МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОГИБОВ ТОНКИХ ПЛАСТИНОК С ПРИМЕНЕНИЕМ ТРЕУГОЛЬНЫХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

П. П. Аниховский

Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого, Беларусь

Руководитель К. С. Курочка

Тонкие пластинки находят широкое применение в различных областях техники, строительстве, самолето- и ракетостроении. Это объясняется рядом их положительных качеств: высокой удельной жесткостью, хорошими тепло- и звукоизоляционными свойствами, высокими аэродинамическими качествами. Изучение их динамики и устойчивости при различных условиях является важным аспектом их применения и использования. Однако расчет и моделирование таких пластинок при помощи аналитических методов сопряжен с большими трудностями. Поэтому более эффективным и целесообразным является использование различных численных методов, в частности метода конечных элементов, который является одним из наиболее эффективных и удобных методов для компьютерной реализации [1].

В теории изгиба тонких пластинок дифференциальное уравнение изогнутой поверхности имеет вид (уравнение Лагранжа–Жермен):

$$\frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial y^4} = \frac{q(x,y)}{D}. \tag{1}$$

На основании гипотез Кирхгофа [1], прогиб пластинки однозначно определяется прогибом срединной плоскости пластинки $w(x, y)$, а также углами поворота нормалей, которые равны:

$$\theta x = \frac{\partial w(x,y)}{\partial x}; \quad \theta y = \frac{\partial w(x,y)}{\partial y}. \tag{2}$$

При расчетах тонких пластинок чаще всего используют треугольные или прямоугольные конечные элементы. Треугольная дискретизация является более универсальной, так как треугольные конечные элементы позволяют аппроксимировать пластинку или плиту практически любой конфигурации, сгустить сетку в местах концентрации напряжений, смоделировать отверстие и т. д. На практике используют элементы с 6, 9, 18, 21 и более степенями свободы [2].

Рассмотрим треугольный конечный элемент с 9-ю степенями свободы (рис. 1).

Попытка непосредственного получения матрицы жесткости для такого элемента с произвольной ориентацией относительно осей координат приводит к очень громоздким вычислениям. Проще сначала получить матрицу жесткости в местной системе координат, одна из осей которой направлена вдоль одной из сторон треугольника, а затем сделать переход к основной системе координат, преобразовав соответствующим образом матрицу жесткости [3].

Выражение для нормального прогиба можно задать в виде полинома 3-й степени:

$$w(x,y) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2 + a_7 x^3 + a_8(xy^2 + x^2 y) + a_9 y^3. \tag{3}$$

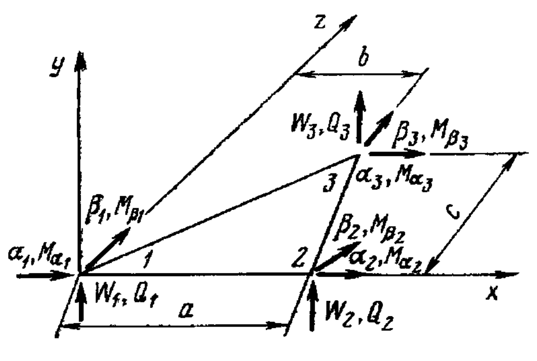

Рис. 1. Схема треугольного конечного элемента с 9-ю степенями свободы в узле

В матричной форме выражение для прогиба можно представить в виде:

$$W = [P(x^*, y^*)]\{a\}. \tag{4}$$

Дифференцируя (3) и найдя частные и смешанные производные второго порядка, получим деформации, которые в матричной форме можно представить в виде [2]:

$$B = [b(x, y)]\{a\}. \tag{5}$$

Вектор $\{a\}$ определяется граничными условиями. С этой целью составляют выражения перемещений для принятых узловых точек:

$$W = [A]\{a\}. \tag{6}$$

Матрицу $[A]$ строят подстановкой координат узлов в полином в выражении (4).

Согласно принципу возможных перемещений [2], матрица жесткости для одного конечного элемента имеет вид:

$$[K] = \int_V ([A]^{-1})^T [B]^T [C][B][A]^{-1} dV, \tag{7}$$

где $[C]$ – матрица жесткости бесконечно малого конечного элемента.

Матрица $[K]$ позволяет связать обобщенные узловые усилия элемента с его узловыми перемещениями:

$$\{R\} = [K]\{q\}, \tag{8}$$

где $\{R\}$ – вектор узловых усилий элемента; $\{q\}$ – вектор узловых перемещений.

Для перехода к основной системе координат введем матрицу направляющих косинусов:

$$[l] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & \cos(\psi) \\ 0 & -\cos(\psi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix}, \tag{9}$$

где φ – угол поворота между осью x местной системы координат и осью x' глобальной системы координат; ψ – угол поворота между осью y местной системы координат и осью y' глобальной системы координат.

Матрица $[l]$ определяет положение местной системы координат конечного элемента xy относительно глобальной системы координат $x'y'$. С помощью этой матрицы можно связать узловые усилия и перемещения элемента в глобальной системе координат с усилиями и перемещениями в местной системе координат:

$$\{R\} = [T]\{R'\}, \{q\} = [T]\{q'\}, \tag{10}$$

где

$$[T] = \begin{bmatrix} [l] & 0 & 0 \\ 0 & [l] & 0 \\ 0 & 0 & [l] \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Подставив выражение (10) в (8) и упростив, получим матрицу жесткости треугольного элемента пластинки в глобальной системе координат:

$$[K'] = [T]^{-1}[K][T]. \tag{12}$$

Для моделирования прогибов пластинок указанными конечными элементами было разработано и верифицировано соответствующее программное обеспечение. Были проведены вычислительные эксперименты при различных способах закрепления краев пластинки и при наличии в ней отверстий различной формы, а также реализована графическая интерпретация результатов расчетов через построение линий уровня для прогибов и углов поворота.

Разработанный программный комплекс позволяет эффективно дискретизировать пластинки различной формы на сетку треугольных конечных элементов, и наблюдать характер прогибов при варьировании граничных условий, нагрузок и размеров конечных элементов.

Литература

221. Варвак, П. М. Справочник по теории упругости (для инженеров-строителей) / П. М. Варвак, А. Ф. Рябов. – Киев : Будивельник, 1971. – 418 с.
222. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L. Vol. 2. The finite element method. Solid mechanics. – Oxford, 2000. – 347 p.
223. Постнов, В. А. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций / В. А. Постнов, И. Я. Хархурим. – Ленинград : Судостроение, 1974. – 344 с.