, \quad J_O = m \cdot \rho_{J_O}^2. \quad (2.2.4)$$

В некоторых случаях, для тел сложной формы, радиусы инерции определяются экспериментально, тогда моменты инерции тел можно вычислить по формулам (2.2.4).

2.3. Твердое тело. Масса и момент инерции твердого тела

Движение твердых тел и их систем играет важную роль в естествознании и технике. В теоретической механике твёрдое тело рассматривается как механическая система, образованная непрерывной совокупностью взаимосвязанных материальных точек.

Абсолютно твердое тело, как неизменяемая механическая система, можно представить состоящим из бесконечно большого числа бесконечно малых элементов, непрерывно заполняющих некоторую часть пространства, которые можно рассматривать как систему материальных точек. Далее для краткости такие тела будут называться просто твердыми телами. Абсолютно твердое тело является моделью реальных тел, оно тем точнее отражает свойства реального тела, чем меньше оно способно деформироваться под действием приложенных сил.

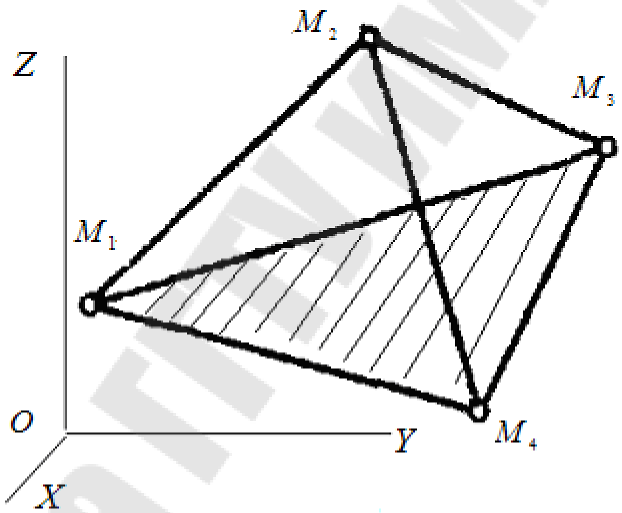

Рис.2.3.1.

Модель твердого тела можно представить неизменяемой системой, состоящей из четырех точек M_1, M_2, M_3 и M_4 , не лежащих в одной плоскости и соединенных шестью жесткими стержням (рис.2.3.1.):

$$M_1M_2 = const,\ M_1M_3 = const,\ M_1M_4 = const,$$
$$M_2M_3 = const,\ M_2M_4 = const,\ M_3M_4 = const.$$

Для вычисления массы сплошного тела, его предполагают разбитым на N элементарных объемов $\Delta\mathbf{V}_k$, каждый из которых имеет координаты $X_{k,}Y_k, Z_k$ и массу Δm_k. Массу твердого тела обычно выражают через его плотность. Пусть тело имеет объем $\mathbf{V} = \sum \Delta\mathbf{V}_k$.

Тогда предел отношения массы одной части к ее объему, когда последний стремится к нулю, а $N \to \infty$, обозначается через ρ и называется плотностью тела в данной точке

$$\rho = \lim_{\Delta \mathbf{V}_k \to 0} \frac{\Delta m_k}{\Delta \mathbf{V}_k}, \quad \text{или} \quad \rho = \frac{dm}{d\mathbf{V}}. \tag{2.3.1}$$

Для материального тела плотность обычно считается заданной величиной. В общем случае плотность является функцией координат точек тела

$$\rho = \rho(X, Y, Z),$$

то есть плотность не постоянная величина. В этом случае говорят, что тело неоднородно.

Если плотность является постоянной величиной во всех точках, $\rho = const$, тело называют однородным.

Массой тела называют предел, к которому стремится сумма масс его частей, когда число частей беспредельно увеличивается, а их размеры беспредельно уменьшаются

$$m = \lim_{N \to \infty} \sum \Delta m_k, \quad \text{то есть } m = \int_{\mathbf{V}} dm.$$

По формуле (1.6.1) выражаем элемент массы через плотность и элемент объема

$$dm = \rho \cdot d\mathbf{V}. \tag{2.3.2}$$

Теперь можно выразить массу тела в виде интеграла по объему:

$$m = \int_{\mathbf{V}} \rho \cdot d\mathbf{V} = \int_{\mathbf{V}} \rho(X, Y, Z) \cdot dXdYdZ.$$

В частности, масса однородного тела равна произведению его плотности на объем

$$m = \rho \cdot \mathbf{V}.$$

Масса является важной инерционной характеристикой тела.

Центром масс твердого тела называют предел, к которому стремится центр масс системы его части, когда число делений тела возрастает до бесконечности, а размеры частей уменьшаются до нуля. Поэтому, осуществляя предельный переход в формулах (2.1.2)-(2.1.3), получаем координаты центра масс твердого тела:

$$X_C = \int_{\mathbf{V}} X \cdot dm, \quad Y_C = \int_{\mathbf{V}} Y \cdot dm, \quad Z_C = \int_{\mathbf{V}} Z \cdot dm. \tag{2.3.3}$$

Аналогично, можно найти скорость и ускорение центра масс твердого тела:

$$\dot{X}_C = \frac{\int\limits_V \dot{X}\cdot dm}{m}; \quad \dot{Y}_C = \frac{\int\limits_V \dot{Y}\cdot dm}{m}, \quad \dot{Z}_C = \frac{\int\limits_V \dot{Z}\cdot dm}{m},$$

$$\ddot{X}_C = \frac{\int\limits_V \ddot{X}\cdot dm}{m}, \quad \ddot{Y}_C = \frac{\int\limits_V \ddot{Y}\cdot dm}{m}, \quad \ddot{Z}_C = \frac{\int\limits_V \ddot{Z}\cdot dm}{m}.$$

Из формул (2.2.1)-(2.2.3), учитывая (2.3.2), получим формулы для моментов инерции:

$$J_O = \int\limits_V \rho\cdot r^2 d\mathbf{V}, \quad \text{или} \quad J_O = \int\limits_V \rho\cdot(X^2+Y^2+Z^2)d\mathbf{V}$$

$$J_{XOY} = \int\limits_V \rho\cdot Z^2 d\mathbf{V}, \quad J_{XOZ} = \int\limits_V \rho\cdot Y^2 d\mathbf{V}, \quad J_{YOZ} = \int\limits_V \rho\cdot X^2 d\mathbf{V},$$

$$J_X = \int\limits_V \rho\cdot(Y^2+Z^2)d\mathbf{V}, \quad J_Y = \int\limits_V \rho\cdot(X^2+Z^2)d\mathbf{V},$$

$$J_Z = \int\limits_V \rho\cdot(X^2+Y^2)d\mathbf{V}.$$

2.4. Теорема Штейнера–Гюйгенса о моментах инерции тела относительно параллельных осей

Между моментами инерции тела относительно параллельных осей (рис.2.4.1.) имеется определенная зависимость, которая выражается теоремой Гюйгенса-Штейнера.

Момент инерции твердого тела относительно произвольной оси OZ равен сумме момента инерции тела относительно оси CZ_*, проведенной параллельной ей через центр масс тела, и произведения массы тела на квадрат расстояния d между осями, т. е.

$$J_Z = J_{Z_*} + m\cdot d^2. \tag{2.4.1}$$

Для доказательства теоремы проведем на рисунке в системе координат *OXYZ* через центр масс тела *C* проведем оси X_* Y_* Z_* параллельные соответствующим координатным осям. Расстояние между осями Z_* и Z обозначим через d (рис. 2.4.2).

Будем рассматривать положение точки М в двух системах отсчета, *OXYZ* и $CX_*Y_*Z_*$

Расстояния точки *M* до точек в этих системах отсчета *O* и *C* определены формулами

$$X^2+Y^2=r^2 \quad \text{и} \quad X_*^2+Y_*^2=r_*^2.$$

Запишем соотношения координат точки *M* в двух системах отсчета:

$$Z = Z_*, \qquad X = X_*, \qquad Y_* = Y - d, \qquad Y = Y_* + d. \qquad (2.4.1)$$

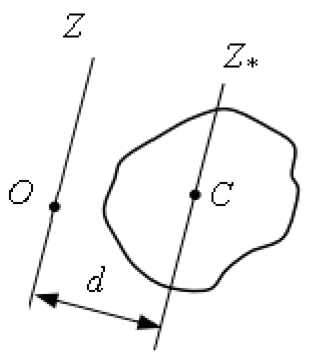

Рис.2.4.1

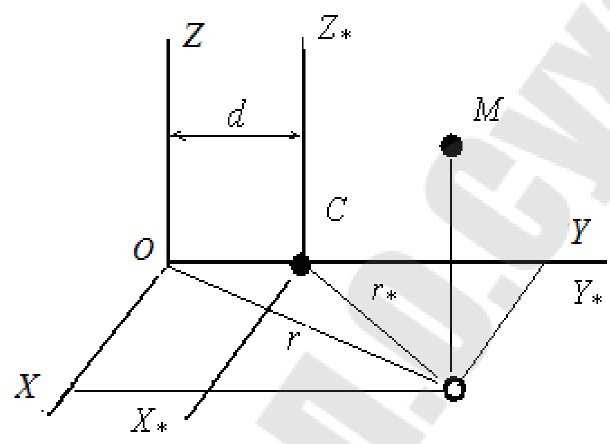

Рис.2.4.2

Момент инерции тела относительно оси Z представляем известной формулой

$$J_Z = \int_V \rho \cdot (X^2 + Y^2) d\mathbf{V}. \qquad (2.4.2)$$

Подставим (2.4.1) в (2.4.2) и выполним преобразование формулы

$$J_Z = \int_V \rho \cdot (X^2 + Y^2) d\mathbf{V} = \int_V \rho \cdot (X_*^2 + (Y_* + d)^2) d\mathbf{V} =$$
$$= \int_V \rho \cdot (X_*^2 + Y_*^2 + 2Y_* d + d^2) d\mathbf{V} = \qquad (2.4.3)$$
$$= \int_V \rho \cdot (X_*^2 + Y_*^2) d\mathbf{V} + \int_V \rho \cdot d^2 d\mathbf{V} + \int_V \rho \cdot (2Y_* d) d\mathbf{V}$$

В правой части равенства первая сумма равна моменту инерции тела относительно оси Z_*

$$J_{Z_*} = \int_V \rho \cdot (X_*^2 + Y_*^2) d\mathbf{V}, \qquad (2.4.4)$$

Так как $\rho \cdot d\mathbf{V} = m$, то вторая сумма выражения (2.4.3) равна

$$d^2 \rho \cdot \int_V d\mathbf{V} = d^2 \int_V dm = m \cdot d^2$$

Вычислим теперь значение третьей суммы выражения (2.4.3), учитывая формулы (2.3.3) для центра масс твердого тела. Так как

$$\int_V Y_* \rho \cdot d\mathbf{V} = \rho \int_V Y_* \cdot d\mathbf{V} = Y_{*C} \cdot m \text{ , то } \rho \cdot \int_V Y_* d\mathbf{V} = 0,$$

поскольку в системе координат $Y_{*C} = 0$, то окончательно получаем

$$J_z = J_{z_*} + m \cdot d^2 . \qquad (2.4.5)$$

Из формулы видно, что $J_z \triangleright J_{z_*}$. Следовательно, из всех осей данного направления наименьший момент инерции будет относительно той оси, которая проходит через центр масс.

2.5. Моменты инерции некоторых однородных тел

Интегральными формулами удобно пользоваться при вычислении моментов инерции однородных тел правильной формы. При выводе формул будем учитывать, что плотность ρ однородных тел постоянна по всему объему и может быть вынесена из-под знака интеграла.

Вычислим моменты инерции некоторых однородных симметричных тел относительно осей, проходящих через центры тяжести тел и являющихся осями симметрии.

Ось, проходящая через центр тяжести (центр масс) тела, называется центральной осью.

Момент инерции тонкого стержня

Найдем момент инерции тонкого стержня *OB* относительно оси Z_C, проходящей через центр тяжести стержня (рис. 2.5.1). Полагаем при этом, что нам заданы значения массы m и длины l стержня. Выделим элемент стержня, массой dm.

Положение этого элемента будет определяться только координатой X, так как в выбранной системе координат для этого элемента имеем $Y = 0$ и $Z = 0$.

Для определения J_{Z_C} применим формулу $J_{Z_C} = \int\limits_V \rho \cdot (X_k^2 + Y_k^2) d\mathbf{V}$, которая в нашем случае примет вид:

$$J_{Z_C} = \rho \cdot \int\limits_V X_k^2 d\mathbf{V} \qquad (2.5.1)$$

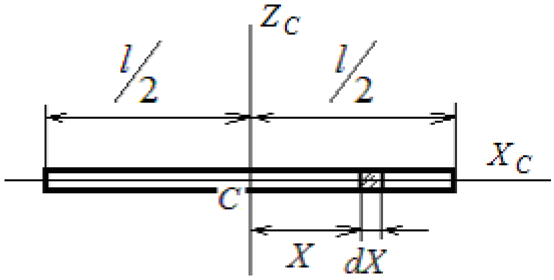

Рис. 2.5.1

Определим элементарный объём бесконечно малой части стержня

$$d\mathbf{V} = S \cdot dX\,, \qquad (2.5.2)$$

где S – площадь сечения стержня, постоянная по всей длине.

Подставляя равенство (2.5.2) в выражение (2.5.1), переходим к интегрированию по переменной X:

$$J_{Z_C} = \rho \cdot S \cdot \int_{-l/2}^{l/2} X_k^2 dX = \rho \cdot S \cdot \frac{X^3}{3}\Bigg|_{-l/2}^{l/2} = \frac{\rho \cdot S}{3}\left(\frac{l^3}{8} + \frac{l^3}{8}\right) = \frac{\rho \cdot S}{12} l^3.$$

Так как $\rho \cdot S \cdot l = m$, то

$$J_{Z_C} = \frac{m \cdot l^2}{12}. \qquad (2.5.3)$$

Используя теорему Штейнера–Гюйгенса, найдем теперь момент инерции стержня относительно Z, проходящей через точку O стержня и параллельной оси Z_C (рис. 2.5.2):

$$J_Z = J_{Z_C} + m \cdot OC^2$$

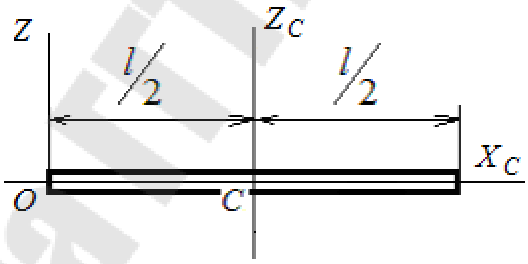

Рис. 2.5.2.

Учитывая, что $OC = \frac{l}{2}$ и формулу (2.5.2), получим

$$J_Z = \frac{m \cdot l^2}{12} + m \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2,$$

или

$$J_Z = \frac{m \cdot l^2}{3}. \qquad (2.5.4)$$

Момент инерции тонкой цилиндрической оболочки

Рассмотрим цилиндрическую оболочку (тонкий цилиндр) массы *m*, радиуса *R* и высотой *H*. Материал, из которого он изготовлен, имеет плотность ρ. Вычислим момент инерции цилиндрической оболочки относительно оси вращения *Z.* (рис. 2.5.3).

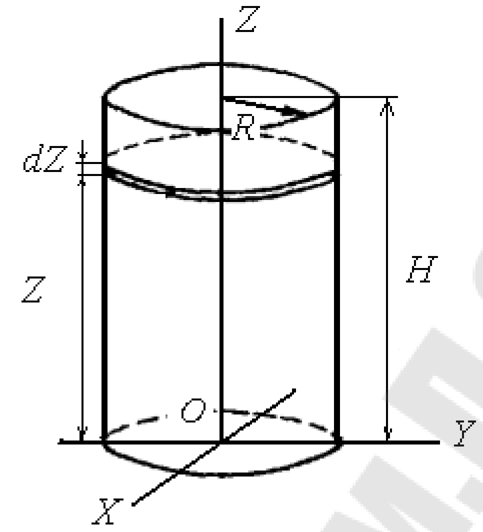

Рис. 2.5.3

Воспользуемся формулой

$$J_Z = \int\limits_{V} \rho \cdot (X_k^2 + Y_k^2) d\mathbf{V} \ . \qquad (2.5.4)$$

Здесь квадрат радиуса цилиндра равен

$$X_k^2 + Y_k^2 = R^2 .$$

Учитывая, что для цилиндра $R = const$, выносим постоянные величины за знак интеграла

$$J_Z = \rho \cdot R^2 \cdot \int\limits_{V} d\mathbf{V}$$

Учитывая малую толщину стенки цилиндрической оболочки $\delta \triangleleft\triangleleft R$, выделим на цилиндре элементарное кольцо высотой dH (рис. 2.5.3), элементарный объём которого равен

$$d\mathbf{V} = \delta \cdot 2\pi \cdot R \cdot dZ \ .$$

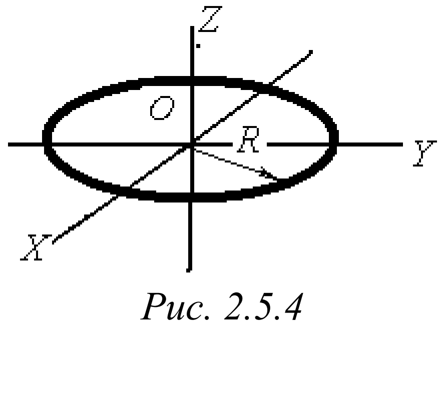

Рис. 2.5.4

В результате из формулы (2.4.4.) получаем

$$J_{Z_C} = \delta \cdot 2\pi R^3 \rho \cdot \int_0^H dZ = \delta \cdot 2\pi R^3 \rho \cdot H \,.$$

Выделив в полученной формуле массу цилиндра

$$m = \rho \cdot \mathbf{V} = \delta \cdot \rho \cdot 2\pi R \cdot H \,,$$

получим окончательную формулу

$$J_Z = m \cdot R^2 \,. \qquad (2.5.5)$$

Поскольку, высота H не входит в полученную формулу, такой же результат получится для момента инерции цилиндров любой высоты, в том числе, для тонкого кольца. (рис. 2.5.4).

Момент инерции круглого диска и цилиндра

Найдем момент инерции тонкого диска толщиной ΔZ радиусом R и массой m относительно оси Z проходящей через центр тяжести и перпендикулярной его плоскости (рис. 2.5.5).

Воспользуемся формулой

$$J_Z = \int_{\mathbf{V}} \rho \cdot (X^2 + Y^2) d\mathbf{V}$$

Здесь $d\mathbf{V}$ - элементарный объем заштрихованного на рисунке элементарного кольца, толщина которого равна dr:

$$d\mathbf{V} = 2\pi \cdot r \cdot dr \cdot \Delta Z$$

Так как $X^2 + Y^2 = r^2$ и $\rho = const$, то можно преобразовать формулу

$$J_Z = \rho \int_{\mathbf{V}} r^2 d\mathbf{V} = 2\pi\rho\Delta Z \int_0^R r^3 dr = 2\pi\rho\Delta Z \cdot \frac{R^4}{4} = (\rho \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \Delta Z) \cdot \frac{R^2}{2} \,.$$

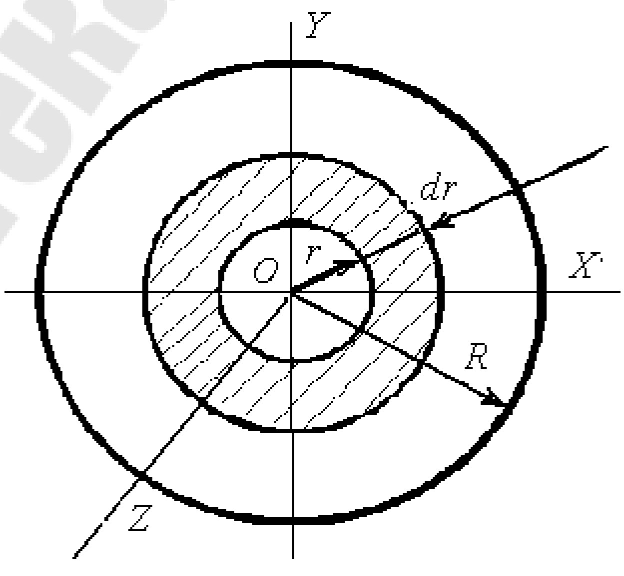

Рис. 2.5.5

Выражение в скобках равно массе диска: $m = \rho \cdot \mathbf{V}$, $\mathbf{V} = \pi \cdot R^2 \cdot \Delta Z$.

Следовательно, момент инерции диска относительно центральной оси вычисляется по формуле

$$J_z = m \cdot \frac{R^2}{2} \qquad (2.5.6)$$

Так как толщина диска ΔZ не входит в формулу осевого момента инерции, то очевидно, что момент инерции круглого однородного цилиндра имеющего любую высоту H , радиус R и массу m относительно оси симметрии OZ (рис.2.5.6) вычисляется также по формуле (2.5.6).

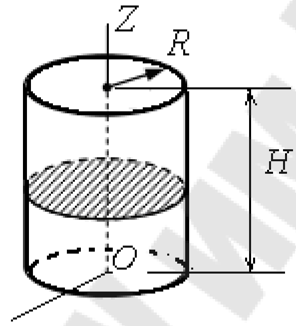

Рис.2.5.6

Прямоугольная пластина, конус

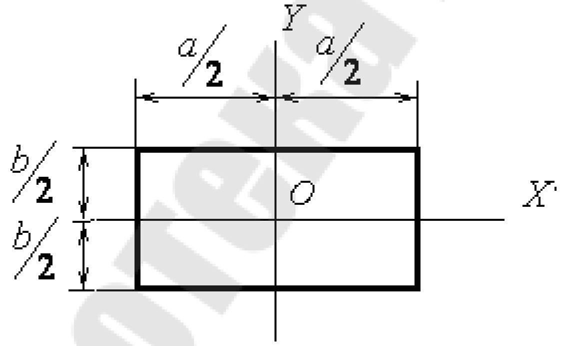

Рис.2.5.7

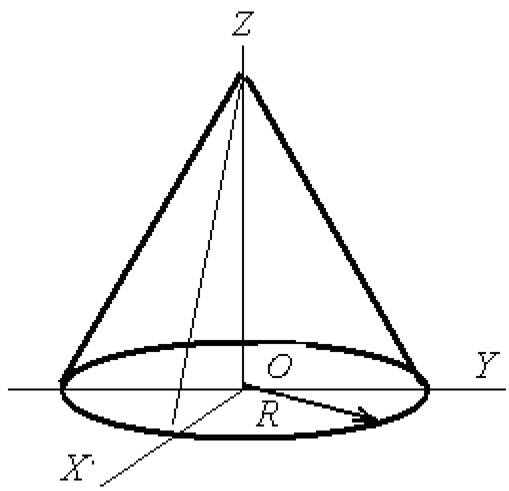

Рис.2.5.8

Опуская выкладки, приведем формулы, определяющие моменты инерции следующих тел (читатель может получить их самостоятельно, а также найти эти и другие формулы в различных справочниках):

- прямоугольная пластина массой m со сторонами a и b (рис.2.5.7):

$$J_X = \frac{1}{3} m \cdot b^2 \qquad J_y = \frac{1}{3} m \cdot a^2$$

- круглый конус массой m с радиусом основания R (ось Z направлена вдоль оси конуса) (рис.2.5.8):

$$J_Z = 0.3 \cdot m \cdot R^2$$

Моменты инерции неоднородных тел и тел сложной конфигурации можно определять экспериментально с помощью соответствующих приборов.

2.6. Момент инерции относительно произвольной оси

Пусть имеется твердое тело, для которого известны моменты инерции J_X, J_Y, J_Z относительно некоторой прямоугольной системы координат $OXYZ$ и соответствующие центробежные моменты инерции J_{XY}, J_{XZ}, J_{YZ}. Проведем через точку O некоторую ось $O\xi$, образующую с осями $OXYZ$ углы α, β и γ соответственно. Выберем произвольную точку M тела, находящуюся на расстоянии h от оси $O\xi$ (рис.2.6.1).

По определению, осевой момент инерции вычисляется по формуле

$$J_\xi = \int_V h^2 dm . \tag{2.6.1}$$

Как видно из прямоугольного треугольника OBD,

$$h^2 = r_M{}^2 - (OD)^2$$

Здесь $\vec{r}_M = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$ - радиус-вектор точки M.

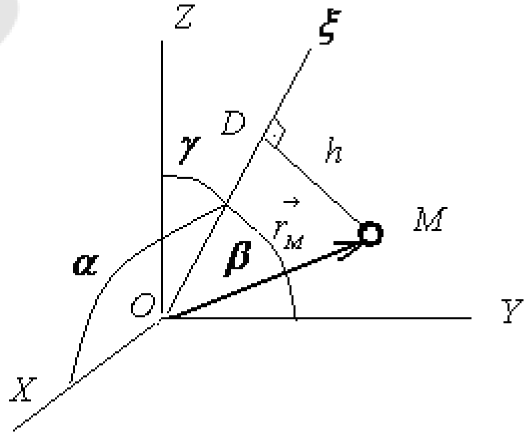

Рис.2.6.1

Но OD - это проекция радиус-вектора $\vec{r}_M$, на ось $O\xi$. Она вычисляется как сумма проекций составляющих этого вектора на эту ось

$$OD = (X\vec{i})_{\xi} + (Y\vec{j}) + (Z\vec{k})_{\xi}$$

Так как

$$(X\vec{i})_{\xi} = X\cdot\cos\alpha,\quad (Y\vec{j})_{\xi} = Y\cdot\cos\beta,\; (Z\vec{k})_{\xi} = Z\cdot\cos\gamma,$$

то $\quad OD = X\cdot\cos\alpha + Y\cdot\cos\beta + Z\cdot\cos\gamma$.

Учитывая, что $r_M^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$, получаем выражение для квадрата перпендикуляра

$$h^2 = \left(X^2 + Y^2 + Z^2\right) - (X\cdot\cos\alpha + Y\cdot\cos\beta + Z\cdot\cos\gamma)^2$$

Раскроем скобки в правой части и преобразуем формулу:

$$h^2 = X + Y^2 + Z^2 - X^2\cdot\cos^2\alpha - Y^2\cdot\cos^2\beta - Z^2\cdot\cos^2\gamma +$$
$$+ 2X\cdot Y\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta + 2X\cdot Z\cdot\cos\alpha\cdot\cos\gamma + 2Y\cdot Z\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma;$$

$$h^2 = X^2(1-\cos^2\alpha) + Y^2(1-\cos^2\beta) + Z^2(1-\cos^2\gamma) +$$
$$+ 2X\cdot Y\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta + 2X\cdot Z\cdot\cos\alpha\cdot\cos\gamma + 2Y\cdot Z\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma.$$

Если учесть, что

$$1-\cos^2\alpha = \cos^2\beta + \cos^2\gamma,\quad 1-\cos^2\beta = \cos^2\alpha + \cos^2\gamma,$$
$$1-\cos^2\gamma = \cos^2\beta + \cos^2\alpha,$$

то

$$h^2 = X^2(\cos^2\beta + \cos^2\gamma) + Y^2(\cos^2\alpha + \cos^2\gamma) +$$
$$+ Z^2(\cos^2\beta + \cos^2\alpha) +$$
$$+ 2X\cdot Y\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta + 2X\cdot Z\cdot\cos\alpha\cdot\cos\gamma + 2Y\cdot Z\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma.$$

Вынесем квадраты и произведения косинусов, как общие множители скобки

$$h^2 = (Y^2 + Z^2)\cos^2\alpha + (X^2 + Z^2)\cos^2\beta + \cos^2\gamma) + (X^2 + Y^2)\cos^2\gamma +$$
$$+ 2X\cdot Y\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta + 2X\cdot Z\cdot\cos\alpha\cdot\cos\gamma + 2Y\cdot Z\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma.$$

Подставим полученное значение в формулу (2.6.1) и получим

$$J_{\xi} = \cos^2\alpha \int_{V} (Y^2 + Z^2)dm + \cos^2\beta \int_{V} (X^2 + Z^2)dm + \cos^2\gamma \int_{V} (Y^2 + X^2)dm -$$

$$- 2\cos\alpha\cos\beta \int_{V} XY \cdot dm - 2\cos\alpha\cos\gamma \int_{V} XZ \cdot dm - 2\cos\beta\cos\gamma \int_{V} YZ \cdot dm.$$

Учитывая определение осевых и центробежных моментов инерции, окончательно получаем

$$\begin{aligned} J_{\xi} &= J_X\cos^2\alpha + J_Y\cos^2\beta + J_Z\cos^2\gamma - \\ &- 2J_{XY}\cos\alpha\cos - 2J_{XZ}\cos\alpha\cos\gamma - 2J_{YZ}\cos\beta\cos\gamma. \end{aligned} \tag{2.6.2}$$

Формулы (2.6.2) и (2.6.3) позволяют, зная входящие в их правые части моменты инерции относительно заданных осей *OXYZ*, определить момент инерции относительно любой оси, проходящей через точку О. Если же известно и положение центра масс тела, то, используя формулу теорему Гюйгенса-Штейнера, можно найти момент инерции относительно оси, проходящей через любую другую точку.

2.7. Главные оси инерции

Координатная ось, для которой центробежные моменты инерции, содержащие в своих индексах обозначение этой оси, равны нулю, называется главной осью инерции тела для точки *O*. Если, например, $J_{X^*Y} = 0$, $J_{X^*Z} = 0$, то ось *OX** является главной осью инерции.

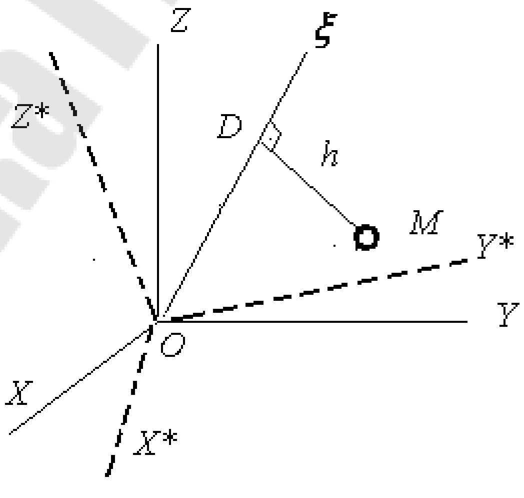

Рис.2.7.1

Таким образом, если проходящие через точку *O* оси являются главными, то все центробежные моменты инерции тела относительно этих осей будут равны нулю. Заметим, что в каждой точке пространства для данного тела можно найти три главные оси инерции тела.

Упростим формулу (2.6.2), построив в точке O новую прямоугольную систему координат $OX^*Y^*Z^*$, выбрав направление координатных осей таким образом, что центробежные моменты инерции в новой системе координат равны нулю (рис.2.7.1) :

$$J_{X^*Y^*} = 0,\ J_{X^*Z^*} = 0,\ J_{Y^*Z^*} = 0.$$

Относительно главных осей инерции тела формула (2.6.2) упрощается,

$$J_{\xi} = J_{X^*}\cos^2\alpha + J_{Y^*}\cos^2\beta + J_{Z=}\cos^2\gamma. \qquad (2.7.1)$$

Отметим, что использование главных осей инерции не только упрощает нахождение момента инерции тела относительно различных осей, но и целесообразно при решении многих других задач, связанных с движением твердого тела.

Приведем еще несколько понятий, связанных с понятием главных осей инерции тела.

Главные оси инерции для центра масс тела называются главными центральными осями инерции тела.

Пусть ось CZ – ось симметрии тела (рис.2.7.2). Это означает, что для любой точки M массой m с координатами $X,Y,Z,$ можно найти другую точку M_1 с такой же массой, но с координатами $-X, -Y, Z.$

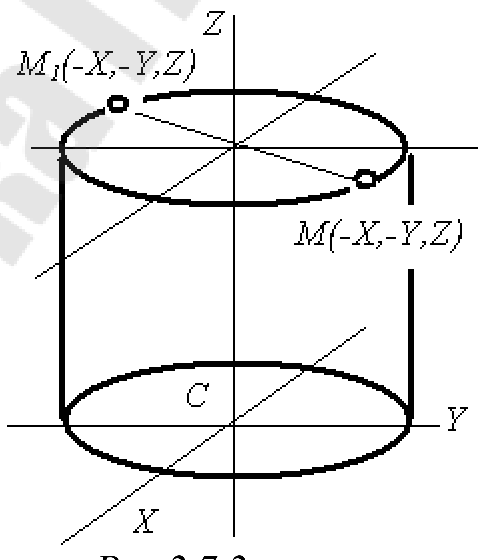

Рис.2.7.2.

Поэтому при вычислении центробежных моментов инерции по формулам (2.2.4) получаем

$$J_{ZX} = \sum ZX \cdot m = 0, \qquad J_{ZY} = \sum ZY \cdot m = 0,$$

так как в каждой сумме все слагаемые будут присутствовать попарно, будучи равными по величине, но разными по знаку.

Таким образом, симметрия в распределении масс относительно оси *CZ* характеризуется обращением в нуль двух центробежных моментов инерции. Ось *CZ*, для которой центробежные моменты инерции J_{ZX}, J_{ZY}, содержащие в своих индексах наименование этой оси, равны нулю, называется главной осью инерции тела для точки *O*.

Аналогично, если $J_{XY} = 0$ и $J_{YZ} = 0$, то ось *OY* будет для точки *O* главной осью инерции. Следовательно, если все центробежные моменты инерции равны нулю, т. е. то каждая из координатных осей *OXYZ* является главной осью инерции тела для точки *O* .

Моменты инерции тела относительно главных осей инерции называются главными моментами инерции тела.

Главные оси инерции, построенные для центра масс тела, называют главными центральными осями инерции тела. Из изложенного выше следует, что если тело имеет ось симметрии, то эта ось является одной из главных центральных осей инерции тела, так как центр масс лежит на этой оси. Если же тело имеет плоскость симметрии, то ось, перпендикулярная этой плоскости и проходящая через центр масс тела, будет также одной из главных центральных осей инерции тела.

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПРОСТЕЙШИХ ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА

3.1. Дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела

Из кинематики известно, что при поступательном движении тела, все его точки движутся одинаково, поэтому динамика поступательного движения тела определяется динамикой центра масс тела, т.е. теоремой о движении центра масс.

Дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела аналогичны дифференциальным уравнениям движения одной материальной точки.

Запишем основное уравнение динамики в векторной форме для любой точки твердого тела, к которой приложены равнодействующие внешних и внутренних сил

$$m_k \vec{a}_k = \vec{F}_k^E + \vec{F}_k^J \ .$$

Здесь надо учитывать, что при поступательном движении тела ускорения всех его точек одинаковы, $\vec{a}_1 = \vec{a}_2 = ... = \vec{a}_k$.

Выполним теперь суммирования по всем N точкам системы, при этом будем учитывать свойства внутренних сил $\sum \vec{F}_k^J = 0$,

$$\sum m_k \vec{a}_k = \sum \vec{F}_k^E \ .$$

Так как, следуя формуле (2.1.6), $\sum m_k \vec{a}_k = m \cdot \vec{a}_C$,

где $\vec{a}_C$ - ускорение центра масс , то получаем

$$m \cdot \vec{a}_C = \sum \vec{F}_k^E \ . \qquad (3.1.1)$$

Очевидно, что $\vec{a}_C = \vec{a}_k$.

Из уравнения (3.1.1) следует, что поступательное движение твердого тела рассматривать, как движение точки C, в которой сосредоточена вся его масса , и которой приложены все внешние силы, действующие на тело.

Уравнение (3.1.1) для решения задач обычно записывают как дифференциальные уравнения в координатной форме

$$m \ddot{X}_C = \sum F_X^E , \quad m \ddot{Y}_C = \sum F_Y^E , \quad m \ddot{Z}_C = \sum F_Z^E \ . \qquad (3.12)$$

3.2. Дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси

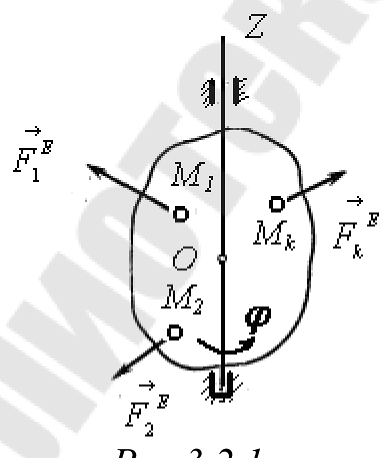

Рис.3.2.1

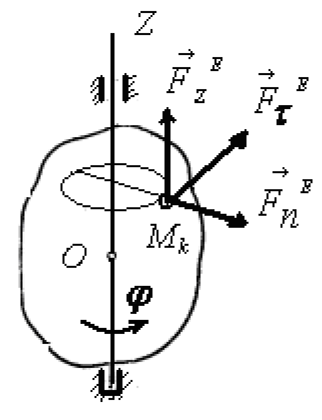

Рис.3.2.2

Рассмотрим твердое тело, вращающееся под действием сил $\vec{F}_k^E$ вокруг оси OZ с переменной угловой скоростью $\omega(t)$ (рис.3.2.1). Силы $\vec{F}_k^E$ приложены к точкам M_k тела, и являются внешними силами для точек механической системы, образующей твердое тело. Учитывая, что на точки M_k действуют еще внутренние силы $\vec{F}_k^J$,запишем основное уравнение динамики для произвольной точки M_k твердого тела,

$$m_k \vec{a}_k = \vec{F}_k^E + \vec{F}_k^J \tag{3.2.1}$$

Так как точка M_k движется по окружности радиусом R_k, то вектор ускорения точки будет определяться как геометрическая сумма нормального и касательного ускорений $\vec{a}_k = \vec{a}_{kn} + \vec{a}_{k\tau}$.

Разложим силы $\vec{F}_k^E$ и $\vec{F}_k^J$ на составляющие, параллельные естественным осям координат, построенных для точки M_k оси OZ (рис.3.2.2):

$$\vec{F}_k^E = F_{k\tau}^E \cdot \vec{\tau} + F_{kn}^E \cdot \vec{n} + F_{kZ}^E \cdot \vec{k} \text{ и } \vec{F}_k^J = F_{k\tau}^J \cdot \vec{\tau} + F_{kn}^J \cdot \vec{n} + F_{kZ}^J \cdot \vec{k} \tag{3.2.2}$$

Запишем уравнение (3.2.1) в естественной системе координат

$$m_k a_{k\tau} = F_{k\tau}^E + F_{k\tau}^J , \tag{3.2.3}$$

$$m_k a_{kn} = F_{kn}^E + F_{kn}^J , \tag{3.2.4}$$

и рассмотрим первое уравнение, для которого представим касательное ускорение в дифференциальной форме

$$a_{k\tau} = R_k \frac{d\omega}{dt}. \tag{3.2.5}$$

Подставим в (3.2.3) формулу (3.2.5) и множим обе части уравнения на R_k

$$m_k R_k^2 \frac{d\omega}{dt} = F_{k\tau}^E \cdot R_k + F_{k\tau}^J \cdot R_k$$

Просуммируем полученное выражение по всем точкам системы. Учитывая свойства внутренних сил $\sum \vec{F}_k^J = 0$, получим

$$\frac{d\omega}{dt} \sum m_k R_k^{\ 2} = \sum F_{k\tau}^E \cdot R_k . \tag{3.2.6}$$

Здесь $\sum m_k R_k^{\ 2} = J_Z$ - осевой момент инерции твердого тела,

$\sum F_{k\tau}^{E} \cdot R_k = \sum M_Z(F_{k\tau}^{E})$- сумма моментов сил $F_{k\tau}^{E} \cdot \vec{\tau}$ относительно оси вращения.

Так как остальные составляющие сил в уравнениях (2.3.2) не образуют моментов сил относительно оси *OZ*, то считаем $\sum M_Z(F_{k\tau}^{E}) = M_Z^{E}$ - сумма моментов всех внешних сил относительно оси *OZ*.

Следовательно, дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела можем записать в виде

$$J_Z \frac{d\omega}{dt} = M_Z^{E}. \tag{3.2.7}$$

Если учесть, что $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$, то дифференциальное уравнение вращения тела будет иметь второй порядок

$$J_Z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_Z^{E} \text{ или } J_Z \ddot{\varepsilon} = M_Z^{E}.$$

Здесь φ — угол поворота тела

3.3. Дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела.

Из кинематики известно, что плоскопараллельное движение твердого тела представляет собой наложение поступательного и вращательного движений.

Положение тела, совершающего плоскопараллельное движение, например, параллельно координатной плоскости *XOY*, определяется в любой момент времени положением полюса и углом поворота вокруг полюса. Задачи динамики решаются проще, если за полюс принять центр масс *C* тела и определять положение тела координатами X_C, Y_C и углом φ.

Пусть на тело действуют внешние силы, $\vec{F}_1^{E}$, $\vec{F}_2^{E}$,…, $\vec{F}_k^{E}$ параллельные координатной плоскости *XOY*.

Тогда уравнения движения точки *C* находим по теореме о движении центра масс

$$m \cdot \vec{a}_C = \sum \vec{F}_k^{E}. \tag{3.3.1}$$

Вращательное движение тела вокруг центра *C* будет определяться уравнением

$$J_Z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_Z^E \qquad (3.3.2)$$

где J_Z и M_Z^E - соответственно момент инерции тела и главный момент внешних сил относительно оси *CZ*, проходящей через центр масс *C* перпендикулярно плоскости *XOY*.

Спроектировав обе части равенства (3.3.1) на координатные оси, запишем уравнение в дифференциальной форме

$$m\ddot{X}_C = \sum F_X^E, \qquad m\ddot{Y}_C = \sum F_Y^E \qquad (3.3.3)$$

Уравнение (3.3.2) также запишем виде $J_Z\ddot{\varphi} = M_Z^E$.

Пример. Однородный круглый цилиндр радиуса *R* и массы *m* скатывается без скольжения под действием силы тяжести по гладкой плоскости, наклоненной к горизонту под углом α (рис.3.3.1). Найти ускорение центра масс цилиндра.

Решение. На цилиндр действуют три силы: сила тяжести $\vec{G} = m\vec{g}$, сила трения $\vec{F}$, и нормальная реакция плоскости $\vec{N}$, линия действия которой проходит через центр тяжести цилиндра *C***.**

Выберем систему координат *XOY* таким образом, чтобы ось *OX* была направлена вдоль наклонной плоскости и составим дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения цилиндра

$$m\ddot{X}_C = mg\cdot\sin\alpha - F,$$

$$m\ddot{Y}_C = mg\cdot\cos\alpha - N,$$

$$J_C\ddot{\varphi} = F\cdot R.$$

Так как в данной задаче $Y_C = 0$, и, следовательно, $\ddot{Y}_C = 0$, то из второго уравнения сначала находим реакцию наклонной плоскости

$N = mg\cdot\cos\alpha$, а затем силу трения $F = fN = f\cdot mg\cdot\cos\alpha$.

Так как цилиндр катится без скольжения, то точка *P* будет являться его мгновенным центром скоростей, и, следовательно, ускорение центра масс подчиняется уравнению связи $a_C = R\cdot\ddot{\varphi}$.

Так как $a_C = \ddot{X}$,то из первого уравнения имеем выражение для ускорения точки *C* :

$$mR\ddot{\varphi} = mg\cdot\sin\alpha - F. \qquad (3.3.4)$$

Из третьего уравнения определим выражение для силы трения

$$F = \frac{J_c \ddot{\varphi}}{R},$$

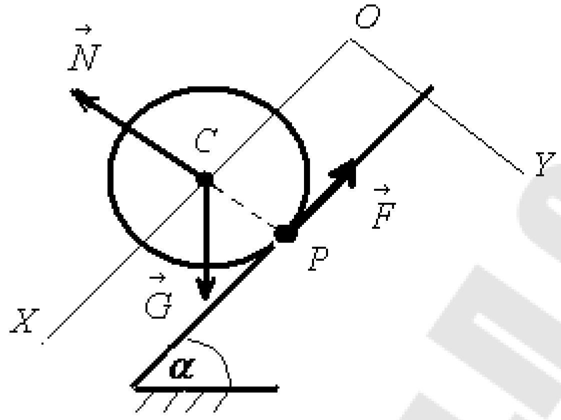

Рис.3.3.1

Учитывая, для однородного цилиндра $J_c = mR^2/2$, получаем

$$F = \frac{mR\ddot{\varphi}}{2}.$$

Исключаем силу трения из этого уравнения ,из уравнения (3.3.4)

$$mR\ddot{\varphi} = mg \cdot \sin\alpha - \frac{mR\ddot{\varphi}}{2}, \quad R\ddot{\varphi} = g \cdot \sin\alpha - \frac{R\ddot{\varphi}}{2}, \quad \frac{3}{2}R\ddot{\varphi} = g \cdot \sin\alpha,$$

и, следовательно, угловое ускорение будет равно

$$\ddot{\varphi} = \frac{2}{3R} g \cdot \sin\alpha.$$

Тогда, искомое ускорение центра масс цилиндра будет равно

$$a_c = \frac{2}{3} g \cdot \sin\alpha.$$

3.4. Физический маятник

Физическим маятником называется твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси под действием силы тяжести. Рассмотрим случай, когда ось вращения горизонтальна. Проведем через центр тяжести *C* тела плоскость, перпендикулярную к оси вращения. Точка пересечения *O* этой плоскости с осью вращения называется точкой подвеса. Примем эту точку за начало координат. Ось *OZ* направим по оси вращения, оси *XOY* расположим в плоскости, проходящей через центр тяжести C и точку подвеса O, перпендикулярно к оси вращения (рис. 3.2.1).

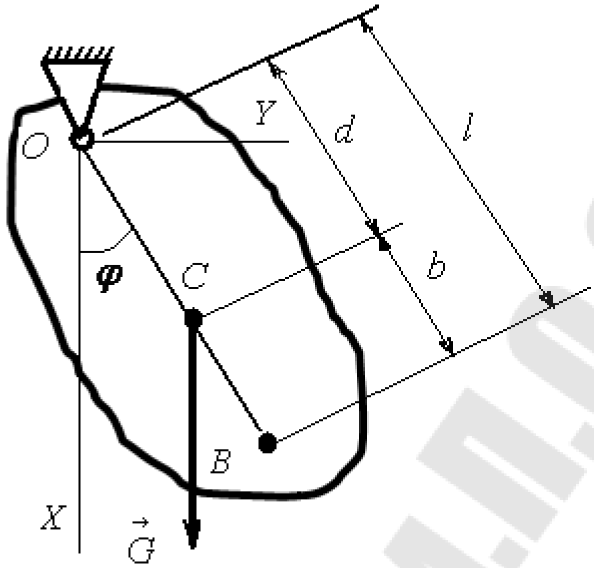

Рис.3.2.1

Запишем дифференциальное уравнение вращения тела вокруг оси,

$$J_Z \ddot{\varphi} = M_Z^E. \tag{3.4.1}$$

Где φ - угол между осью OX и линией OC.

Так как момент внешних сил относительно оси вращения создается только силой тяжести $\vec{G}$, то $M_Z^E = -G \cdot d \cdot \sin\varphi$.

Здесь m — масса тела, $d = OC$ —расстояние от точки O до центра тяжести С.

Дифференциальное уравнение движения тела (3.4.1) примет вид

$$J_z \ddot{\varphi} = -G \cdot d \cdot \sin\varphi. \tag{3.4.2}$$

Так как сила тяжести $G = mg$, то можно преобразовать уравнение(3.4.2),

$$\ddot{\varphi} + \frac{mg \cdot d}{J_z} \cdot \sin\varphi = 0. \tag{3.4.3}$$

Уравнение (3.4.3) называется дифференциальным уравнением колебаний физического маятника.

Рассмотрим случай малых колебаний, для которых можно принять $\sin\varphi \approx \varphi$. Тогда уравнение движения можно записать в следующей форме:

$$\ddot{\varphi}+\frac{mg\cdot d}{J_z}\cdot\varphi=0 \qquad (3.4.4)$$

Уравнение (3.4.4) называется дифференциальным уравнением малых колебаний физического маятника.

Общее решение уравнения (3.4.4)имеет вид

$$\varphi=A\sin\left(\sqrt{\frac{mg\cdot d}{J_z}}\cdot t+\delta\right).$$

Следовательно, угол φ изменяется по гармоническому закону с периодом колебаний, равным

$$T=2\pi\sqrt{\frac{J_z}{mg\cdot d}}$$

Сравнивая дифференциальное уравнение движения математического маятника

$$\ddot{\varphi}+\frac{g}{l}\cdot\varphi=0$$

с уравнением движения физического маятника, можно утверждать, что математический маятник, имеющий длину $l=\dfrac{J_z}{m\cdot d}$ будет двигаться так же, как и физический маятник.

Величина l называется приведенной длиной физического маятника.

Представляя по теореме Гюйгенса - Штейнера момент инерции тела относительно оси *OZ* в виде

$$J_z=J_c+m\cdot d^2,$$

где J_c - момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр тяжести тела параллельно оси *OZ*, получим для приведенной длины физического маятника выражение

$$l=\frac{J_C}{m\cdot d}+d \qquad (3.4.5)$$

Откладывая эту величину от точки подвеса в направлении центра тяжести, получим точку *B* , которая называется центром качания физического маятника. Расстояние от центра тяжести до центра качания равно

$$b=\frac{J_C}{m\cdot d} \qquad (3.4.6)$$

Точка подвеса и центр качания обладают свойством взаимности (теорема Гюйгенса).

Пусть ось вращения проходит через центр качания; тогда для .новой приведенной длины согласно формуле (3.4.5) получим

$$l_1 = \frac{J_C}{m \cdot b} + b$$

Из равенства (3.4.6) имеем

$$d = \frac{J_C}{m \cdot b},$$

следовательно, $l_1 = d + b - l$.

Таким образом, если центр качания B сделать новой точкой подвеса, то точка подвеса O станет новым центром качания, что и доказывает свойство взаимности.

Способ качания используется для экспериментального определения моментов инерции тел сложной формы.

4. ОСНОВНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

4.1. Количество движения материальной системы

Рассмотрим систему N материальных точек, находящихся в движении. Тогда в любой момент времени количество движения каждой точки системы с массой $m_k = const$ будет изображаться вектором $m_k \vec{V}_k$, приложенным в этой точке.

Количеством движения материальной системы называется вектор $\vec{Q}$, равный сумме количеств движения (главный вектор количеств движения) точек, входящих в систему:

$$\vec{Q} = \sum m_k \vec{V}_k \qquad (4.1.1.)$$

Так как $\vec{V}_k = \dfrac{d\vec{r}_k}{dt}$, то равенство (1.5.1) можно преобразовать следующим образом:

$$\vec{Q} = \sum m_k \frac{d\vec{r}_k}{dt} = \frac{d}{dt} \sum m_k \vec{r}_k .$$

Применяя формулу (1.2.1.), сумму, стоящую под знаком производной, заменим произведением $\sum m_k \vec{r}_k = m \cdot \vec{r}_C$

Тогда вектор количества движения механической системы будет равен $\vec{Q} = \frac{d}{dt}(m \cdot \vec{r}_C)$.

Так как $\sum m_k = m = const$, то $\vec{Q} = m\frac{d\vec{r}_C}{dt}$.

Так как производная $\frac{d\vec{r}_C}{dt}$ - есть скорость $\vec{V}_C$ центра масс системы, окончательно имеем

$$\vec{Q} = m\vec{V}_C \ . \qquad (4.1.2.)$$

т. е. количество движения материальной системы равно массе всей системы, умноженной на скорость ее центра масс.

Равенство (1.5.2) можно прочитать также следующим образом:

количество движения материальной системы равно количеству движения ее центра масс, если сосредоточить в нем массу всей системы.

Вектор количества движения $\vec{Q}$ может быть задан своими проекциями, выражения для которых непосредственно следуют из формул (1.5.1) и (1.5.2) :

$$Q_X = mV_{CX} = \sum m_k V_{kX}\ , \ Q_Y = mV_{CY} = \sum m_k V_{kY}\ , \quad Q_Z = mV_{CZ} = \sum m_k V_{kZ}\ .$$

Если материальная система представляет непрерывно распределенную материальную среду, заполняющую некоторый объем W, то сумма, конечно, переходит в соответствующий интеграл:

$$\vec{Q} = \int_W \vec{V}_C\, dm\,,$$

$$Q_X = \int_W V_{CX} dm\,, \quad Q_Y = \int_W V_{CY} dm\ , \quad Q_Z = \int_W V_{CZ} dm$$

4.2. Момент количества движения материальной системы

Наряду с количеством движения в качестве векторной меры движения можно использовать кинетический момент, или момент количества движения механической системы

Момент количества движения $\vec{L}_O$ материальной точки массой m, движущейся со скоростью $\vec{V}$, определяется векторным произведением равенством $\vec{L}_O = \vec{r} \times m\vec{V}$.

Моментом количеств движения $\vec{L}_O$ материальной системы (кинетический момент) относительно центра O называется сумма моментов (главный момент) количеств движения всех материальных точек, входящих в систему, относительно этого же центра:

$$\vec{L}_O = \sum \vec{L}_{kO} = \sum \vec{r}_k \times m_k \vec{V}_k \,. \qquad (4.2.1.)$$

Вектор кинетического момента $\vec{L}_O$ приложен к точке O, относительно которой он вычисляется.

Как всякий вектор, момент количества движения $\vec{L}_O$ может быть задан своими проекциями. Применяя формулы Эйлера для векторного произведения, равенство (1.4.3.) в проекциях на оси системы координат $OXYZ$ запишем следующим образом:

$$L_X = \sum m_k (Y_k V_{kZ} - Z_k V_{kY}), \qquad L_Y = \sum m_k (Z_k V_{kX} - X_k V_{kZ}) \,,$$
$$L_Z = \sum m_k (X_k V_{kY} - Y_k V_{kX}) \,. \qquad (4.2.2)$$

В случае непрерывного распределения массы по объему , будем применять интегральные формулы :

$$L_X = \int\limits_W (YV_Z - ZV_Y) \cdot dm \,, \qquad L_Y = \int\limits_W (ZV_X - XV_Z) \cdot dm \,,$$
$$L_Z = \int\limits_W (XV_Y - YV_X) \cdot dm \,.$$

Единица измерения кинетического момента в СИ - $кг \cdot м^2/с$, или $Н \cdot м \cdot с$.

4.3. Момент количеств движения твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

Вычислим кинетический момент твердого тела относительно оси вращения, когда тело вращается вокруг этой неподвижной оси с угловой со скоростью ω (рис. 4.3.1).

По определению кинетического момента относительно оси запишем выражение для проекции вектора $\vec{L}_O$ на ось OZ ,

$$L_Z = \sum m_k (X_k V_{kY} - Y_k V_{kX}) = \sum M_Z (m_k \vec{V}_k)$$

Так как цилиндр катится без скольжения, то точка P будет являться его мгновенным центром скоростей, и, следовательно, ускорение центра масс подчиняется уравнению связи $a_C = R \cdot \ddot{\varphi}$.

Так как $a_C = \ddot{X}$,то из первого уравнения имеем выражение для ускорения точки C :

$$mR\ddot{\varphi} = mg \cdot \sin\alpha - F . \qquad (3.3.4)$$

Из третьего уравнения определим выражение для силы трения

$$F = \frac{J_C \ddot{\varphi}}{R},$$

При вращении тела вокруг оси скорость его произвольной точки M_k равна $V_k = R_k \cdot \omega$, причем вектор количества движения точки $m_k \vec{V}_k$ перпендикуляре радиусу R_k и лежит в плоскости, перпендикулярной оси вращения OZ.

Следовательно, момент количества движения относительно оси Oz для одной точки

$$M_Z(m_k V_k) = R_k \cdot m_k V_k = m_k R_k^2 \cdot \omega$$

Суммируем по точкам системы, и получаем формулу кинетического момента вращающегося твердого тела

$$L_Z = \omega \sum m_k R_k^2$$

Так как сумма $\sum m_k R_k^2$ определяет осевой момент инерции тела, то имеем окончательную формулу

$$L_Z = \omega \cdot J_Z .$$

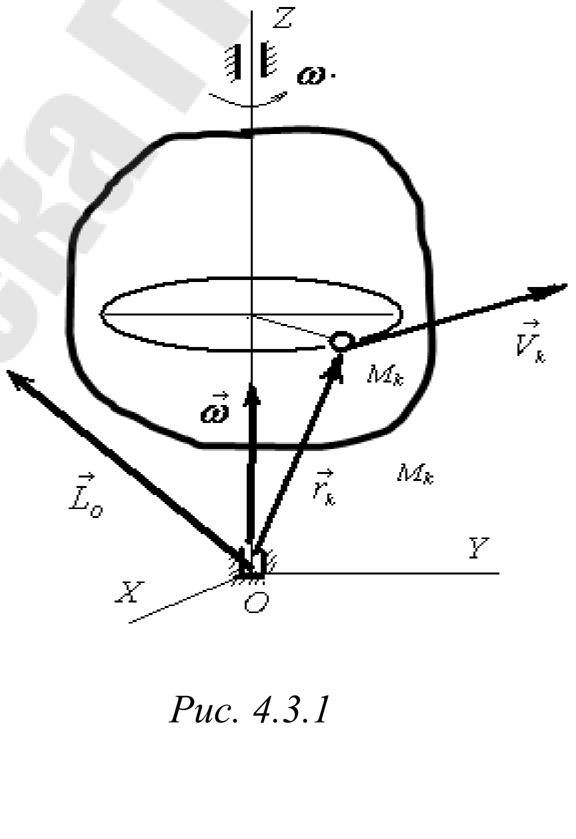

Рис. 4.3.1

Таким образом, кинетический момент тела относительно оси вращения при вращательном движении равен произведению угловой скорости тела на его момент инерции относительно оси вращения. Знак кинетического момента относительно оси совпадает со знаком угловой скорости вращения вокруг этой оси: при вращении против часовой стрелки кинетический момент положительный, при вращении по часовой стрелке он отрицательный.

Дополнительно без вывода приведем формулы для кинетических моментов относительно двух других осей координат *OX* и *OY*, перпендикулярных оси вращения *OZ:*

$$L_X = -\omega \cdot J_{XZ}, \quad L_Y = -\omega \cdot J_{YZ}.$$

Здесь $J_{XZ} = \sum m_k \cdot X_k \cdot Z_k$ и $J_{YZ} = \sum m_k \cdot Y_k \cdot Z_k$ - центробежные моменты инерции тела.

4.4. Кинетическая энергия механической системы. Теорема Кенига

Как известно, кинетической энергией одной материальной точки называется половина произведения массы т точки на квадрат ее скорости. Кинетической энергией материальной системы называется сумма кинетических энергий всех точек, входящих в систему.

$$T = \sum \frac{m_k V_K^2}{2} \tag{4.4.1}$$

Стоящие в этом выражении скорости V_k точек материальной системы определяются относительно инерциальной системы отсчета. Если система представляет собой сплошную среду, например, абсолютно твердое тело, то после соответствующего предельного перехода в формуле (4.4.1) найдем

$$T = \frac{1}{2}\int V^2 dm \text{ или } T = \frac{1}{2}\int \vec{V} \cdot \vec{V} \cdot dm$$

Докажем теорему о разложении кинетической энергии системы на кинетическую энергию переносного движения, определяемого движением центра инерции, и кинетическую энергию движения системы относительно ее центра масс (теорема Кенига).

Введем две системы координатных осей: неподвижная *OXYZ*, и подвижная $CX_CY_CZ_C$, совершающая поступательное движение относительно неподвижных осей. Здесь начало подвижной системы отсчета , точка *C,* – центр масс системы материальных точек (рис.4.4.1).

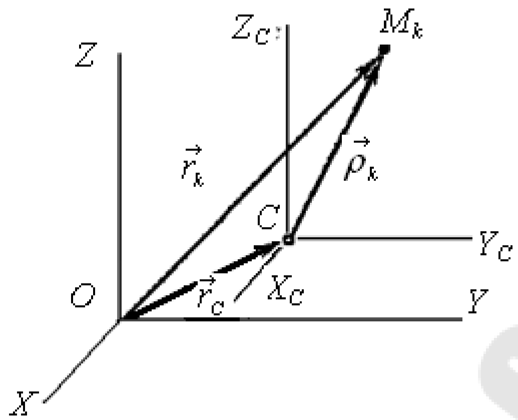

Рис.4.4.1

Радиус-вектор произвольно выбранной точки M_k определяется векторной суммой $\vec{r}_k = \vec{r}_C + \vec{\rho}_k$.

Здесь $\vec{r}_C$ - радиус-вектор центра масс системы, определенный в неподвижной системе координат, $\vec{\rho}_k$ - радиус-вектор точки M_k определенный в подвижной системе координат.

Тогда, следуя кинематике относительного движения точки, имеем:

$\vec{V}_k = \dfrac{d\vec{r}_k}{dt}$ - абсолютная скорость точки M_k;

$\vec{V}_C = \dfrac{d\vec{r}_C}{dt}$ - переносная скорость подвижной системы отсчета;

$\vec{V}_k^* = \dfrac{d\vec{\rho}_k}{dt}$ - относительная скорость точки M_k в системе координат $CX_CY_CZ_C$.

Как известно из кинематики, абсолютная скорость точки M_k равна векторной сумме

$$\vec{V}_k = \vec{V}_C + \vec{V}_k^* .$$

Подставляя выражение вектор $\vec{V}_{kr}$ в формулу (4.4.1) , находим:

$$T = \sum \frac{m_k(\vec{V}_C + \vec{V}_{kr})^2}{2} = \frac{1}{2}\sum m_k(\vec{V}_C^{\,2} + \vec{V}_{kr}^2 + 2\vec{V}_C\,\vec{V}_k^*)^2 ,$$

Учтем, что скалярный квадрат любого вектора равен квадрату его модуля, т.е $\vec{V}_C^2 = V_C^2$ и $\vec{V}_k^{*2} = V_k^{*2}$:

$$T = \frac{1}{2}\sum m_k V_C{}^2 + \frac{1}{2}\sum m_k V_k^{*2} + \sum m_k \vec{V}_C \vec{V}_k^*,$$

$$T = \frac{V_C{}^2}{2}\sum m_k + \frac{1}{2}\sum m_k V_k^{*2} + \vec{V}_C \sum m_k \vec{V}_k^*.$$

При дальнейшем преобразовании полученной формулы надо учесть, что :

$m = \sum m_k$ - масса тела;

$\sum m_k \vec{V}_k^* = 0$, так как на основании формулы (2.1.5) в системе координат $CX_CY_CZ_C$ имеем $\sum m_k \vec{V}_k^* = m \cdot \vec{V}_C$, где $\cdot \vec{V}_C = 0$.

В результате, окончательно имеем

$$T = \frac{mV_C^2}{2} + T^*,$$

где $T^* = \frac{1}{2}\sum m_k V_k^{*2}$ - кинетическая энергия относительного движения точек системы вокруг центра масс.

Последнее равенство позволяет сформулировать теорему (теорема Кенига):

Кинетическая энергия системы равна сумме кинетической энергии поступательного (переносного) движения системы, определяемого движением центра инерции, и кинетической энергии движения относительно центра масс.

4.5. Кинетическая энергия твердого тела

При решении задач динамики любое тело рассматривается как система материальных точек.

Получим формулы для определения кинетической энергии твердых тел сначала для простейших случаев движения тела.

Поступательное движение тела

При поступательном движении тела скорости всех его точек, как известно, одинаковы. Считая, что $\vec{V}_k^* = \vec{V}_C$ где $\vec{V}_C$ - скорость центра масс тела, получаем

$$T = \sum \frac{m_k V_K^2}{2} = \frac{1}{2} V_C{}^2 \sum m_k = \frac{1}{2} m V_C{}^2$$

Кинетическая энергия твердого тела, совершающего поступательное движение равна кинетической энергии точки, в которой сосредоточена вся масс тела.

$$T = \frac{1}{2} m V_C^{\,2} \qquad (4.5.1)$$

Вращение тела относительно неподвижной оси

При вращательном движении тела скорости точек пропорциональны их расстояниям до осп вращения тепа и зависят от угловой скорости вращения $\omega = \omega_Z = \dot{\varphi}$, так как $\omega_X = \omega_Y = 0$. Скорость произвольной точки M_k, движущейся по окружности радиуса R_k, равна $V_k = \omega \cdot R_k$.

Тогда

$$T = \sum \frac{m_k V_K^2}{2} = \frac{1}{2} \sum m_k \cdot R_k^2 \cdot \omega^2 .$$

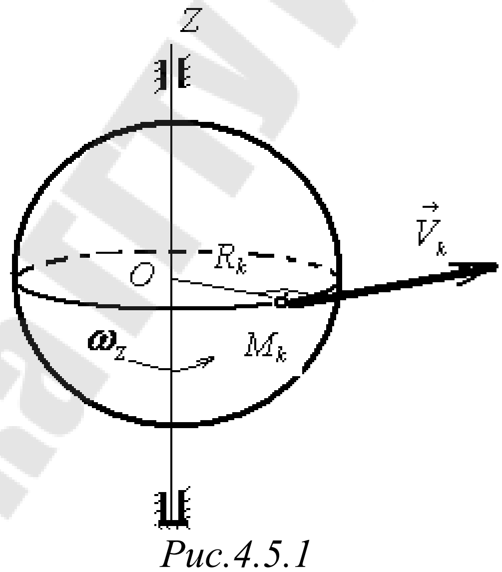

Рис.4.5.1

Так как сумма $\sum m_k R_K^2 = J_Z$ - осевой момент инерции тела, то кинетическая энергия равна

$$T = \frac{1}{2} J_Z \cdot \omega^2 . \qquad (4.5.2)$$

Кинетическая энергия твердого тела, совершающего вращение вокруг неподвижной оси равна половине произведения осевого момента инерции тела и квадрата угловой скорости.

Сравнив формулу (4.5.2) с выражением кинетической энергии абсолютно твердого тела при поступательном движении (4.5.1), видим, что момент инерции при вращательных движениях заменяет массу в выражении кинетической энергии при поступательном движении.

Это снова подтверждает высказанное выше представление о моменте инерции, как о физической величине, характеризующей инертность тела при вращательных движениях,

Плоское движение твердого тела

Плоское движение тел в кинематике в каждый момент времени рассматривается либо как результат сложения поступательного движения вместе с полюсом и вращения относительно оси, проходящей через полюс, либо как мгновенно вращательное движение относительно мгновенной оси, проходящей через мгновенный центр скоростей.

На основании теоремы Кенига для определения кинетической энергии тела при его плоском движении получаем формулу

$$T = \frac{1}{2} m V_C^{\,2} + \frac{1}{2} J_Z \omega^2. \qquad (4.5.3)$$

Здесь J_Z — момент инерции тела относительно центральной оси, направленной перпендикулярно к плоскости, параллельно которой движутся точки твердого тела, ω — мгновенная угловая скорость.

Этой формулой удобно пользоваться, когда плоское движение совершают тела качения.

Формулы (4.5.1)-(4.5.3) применяются для определения кинетической энергии различных механических систем, состоящих из тел, совершающих простейшие движения.

Пример. Определить зависимость кинетической энергии механической системы от скорости груза V_A, если заданы геометрические параметры звеньев и их массы:

$$R_2 = R_3 = R, \quad m_1 = m, \; m_2 = 2m, \; m_3 = 3m.$$

Считается, что трос, соединяющий звенья системы нерастяжим, проскальзывание между тросом и звеньями, а также между катком и гладкой поверхностью отсутствует.

Изобразим на схеме механизма опорные точки *A, B, D, K*, и выразим их скорости через скорость груза:

$$V_B = V_B = V_D = V_K = V_A.$$

Вычисляем теперь: угловые скорости колеса 2 и катка 3

$$\omega_2 = \frac{V_B}{R_2} = \frac{V_A}{R}, \quad \omega_3 = \frac{V_K}{2R_3} = \frac{V_A}{2R} \;;$$

скорость центра катка: $V_{C3} = \dfrac{V_K}{2} = \dfrac{V_A}{2}$;

моменты инерции звеньев 2 и 3

$$J_{z_{C2}} = \frac{m_2 \cdot R_2^2}{2} = \frac{2mR^2}{2} = mR^2, \quad J_{z_{C3}} = \frac{m_3 \cdot R_3^2}{2} = \frac{3mR^2}{2} = \frac{3}{2}mR^2;$$

кинетическую энергию груза *A*, совершающего поступательное движение

$$T_1 = \frac{1}{2}m_1 V_A{}^2 = \frac{1}{2}mV_A{}^2;$$

кинетическую энергию блока 2, совершающего вращательное движение

$$T_2 = \frac{1}{2}J_{z_{C2}}\omega_2{}^2 = \frac{1}{2}mR^2\left(\frac{V_A}{R}\right)^2 = \frac{1}{2}mV_A{}^2;$$

кинетическую энергию катка 3, совершающего плоскопараллельное движение

$$T_3 = \frac{1}{2}m_3 V_{C3}{}^2 + \frac{1}{2}J_{z_{C3}}\omega_3{}^2 = \frac{1}{2}3m\left(\frac{V_A}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{3}{2}mR^2\left(\frac{V_A}{2R}\right)^2.,$$

$$T_3 = \frac{3}{8}mV_A{}^2 + \frac{3}{16}mV_A{}^2 = \frac{9}{16}mV_A{}^2.$$

Кинетическая энергия механизма будет равна

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{1}{2}mV_A{}^2 + \frac{1}{2}mV_A{}^2 + \frac{9}{16}mV_A{}^2 \Rightarrow T = \frac{25}{16}mV_A{}^2.$$

4.6. Динамические характеристики сферического движения тела

Напомним из кинематики, что сферическое движение совершается телом с одной неподвижной точкой. При этом все точки тела, кроме полюса, движутся по поверхностям концентрических сфер, центром которых является неподвижная точка тела.

Количество движения

Количество движения твердого тела выражается в соответствии с формулой (4.1.2) следующим равенством:

$$\vec{Q} = m\vec{V}_C$$

где m — масса тела, $\vec{V}_C$ — скорость центра масс.

Если твердое тело имеет одну неподвижную точку, то скорость его центра масс определяется векторным произведением

$$\vec{V}_C = \vec{\omega} \times \vec{r}_C ,$$

где $\vec{\omega} = \omega_X \vec{i} + \omega_Y \vec{j} + \omega_Z \vec{k}$ — вектор угловой скорость тела,

$\vec{r}_C = X_C \vec{i} + Y_C \vec{j} + Z_C \vec{k}$ — радиус-вектор центра масс, проведенный из неподвижной точки тела. Здесь $\omega_X, \omega_Y, \omega_Z$, -проекции угловой скорости, X_C, Y_C, Z_C- координаты центра масс, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$- единичные векторы координатных осей.

Проекции вектора количества движения на оси координат, имеющих начало в неподвижной точке тела, найдем из соотношения

$$\vec{Q} = m(\vec{\omega} \times \vec{r}_C) = m \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_X & \omega_Y & \omega_Z \\ X_C & Y_C & Z_C \end{vmatrix} .$$

Проекции вектора количества движения будут равны

$$\begin{aligned} Q_X &= m(\omega_Y Z_C - \omega_Z Y_C) \\ Q_Y &= m(\omega_Z X_C - \omega_X Z_C) \\ Q_Z &= m(\omega_X Y_C - \omega_Y X_C) \end{aligned} \qquad (4.6.1)$$

В частном случае, при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси вектор его угловой скорости направлен по оси вращения. Если теперь ввести систему координат с началом в какой-либо точке оси вращения, а ось OZ совместить с осью вращения, то $\omega_X = 0$ и $\omega_Y = 0$.

Тогда вектор угловой скорости представится в виде

$$\vec{\omega} = \omega_Z \vec{k} = \dot{\varphi} \vec{k} ,$$

где φ - угол поворота тела.

Формулы (4.7.1) в этом случае будут иметь вид

$$Q_X = -mY_C \cdot \dot{\varphi}, \quad Q_Y = mX_C \cdot \dot{\varphi}, \quad Q_Z = 0 .$$

Кинетический момент

Момент количеств движения системы **(кинетический момент)** относительно начала координат определяется формулой ((4.2.1.):

$$\vec{L}_O = \sum \vec{r}_k \times m_k \vec{V}_k$$

Так как $\vec{L}_O = L_X \vec{i} + L_Y \vec{j} + L_Z \vec{k}$, то проекции момента количеств движения на координатные оси имеют следующий вид (4.2.2):

$$\begin{aligned} L_X &= \sum m_k (Y_k V_{kZ} - Z_k V_{kY}), \\ L_Y &= \sum m_k (Z_k V_{kX} - X_k V_{kZ}) \ , \\ L_Z &= \sum m_k (X_k V_{kY} - Y_k V_{kX}) \end{aligned} \qquad (4.6.2)$$

Если твердое тело имеет одну неподвижную точку, то скорость его любой точки M_k находится по формуле

$$\vec{V}_k = \vec{\omega} \times \vec{r}_k$$

Выражения для проекций скорости v имеют вид

$$\begin{aligned} V_{kX} &= \omega_Y Z_k - \omega_Z Y_k \\ V_{kY} &= \omega_Z X_k - \omega_X Z_k \\ V_{kZ} &= \omega_X Y_k - \omega_Y X_k \end{aligned} \qquad (4.6.3)$$

где X_k, Y_k, Z_k - координаты рассматриваемой точки.

Подставляя эти формулы в первое равенство (4.7.2) получим

$$L_X = \sum m_k \left[Y_k (\omega_X Y_k - \omega_Y X_k) - Z_k (\omega_Z X_k - \omega_X Z_k) \right] =$$
$$= \sum m_k \left[(\omega_X (Y_k^2 + Z_k^2) - \omega_Y X_k Y_k - \omega_Z X_k Z_k \right]$$

Так как $\omega_X, \omega_Y, \omega_Z$ не зависят от переменных X_k, Y_k, Z_k, то их можно вынести за знак суммирования.

$$L_X = \sum m_k \left[Y_k (\omega_X Y_k - \omega_Y X_k) - Z_k (\omega_Z X_k - \omega_X Z_k) \right] =$$
$$= \omega_X \sum m_k (Y_k^2 + Z_k^2) - \omega_Y \sum m_k X_k Y_k - \omega_Z \sum m_k X_k Z_k .$$

Здесь $J_X = \sum m_k (Y_k^2 + Z_k^2)$ - момент инерции твердого тела относительно оси OX,

$J_{XY} = \sum m_k X_k Y_k$ и $J_{XZ} = \sum m_k X_k Z_k$ - центробежные моменты инерции.

Проделав аналогичные выкладки с выражениями для L_Y и L_Z, получим

$$\begin{aligned} L_X &= J_X \omega_X - J_{XY} \omega_Y - J_{XZ} \omega_Z , \\ L_Y &= -J_{XY} \omega_X + J_Y \omega_Y - J_{YZ} \omega_Z \ , \\ L_Z &= -J_{XZ} \omega_X - J_{YZ} \omega_Y + J_Z \omega_Z \end{aligned} \qquad (4.6.4)$$

Если оси координат, имеющие начало в неподвижной точке O тела, будут главными осями инерции тела, то

$$J_{XZ} = 0,\ J_{YZ} = 0,\ J_{XY} = 0,$$

и формулы (4.7.4) примут вид

$$L_X = J_X \omega_X,\ \ L_Y = J_Y \omega_Y\ ,\ \ L_Z = J_Z \omega_Z\ . \qquad (4.6.5)$$

В частном случае, при движении тела вокруг неподвижной оси при условии, что ось OZ направлена по оси вращения тела, имеем $\omega_X = 0$ и $\omega_Y = 0$.

Следовательно, из (4.7.4) имеем

$$L_X = -J_{XZ}\omega_Z,\ L_Y = -J_{YZ}\omega_Z,\ \ L_Z = J_Z \omega_Z$$

Кинетическая энергия.

Кинетическая энергия твердого тела определяется формулой

$$T = \sum \frac{m_k V_K^2}{2}$$

Здесь $\vec{V}_k = \vec{\omega} \times \vec{r}_k$.

Представим квадрат скорости точки M_k в виде

$$V_K^2 = V_K \cdot V_K = V_K \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_k).$$

Вспоминая свойства скалярно - векторного произведения

$$\vec{V}_k \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_k) = \omega \cdot (\vec{r}_k \times \vec{V}_k),$$

запишем для кинетической энергии

$$T = \sum \frac{m_k \vec{V}_k \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_k)}{2} = \sum \frac{m_k\ \vec{\omega} \cdot (\vec{r}_k \times \vec{V}_k)}{2} = \frac{1}{2}\vec{\omega} \sum m_k \cdot (\vec{r}_k \times \vec{V}_k).$$

Так как $\vec{L}_O = \sum \vec{r}_k \times m_k \vec{V}_k = \sum m_k (\vec{r}_k \times \vec{V}_k)$ есть момент количеств движения, то

$$T = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \vec{L}_O$$

Используя формулы

$$\vec{L}_O = L_X \vec{i} + L_Y \vec{j} + L_Z \vec{k} \qquad \text{и} \qquad \vec{\omega} = \omega_X \vec{i} + \omega_Y \vec{j} + \omega_Z \vec{k}\ ,$$

получаем для скалярного произведения

$$T = \frac{1}{2}(\omega_X L_X + \omega_Y L_Y + \omega_Z L_Z). \qquad (4.6.6)$$

Подставив в (4.6.6) формулы (4.6.4), получим

$$T = \frac{1}{2}(J_X \omega_X{}^2 + J_Y \omega_Y{}^2 + J_Z \omega_Z{}^2 - 2J_{XY}\omega_X\omega_Y - 2J_{XZ}\omega_X\omega_Z - 2J_{YZ}\omega_Y\omega_Z).$$

Из полученной формулы следует, что

$$\frac{\partial T}{\partial \omega_X} = J_X\omega_X - J_{XY}\omega_Y - J_{XZ}\omega_Z = L_X,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \omega_Y} = -J_{XY}\omega_X + J_Y\omega_Y - J_{YZ}\omega_Z = L_Y,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \omega_Z} = -J_{XZ}\omega_X - J_{YZ}\omega_Y + J_Y\omega_Z = L_Z.$$

То есть, частная производная от кинетической энергии твердого тела, имеющего неподвижную точку, по проекции угловой скорости на какую-либо ось, равна моменту количеств движения относительно этой оси.

Если оси координат совпадают с главными осями инерции, то $J_{XZ} = 0$, $J_{YZ} = 0$, $J_{XY} = 0$, то

$$T = \frac{1}{2}(J_X\omega_X{}^2 + J_Y\omega_Y{}^2 + J_Z\omega_Z{}^2).$$

Тогда

$$\frac{\partial T}{\partial \omega_X} = J_X\omega_X, \quad \frac{\partial T}{\partial \omega_Y} = J_Y\omega_Y, \quad \frac{\partial T}{\partial \omega_Z} = J_Y\omega_Z.$$

В частном случае, при вращении тела вокруг неподвижной оси OZ имеем известное нам выражение

$$T = \frac{1}{2}J_Z\omega_Z{}^2 = \frac{1}{2}J_Z\dot{\varphi}^2$$

5. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

5.1 Теорема о движении центра масс

Воспользуемся уравнениями движения механической системы

$$m_k\frac{d^2\vec{r}_k}{dt^2} = \vec{F}_k^E + \vec{F}_k^J, \ (k=1,2,...,N).$$

Складывая левые и правые части последних уравнений, получаем

$$\sum m_k\frac{d^2\vec{r}_k}{dt^2} = \sum\vec{F}_k^E + \sum\vec{F}_k^J \qquad (5.1.1)$$

Преобразуем левую часть равенства (5.2.1), внося $m_k = const$ под знак производной и заменяя сумму производных производной от суммы:

$$\sum m_k \frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\sum m_k \vec{r}_k = \frac{d^2}{dt^2}(m \cdot \vec{r}_C) = m\frac{d^2 \vec{r}_C}{dt^2}.$$

При преобразовании этой формулы мы учли ,что $\sum m_k \vec{r}_k = m \cdot \vec{r}_C$.

Учитывая, свойство внутренних сил $\sum \vec{F}_k^J = 0$, получаем

$$m\frac{d^2 \vec{r}_C}{dt^2} = \sum \vec{F}_k^E, \text{ или } m\vec{a}_C = \sum \vec{F}_k^E. \qquad (5.1.2)$$

Уравнения (5.2.2) математически формулируют теорему о движении центра масс механической системы.

Центр масс механической системы движется как материальная точка, масса которой равна массе механической системы и на которую действуют только внешние силы.

Из теоремы следует, что изменение движения центра масс системы происходит только под действием внешних сил системы.

Проектируя формулу (5.2.2) на оси координат, получаем:

$$m a_{CX} = \sum \vec{F}_{kX}^E, \quad m a_{CY} = \sum \vec{F}_{kY}^E, \quad m a_{CZ} = \sum \vec{F}_{kZ}^E.$$

Последние уравнения называют дифференциальными уравнениями движения центра масс в проекциях на декартовы оси координат.

Следствия из теоремы о движении центра масс механической системы.

1. Если главный вектор всех внешних сил, действующих на механическую систему, равен нулю, то центр масс системы движется с постоянной скоростью, $\vec{V}_C = \vec{V}_{0C} = const$.

Если при этом в начальный момент времени центр масс системы был неподвижен, то он будет неподвижен и в следующий момент времени, то есть $\vec{r}_{0C} = \vec{r}_C = const$.

2. Если проекция на ось (например, на ось *OX*) главного вектора всех внешних сил, действующих на механическую систему, равна нулю, то проекция вектора скорости центра масс на эту ось постоянна, то есть $V_{CX} = V_{0CX} = const$.

Если при этом в начальный момент времени координата центра масс системы была постоянна, то она не изменится и в следующий момент времени , будет неподвижен и в следующий момент времени, например для оси *OX*: $X_C = X_{0C} = const$.

5.2. Теорема об изменении количества движения механической системы

Воспользуемся дифференциальными уравнениями движения в векторной форме для точки M_k механической системы

$$m_k \frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2} = \vec{F}_k^E + \vec{F}_k^J \text{ , } (k=1,2,...,N),$$

или

$$m_k \frac{d\vec{V}_k}{dt} = \vec{F}_k^E + \vec{F}_k^J \qquad (5.2.1)$$

Здесь $\vec{F}_k^E$ - равнодействующая всех действующих на точку M_k внешних сил, $\vec{F}_k^J$ - равнодействующая всех внутренних сил, действующих на точку

Суммируем уравнения (5.2.1) по всем точкам системы, внеся предварительно массу m_k под знак производной:

$$\sum \frac{d(m_k \vec{V}_k)}{dt} = \sum \vec{F}_k^E + \sum \vec{F}_k^J \text{ .}$$

Учитывая свойство внутренних сил $\sum \vec{F}_k^J = 0$, имеем

$$\frac{d}{dt} \sum m_k \vec{V}_k = \sum \vec{F}_k^E \text{ .}$$

Так как $\sum m_k \vec{V}_k = \vec{Q}$ - количество движения системы, то в итоге из выражения получаем теорему об изменении количества движения механической системы в дифференциальной векторной форме:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum \vec{F}_k^E \text{ ,} \qquad (5.2.2)$$

которую можно сформулировать следующим образом:

Производная по времени от вектора количества движения механической системы равна главному вектору действующих на механическую систему внешних сил.

Уравнение (5.1.2) можно записать в проекциях на координатные оси:

$$\frac{dQ_X}{dt} = \sum F_{kX}^E, \quad \frac{dQ_Y}{dt} = \sum F_{kY}^E, \quad \frac{dQ_Z}{dt} = \sum F_{kZ}^E. \qquad (5.2.3)$$

Тогда, производная по времени от проекции на ось вектора количества движения механической системы равна векторной сумме проекций на эту ось всех внешних сил, действующих на систему.

Получим еще одну форму этой теоремы, называемую интегральной. Для этого умножим обе части равенства (5.2.2) на dt и проинтегрируем его, предполагая, что в начальный момент $t = 0$ количество движения равно $\vec{Q}_0$, а в момент времени t - равно $\vec{Q}$:

$$\int_{\vec{Q}_0}^{\vec{Q}} d\vec{Q} = \int_0^t \sum \vec{F}_k^E dt \Rightarrow \vec{Q} - \vec{Q}_0 = \sum \int_0^t \vec{F}_k^E\, dt$$

При решении задач интегральная форма теоремы часто используется в проекциях на оси координат:

$$Q_X - Q_{0X} = \sum \int_0^t \vec{F}_{kX}^E\, dt, \quad Q_Y - Q_{0Y} = \sum \int_0^t \vec{F}_{kY}^E\, dt, \quad Q_Z - Q_{0Z} = \sum \int_0^t \vec{F}_{kZ}^E\, dt$$

Следствия из теоремы об изменении количества движения (законы сохранения количества движения)

1. Если главный вектор всех внешних сил, действующих на механическую систему, равен нулю, то количество движения механической системы не изменяется, т. е. $\vec{Q} = \vec{Q}_0 = const$.

2. Если проекция главного вектора внешних сил на ось OX (или другую ось) равна нулю, $\sum \vec{F}_k^E = 0$, то проекция количества движения механической системы будет постоянной величиной $Q_X = Q_{0X} = const$.

5.3. Теорема об изменении кинетического момента

Запишем дифференциальные уравнения движения системы точек

$$\frac{d(m_k \vec{V}_k)}{dt} = \vec{F}_k^E + \vec{F}_k^J., \ (k=1,2,\ldots,N)$$

Выполним векторное умножение левой и правой частей уравнения на радиус- вектор $\vec{r}_k$ точки M_k :

$$\vec{r}_k \times \frac{d(m_k \vec{V}_k)}{dt} = \vec{r}_k \times \vec{F}_k^E + \vec{r}_k \times \vec{F}_k^J \qquad (5.3.1)$$

Левую часть этого равенства представим в виде

$$\vec{r}_k \times \frac{d(m_k \vec{V}_k)}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}_k \times m_k \vec{V}_k) - \vec{V}_k \times m_k \vec{V}_k \qquad (5.3.2)$$

Здесь $\vec{V}_k \times m_k \vec{V}_k = 0$, как векторное умножение двух параллельных векторов.

Из уравнений (5.3.1) и (5.3.2) имеем

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_k \times m_k \vec{V}_k) = \vec{r}_k \times \vec{F}_k^E + \vec{r}_k \times \vec{F}_k^J .$$

Просуммируем полученное выражение по всем точкам системы.

Согласно свойствам внутренних сил, их главный момент равен нулю, следовательно $\sum \vec{r}_k \times \vec{F}_k^J = 0$.

В итоге получим равенство

$$\sum \frac{d}{dt}(\vec{r}_k \times m_k \vec{V}_k) = \sum \vec{r}_k \times \vec{F}_k^E$$

Вынесем знак производной

$$\frac{d}{dt}\sum(\vec{r}_k \times m_k \vec{V}_k) = \sum \vec{r}_k \times \vec{F}_k^E \qquad (5.3.3)$$

Здесь величина $\sum \vec{r}_k \times m_k \vec{V}_k = \vec{L}_O$ - кинетический момент относительно начала координат.

Тогда имеем

$\frac{d}{dt}\sum(\vec{r}_k \times m_k \vec{V}_k) = \frac{d\vec{L}_O}{dt}$ - производная по времени от кинетического момента.

В правой части (5.3.3) имеем вектор главного момента внешних сил.

$$\sum \vec{r}_k \times \vec{F}_k^E = \vec{M}_O^E .$$

Окончательно получаем теорему об изменении кинетического момента в дифференциальной форме.

Производная по времени от кинетического момента системы относительно некоторого неподвижного центра равна главному моменту приложенных к системе внешних сил относительно того же центра:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^E \qquad (5.3.4)$$

Уравнение (5.3.4) можно записать в проекциях на координатные оси:

$$\frac{dL_X}{dt} = M_X^E, \quad \frac{dL_Y}{dt} = M_Y^E, \quad \frac{dL_Z}{dt} = M_Z^E \quad . \qquad (5.3.5)$$

В этом случае теорема будет сформулирована так: производная по времени от проекции на ось кинетического момента равна векторной проекции на эту ось главного момента внешних сил, действующих на систему.

В интегральной формулировке имеем:

$$\int_{\vec{L}_{O_{НАЧ}}}^{\vec{L}_O} d\vec{L}_O = \int_0^t \vec{M}_O^E\, dt \Rightarrow \vec{L}_O - \vec{L}_{O_{НАЧ}} = \int_0^t \vec{M}_O^E\, dt$$

Аналогично этому уравнению можно записать интегральные формулы в проекциях на оси координат.

Из теоремы следует, что изменить кинетический момент системы могут лишь внешние силы. Что касается внутренних сил, то они не входят в выражение теоремы и, следовательно, непосредственно не влияют на изменение кинетического момента. Однако их влияние может сказываться через посредство внешних сил, так как главный момент внешних сил может зависеть от положений точек, и их скоростей , которые могут быть изменены внутренними силами.

Следствия из теоремы об изменении количества движения (законы сохранения количества движения):

1. Если главный момент всех внешних сил, действующих на механическую систему, равен нулю, то кинетический момент не изменяется, т. е. $\vec{L}_O = \vec{L}_{O_{НАЧ}} = const$.

2. Если проекция главного момента внешних сил на ось OX (или другую ось) равна нулю, то проекция количества движения механической системы будет постоянной величиной $L_X = L_{X_{НАЧ}} = const$.

5.4. Теорема об изменении кинетической энергии системы

При изучении динамики материальной точки была рассмотрена теорема об изменении кинетической энергии для свободной материальной точки.

Применяя теорему об изменении кинетической энергии к каждой точке системы отдельно, получим такую систему уравнений:

$$\frac{m_k V_k^{\;2}}{2} - \frac{m_k V_{0k}^{\;2}}{2} = A_k^{\;E} + A_k^J\,, \;(k\!=\!1,2,\ldots,N) \tag{5.4.1}$$

Суммируя по точкам системы равенства (5.4.1), найдем

$$\sum \frac{m_k V_k^{\;2}}{2} - \sum \frac{m_k V_{0k}^{\;2}}{2} = \sum A_k^{\;E} + \sum A_k^{\;J}\,.$$

Примем обозначения

$T = \sum \dfrac{m_k V_k^{\;2}}{2}$ - кинетическая энергия системы в произвольный момент времени.

$T_0 = \sum \dfrac{m_k V_{0k}^{\;2}}{2}$ - кинетическая энергия системы в начальный момент времени.

$\sum A_k^{\;E} = A^E$ - сумма работ внешних сил.

$\sum A_k^{\;J} = A^J$ - сумма работ внутренних сил

Согласно обозначениям, запишем

$$T - T_0 = A^E + A^J \tag{5.4.2}$$

Равенство (5.4.2) выражает теорему об изменении кинетической энергии системы:

Приращение кинетической энергии системы за некоторый промежуток времени равно сумме работ сил, приложенных к точкам системы, за тот же самый промежуток времени.

Как видим, кинетическая энергия системы может изменяться как за счет внешних, так и внутренних сил системы. Этим она отличается от теорем о количестве движения и кинетическом моменте, в которых внутренние силы были исключены из рассмотрения.

Лишь в случае неизменяемой системы материальных точек работа внутренних сил на произвольных перемещениях всегда равна нулю.

Другое отличие состоит в том, что последняя теорема выражается скалярным соотношением, в то время как предыдущие теоремы имели векторный характер.

5.5. Работа сил, приложенных к абсолютно твердому телу

Допустим, что свободное абсолютно твердое тело находится под действием системы внешних сил $\vec{F}_k^E$, приложенных в точках M_k. Движение тела будем рассматривать в неподвижной системе координат $OXYZ$. Выберем на теле полюс A как начало подвижной системы координат $AX^*Y^*Z^*$, жестко связанной с телом (рис. 5.4.1).

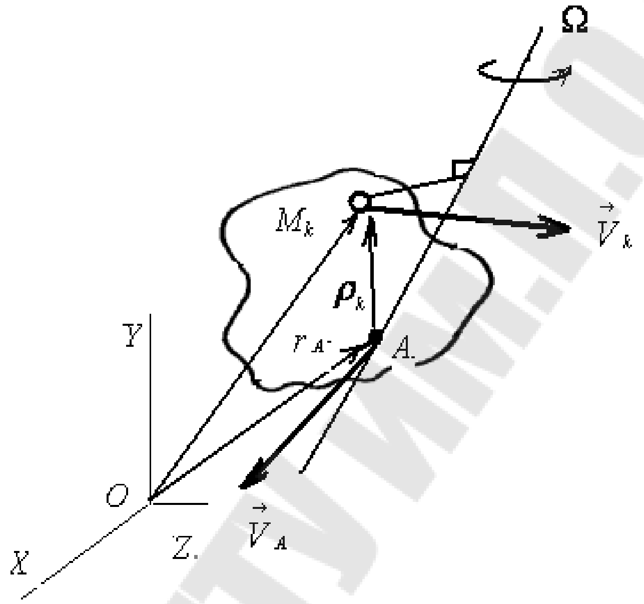

Рис.5.4.1

Как известно из кинематики, свободное движение тела представляется сложением поступательного движения тела вместе с подвижной системой координат $AX^*Y^*Z^*$ и вращения тела вокруг мгновенной оси $A\Omega$, проходящей через полюс A.

В рассматриваемом случае скорость точки M_k равна

$$\vec{V}_k = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_k ,$$

где $\vec{V}_A$ - скорость полюса A; $\vec{\rho}_k = \vec{AM}_k$ - радиус-вектор точки M_k в подвижной системе отсчета. Тогда элементарная работа силы $\vec{F}_k^E$ будет равна

$$d'A = \vec{F}_k^E \cdot \vec{V}_k\, dt = \vec{F}_k^E \cdot \vec{V}_A\, dt + \vec{F}_k^E \cdot (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_k) \cdot dt ,$$

Преобразуем смешанное произведение векторов

$$\vec{F}_k^E \cdot (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_k) = \vec{\omega} \cdot (\vec{\rho}_k \times \vec{F}_k^E).$$

Так как

$\vec{V}_A\,dt = d\vec{r}_A$ - вектор элементарного перемещения полюса A ,

$\vec{\rho}_k \times \vec{F}_k^E = \vec{M}_{Ak}^E$ - момент силы $\vec{F}_k^E$ относительно полюса A, то

$$d'A = \vec{F}_k^E\, d\vec{r}_A + \vec{\omega}\cdot \vec{M}_{Ak}^E\, dt\,. \qquad (5.4.1)$$

Перепишем скалярное произведение $\vec{\omega}\cdot \vec{M}_{Ak}^E = \omega \cdot M_{\Omega k}^E$.

Здесь $M_{\Omega k}^E$ -проекция вектора $\vec{M}_{Ak}^E$ на мгновенную ось $A\Omega$.

Тогда $d'A = \vec{F}_k^E\, d\vec{r}_A + M_{\Omega k}^E \cdot \omega dt$.

Учитывая, что $\omega dt = d\varphi$ - элементарный угол поворота относительно оси $A\Omega$, получаем

$$d'A = \vec{F}_k^E\, d\vec{r}_A + M_{\Omega k}^E \cdot d\varphi. \qquad (5.4.2)$$

Таким образом, элементарная работа силы, приложенной к точке твердого тела, в общем случае его движения равна сумме элементарных работ на элементарном поступательном перемещении вместе с полюсом и элементарном вращательном движении вокруг мгновенной оси, проходящей через полюс.

Выполним суммирование уравнения (5.4.1) по всем точкам системы

$$\sum d'A = \sum(\vec{F}_k^E\, d\vec{r}_A) + \sum(\vec{\omega}\cdot \vec{M}_{Ak}^E\, dt) = \left(\sum \vec{F}_k^E\right) d\vec{r}_A + \vec{\omega}\left(\sum \vec{M}_{Ak}^E\right) dt$$

Введем обозначения: $\sum \vec{M}_{Ak}^E = \vec{M}_A^E$ и $\sum \vec{F}_k^E = \vec{F}^E$ главного момента относительно полюса A и главного вектора системы внешних сил.

Тогда

$$\sum d'A = \vec{F}^E\, d\vec{r}_A + \vec{\omega}\cdot \vec{M}_A^E\, dt,$$

или $$d'A = \vec{F}^E\, d\vec{r}_A + M_{\Omega k}^E \cdot d\varphi\,. \qquad (5.4.3)$$

Следовательно, элементарная работа системы сил, приложенных к телу, в общем случае его движения равна сумме элементарных работ главного вектора на элементарном поступательном перемещении вместе с полюсом и главного момента на элементарном вращательном движении вокруг мгновенной оси, проходящей через полюс.

Из свойств внутренних сил следует, что сумма работ всех внутренних сил, приложенных к твердому телу, равна нулю.

В частных случаях формула (5.4.1) упрощается.

Для поступательного движения ,$d'A == \vec{F}^E \, d\vec{r}_O$.

Для поступательного движения, например, вокруг оси OZ , имеем $\varphi_X = 0$ $\varphi_Y = 0$ $\varphi_Z = \varphi$,и , следовательно,

$$d'A == M_Z^E \cdot d\varphi \quad ,$$

Для плоскопараллельного движения, например, в плоскости OXY имеем аналогично, $\varphi_X = 0$ $\varphi_Y = 0$ $\varphi_Z = \varphi$, поэтому

$$d'A == \vec{F}^E \, d\vec{r}_O + M_O^E \cdot d\varphi = F_X^E dX_O + F_Y^E dY_O + M_O^E \cdot d\varphi .$$

6. ПРИНЦИПЫ МЕХАНИКИ

6.1. Пришил Даламбера для механической системы. Метод кинетостатики.

Под принципами механики понимаются методы решения задач, основанные на введении в расчеты сил инерции, анализе возможных перемещений точек механических систем в заданном состоянии и исключения из расчетов неизвестных сил реакций внешних связей.

Часть принципов являются методами раздела механики, которую называют аналитической.

Первым из принципов является *принцип Даламбера* - метод решения задач называемый метом кинетостатики, основанный на введении в расчеты сил инерции и получения с их помощью в каждой из задач системы сил, эквивалентной нулю, - то есть, как в задачах раздела «Статика», уравновешенной системы сил.

Сформулируем принцип Даламбера для системы точек и установим его связь с общими теоремами динамики системы.

Рассмотрим механическую систему N точек, находящуюся под действием внешних и внутренних сил. Движение этой системы описывается уравнениями

$$m_k \cdot \vec{a}_k = \vec{F}_k^E + \vec{F}_k^J , \qquad (k=1,2,\ldots,N).$$

Система будет находиться в равновесии, если неподвижны все ее точки. Для равновесия механической системы необходимо, чтобы уравновешивались приложенные к ее точкам силы

$$\vec{F}_k^E + \vec{F}_k^J = 0 \qquad (6.1.1)$$

Уравнения (6.1.1) называют уравнениями равновесия системы. Эти уравнения для известного положения равновесия системы позволяют устанавливать некоторые неизвестные силы; если же силы заданы, то по уравнениям находятся координаты положения равновесия системы.

Сформулируем принцип Даламбера для системы точек и установим его связь с общими теоремами динамики системы.

Применим для каждой точки M_k механической системы принцип Даламбера,

$$\vec{F}_k^E + \vec{F}_k^J + \vec{\Phi}_k = 0 \quad , \quad \vec{\Phi}_k = m_k \cdot \vec{a}_k , \quad (k=1,2,\ldots,N). \qquad (6.1.2)$$

Уравнения (6.1.2) выражают принцип Даламбера для точек механической системы: в каждый момент времени действующие на точки системы внешние и внутренние силы могут быть уравновешены добавлением к ним соответствующих сил инерции $\vec{\Phi}_k$.

Таким образом, принцип Даламбера дает возможность составлять уравнение движения системы в форме уравнений равновесия, вводя в рассмотрение силы инерции, которые считаются приложенными к точкам системы.

Выполним векторное умножение уравнения (6.1.2) на радиус-вектор $\vec{r}_k$ точки M_k

$$\vec{r}_k \times \vec{F}_k^E + \vec{r}_k \times \vec{F}_k^J + \vec{r}_k \times \vec{\Phi}_k = 0 \qquad (6.1.3)$$

Если просуммировать (6.1.2) и (6.1.3) по точкам системы (по индексу k), и учесть свойства внутренних сил, то получим

$$\vec{F}^E + \vec{\Phi} = 0 \quad \text{и} \quad \vec{M}_O^E + \vec{M}_O^\Phi = 0 .$$

Здесь

$\vec{F}^E$ - главный вектор внешних сил, $\vec{F}^E = \sum \vec{F}_k^E$;

$\vec{\Phi}$ - главный вектор сил инерции, $\vec{\Phi} = \sum \vec{\Phi}_k$;

$\vec{M}_O^E$ - главный момент внешних сил, $\vec{M}_O^E = \sum \vec{M}_{Ok}^E$

$\vec{M}_O^\Phi$ - главный момент сил инерции, $\vec{M}_O^\Phi = \sum \vec{M}_{Ok}^\Phi$.

Рассмотрим далее систему несвободных материальных точек, движущихся под действием активных, то есть заданных сил. Если к каждой точке кроме этих сил и сил реакций связей добавить ее силу инерции, то получаемая система сил также будет уравновешенной.

А для уравновешенной системы сил, как известно, геометрическая сумма всех сил системы и геометрическая сумма моментов этих сил относительно любого произвольного центра O равна нулю.

В данном случае получаем

$$\sum(\vec{F}_k+\vec{R}_k+\vec{\Phi}_k)=0 \text{ и } \sum\vec{r}_k\times(\vec{F}_k+\vec{R}_k+\vec{\Phi}_k)=0.$$

Выделив в уравнениях главные векторы и главные моменты активных сил, реакций связи и сил инерции, получим уравнения кинетостатики для механической системы

$$\sum\vec{F}_k+\sum\vec{R}_k+\sum\vec{\Phi}_k=0 \quad \text{и} \quad \sum\vec{r}_k\times\vec{F}_k+\sum\vec{r}_k\times\vec{R}_k+\sum\vec{r}_k\times\vec{\Phi}_k=0,$$

по которым можно сформулировать принцип Даламбера для механической системы:

В любой момент движения механической системы геометрическая сумма главных векторов и главных моментов заданных сил, реакций связей и сил инерции, приложенных в точках системы, равна нулю.

Полученные условия позволяют по заданным уравнениям движения твердых тел, силам и моментам сил, заставляющих тела двигаться с ускорением, определять реакций связей, наложенных на эти тела.

Число уравнений зависит от вида системы сил (плоская или пространственная) и от числа тел, рассматриваемых в задаче.

Задача приведения сил инерции

Для решения задач выведем формулы, по которым определяются главные векторы и главные моменты сил инерции тел при различных видах их движения. За центр приведения сил инерции при решении задач динамики обычно принимается центр масс тела. В этом случае получаем:

$\vec{\Phi}=\sum\vec{\Phi}_k=\sum(-m_k\cdot\vec{a}_k)=-m\cdot\vec{a}_C$ - главный вектор сил инерции,

$M_C^{\Phi}=\sum\vec{r}_k\times\vec{\Phi}_k=\sum\vec{r}_k\times(-m_k\cdot\vec{a}_k)=-\dfrac{d\vec{L}_C}{dt}$ - главный момент сил инерции.

Для твердых тел $M_C^{\Phi}=-\dfrac{d\vec{L}_C}{dt}=-J_C\dfrac{d\omega}{dt}=-J_C\varepsilon$

6.2. Возможные перемещения. Обобщенные координаты

При изучении равновесия системы тел методами геометрической статики приходится рассматривать равновесие каждого из тел в отдельности. Когда число тел в системе велико, приходится решать большое число уравнений, учитывая реакции внутренних связей.

Применение принципа возможных перемещений позволяет учитывать связи и их реакции с помощью воображаемых перемещений, которые можно сообщить точкам системы, если вывести систему из занимаемого ею положения, что позволяет избежать громоздких вычислений.

Возможными (или виртуальными) перемещениями несвободной механической системы называются воображаемые бесконечно малые перемещения, допускаемые в данный момент наложенными на систему связями.

Возможные перемещения в отличие от действительных перемещений не обязательны, они воображаемы, в то время как действительные перемещения – это перемещения вызванные силами и моментами сил, действующими на систему.

Возможные перемещения точек системы должны быть бесконечно малыми, так как при конечных перемещениях система перейдет в другое положение, где связи и условия равновесия могут быть другими, то есть исследуемая механическая система примет другой вид. Изменятся геометрические размеры, связи и их реакции.

Чтобы названные параметры можно было считать неизменными, возможные перемещения принимаются бесконечно малыми. В этом случае точка системы совершает по траектории очень малое воображаемое перемещение δs, которое в силу его малости можно представить отрезком касательной к траектории.

Возможное перемещение любой точки системы будем изображать элементарным вектором $\delta \vec{s}$, совпадающим с вектором скорости точки. Эту скорость в данном случае также называют возможной скоростью, а не действительной Проекции вектора $\delta \vec{s}$ на декартовы координатные оси называются вариациями декартовых координат.

Например, для кривошипно-шатунного механизма, изображенного на рис.6.2.1 немалые перемещения звеньев нельзя рассматривать как возможные, так как в этих двух положениях условия равновесия механизма под действием сил $\vec{P}$ и $\vec{Q}$ будут уже другими, то есть $\vec{Q} \neq \vec{Q}_1$.

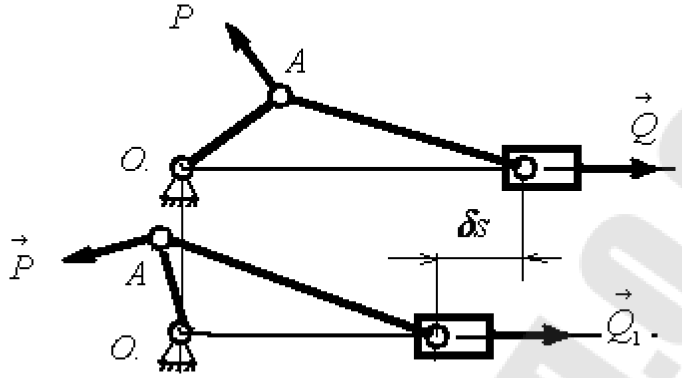

Рис.6.2.1

В общем случае для точек и тел системы может существовать множество возможных различных перемещений. При наличии связей между точками материальной системы, возможные перемещения этих точек связаны между собой определенными зависимостями, уравнениями связей.

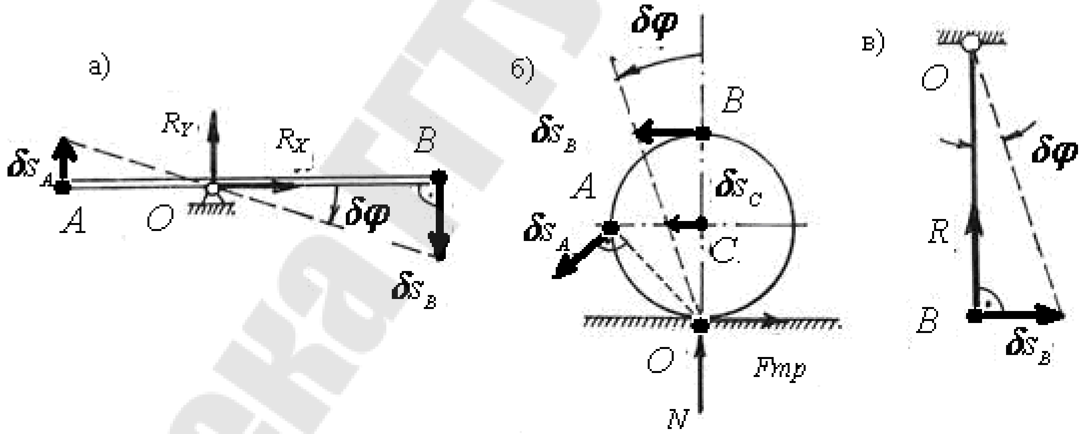

Рис.6.2.2

На рис.6.2.2 дано несколько примеров возможных перемещений точек некоторых материальных систем.

Из этих примеров следует, что возможным перемещением всего тела, вращающегося вокруг оси, является малый угол поворота $\delta\varphi$. Взаимную зависимость возможных перемещения точек его можно определить с помощью этого угла:

$$\delta s_B = OB \cdot \delta\varphi, \quad \delta s_A = OA \cdot \delta\varphi, \quad \delta s_C = OC \cdot \delta\varphi.$$

Однако механическая система, в зависимости от наложенных на нее связей, будет иметь лишь определенное число перемещений, независимых друг от друга. Минимальное количество независимых друг от друга обобщенных координат, которых достаточно, чтобы полностью и однозначно определить положение всех точек системы, называют числом степеней свободы этой системы.

Механизмы, изображенные на рис. 6.2.2 , имеют одну степень свободы, за независимое перемещение можно выбрать $\delta\varphi$.

Шарик на плоскости, если его считать материальной точкой, имеет две степени свободы, (за независимые перемещения можно принять вариации δX и δY).

Свободная материальная точка имеет три степени свободы (независимыми можно считать перемещения вдоль трех взаимно перпендикулярных осей).

Свободное твердое тело имеет шесть степеней свободы (независимыми перемещениями будут: три поступательных перемещения вдоль осей координат и три вращательных вокруг этих осей).

Число степеней свободы системы числу независимых друг от друга параметров, определяющих положение материальной системы. Эти параметры называются обобщенными координатами. Это могут быть обычные декартовы координаты точек, углы поворота, расстояния, площади, объемы и т.д.

Так на рис.6.2.3 положение балки *AB* и всех ее точек вполне определяется углом φ.

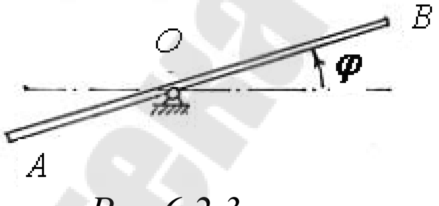

Рис.6.2.3

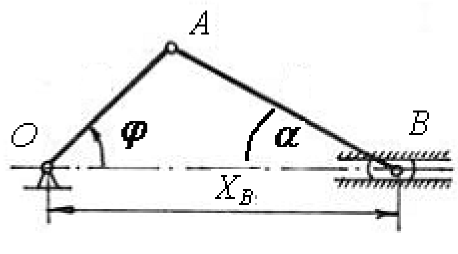

Рис. 6.2.4

Положение точек кривошипно-шатунного механизма (рис. 6.2.4) можно определить заданием угла поворота кривошипа или расстоянием X_B, определяющим положение ползуна B .

Для любой материальной системы можно назначить несколько обобщенных координат. Например, для кривошипно-шатунного механизма (рис. 6.2.4) указаны три обобщенные координаты φ, X_B и α .

Но это не значит, что у механизма три степени свободы, так как одну координату можно определить через другую:

$$X_B = OA\cdot\cos\varphi + AB\cdot\cos\alpha\,;$$

$$Y_A = OA\cdot\sin\varphi = AB\cdot\sin\alpha\,;$$

$$\sin\alpha(\varphi) = \frac{OA\cdot\sin\varphi}{AB};$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin\alpha} = \sqrt{1-\frac{OA\cdot\sin\varphi}{AB}}\,;$$

$$X_B = OA\cdot\cos\varphi + AB\cdot\sqrt{1-\frac{OA\cdot\sin\varphi}{AB}},\ \text{то есть}\ X_B = f(\varphi)$$

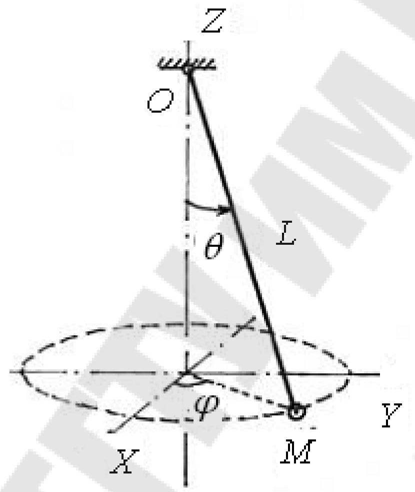

Рис. 6.2.5

Сферический маятник (рис. 6.2.5) имеет две степени свободы, так как координаты точки *M* определяется заданием двух параметров, углов φ и θ:

$$X_M = L\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi;\quad Y_M = L\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi;\quad Z_M = L\cdot\cos\theta\cdot.$$

Пусть материальная система имеет *S* степеней свободы. Обобщенные координаты в общем случае будем обозначать буквой *q*, Положение ее определяется обобщенными координатами: q_j, (j=1,2,3,…,S) .

Нетрудно убедиться, что декартовы координаты *N* точек системы можно определить как функции обобщенных координат и времени:

$$X_k = X_k(q_1, q_2, ..., q_s, t)\,;\ Y_k = Y_k(q_1, q_2, ..., q_s, t)\,;$$
$$Z_k = Z_k(q_1, q_2, ..., q_s, t)\,.$$

Так у сферического маятника (рис. 6.3.3) координаты точки *M:*

$$X_M = X_M(L,\theta,\varphi),\quad Y_M = Y_M(L,\theta,\varphi)\ ,\quad Z_M = Z_M(L,\theta)$$

есть функции координат L, θ , и φ.

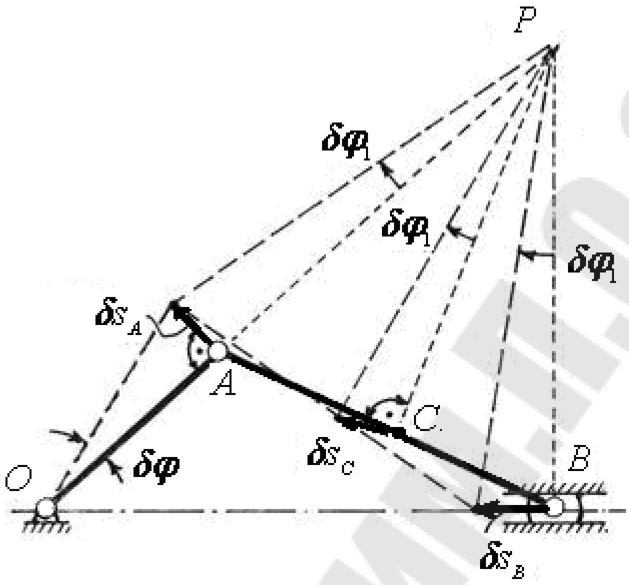

Рис. 6.2.6

Пример. Определить число степеней свободы у кривошипно-шатунного механизма будет (рис. 6.2.6).

Так как направления возможных перемещений имеют направления скоростей, то перемещения точек звена *AB* (рис. 6.2.3) определяются с помощью мгновенного центра скоростей *P* этого звена:

$$\delta s_A = OA\cdot\delta\varphi,\ \delta s_A = PA\cdot\delta\varphi_1,\quad \delta s_C = PC\cdot\delta\varphi_1,\quad \delta s_B = PB\cdot\delta\varphi_1$$

$$OA\cdot\delta\varphi = PA\cdot\delta\varphi_1,\quad \delta\varphi_1 = \frac{OA\cdot\delta\varphi}{PA}\ ,$$

$$\delta s_A = PA\cdot\frac{OA}{PA}\cdot\delta\varphi,\ \ \delta s_C = PC\cdot\frac{OA}{PA}\cdot\delta\varphi,\ \ \delta s_B = PB\cdot\frac{OA}{PA}\cdot\delta\varphi$$

То есть перемещения всех точек механизма можно определить через одно возможное перемещение, через угол поворота кривошипа $\delta\varphi$. Следовательно, кривошипно-ползунный механизм имеет одну степень свободы.

6.3. Принцип возможных перемещений при равновесии материальной системы. Общее уравнение статики.

Пусть материальная система находится в равновесии. Силы, действующие на каждую ее точку, уравновешиваются. Если $\vec{F}_k$ – равнодействующая всех активных сил, приложенных точке M_k, а $\vec{R}_k$ – реакция связей этой точки, то

$$\vec{F}_k + \vec{R}_k = 0$$

Дадим системе какое-нибудь возможное перемещение. Все точки ее получат перемещения $\delta \vec{s}_k$.

Составим уравнение работ на возможных перемещениях сил, приложенных к материальной системе. Работу силы на возможном перемещении точки приложения силы будем называть возможной работой.

Так как силы, приложенные точке M_k, уравновешиваются, то сумма работ этих сил на перемещении $\delta \vec{s}_k$ будет равна нулю:

$$\delta A = \vec{F}_k \cdot \delta \vec{s}_k + \vec{R}_k \cdot \delta \vec{s}_k = 0$$

Или, учитывая свойства скалярного произведения двух векторов

$$\delta A = F_k \cdot \delta s_k \cdot \cos\alpha_k + R_k \cdot \delta s_k \cdot \cos\beta_k = 0,$$

где α_k и β_k – углы между направлением соответствующей силы и направлением вектора возможных перемещений точки M_k.

Следовательно, и сумма работ всех сил, приложенных ко всем точкам, будет равна нулю

$$\sum \delta A = \sum \vec{F}_k \cdot \delta \vec{s}_k + \sum \vec{R}_k \cdot \delta \vec{s}_k = 0, \qquad (6.3.1)$$

или $\sum \delta A = \sum F_k \cdot \delta s_k \cdot \cos\alpha_k + \sum R_k \cdot \delta s_k \cdot \cos\beta_k = 0$.

Для некоторых материальных систем элементарная работа реакций многих связей на возможном перемещении окажется равной нулю. Такие связи называются идеальными связями. К таким связям относятся, например, все связи без трения.

Согласно определению, $\sum \vec{R}_k \cdot \delta \vec{s}_k = \sum R_k \cdot \delta s_k \cdot \cos\beta_k = 0$.

Тогда из уравнений (6.3.1) получим

$$\sum \delta A = \sum \vec{F}_k \cdot \delta \vec{s}_k = 0,$$

или

$$\sum F_k \cdot \delta s_k \cdot \cos\alpha_k = 0. \qquad (6.3.2)$$

Уравнение работ (6.3.2) называют общим уравнением статики.

Из уравнения (6.3.2) следует формулировка принципа возможных перемещений:

при равновесии материальной системы с идеальными и стационарными связями сумма работ всех активных, задаваемых, сил на любом возможном перемещении системы из положения равновесия равна нулю.

Если у системы есть неидеальные связи, например связи с трением, или упругие связи, например - пружина, то в уравнение работ надо добавить возможную работу реакций этих связей, условно отнеся эти силы к силам активным.

Принцип возможных перемещений можно записать в другой форме.

Если возможные перемещения точек определить с помощью возможных скоростей $\vec{V}_k$:

$\delta s_k = V_k \delta t$, где время δt - произвольная бесконечно малая величина, то уравнение работ (6.3.2) запишется так

$$\sum \vec{F}_k \cdot \vec{V}_k \cdot \delta t = \sum F_k \cdot V_k \cdot \cos\alpha_k \cdot \delta t = 0.$$

Так как время $\delta t \neq 0$, поделив на δt, получим

$$\sum \vec{F}_k \cdot \vec{V}_k = \sum F_k \cdot V_k \cdot \cos\alpha_k = 0. \qquad (6.3.3)$$

Уравнение (6.3.3) называется уравнением мощностей. Часто это уравнение бывает более удобным, так как используются конечные величины скоростей, а не бесконечно малые перемещения.

6.4. Принцип возможных перемещений при движении материальной системы. Общее уравнение динамики.

Используя принцип Даламбера изучим движение материальной системы, добавив в уравнения (6.3.2) силы инерции точки M_k. материальную систему, движущуюся под действием некоторых сил, можно рассматривать находящейся в равновесии, если ко всем точкам системы приложить их силы инерции. Значит можно воспользоваться и принципом возможных перемещений.

В уравнение работ (1) добавится еще сумма работ сил инерции точек на их возможных перемещениях:

$$\sum \delta A = \sum \vec{F}_k \cdot \delta \vec{s}_k + \sum \vec{\Phi}_k \cdot \delta \vec{s}_k = 0,$$

или (6.4.1)

$$\sum F_k \cdot \delta s_k \cdot \cos\alpha_k + \sum \Phi_k \cdot \delta s_k \cdot \cos\gamma_k = 0.$$

Здесь γ_k - угол между направлением силы инерции $\vec{\Phi}_k$ и направлением вектора возможных перемещений точки M_k.

Или по принципу возможных скоростей:

$$\sum \vec{F}_k \cdot \vec{V}_k + \sum \vec{\Phi}_k \cdot \vec{V}_k = \sum F_k \cdot V_k \cdot \cos\alpha_k + \sum \Phi_k \cdot V_k \cdot \cos\gamma_k = 0. \quad (6.4.2)$$

Эти уравнения называют общим уравнением динамики. Оно позволяет решать большой класс задач на исследование движения материальных систем.

Из уравнений (6.4.2) и (6.4.3) следует, что в любой момент времени сумма элементарных работ активных сил и сил инерции на любых возможных перемещениях равна нулю при условии, что на систему наложены идеальные и удерживающие связи.

Как и в случае общего уравнения статики, общее уравнении динамики можно использовать для исследования движения механических систем в случае, если не все связи являются идеальными, например, когда имеются связи с трением. Для этого реакции неидеальных связей условно будем считать активными силами.

Пример. Цилиндр катится по плоскости без скольжения. Определить ускорение груза G (рис.6.4.1). Заданы: вес цилиндра – Q, радиус катка– r.

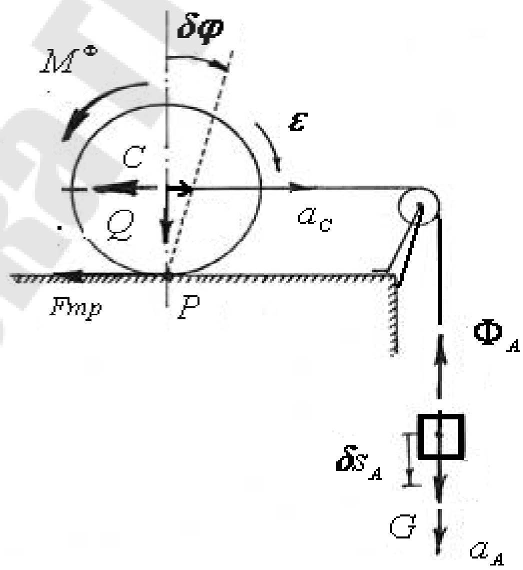

Рис.6.4.1

Решение. Показываем на рисунке все активные силы и реакции внешних связей: G, Q , Fmp , N .

Груз A движется поступательно с ускорением $\vec{a}_C$.

Следовательно, сила инерции груза $\quad \Phi_A = \frac{G}{g} a_A$.

Цилиндр совершает плоскопараллельное движение. Главный вектор сил инерции точек его $\Phi_C = \frac{Q}{g} a_C$.

Главный момент сил инерции цилиндра относительно центральной оси C: $\quad M^\Phi = J_C \cdot \varepsilon$.

Укажем на рисунке силы инерции звеньев и главный момент, учитывая, что они направлены против соответствующих ускорений, и приложенные в центрах масс звеньев:

Сообщим системе возможное перемещение, сдвинув груз A вниз на малую величину δs_A. Центр цилиндра, точка C сместится вправо на величину $\delta s_C = \delta s_A$, а цилиндр повернется вокруг мгновенного центра скоростей P на угол $\delta\varphi = \frac{\delta s_A}{r}$.

Запишем кинематические уравнения $a_C = a_A$, $\varepsilon = \frac{a_C}{r} = \frac{a_A}{r}$ и преобразуем формулы

$$\Phi_C = \frac{Q}{g} a_C = \frac{Q}{g} a_A. \quad M^\Phi = J_C \cdot \varepsilon = \frac{Qr^2}{2g} \cdot \frac{a_A}{r} = \frac{Qr}{2g} a_A$$

Составим уравнение работ

$$\sum \delta A = G \cdot \delta s_A - \Phi_A \cdot \delta s_A - \Phi_C \cdot \delta s_C - Q \cdot \delta s_C - M^\Phi \cdot \delta\varphi = 0$$

Подставим выражения для возможных перемещений

$$\sum \delta A = G \cdot \delta s_A - \Phi_A \cdot \delta s_A - \Phi_C \cdot \delta s_A - Q \cdot \delta s_A - M^\Phi \cdot \frac{\delta s_A}{r} =$$

$$= (G - \Phi_A - \Phi_C - Q - \frac{M^\Phi}{r} \cdot) \delta s_A = 0$$

Так как $\delta s_A \neq 0$, то приравняем нулю выражение в скобках

$$G - \Phi_A - \Phi_C - Q - \frac{M^\Phi}{r} = 0$$

Или

$$G-\frac{G}{g}a_A-\frac{Q}{g}a_A-Q-\frac{1}{r}\frac{Qr}{2g}a_A=G-Q-\frac{1}{g}(G+\frac{3}{2}Q)a_A=0$$

Находим ускорение груза

$$a_A=g\frac{G-Q}{(G+1.5\cdot Q)}$$

6.5. Обобщенные силы

Каждой обобщенной координате q_j , где j=1,2,3,…,S, можно вычислить соответствующую ей обобщенную силу Q_J.

Вычисление производится по такому правилу.

Чтобы определить обобщенную силу Q_j, соответствующую обобщенной координате q_k, надо дать этой координате приращение δq_j, оставив все другие координаты неизменными, вычислить сумму работ всех сил, приложенных к системе, на соответствующих перемещениях точек и поделить ее на приращение координаты δq_J:

$$Q_j=\frac{1}{\delta q_j}\sum\vec{F}_k\cdot\delta\vec{s}_k=\frac{1}{\delta q_j}\sum F_k\cdot\delta s_k\cdot\cos\alpha$$

где δs_k - возможное перемещение точки M_k системы, полученное за счет изменения обобщенной координаты q_j.

Для системы с S степенями свободы радиус- вектор любой точки M_k является функцией обобщенных координат

$$\vec{r}_k=\vec{r}_k(q_1,q_2,...,q_S,t). \qquad (6.5.1)$$

Следовательно, возможное перемещение точки можно представить как полный дифференциал функции (6.5.1) при фиксированном времени

$$\delta\vec{r}_k=\frac{\partial\vec{r}_k}{\delta q_1}\delta q_1+\frac{\partial\vec{r}_k}{\delta q_2}\delta q_2+...+\frac{\partial\vec{r}_k}{\delta a_S}\delta q_S \quad ,$$

или в сокращенной записи

$$\delta\vec{r}_k=\sum_{j=1}^{S}\frac{\partial\vec{r}_k}{\delta q_j}\delta q_j \quad , \ k=1,2,3,...,N.$$

Обобщенную силу можно вычислить иначе:

$$Q_j=\frac{1}{\delta q_j}\sum\vec{F}_k\cdot\delta\vec{r}_k=\sum\vec{F}_k\cdot\frac{\delta\vec{r}_k}{\delta q_j}.$$

Так как $\delta \vec{r}_k$ есть приращение радиус-вектора (6.5.1) за счет приращения координаты q_j при остальных неизменных координатах и времени t, отношение $\dfrac{\delta \vec{r}_k}{\delta q_j}$ можно определять как частную производную $\dfrac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}$. Тогда , учитывая , что

$$\vec{F}_k = F_{Xk}\vec{i} + F_{Yk}\vec{j} + F_{Zk}\vec{k} \quad \text{и} \quad \partial \vec{r}_k = \partial X_k \vec{i} + \partial Y_k \vec{j} + \partial Z_k \vec{k},$$

Получим

$$Q_j = \sum \vec{F}_k \cdot \frac{\delta \vec{r}_k}{\delta q_j} = \sum \left(F_{Xk}\frac{\partial X_k}{\delta q_j} + F_{Yk}\frac{\partial Y_k}{\delta q_j} + F_{Zk}\frac{\partial Z_k}{\delta q_j} \right)$$

где координаты точек – функции обобщенных координат

$$X_k = X_k(q_1, q_2, ..., q_S, t),\ Y_k = Y_k(q_1, q_2, ..., q_S, t),$$
$$Z_k = Z_k(q_1, q_2, ..., q_S, t).$$

Если система консервативная, то есть движение происходит под действием сил потенциального поля, то проекции потенциальных сил

$$F_{Xk} = -\frac{\partial \Pi}{\partial X_k},\quad F_{Yk} = -\frac{\partial \Pi}{\partial Y_k},\quad F_{Zk} = -\frac{\partial \Pi}{\partial Z_k} \quad \text{, где } \Pi = \Pi(X_k, Y_k, Z_k),$$

то

$$Q_j = -\sum \left(\frac{\partial \Pi}{\partial X_k}\frac{\partial X_k}{\delta q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial Y_k}\frac{\partial Y_k}{\delta q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial Z_k}\frac{\partial Z_k}{\delta q_j} \right) = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}.$$

Следовательно, обобщенная сила консервативной системы есть частная производная от потенциальной энергии по соответствующей обобщенной координате со знаком минус.

Размерность обобщенной силы зависит от размерности обобщенной координаты. Так если

размерность $[q]$ – метр, то размерность $[Q]$= Нм/м = Ньютон,

если $[q]$ – радиан, то $[Q]$ = Нм;

если $[q]$ = $м_2$, то $[Q]$=Н/м и т.п.

Пример. По качающемуся в вертикальной плоскости стержню скользит колечко M весом G (рис.6.5.1). Стержень считаем невесомым. Определить обобщенные силы.

Решение. Система имеет две степени свободы. Назначаем две обобщенные координаты ξ и φ.

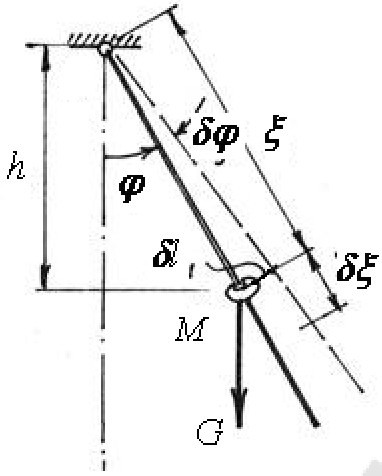

Рис.6.5.1

Найдем обобщенную силу, соответствующую координате ξ. Приращение этой координаты - $\delta\xi$.

Оставляя координату φ неизменной, вычислим работу единственной активной силы G, получим обобщенную силу

$$Q_\xi = \frac{1}{\delta\xi}(G \cdot \delta\xi \cdot \cos\varphi) = G \cdot \cos\varphi$$

Затем сообщаем приращение $\delta\varphi$ координате φ, полагая $\xi = const$.

При повороте стержня на угол $\delta\varphi$ точка приложения силы G, колечко M, переместится на $\delta l = \xi \cdot \delta\varphi$.

Обобщенная сила будет равна

$$Q_\varphi = \frac{1}{\delta\varphi}(-G \cdot \delta l \cdot \sin\varphi) = -\frac{1}{\delta\varphi} G \cdot \xi \cdot \delta\varphi \sin\varphi = -G \cdot \xi \cdot \sin\varphi$$

Так как система консервативная, обобщенные силы можно найти и с помощью потенциальной энергии

$$\Pi = -G \cdot h = -G \cdot \xi \cdot \cos\varphi .$$

Получим

$$Q_\xi = -\frac{\partial \Pi}{\partial \xi} = -G \cdot \cos\varphi \qquad\qquad Q_\varphi = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = -G \cdot \xi \cdot \sin\varphi$$

6.6. Уравнения равновесия Лагранжа

По определению обобщенные силы

$$Q_j = \frac{1}{\delta q_j} \sum \vec{F}_k \cdot \delta \vec{s}_k = \frac{1}{\delta q_j} \sum F_k \cdot \delta s_k \cdot \cos\alpha ,$$

$j = 1,2,3,\ldots,S$,   где S – число степеней свободы.

Если система находится в равновесии, то по принципу возможных перемещений $\sum F_k \cdot \delta s_k \cdot \cos\alpha = 0$

Поэтому при равновесии материальной системы все ее обобщенные силы равны нулю:

$$Q_j = 0, \quad j = 1,2,3,\ldots,S.$$

Эти уравнения, являются уравнениями равновесия в обобщенных координатах и называются уравнения равновесия Лагранжа.

Уравнения равновесия Лагранжа также позволяют решать задачи статики.

Если система консервативная, то $Q_j = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_j}$.

Значит, в положении равновесия $\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0$.

То есть в положении равновесия материальной системы ее потенциальная энергия, либо максимальна, либо минимальна, т.е. функция $\Pi(q)$ имеет экстремум.

Это очевидно из анализа простейшего примера (рис.6.6.1). Потенциальная энергия шарика в положении M_1 имеет минимум, в положении M_2 – максимум.

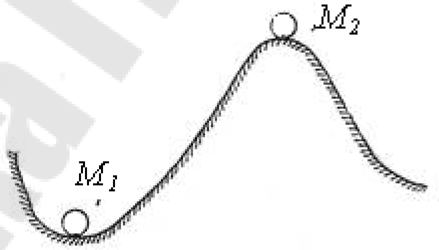

Рис.6.6.1

Можно заметить, что в положении M_1 равновесие будет устойчивым; в положении M_2 – неустойчивым.

Равновесие считается устойчивым, если тело находящееся в положении равновесия сместить на малое расстояние, после чего тело будет стремиться вернуться в исходное положение

Можно доказать (теорема Лагранжа-Дирихле), что если в положении равновесия консервативной системы ее потенциальная энергия имеет минимум, то это положение равновесия устойчиво.

Для консервативной системы с одной степенью свободы условие минимума потенциальной энергии, а значит и устойчивости положения равновесия, определяется, второй производной, ее значением в положении равновесия,

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} \triangleright 0 \ . \qquad (6.6.1)$$

Пример. Стержень *OA* весом *G* может вращаться в вертикальной плоскости вокруг оси *O* (рис.6.6.2). Найдем и исследуем устойчивость положений равновесия.

Решение. Стержень имеет одну степень свободы. Обобщенная координата – угол φ.

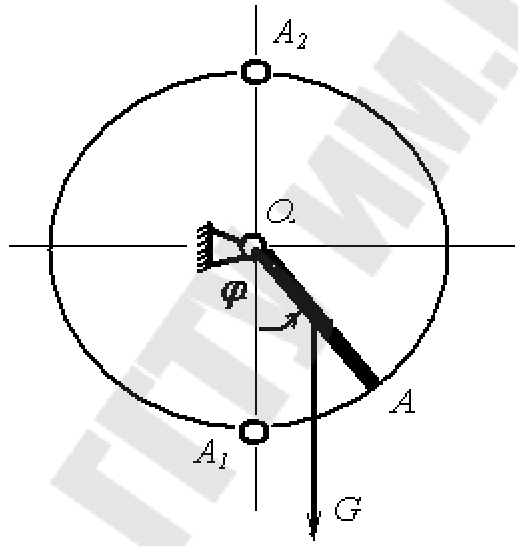

Рис.6.6.2

Относительно нижнего, нулевого, положения потенциальная энергия стержня равна

$$\Pi = G \cdot h = G \cdot \left(\frac{l}{2} - \frac{l}{2}\cos\varphi \right) = \frac{1}{2} \cdot G \cdot l \cdot (1 - \cos\varphi)$$

В положении равновесия должно выполняться условие

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = \frac{1}{2} G \cdot l \cdot \sin\varphi = 0$$

Из этого условия имеем два решения, то есть, имеем два положения равновесия, соответствующие углам $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_1 = \pi$ (положения стержня OA_1 и OA_2).

Исследуем устойчивость этих положений равновесия.

Находим вторую производную

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{2} G \cdot l \cdot cos\varphi .$$

Здесь при $\varphi = \varphi_1 = 0$ получаем $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{2} G \cdot l \rhd 0$. Следовательно, это положение равновесия устойчиво.

При $\varphi = \varphi_2 = \pi$ имеем, $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = -\frac{1}{2} G \cdot l \lhd 0$. То есть второе положение равновесия – неустойчиво.

По той же методике, по которой вычислялись обобщенные силы Q_j, соответствующие активным, задаваемым, силам, определяются и обобщенные силы Q_j^{Φ}, соответствующие силам инерции точек системы:

$$Q_j^{\Phi} = \frac{1}{\delta q_j} \sum \Phi_k \cdot \delta s_k \cdot \cos\gamma .$$

Или

$$Q_j^{\Phi} = \frac{1}{\delta q_j} \sum \vec{\Phi}_k \cdot \delta \vec{r}_k = \sum \vec{\Phi}_k \frac{\cdot \delta \vec{r}_k}{\delta q_j} .$$

Так как

$$\vec{\Phi}_k = -m_k \vec{a}_k = -m_k \frac{d \vec{V}_k}{dt} \quad ,$$

то обобщенная сила инерции будет равна

$$Q_j^{\Phi} = -\sum m_k \frac{d \vec{V}_k}{dt} \cdot \frac{\delta \vec{r}_k}{\delta q_j}$$

Сложим обобщенные силы

$$Q_j + Q_j^{\Phi} = \frac{1}{\delta q_j} \left(\sum F_k \cdot \delta s_k \cdot \cos\alpha \right) + \frac{1}{\delta q_j} \left(\sum \Phi_k \cdot \delta s_k \cdot \cos\gamma \right) =$$

$$= \frac{1}{\delta q_j} \left(\sum F_k \cdot \delta s_k \cdot \cos\alpha + \sum \Phi_k \cdot \delta s_k \cdot \cos\gamma \right)$$

Или

$$(Q_j + Q_j^{\Phi}) \delta q_j = \sum F_k \cdot \delta s_k \cdot \cos\alpha + \sum \Phi_k \cdot \delta s_k \cdot \cos\gamma$$

Но на основании общего уравнения динамики, правая часть полученного выражения равна нулю.

Так как все δq_j (j = 1,2,3,…,S) отличны от нуля, то

$$Q_j + Q_j^{\Phi} = 0. \quad (j = 1,2,3,\ldots, S), \qquad (6.7.1)$$

Полученное уравнение называется общим уравнением динамики в обобщенных силах.

6.8 Уравнения Лагранжа второго рода.

Уравнения Лагранжа второго рода представляют собой дифференциальные уравнения движения несвободной механической системы, составленные в обобщенных координатах.

Пусть система имеет S степеней свободы. Положение любой точки системы определяется её радиус-вектором

$$\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, q_2, \ldots, q_S)$$

Возможное перемещение этой точки

$$\delta \vec{r}_k = \sum_{j=1}^{S} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j \quad , \ k = 1,2,3,\ldots, N. \qquad (6.8.1)$$

Общее уравнение динамики (6.7.1)запишем в виде

$$\sum \left(\vec{F}_k - m_k \frac{d\vec{V}_k}{dt} \right) \cdot \delta \vec{r}_k = 0$$

(6.8.2)

Подставим (6.8.1) в (6.8.2)

$$\sum \left(\vec{F}_k - m_k \frac{d\vec{V}_k}{dt} \right) \cdot \sum_{j=1}^{S} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j = 0$$

Преобразуем выражение, изменив порядок суммирования

$$\sum_{j=1}^{S} \left[\sum \vec{F}_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} - \sum m_k \frac{d\vec{V}_k}{dt} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0$$

Здесь $\sum \vec{F}_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\delta q_j} = Q_j$.

Тогда $$\sum_{j=1}^{S} \left[\sum Q_j - \sum m_k \frac{d\vec{V}_k}{dt} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0 \qquad (6.8.3)$$

Учитывая правила вычисления производной от произведения двух функций, преобразуем выражение,

$$m_k \frac{d\vec{V}_k}{dt}\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(m_k \vec{V}_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \right) - m_k \vec{V}_k \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \right) \qquad (6.8.4)$$

Так как

$$\vec{V}_k = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_S}\frac{dq_S}{dt} + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t} = \sum_{j=1}^{S} \frac{\partial \vec{r}_k}{\delta q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t}$$

Здесь $\dot{q}_j = \dfrac{dq_j}{dt}$ - обобщенная скорость.

Так как скорость точки равна

$$\vec{V}_k = \sum_{j=1}^{S} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}\frac{\delta q_j}{dt} + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t} = \sum_{j=1}^{S} \frac{\partial \vec{r}_k}{\delta q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t},$$

то
$$\frac{\partial \vec{V}_k}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}$$

Вычислим далее

$$\frac{\partial \vec{V}_k}{\partial q_j} = \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_1 \partial q_j}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_2 \partial q_j}\dot{q}_2 + \ldots + \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_S \partial q_j}\dot{q}_S + \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial t \partial q_j}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} = \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_1 \partial q_j}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_2 \partial q_j}\dot{q}_2 + \ldots + \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_S \partial q_j}\dot{q}_S$$

Тогда

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} = \frac{\partial \vec{V}_k}{\partial q_j}$$

Перепишем (6.8.4)

$$m_k \frac{d\vec{V}_k}{dt}\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(m_k \vec{V}_k \frac{\partial \vec{V}_k}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_k \vec{V}_k \frac{\partial \vec{V}_k}{\partial q_j},$$

$$m_k \vec{V}_k \frac{\partial \vec{V}_k}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{m_k V_K^2}{2} \right),$$

$$m_k \frac{d\vec{V}_k}{dt}\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{m_k V_K^2}{2} \right) \right) - m_k \vec{V}_k \frac{\partial \vec{V}_k}{\partial q_j},$$

$$m_k \vec{V}_k \frac{\partial \vec{V}_k}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{m_k V_K^2}{2}\right),$$

$$m_k \frac{d\vec{V}_k}{dt}\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{m_k V_K^2}{2}\right)\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{m_k V_K^2}{2}\right).$$

Суммируем полученное выражение по точкам системы

$$\sum_{j=1}^{S}\left\{\sum\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{m_k V_K^2}{2}\right)\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{m_k V_K^2}{2}\right)\right] - -Q_j\right\}\delta q_j = 0.$$

Преобразуем

$$\sum_{j=1}^{S}\left\{\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\sum\left(\frac{m_k V_K^2}{2}\right)\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum\frac{m_k V_K^2}{2}\right)\right] - Q_j\right\}\delta q_j = 0.$$

Так как $\sum \frac{m_k V_K^2}{2} = T$ кинетическая энергия системы , то

$$\sum_{j=1}^{S}\left\{\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j}\right] - Q_j\right\}\delta q_j = 0.$$

Поскольку $\delta q_j \neq 0$, то получаем в окончательном виде дифференциальные уравнения движения в обобщенных координатах (уравнения Лагранжа второго рода).

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1,2,3,\dots,S.$$

Число уравнений равно числу степеней свободы.

Если система консервативная и движется под действием сил потенциального поля, когда обобщенные силы $Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}$, уравнения Лагранжа можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}.$$

Уравнения Лагранжа обладают целым рядом достоинств, в сравнении с другими способами исследования движения систем. Основные достоинства: методика составления уравнений одинакова во всех задачах, реакции идеальных связей не учитываются при решении задач.

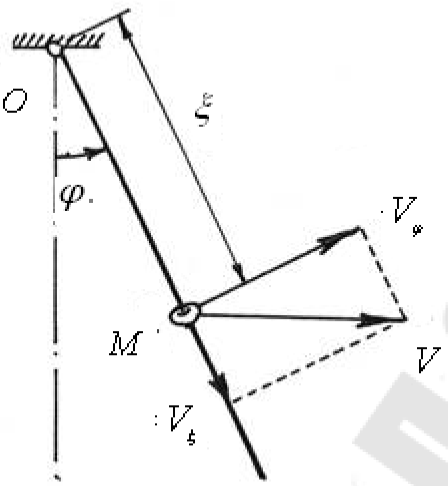

Рис. 6.6.1

Эти уравнения можно использовать для исследования не только механических, но и других физических систем (электрических, электромагнитных, оптических и др.).

Пример. Составим дифференциальные уравнения движения е колечка *M* на качающемся стержне (рис.6.6.1).

Обобщенные координаты назначены: ξ и φ.

Обобщенные силы определены: $Q_\xi == G \cdot \cos\varphi$ и $Q_\varphi = -G \cdot \xi \cdot \sin\varphi$

Кинетическая энергия колечка равна $T = \dfrac{G}{2g} V^2$.

Где $V^2 = V_\xi^2 + V_\varphi^2$, $V_\xi = \dot{\xi}$, $V_\varphi = \xi \cdot \dot{\varphi}$.

Поэтому

$$T = \frac{G}{2g}(\xi^2 + (\xi \cdot \dot{\varphi})^2 = \frac{G}{2g}\left[\xi^2 + (\xi \cdot \dot{\varphi})^2\right].$$

Составляем два уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \xi} = Q_\xi \quad \text{и} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi.$$

Так как

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} = \frac{G}{g}\dot{\xi}, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}}\right) = \ddot{\xi}, \qquad \frac{\partial T}{\partial \xi} = \xi \dot{\varphi}^2,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{G}{g}\xi^2 \dot{\varphi}, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{G}{g}\left(2\xi \dot{\xi} \dot{\varphi} + \xi^2 \ddot{\varphi}\right), \qquad ,\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$$

то получаем после подстановки

$$\frac{G}{g}\ddot{\xi} - \frac{G}{g}\varphi^2 \xi = \dot{G} \cdot \cos\varphi, \qquad \frac{G}{g}\left(2\dot{\xi}\dot{\varphi} + \xi\ddot{\varphi}\right) = -G \cdot \xi \cdot \sin\varphi.$$

Или

$$\ddot{\xi} - \varphi^2 \xi - q \cdot \cos\varphi = 0 \quad \text{и} \quad .\xi\ddot{\varphi} + 2\dot{\xi}\dot{\varphi} + q \cdot \sin\varphi = 0.$$

Получили два нелинейных дифференциальных уравнения второго порядка, для решения которых нужны специальные методы.

7. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Рекомендуемый список учебников, имеющихся в фонде библиотеки ГГТУ:

1. Аркуша А. И. Руководство к решению задач по теоретической механике: Учеб. пособие для средних проф. учеб. заведений. -4-е изд., испр. -М.: Высш. шк., 2000. -336с.
2. Бать М. И. и др. Теоретическая механика в примерах и задачах: [Учеб. пособие для вузов]. Т. 1: Статика и кинематика / Бать М. И., Джанелидзе Г. Ю., Кельзон А. С. -9-е изд., перераб. -М.: Наука, 1990. -670с.
3. Бутенин Н. В. и др. Курс теоретической механики: Учебник для студ. втузов. Т. 1: Статика и кинематика / Бутенин Н. В., Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. -4-е изд., испр. -М.: Наука, 1985. -239с.: ил.*
4. Воронков И. М. Курс теоретической механики: [Учебник для студ. втузов]. -12-е изд., стер. -М.: Наука, 1965. -596с.
5. Гернет М. М. Курс теоретической механики: Учебник для вузов. -5-е изд., испр. -М.: Высш. шк., 1987. -344с.: ил.*
6. Голубев Ю. Ф. Основы теоретической механики: Учебник для ст-ов втузов. -М.: Изд-во МГУ, 1992. -526с. -Библиогр.: с. 524-

525.
7. Никитин Н. Н. Курс теоретической механики: Учебник для ст-ов машиностроит. и приборостроит. спец. вузов. -5-е изд., перераб. и доп. -М.: Высшая школа, 1990. -607 с.: ил.
8. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учеб. пособие для втузов / Под ред. А. А. Яблонского. -4-е изд., перераб. и доп. -М.: Высш. шк., 1985. 367с.: ил. -Библиогр.: с. 363.*
9. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики: Учеб. для втузов / С. М. Тарг. -10-е изд., перераб. и доп.. -М.: Высш. шк., 1986. -415с.:
10. Яблонский А. А., Никифорова В. М. Курс теоретической механики. Часть 1. Статика. Кинематика: Учебник для техн. вузов. Изд. 6-е, испр. -М.: Высш. шк., 1984. -343 с.
11. Теоретическая механика. Программа, методические указания и контрольные задания для студентов заочных специальностей. Иванов-Франковск.; ИФИИГ, 1990.

Рекомендуемый список методических пособий, имеющихся в фонде библиотеки ГГТУ:

1. Теоретическая механика: пособие по одноимённому курсу для студентов инж.-техн. Специальностей заочной формы обучения/Андреев С.Ф, Каф. "Техническая механика". -Гомель: ГГТУ,, 2006.-44 с.
2. Методические указания и контрольные задания для студентов-заочников по теоретической механике. Часть 2. Кинематика. / Шабловский О. Н., -Гомель, ГПИ, 1991. -29 с.
3. . Методические указания к практическим занятиям по теме "Плоскопараллельное движение твердого тела" курса "Теоретическая механика" для студентов машиностроительных специальностей. / Андреев С. Ф., -Гомель, ГПИ, 1985. -38 с.

СОДЕРЖАНИЕ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Курс лекций
по одноименной дисциплине для студентов инженерно-технических специальностей заочной формы обучения

Часть 3/2 – Динамика системы

Составитель: Андреев Сергей Филиппович

Подписано к размещению в электронную библиотеку
ГГТУ им. П. О. Сухого в качестве электронного
учебно-методического документа 09.12.14.

Рег. № 145Е.
http://www.gstu.by