СРАВНЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ФУНКЦИЯ ФОРМЫ ПРИ КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНОМ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТОНКИХ ПЛАСТИНОК

А. А. Кухаренко, Д. А. Левкович

Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого, Беларусь

Научный руководитель К. С. Курочка

Одним из широко распространенных элементов конструкций являются тонкие пластины, которые исследуются на прогиб. Для решения подобных задач используется метод конечных элементов (МКЭ).

МКЭ основан на разбиении исследуемой области решения задачи на подобласти, так называемые конечные элементы, которые представляют собой простейшие геометрические формы. Самыми популярными формами являются треугольники, так как с помощью них можно построить сетку, которая сможет покрыть почти любую исследуемую геометрическую форму. Очень важно подобрать такие функции формы, которые будет давать наиболее точный результат для заданного типа конечного элемента.

Было рассмотрено несколько функций формы в виде полиномов.

Для проведения исследований была построена математическая модель тонкой пластины (рис. 1.

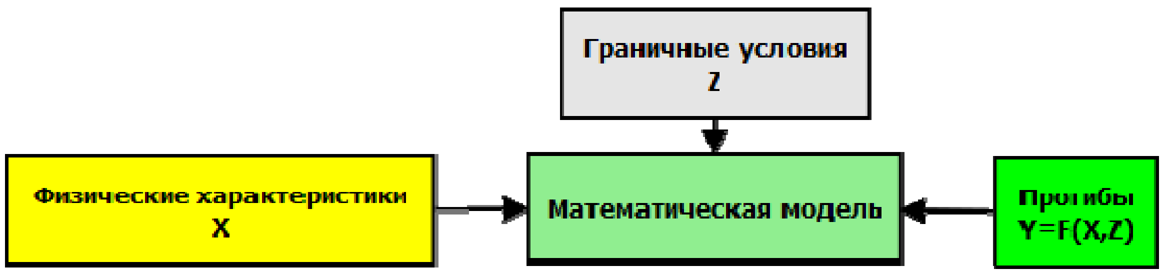

Рис. 1. Схема математической модели

В качестве физических характеристик пластины выступают геометрические размеры, модуль упругости, коэффициент Пуассона.

Граничные условия представляют собой условия закрепления тонкой пластины в пространстве. Без учета граничных условий задача не имеет решения.

Для тонких пластин могут задаваться следующие граничные условия [1], [6]:

1) защемление;

2) свободное опирание;

3) шарнирное закрепление.

Принимаются гипотезы Кирхгофа:

1. *Гипотеза о прямой нормали*, в соответствии с которой нормаль к серединной плоскости остается прямой и нормальной к изогнутой серединной поверхности, длина ее не меняется.

2. *Гипотеза о нерастяжимости серединной плоскости*. На основании этой гипотезы считается, что серединная плоскость при изгибе не меняет своей формы и размеров.

3. *Гипотеза о ненадавливании слоев пластинки*: давление слоев пластинки друг на друга перпендикулярно серединной плоскости считается малым и им можно пренебречь.

В силу принятых гипотез, напряжения и деформации будут иметь только три ненулевых компоненты:

$$\{\varepsilon\}^T = \left\{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}\right\},\ \{\sigma\}^T = \left\{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}\right\}, \tag{1}$$

а прогибы будут представлять собой функцию только x и y:

$$\omega(x,y) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 xy + \alpha_5 y^2 + \ldots = [P]\{\alpha\}. \tag{2}$$

Воспользовавшись формулами Коши, получим [1]:

$$\{\varepsilon\}^T = \left\{-\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} \quad -\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} \quad 2\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y}\right\}. \tag{3}$$

Воспользуемся вариационным принципом Лагранжа:

$$\{\tilde{g}\}\{R\} = \iiint\limits_V \{\tilde{\varepsilon}\}^T\{\sigma\}dV, \tag{4}$$

где $\{\tilde{g}\}$ – вектор узловых перемещений,

$$\{g\}^T = \left\{\omega \quad \theta_x \quad \theta_y\right\}, \tag{5}$$

где $\theta_x = \dfrac{\partial\omega}{\partial x}, \theta_y = \dfrac{\partial\omega}{\partial y}$; {R} – вектор узловых усилий; ~ – обозначает вариацию.

Вариационный принцип Лагранжа приравнивает внутренние работы к внешним.

Между деформациями и напряжениями справедлив закон Гука:

$$\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\}. \tag{6}$$

где $[E]$ – матрица упругости, которая равна

$$[E] = \frac{E \cdot h^2}{12(1-\mu)} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix}, \qquad (7)$$

здесь Е – модуль упругости; μ – коэффициент Пуассона; h – толщина пластины.

Узловые перемещения можно представить в виде:

$$\{g\} = [A]\{a\}. \qquad (8)$$

Поскольку (8) имеет место для любой точки конечного элемента, для его вершин будем иметь:

$$\{g^{\text{узл}}\} = [B]\{a\}, \qquad (9)$$

где $[B]^T = \{g_i \quad g_j \quad g_k\}$, где i, j, k – узлы треугольного конечного элемента.

Из (9) следует:

$$\{a\} = [B]^{-1}\{g^{\text{узл}}\}. \qquad (10)$$

Воспользовавшись уравнениями Коши и продифференцировав (2), получаем

$$\{\varepsilon\} = [C]\{\alpha\}, \qquad (11)$$

где $[C]^T = \left[-\frac{\partial^2 [P]}{\partial x^2} \quad -\frac{\partial^2 [P]}{\partial y^2} \quad 2\frac{\partial^2 [P]}{\partial x \partial y} \right]$.

Подставив (10) в (11), имеем:

$$\{\varepsilon\} = [C][B]^{-1}\{g\}^{\text{узл}}. \qquad (12)$$

С учетом (12) формула (6) примет вид:

$$\{\sigma\} = [E][C][B]^{-1}\{g\}^{\text{узл}}.$$

Матрица [B] называется координатной матрицей. Подставляя в нее координаты узлов i, j и k, КЭ определяется в пространстве.

Поскольку матрица [B] и вектор узловых перемещений $\{g\}^{\text{узл}}$ не зависят от координат, то их можно вынести за знак интеграла. Тогда проинтегрировав (3), получим

$$\left[B^{-1}\right]^T \iiint_V [C]^T [E][C] dV \left[B^{-1}\right]\{g\} = \{R\}. \qquad (13)$$

Это и есть окончательное выражение для математической модели. Решая его получаем значения прогибов.

В выражении (13) видно, что произведен переход от дифференциальных уравнений к интегрированию функций и далее к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

$$\left[B^{-1}\right]^{T}\iiint\limits_{V}[C]^{T}[E][C]dV\left[B^{-1}\right]=[K]. \quad (14)$$

Выражение (14) представляет собой окончательное выражение для матрицы жесткости элемента. Подставляя в выражение (14) координаты узлов, а также выражение для полинома и производя численное интегрирование, получаем итоговую матрицу жесткости конечного элемента.

Все полученные соотношения записаны в матричном виде, что облегчает написание программ. Кроме того, полученные соотношения приводят в итоге к решению СЛАУ с помощью ЭВМ.

В ходе проведения экспериментов с различными функциями формы получены различные данные. Верификация производилась с использованием решения Навье.

Литература

225. Зинкевич, О. Метод конченых элементов / О. Зинкевич. – Москва : Мир, 1974. – 464 с.
226. Тимошенко, С. П. – Пластины и оболочки : пер. с англ. / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер ; под ред. Г. С. Шапиро. – Москва : Гос. издат. физ.-мат. лит-ры, 1963. – 636 с.
227. Д. Норри, Ж. де Фриа. Введение в метод конечных элементов.
228. Сегерлинд, Л. Д. Применение метода конечных элементов / Л. Д. Сегерлинд. – Москва : Мир, 1976. – 514 с.
229. Варвак П. М. Справочник по теории упругости / П. М. Варвак, А. Ф. Рябова. – Киев : Будівельник, 1971. – 418 с.
230. Ильин, В. П. Численные методы решения задач строительной механики : справ. пособие / В. П. Ильин, В. В. Карпов, А. М. Масленников ; под общ. ред. В. П. Ильина. – Минск : Выш. шк., 1990. – 349 с. : ил.