МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ КРИТЕРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ГУРВИЦА В ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

Д. В. Комнатный

Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого», кафедра «Теоретические основы электротехники»

В курсах различных дисциплин, которые изучаются в техническом университете, широко представлены вопросы устойчивости движения тех или иных динамических систем. При рассмотрении этих вопросов широкое применение находит критерий устойчивости Гурвица.

Доказательство критерия Гурвица зачастую не приводится ни в учебной литературе, ни в лекционных курсах. Объясняется это тем, что доказательство требует или глубоких экскурсов в алгебру, или последовательного изучения теории устойчивости движения, включая методы Ляпунова. Указанные разделы имеются в программах подготовки специалистов далеко не всех технических специальностей. В результате критерий Гурвица предстает перед студентами как немотивированное и недоказанное правило, которое остается только запомнить и отвечать наизусть. Это создает немалые психологические затруднения перед студентом, начинающим изучать элементы теории устойчивости.

В докладе предлагается методика изучения критерия Гурвица, в которой использован метод физико-математических аналогий между динамическими системами различной природы и электрическими цепями. Найденные аналогии не могут являться строгим доказательством рассматриваемого критерия, но оказываются аргументом в пользу его справедливости, основанном на физических соображениях и на уже освоенном студентами материале.

В предлагаемой методике рассматривается одна из возможных формулировок критерия Гурвица. Характеристический многочлен рассматриваемой динамической системы записывается в виде суммы двух многочленов, первый из которых включает нечетные степени p, а второй четные степени p.

$$b_5 p^5 + b_4 p^4 + b_3 p^3 + b_2 p^2 + b_1 p + b_0 = M(p) + N(p) = 0 . \quad (1)$$

$$M(p) = b_4 p^4 + b_2 p^2 + b_0 . \quad (2)$$

$$N(p) = b_5 p^5 + b_3 p^3 + b_1 p . \quad (3)$$

Отношение многочленов (3) и (2) раскладывается в цепную дробь:

$$\frac{N(p)}{M(p)} = c_1 p + \cfrac{1}{c_2 p + \cfrac{1}{c_3 p + \cfrac{1}{}}}. \tag{4}$$

Если исходный многочлен (1) и, соответственно, динамическая система, устойчивы, то все коэффициенты разложения c_i положительны.

Формально полагая $p = 1$, получаем цепную дробь, которая выражает входное сопротивление резистивной лестничной электрической цепи.

$$R = c_1 + \cfrac{1}{c_2 + \cfrac{1}{c_3 + \cfrac{1}{}}}. \tag{5}$$

Коэффициенты дроби (5) имеют физический смысл сопротивления и проводимости ветвей цепи. Между цепными дробями (4) и (5) и обоими объектами таким образом установлено взаимно однозначное соответствие: электрическая резистивная лестничная цепь соответствует некоторой динамической системе, поскольку сопротивления и проводимости ветвей цепи численно равны коэффициентам разложения характеристического многочлена динамической системы в цепную дробь. Если какие-то сопротивления или проводимости в цепи, полученной указанным способом, оказываются отрицательными, то это означает, что в ветвях цепи не поглощается, а генерируется электрическая энергия. Аналогично в неустойчивых динамических системах случайные отклонения не затухают, а нарастают. Поэтому описанная аналогия может служить основанном на физических соображениях аргументом в пользу справедливости критерия Гурвица.

Из теории синтеза электрических цепей – двухполюсников известно, что функция вида

$$F(p) = \frac{b_4 p^4 + b_2 p^2 + b_0}{b_5 p^5 + b_3 p^3 + b_1 p} \tag{6}$$

является реактивной рациональной функцией и может представлять собой входное сопротивление реактивного двухполюсника, составленного из конденсаторов и идеальных катушек индуктивности. Также известно, что если функцию (6) разложить в цепную дробь

$$Z(p) = Z_1 + \cfrac{1}{Y_2 + \cfrac{1}{Z_3 + \cfrac{1}{Y_4 + \cfrac{1}{Z_5 + \cdots}}}} = L_1 p + \cfrac{1}{C_2 p + \cfrac{1}{L_3 p + \cfrac{1}{C_4 p + \cfrac{1}{L_5 p + \cdots}}}}, \tag{7}$$

то пассивный электрический двухполюсник может быть реализован методом Кауэра, если все коэффициенты разложения в (7), имеющие смысл индуктивности и емкости ветвей цепи, положительны. Отрицательные значения индуктивности и емкости в этом методе синтеза электрических цепей считаются нереализуемыми.

Если сравнить цепные дроби (4) и (7), то нельзя не заметить их структурное сходство. Поэтому допустимо утверждать, что устойчивой динамической системе соответствует реализуемый реактивный двухполюсник, а неустойчивой – не реализуемый. Эта аналогия имеет скорее иллюстративный характер, т. к. условия реализуемости функции (6) электрической цепью основаны на критерии Гурвица.

Описанные в докладе соответствия и аналогии могут оказаться полезными для осознанного усвоения студентами смысла и содержания критерия Гурвица и для повышения любознательности студентов, расширения их кругозора, выявления междисциплинарных связей.