Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Теоретические основы электротехники»

С. А. Грачев, В. В. Соленков, Я. О. Шабловский

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

ПРАКТИКУМ
по курсу «Теория линейных электрических цепей»
для студентов электротехнических специальностей
В трех частях
Часть 2
Трехфазные электрические цепи.
Переходные процессы

Гомель 2008

УДК 621.3.011.7+621.3.018.782.3(075.8)
ББК 31.211я73
Г78

Рекомендовано научно-методическим советом
энергетического факультета ГГТУ им. П. О. Сухого
(*протокол № 4 от 17.12.2007 г.*)

Рецензент: зав. каф. «Электроснабжение» ГГТУ им. П. О. Сухого канд. техн. наук, доц. *А. В. Сычев*

Грачев, С. А.

Г78 Теоретические основы электротехники : практикум по курсу «Теория линейных электрических цепей» для студентов электротехн. специальностей : в 3 ч. Ч. 2. Трехфазные электрические цепи. Переходные процессы / С. А. Грачев, В. В. Соленков, Я. О. Шабловский. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2008. – 78 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: http://gstu.local/lib. – Загл. с титул. экрана.

Рассмотрены решения типовых задач, которые могут быть использованы на практических занятиях, при самостоятельной работе студентов, а также для контроля знаний по соответствующим разделам курса «Теоретические основы электротехники» при защите расчетно-графических работ и при подготовке к экзаменам.

Для студентов электротехнических специальностей.

УДК 621.3.011.7+621.3.018.782.3(075.8)
ББК 31.211я73

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее практическое пособие является второй частью практикума по курсу “Теория линейных электрических цепей” и содержит решения типовых задач по разделам “Трехфазные электрические цепи” и “Переходные процессы”. Пособие предназначено для студентов всех электротехнических и электроэнергетических специальностей дневной и заочной форм обучения. Рассмотренные в пособии задачи могут быть использованы как на практических занятиях по указанным разделам курса ТОЭ, так и при самостоятельной работе студентов, в том числе, при подготовке к экзаменам. Для удобства читателей в начале каждого раздела приведены краткие сведения из теории и основные расчетные формулы.

РАЗДЕЛ 4. ТРЁХФАЗНЫЕ ЦЕПИ

ВВОДНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Обычно обмотки трёхфазного источника соединяют звездой (рис. 1). В таком случае линейные напряжения выражаются разностями соответствующих фазных напряжений:

$$\underline{U}_{AB} = \underline{U}_A - \underline{U}_B; \qquad \underline{U}_{BC} = \underline{U}_B - \underline{U}_C; \qquad \underline{U}_{CA} = \underline{U}_C - \underline{U}_A. \qquad (1)$$

Для симметричного источника с фазным напряжением $U_ф$ фазные напряжения

$$\underline{U}_A = U_ф e^{j0^\circ}; \quad \underline{U}_B = U_ф e^{-j120^\circ}; \qquad \underline{U}_C = U_ф e^{j120^\circ},$$

а линейные напряжения

$$\underline{U}_{AB} = U_л e^{j30^\circ}; \qquad \underline{U}_{BC} = U_л e^{-j90^\circ}; \qquad \underline{U}_{CA} = U_л e^{j150^\circ}.$$

По модулю линейные напряжения $U_л$ больше фазных $U_ф$ в $\sqrt{3}$ раз:

$$U_л = \sqrt{3} U_ф.$$

При соединении обмоток источника треугольником (рис. 2) линейные напряжения равны фазным.

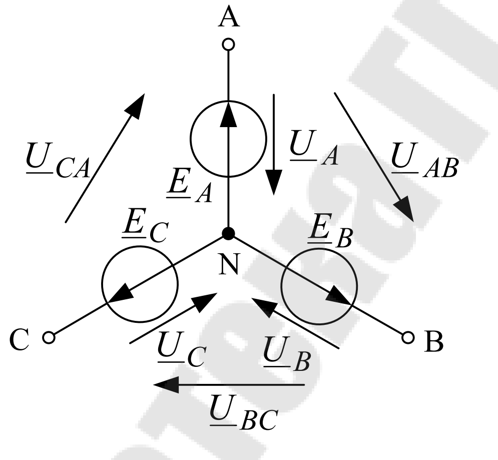


Рис. 1

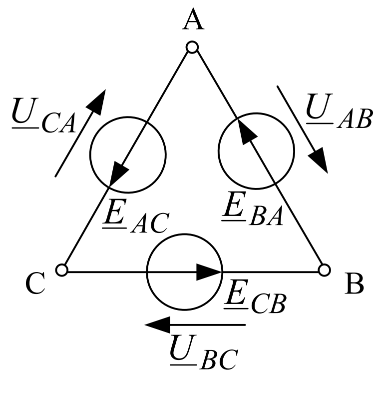


Рис. 2

Симметричный режим. Для симметричного приемника ($\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C = \underline{Z}$), соединенного звездой (рис. 3), токи в фазах

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_A}{\underline{Z} + \underline{Z}_л}; \qquad \underline{I}_B = \frac{\underline{U}_B}{\underline{Z} + \underline{Z}_л}; \qquad \underline{I}_C = \frac{\underline{U}_C}{\underline{Z} + \underline{Z}_л},$$

где $\underline{Z}_л$ – сопротивление симметричной линии. По модулю эти токи одинаковы и имеют сдвиг по фазе относительно друг друга, равный 120°.

Для симметричного приемника, соединенного треугольником (рис. 4), $\underline{Z}_{ab} = \underline{Z}_{bc} = \underline{Z}_{ca} = \underline{Z}$. Если $\underline{Z}_л = 0$, то фазные токи приемника

$$\underline{I}_{ab} = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}}; \qquad \underline{I}_{bc} = \frac{\underline{U}_{BC}}{\underline{Z}}; \qquad \underline{I}_{ca} = \frac{\underline{U}_{CA}}{\underline{Z}}.$$

По модулю эти токи одинаковы и имеют сдвиг по фазе относительно друг друга, равный 120°.

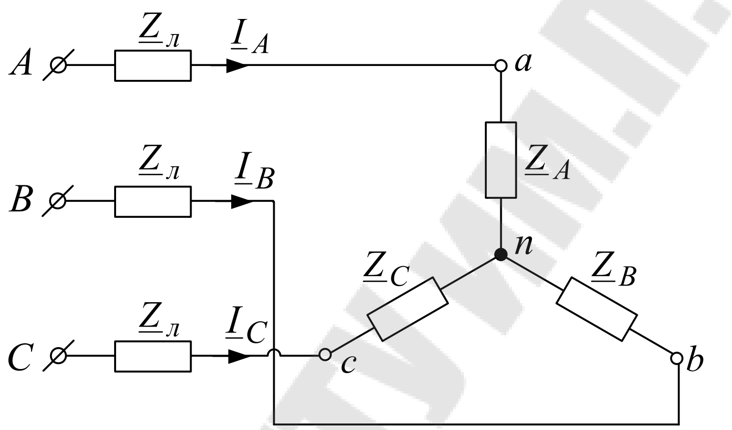


Рис. 3

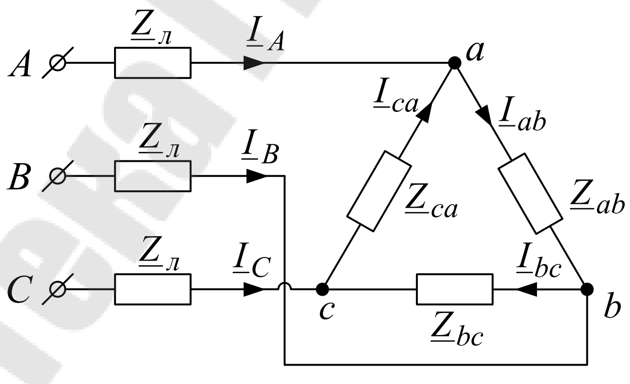


Рис. 4

Линейные токи приемника, соединённого треугольником, выражаются разностями его фазных токов:

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{ab} - \underline{I}_{ca}; \qquad \underline{I}_B = \underline{I}_{bc} - \underline{I}_{ab}; \qquad \underline{I}_C = \underline{I}_{ca} - \underline{I}_{bc}. \qquad (2)$$

При этом для симметричного приёмника

$$\underline{I}_A = \sqrt{3}\underline{I}_{ab}e^{-j30^\circ}; \qquad \underline{I}_B = \underline{I}_A e^{-j120^\circ}; \qquad \underline{I}_C = \underline{I}_A e^{j120^\circ}.$$

Соответственно, фазные токи выражаются через линейные следующим образом:

$$\underline{I}_{ab} = \frac{\underline{I}_A}{\sqrt{3}} e^{j30^\circ}; \qquad \underline{I}_{bc} = \underline{I}_{ab}e^{-j120^\circ}; \qquad \underline{I}_{ca} = \underline{I}_{ab}e^{j120^\circ};$$

Если $\underline{Z}_л \neq 0$, то после преобразования треугольника сопротивлений в эквивалентную звезду линейные токи находят по формулам

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_A}{\dfrac{\underline{Z}}{3} + \underline{Z}_л}; \qquad \underline{I}_B = \frac{\underline{U}_B}{\dfrac{\underline{Z}}{3} + \underline{Z}_л}; \qquad \underline{I}_C = \frac{\underline{U}_C}{\dfrac{\underline{Z}}{3} + \underline{Z}_л};$$

Несимметричный режим. При соединении приемника звездой с нейтральным проводом (рис. 5) напряжение смещения нейтрали выражается равенством

$$\underline{U}_{nN} = \frac{\underline{U}_A\underline{Y}_A + \underline{U}_B\underline{Y}_B + \underline{U}_C\underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N},$$

где

$$\underline{Y}_A = \frac{1}{(\underline{Z}_A + \underline{Z}_л)}; \quad \underline{Y}_B = \frac{1}{(\underline{Z}_B + \underline{Z}_л)}; \quad \underline{Y}_C = \frac{1}{(\underline{Z}_C + \underline{Z}_л)}; \quad \underline{Y}_N = \frac{1}{\underline{Z}_N}.$$

Линейные токи и ток в нейтральном проводе выражаются равенствами

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_A - \underline{U}_{nN}}{\underline{Z}_A + \underline{Z}_л}; \quad \underline{I}_B = \frac{\underline{U}_B - \underline{U}_{nN}}{\underline{Z}_B + \underline{Z}_л}; \quad \underline{I}_C = \frac{\underline{U}_C - \underline{U}_{nN}}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_л}; \quad \underline{I}_N = \frac{\underline{U}_{nN}}{\underline{Z}_N}; \quad (3)$$

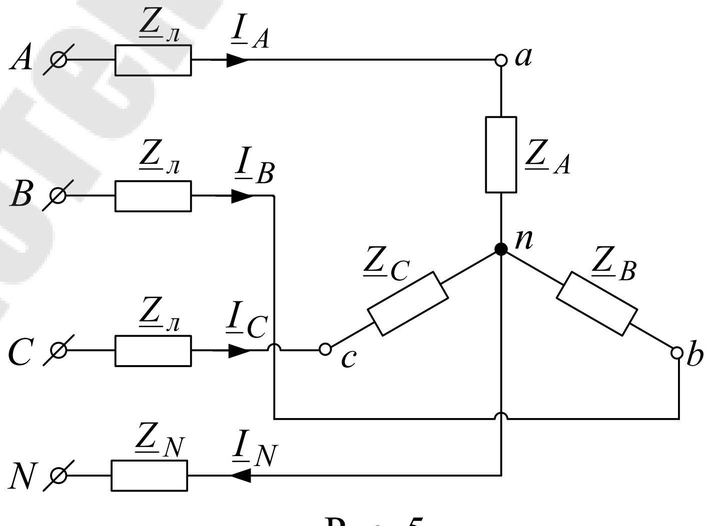


Рис. 5

При этом по первому закону Кирхгофа

$$\underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C. \tag{4}$$

Если сопротивление $\underline{Z}_N = 0$, то $\underline{Y}_N = \infty$, $\underline{U}_{nN} = 0$ и

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_A}{\underline{Z}_A + \underline{Z}_л}; \quad \underline{I}_B = \frac{\underline{U}_B}{\underline{Z}_B + \underline{Z}_л}; \quad \underline{I}_C = \frac{\underline{U}_C}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_л},$$

а ток $\underline{I}_N$ определяется по (4).

Если в цепи рис. 5 $\underline{Z}_N = \infty$, т.е. $\underline{Y}_N = 0$, то получается схема соединения звездой без нейтрального провода (рис. 3), для которой

$$\underline{U}_{nN} = \frac{\underline{U}_A\underline{Y}_A + \underline{U}_B\underline{Y}_B + \underline{U}_C\underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C},$$

а линейные токи определяются по формулам (3). При этом $\underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 0$.

При соединении приемника треугольником (рис. 4) и идеальных проводах линии ($\underline{Z}_л = 0$) фазные токи

$$\underline{I}_{ab} = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_{ab}}; \qquad \underline{I}_{bc} = \frac{\underline{U}_{BC}}{\underline{Z}_{bc}}; \qquad \underline{I}_{ca} = \frac{\underline{U}_{CA}}{\underline{Z}_{ca}},$$

а линейные токи определяются по (2). Если же $\underline{Z}_л \neq 0$, то для расчёта цепи треугольник сопротивлений следует преобразовать в эквивалентную звезду, после чего для полученной эквивалентной схемы линейные токи рассчитывают, как показано выше. Фазные токи определяются по предварительно найденным фазным напряжениям приемника:

$$\underline{U}_{ab} = \underline{Z}'_A\underline{I}_A - \underline{Z}'_B\underline{I}_B; \ \underline{U}_{bc} = \underline{Z}'_B\underline{I}_B - \underline{Z}'_C\underline{I}_C; \ \underline{U}_{ca} = \underline{Z}'_C\underline{I}_C - \underline{Z}'_A\underline{I}_A;$$

$$\underline{I}_{ab} = \frac{\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}_{ab}}; \qquad \underline{I}_{bc} = \frac{\underline{U}_{bc}}{\underline{Z}_{bc}}; \qquad \underline{I}_{ca} = \frac{\underline{U}_{ca}}{\underline{Z}_{ca}},$$

где $\underline{Z}'_A$, $\underline{Z}'_B$, $\underline{Z}'_C$ – сопротивления лучей звезды, эквивалентной исходному треугольнику нагрузки.

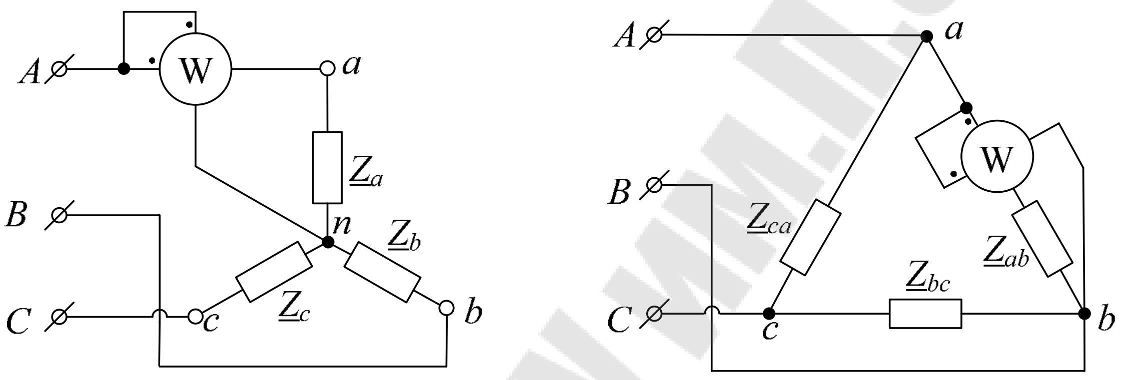
Активная, реактивная и полная мощности симметричного приемника независимо от вида соединения

$$P = 3U_ф I_ф \cos\varphi = \sqrt{3}U_л I_л \cos\varphi;$$

$$Q = 3U_{ф}I_{ф}\sin\varphi = \sqrt{3}U_{л}I_{л}\sin\varphi;\ \ S = 3U_{ф}I_{ф} = \sqrt{3}U_{л}I_{л},$$

где φ – сдвиг фаз между напряжением и током фазы 0.

В симметричных трехфазных цепях при соединении приемников звездой $P_a = P_b = P_c = P_ф$, а при соединении приемников треугольником $P_{ab} = P_{bc} = P_{ca} = P_ф$. Поэтому для определения активной мощности симметричного приемника достаточно утроить показания ваттметра, включенного в любую из фаз нагрузки (*метод одного ваттметра* – рис. 6): $P_{нагр} = 3P_ф$.



а) *б)*

Рис. 6

В четырехпроводных трехфазных цепях с несимметричной нагрузкой измеряется мощность каждой фазы (*метод трех ваттметров*; см. рис. 7). Активная мощность нагрузки определяется арифметической суммой показаний ваттметров: $P_{нагр} = P_a + P_b + P_c$.

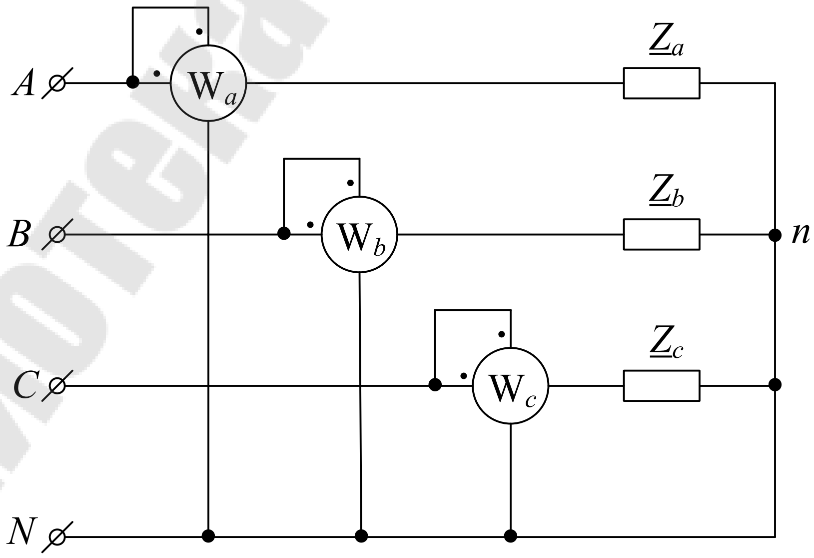


Рис.7

В трехпроводных трехфазных цепях с несимметричной нагрузкой измерение мощности производится *методом двух ваттметров*. Активная мощность такой цепи выражается алгебраической суммой показаний обоих приборов: $P_{нагр} = P_{w1} + P_{w2}$. При этом пара приборов может быть включена в трехпроводную цепь тремя равноценными способами, показанными на рис. 8 *а – в*.

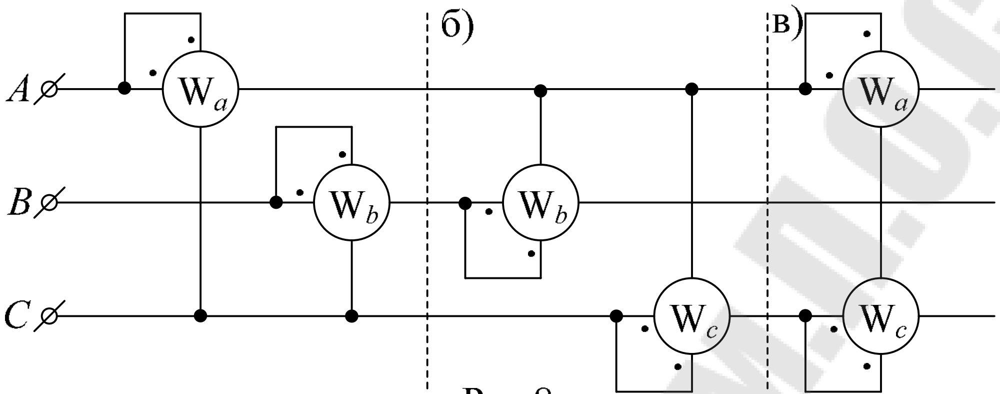


Рис.8

Нумерация ваттметров в паре определяется порядком включения их токовых цепей в линейные провода с учетом прямой последовательности фаз, что удобно представить в виде следующей таблицы.

Способ включения ваттметров в трёхпроводную цепь	***a*** →	***b*** →	***c*** →	***a*** → …
а)	№ 1	№ 2		№ 1
б)		№ 1	№ 2	
в)	№ 2		№ 1	№ 2

Метод двух ваттметров применяется также в цепях с симметричной нагрузкой, особенно в тех случаях, когда нужно измерить не только активную, но и реактивную мощность. Реактивная мощность симметричной нагрузки при этом равна

$$Q = \sqrt{3}\left(P_{W1} - P_{W2}\right).$$

Реактивную мощность симметричной нагрузки можно измерить и одним ваттметром. Три равноценных способа включения ваттметра в такую цепь показаны на рис. 9. При этом

$$P_{W\,A} = P_{W\,B} = P_{W\,C} = P_W; \qquad Q = \sqrt{3}P_W.$$

Если же нагрузка несимметрична, то для измерения ее реактивной мощности применяются все три показанных на рис. 9 включения ваттметра. Реактивная мощность несимметричной нагрузки равна

$$Q = \frac{P_{W\,A} + P_{W\,B} + P_{W\,C}}{\sqrt{3}}.$$

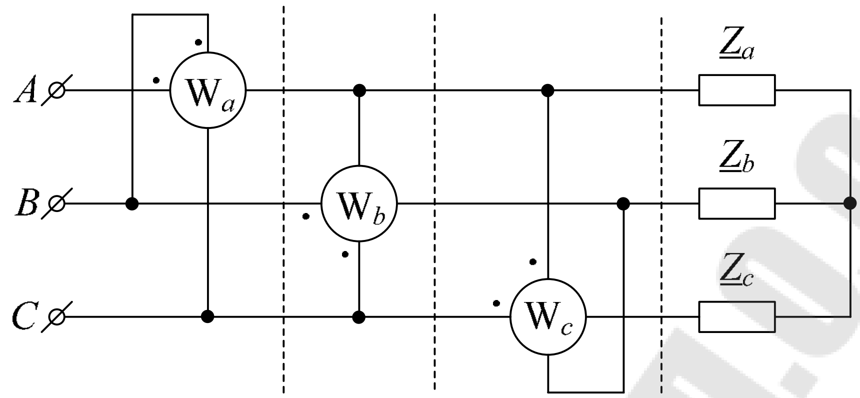


Рис.9

Высшие гармоники в трехфазных цепях. ЭДС фазы реального трехфазного генератора в той или иной мере несинусоидальна. Постоянная составляющая при этом отсутствует, а каждая из трех ЭДС e_A, e_B, e_C повторяет по форме остальные со сдвигом на $\pm\frac{1}{3}$ периода, так что сдвигу фазы на 120° для основной гармоники соответствует сдвиг на $k \cdot 120^\circ$ для k-й гармоники. Этим обусловлены следующие закономерности.

1. Гармоники, кратные трём, $\{k = 3n \ \ (n = 0, 1, 2, \ldots)\}$ образуют нулевую последовательность:

$$\underline{E}_{A(3,6,9...)} = \underline{E}_{B(3,6,9...)} = \underline{E}_{C(3,6,9...)}.$$

2. Гармоники $k = 3n + 1$ (1, 4, 7, …) образуют прямую последовательность: k-я гармоника фазы C опережает k-ю гармонику фазы A на 120°, k-я гармоника фазы B отстает от k-й гармоники фазы A на 120°.

3. Гармоники $k = 3n + 2$ (2, 5, 8, …) образуют обратную последовательность: k-я гармоника фазы B опережает k-ю гармонику фазы A на 120°, k-я гармоника фазы C отстает от k-й гармоники фазы A на 120°.

При соединении звездой фаз *__источника__* линейные напряжения не содержат гармоник, кратных трём, т.к. эти гармоники синфазны и потому взаимно погашаются при выражении линейных напряжений разностями фазных напряжений источника (см. (1)).

При соединении звездой фаз <u>*приемника*</u> гармоники, кратные трём, за счет своей синфазности складываются на участке Nn: в трехпроводной цепи они вносят вклад в U_{Nn} (при симметричной нагрузке U_{Nn} образовано именно трехкратными гармониками!), а в четырехпроводной цепи трехкратные гармоники токов вносят вклад в I_N: при симметричной нагрузке по нейтральному проводу протекает ток

$$I_N = I_{N(3)} = \frac{3\underline{E}_{(3)}}{\underline{Z}_{ф(3)} + \underline{Z}_{N(3)}}; \qquad \underline{I}_A = \underline{I}_B = \underline{I}_C = \frac{\underline{I}_N}{3}.$$

При этом, однако, в отсутствие нейтрального провода линейные токи не содержат гармоник, кратных трём, т.к. их нет в линейных напряжениях!

При соединении треугольником фаз <u>*источника*</u> синфазные гармоники, кратные трём, складываются, создавая ток $\underline{I}_{(3)}$ в контуре источника. При этом, однако, линейные напряжения нагрузки не содержат гармоник, кратных трём, т.к. их не содержит фазное напряжение источника. В самом деле (см. рис. 10)

$$\underline{\varphi}_{A(3)} = \varphi_{B(3)} + \underline{E}_{(3)} - \underline{I}_{(3)}\underline{Z}_{г(3)} = \varphi_{B(3)}, \text{ т.к. } I_{(3)} = \frac{3\underline{E}_{(3)}}{3\underline{Z}_{г(3)}}.$$

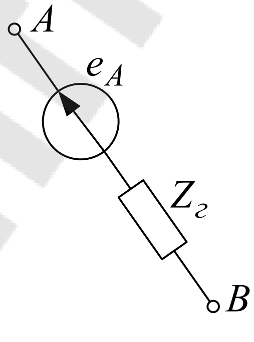


Рис. 10

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

4.1. В схеме рис. 4.1.1. фазное напряжение генератора $U_{фг} = 127$ В, а нагрузка симметрична: $\underline{Z}_{ab} = \underline{Z}_{bc} = \underline{Z}_{ca} = R = 20$ Ом. Найти фазные и линейные токи цепи при ее нормальном режиме, при обрыве линейного провода и при обрыве фазы.

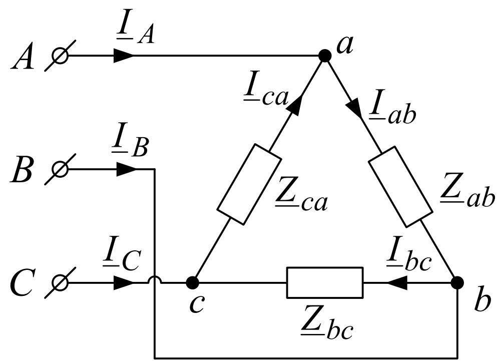


Рис. 4.1.1

Решение.

Линейное напряжение генератора: $U_{лг} = \sqrt{3}U_{фг} = \sqrt{3}\cdot 127 = 220$ В. Поскольку в условии нет особых указаний, подразумевается, что фазы источника соединены звездой. Обычно полагают

$$\underline{U}_A = U_{фг}e^{j0^\circ}\text{ В},\quad \underline{U}_B = U_{фг}e^{-j120^\circ}\text{ В},\quad \underline{U}_C = U_{фг}e^{j120^\circ}\text{ В},\qquad (1)$$

после чего на основании равенств

$$\underline{U}_{AB} = \sqrt{3}e^{j30^\circ}\underline{U}_A,\quad \underline{U}_{BC} = \sqrt{3}e^{j30^\circ}\underline{U}_B,\quad \underline{U}_{CA} = \sqrt{3}e^{j30^\circ}\underline{U}_C$$

переходят от (1) к системе линейных напряжений

$$\underline{U}_{AB} = \sqrt{3}U_{фг}e^{j30^\circ},\quad \underline{U}_{BC} = \sqrt{3}U_{фг}e^{-j90^\circ},\quad \underline{U}_{CA} = \sqrt{3}U_{фг}e^{j150^\circ}.\qquad (2)$$

Для решения нашей задачи значение имеют только фазы линейного напряжения источника. Поэтому для упрощения расчётов можно принять нулевой фазу линейного напряжения $\underline{U}_{AB}$, а не фазу напряжения $\underline{U}_A$, как это подразумевается системой (1). Вместо (2) мы принимаем

$$\underline{U}_{AB} = U_{лг}e^{j0^\circ} = 220e^{j0^\circ}\text{ В},$$

$$\underline{U}_{BC} = 220e^{-j120^\circ}\text{ В},$$

$$\underline{U}_{CA} = 220e^{j120^\circ}\text{ В}.$$

1) <u>Нормальный режим</u>.

При соединении нагрузки треугольником $\underline{U}_{лг} = U_{ф_{нагр}}$. С учетом этого фазные токи нагрузки находим по закону Ома:

$$\underline{I}_{ab} = \frac{\underline{U}_{ab}}{R} = \frac{\underline{U}_{AB}}{R} = \frac{220e^{j0^\circ}}{20} = 11e^{j0^\circ} \text{ A},$$

$$\underline{I}_{bc} = \frac{\underline{U}_{bc}}{R} = \frac{\underline{U}_{BC}}{R} = \frac{220e^{-j120^\circ}}{20} = 11e^{-j120^\circ} \text{ A},$$

$$\underline{I}_{ca} = \frac{\underline{U}_{ca}}{R} = \frac{\underline{U}_{CA}}{R} = \frac{220e^{j120^\circ}}{20} = 11e^{j120^\circ} \text{ A}.$$

В общем случае линейные токи определяются по первому закону Кирхгофа:

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{ab} - \underline{I}_{ca}; \qquad \underline{I}_B = \underline{I}_{bc} - \underline{I}_{ab}; \qquad \underline{I}_C = \underline{I}_{ca} - \underline{I}_{bc}.$$

В рассматриваемом случае (симметричный треугольник нагрузки) линейные токи проще определить по формулам

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{ab}\sqrt{3}e^{-j30^\circ} = 11e^{j0^\circ}\sqrt{3}e^{-j30^\circ} = 19e^{-j30^\circ} \text{ A},$$

$$\underline{I}_B = \underline{I}_{bc}\sqrt{3}e^{-j30^\circ} = 11e^{-j120^\circ}\sqrt{3}e^{-j30^\circ} = 19e^{-j150^\circ} \text{ A},$$

$$\underline{I}_C = \underline{I}_{ca}\sqrt{3}e^{-j30^\circ} = 11e^{j120^\circ}\sqrt{3}e^{-j30^\circ} = 19e^{j90^\circ} \text{ A}.$$

2) Обрыв линейного провода *Bb*.

При обрыве линейного провода трехпроводная трехфазная цепь превращается в однофазную цепь, питаемую линейным напряжением между неповрежденными проводами. Схема замещения заданной цепи в случае обрыва провода *Bb* показана на рис. 4.1.2.

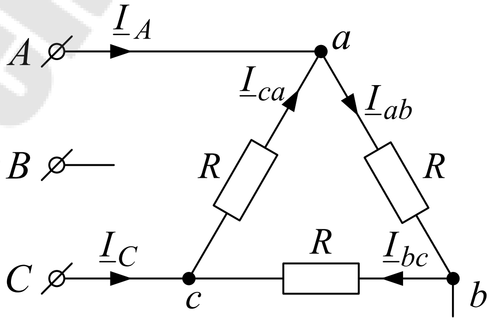


Рис. 4.1.2

Фазные токи находим по закону Ома:

$$\underline{I}_{ab} = \underline{I}_{bc} = \frac{-\underline{U}_{CA}}{2R} = \frac{-220e^{j120^\circ}}{2 \cdot 20} = \frac{220e^{-j60^\circ}}{40} = 5{,}5e^{-j60^\circ} = (2{,}75 - j4{,}76)\,\text{А},$$

$$\underline{I}_{ca} = \frac{\underline{U}_{CA}}{R} = \frac{220e^{j120^\circ}}{20} = 11e^{j120^\circ} = (-5{,}5 + j9{,}52)\,\text{А}.$$

Линейные токи находим по первому закону Кирхгофа:

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{ab} - \underline{I}_{ca} = 5{,}5e^{-j60^\circ} - 11e^{j120^\circ} = 16{,}5e^{-j60^\circ} = (8 - j14{,}28)\,\text{А},$$

$$\underline{I}_B = 0\,\text{А},$$

$$\underline{I}_C = \underline{I}_{ca} - \underline{I}_{bc} = -\underline{I}_A = -16{,}5e^{-j60^\circ} = 16{,}5e^{j120^\circ} = (-8 + j14{,}28)\,\text{А}.$$

3) <u>Обрыв фазы *ab*</u>.

Схема замещения заданной цепи при обрыве в ней фазы *ab* показана на рис. 4.1.3.

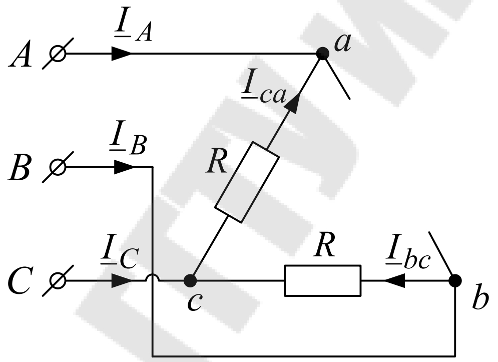


Рис. 4.1.3

Токи неповрежденных фаз имеют те же значения, что и при нормальном режиме:

$$\underline{I}_{bc} = 11e^{-j120^\circ}\,\text{А}, \qquad \underline{I}_{ca} = 11e^{j120^\circ}\,\text{А}.$$

Линейные токи находим по первому закону Кирхгофа:

$$\underline{I}_A = -\underline{I}_{ca} = -11e^{j120^\circ} = 11e^{-j60^\circ}\,\text{А}, \qquad \underline{I}_B = \underline{I}_{bc} = 11e^{-j120^\circ}\,\text{А},$$

$$\underline{I}_C = \underline{I}_{ca} - \underline{I}_{bc} = 11e^{j120^\circ} - 11e^{-j120^\circ} = 19e^{j90^\circ}\,\text{А}.$$

4.2. В схеме рис. 4.2.1 фазное напряжение источника $U_{фг} = 127$ В. Определить показание прибора в двух случаях: 1) $X_L = X_C = 173$ Ом, $R = 100$ Ом; 2) $X_L = X_C = \sqrt{3}R$.

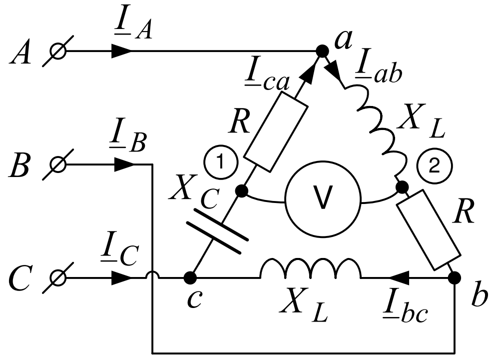


Рис. 4.2.1

Подключение идеальных измерительных приборов не влияет на токораспределение цепи. Для решения задачи необходимо найти напряжение между точками 1 и 2 в схеме, показанной на рис. 4.2.2.

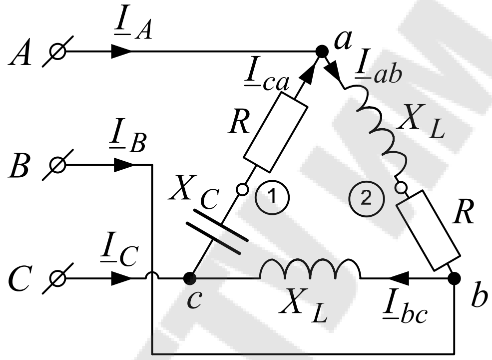


Рис. 4.2.2

Искомое напряжение

$$\underline{U}_{12} = jX_L \underline{I}_{ab} + R\underline{I}_{ca}. \tag{1}$$

Неизвестные токи $\underline{I}_{ab}$ и $\underline{I}_{ca}$ выразим по закону Ома:

$$\underline{I}_{ab} = \frac{\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}_{ab}} = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_{ab}}; \qquad \underline{I}_{ca} = \frac{\underline{U}_{ca}}{\underline{Z}_{ca}} = \frac{\underline{U}_{CA}}{\underline{Z}_{ca}}. \tag{2}$$

Линейное напряжение генератора $U_{лг} = \sqrt{3} U_{фг} = \sqrt{3} \cdot 127 = 220\,\text{В}$. Принимаем (см. решение задачи 4.1)

$$\underline{U}_{AB} = U_{лг} e^{j0^\circ} = 220 e^{j0^\circ}\ \text{В}. \tag{3}$$

Тогда

$$\underline{U}_{CA} = 220 e^{j120^\circ}\ \text{В}. \tag{4}$$

<u>1 случай</u>.

Сопротивления фаз нагрузки:

$$\underline{Z}_{ab} = R + jX_L = (100 + j173)\ \text{Ом}. \tag{5}$$

$$\underline{Z}_{ca} = R - jX_C = (100 - j173)\ \text{Ом}. \tag{6}$$

Подставляя (3) – (6) в (2), находим:

$$\underline{I}_{ab} = \frac{220\, e^{j0^\circ}}{100 + j173} = 1{,}1e^{-j60^\circ}\ \text{А};\qquad \underline{I}_{ca} = \frac{220e^{j120^\circ}}{100 - j173} = 1{,}1e^{j180^\circ}\ \text{А}.$$

Возвращаясь к (1), получаем:

$$\underline{U}_{12} = j173\cdot 1{,}1e^{-j60^\circ} + 100\cdot 1{,}1e^{j180^\circ} = 55 + j95{,}3 = 110e^{j60^\circ}\ \text{В}.$$

Следовательно,

$$U_V = 110\ \text{В}.$$

Векторная диаграмма цепи представлена на рис. 4.2.3; $m_U = 30\frac{В}{см}$, $m_I = 0{,}2\frac{А}{см}$.

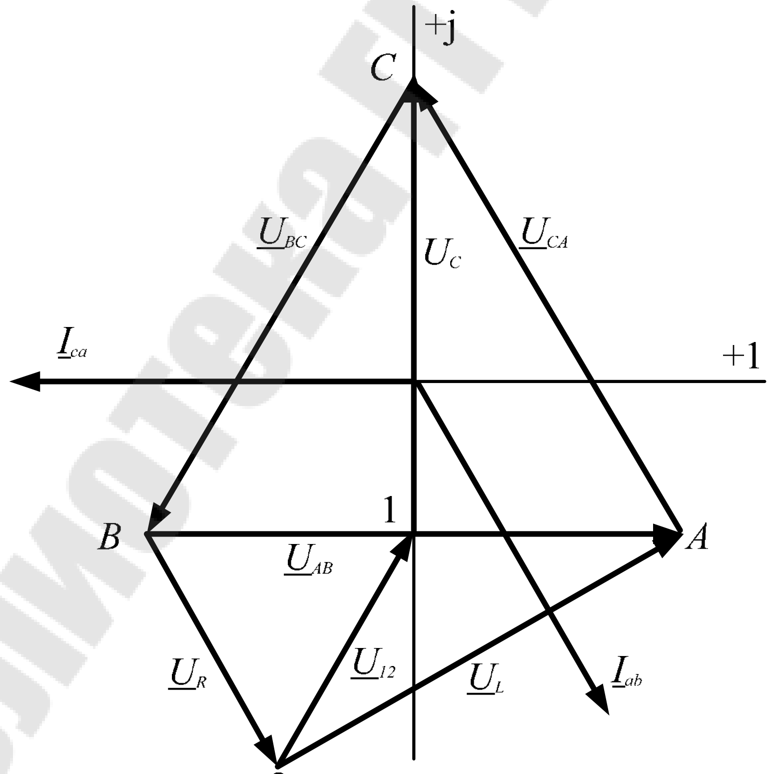


Рис. 4.2.3.

2 случай.

Сопротивления фаз нагрузки:

$$\underline{Z}_{ab} = R + jX_L = R + j\sqrt{3}R = R(1 + j\sqrt{3}) = 2R \cdot e^{j60^\circ} \text{ Ом.} \quad (7)$$

$$\underline{Z}_{ca} = R - jX_C = R - j\sqrt{3}R = R(1 - j\sqrt{3}) = 2R \cdot e^{-j60^\circ} \text{ Ом.} \quad (8)$$

Подставляя (3), (4), (7) и (8) в (2), находим:

$$\underline{I}_{ab} = \frac{220e^{j0^\circ}}{2R \cdot e^{j60^\circ}} = \frac{110}{R}e^{-j60^\circ} \text{ А;} \qquad \underline{I}_{ca} = \frac{220e^{j120^\circ}}{2R \cdot e^{-j60^\circ}} = \frac{110}{R}e^{j180^\circ} \text{ А.}$$

Возвращаясь к (1), получаем:

$$\underline{U}_{12} = R \cdot \frac{110}{R}(j\sqrt{3}e^{-j60^\circ} + e^{j180^\circ}) = 55 + j95{,}3 = 110e^{j60^\circ} \text{ В.}$$

Следовательно,

$$U_V = 110 \text{ В.}$$

4.3. В схеме рис. 4.3.1 фазное напряжение генератора $U_{фг} = 220$ В, а нагрузка несимметрична: $\underline{Z}_a = 100$ Ом, $\underline{Z}_b = 50$ Ом, $\underline{Z}_c = j50$ Ом. Найти все токи цепи в ее нормальном режиме и при обрыве фазы c в обоих возможных случаях: а) нейтральный провод включен; б) нейтральный провод отключен.

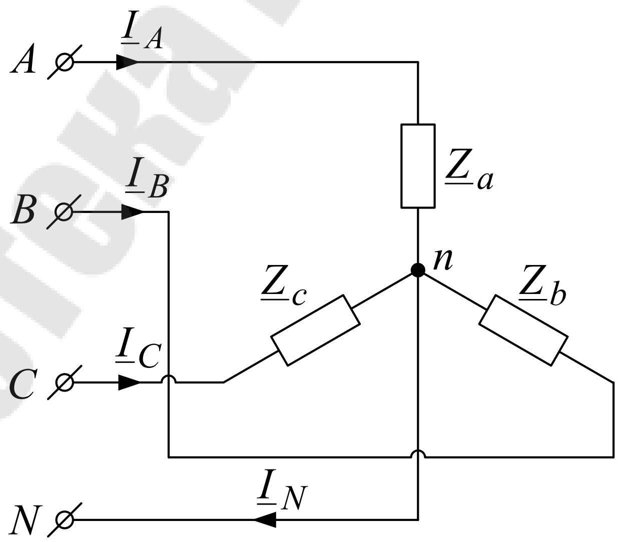


Рис. 4.3.1

Решение.

Примем

$$\underline{U}_A = U_{фг} e^{j0^\circ} = 220 e^{j0^\circ} \text{ В.}$$

Тогда

$$\underline{U}_B = 220 e^{-j120^\circ} \text{ В}, \quad \underline{U}_C = 220 e^{j120^\circ} \text{ В.}$$

<u>1. Нормальный режим.</u>

1а) нейтральный провод включен.

При наличии идеального нейтрального провода фазные напряжения в звезде нагрузки совпадают с соответствующими фазными напряжениями генератора:

$$\underline{U}_a = \underline{U}_A, \qquad \underline{U}_b = \underline{U}_B, \qquad \underline{U}_c = \underline{U}_C. \tag{1}$$

С учетом этого линейные токи выражаются с помощью закона Ома следующим образом:

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_A}{\underline{Z}_a} = \frac{220}{100} = 2{,}2 \text{ А};$$

$$\underline{I}_B = \frac{\underline{U}_B}{\underline{Z}_b} = \frac{220 e^{-j120^\circ}}{50} = 4{,}4 e^{-j120^\circ} = (-2{,}2 - j3{,}81) \text{ А};$$

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{U}_C}{\underline{Z}_c} = \frac{220 e^{j120^\circ}}{50 e^{j90^\circ}} = 4{,}4 e^{j30^\circ} = (3{,}81 + j2{,}2) \text{ А.}$$

Ток нейтрального провода находим по первому закону Кирхгофа:

$$\underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 2{,}2 - 2{,}2 - j3{,}81 + 3{,}81 + j2{,}2 = 3{,}81 - j1{,}61 = 4{,}1 e^{-j23^\circ} \text{ А.}$$

Векторная диаграмма цепи представлена на рис. 4.3.2; $m_U = 40 \frac{В}{см}$, $m_I = 1 \frac{А}{см}$.

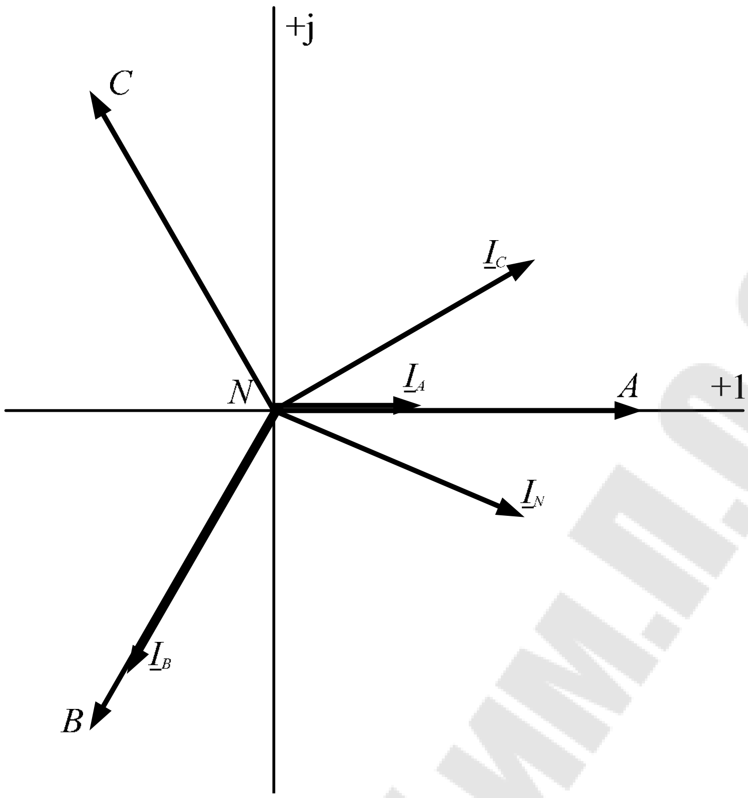


Рис. 4.3.2.

1б) нейтральный провод отключен.

Вместо (1) следует использовать равенства

$$\underline{U}_a = \underline{U}_A - \underline{U}_{nN}; \qquad \underline{U}_b = \underline{U}_B - \underline{U}_{nN}; \qquad \underline{U}_c = \underline{U}_C - \underline{U}_{nN}; \qquad (2)$$

Напряжение смещения нейтрали

$$\underline{U}_{nN} = \frac{\underline{U}_A \underline{Y}_A + \underline{U}_B \underline{Y}_B + \underline{U}_C \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C}, \qquad (3)$$

где

$$\underline{Y}_A = \frac{1}{\underline{Z}_a} = \frac{1}{100} = 0{,}01 \text{ См}, \qquad \underline{Y}_B = \frac{1}{\underline{Z}_b} = \frac{1}{50} = 0{,}02 \text{ См},$$

$$\underline{Y}_C = \frac{1}{\underline{Z}_c} = \frac{1}{j50} = -j0{,}02 \text{ См}.$$

После подстановки находим:

$$\underline{U}_{\text{nN}} = \frac{220 \cdot 0{,}01 + 220 e^{-j120^\circ} \cdot 0{,}02 + 220 e^{j120^\circ} \cdot 0{,}02 e^{-j90^\circ}}{0{,}01 + 0{,}02 + 0{,}02 e^{-j90^\circ}} =$$

$$= 114 e^{j10{,}7^\circ} = (112 + j21{,}4) \text{ В}.$$

Линейные токи определяем по закону Ома:

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_a}{\underline{Z}_a}; \qquad \underline{I}_B = \frac{\underline{U}_b}{\underline{Z}_b}; \qquad \underline{I}_C = \frac{\underline{U}_c}{\underline{Z}_c}. \tag{4}$$

Подставляя в (4) числовые значения, получаем:

$$\underline{I}_A = \frac{220-112-j21{,}4}{100} = \frac{110e^{-j11^\circ}}{100} = 1{,}1e^{-j11^\circ} = (1{,}08 - j0{,}21)\ \text{А};$$

$$\underline{I}_B = \frac{-110-j190-112-j21{,}4}{50} = \frac{307e^{-j136{,}4^\circ}}{50} = 6{,}1e^{-j136{,}4^\circ} = (-4{,}44 - j4{,}23)\,\text{А};$$

$$\underline{I}_C = \frac{-110+j190-112-j21{,}4}{j50} = \frac{279e^{j142{,}8^\circ}}{50e^{j90^\circ}} = 5{,}6e^{j52{,}8^\circ} = (3{,}39 + j4{,}46)\ \text{А}.$$

Векторная диаграмма цепи представлена на рис. 4.3.3; $m_U = 40\,\text{В/см}$, $m_I = 1\,\text{А/см}$.

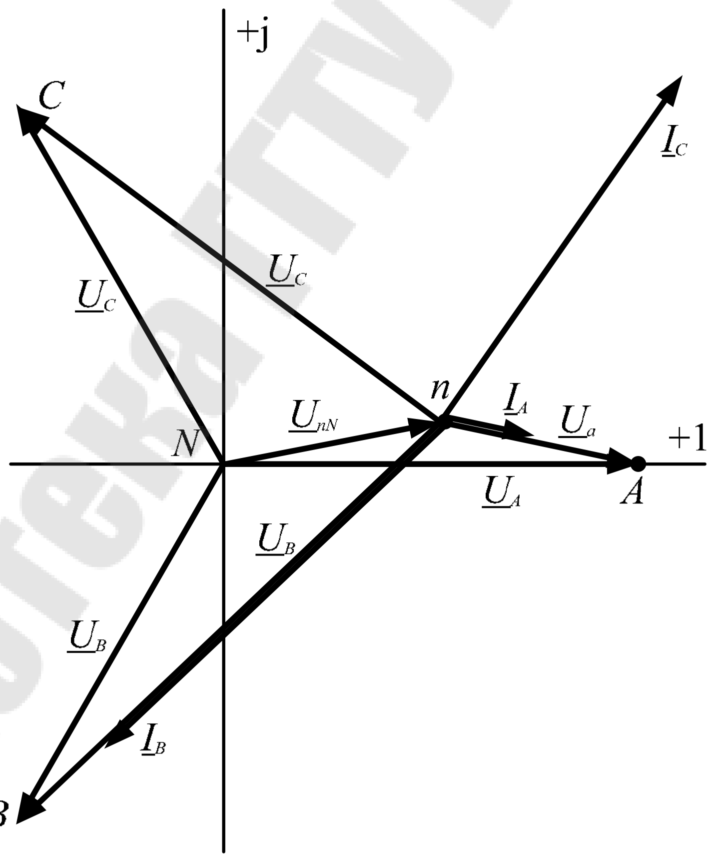


Рис. 4.3.3.

2. Обрыв фазы *c*.

2а) нейтральный провод включен.

При наличии идеального нейтрального провода токи в фазах звезды нагрузки взаимонезависимы. Благодаря этому при обрыве фазы токи в неповрежденных фазах остаются неизменными (см. случай 1а).Ток в нейтральном проводе находим по первому закону Кирхгофа, учитывая, что $\underline{I}_C = 0$:

$$\underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B = 2{,}2 - 2{,}2 - j3{,}81 = -j3{,}81 = 3{,}81e^{-j90^\circ} \text{ А.}$$

2б) нейтральный провод отключен.

Расчет этого случая можно провести по формулам (2) – (4), полагая с учетом обрыва фазы $\underline{Z}_c = \infty$, $\underline{Y}_C = 0$. Значительно проще воспользоваться тем, что при обрыве линейного провода трехпроводная трехфазная цепь превращается в однофазную цепь, питаемую линейным напряжением между неповрежденными проводами. В нашем случае это напряжение $\underline{U}_{AB}$. Схема замещения цепи в случае обрыва фазы *c* представлена на рис. 4.3.2.

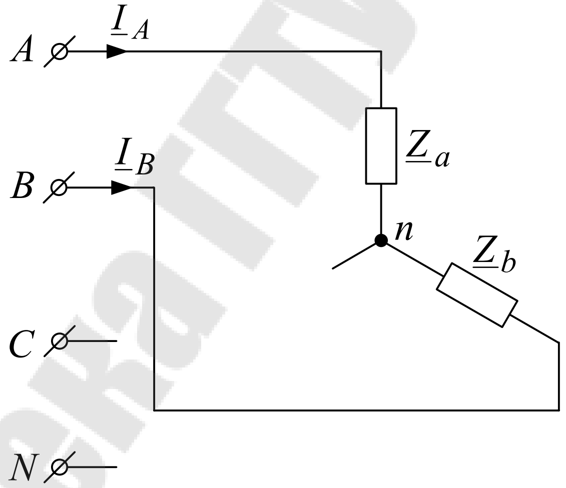


Рис. 4.3.2

Для этой схемы сразу находим:

$$\underline{I}_\text{А} = -\underline{I}_\text{В} = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_a + \underline{Z}_b} = \frac{\underline{U}_A\sqrt{3}e^{j30^\circ}}{\underline{Z}_a + \underline{Z}_b} = \frac{380e^{j30^\circ}}{100+50} = 2{,}53e^{j30^\circ} \text{ А.}$$

4.4. Решить задачу 4.3 (случай *a*), полагая сопротивление нейтрального провода $\underline{Z}_{nN} = 100$ Ом.

Решение

Примем

$$\underline{U}_A = U_{фг} e^{j0^\circ} = 220 e^{j0^\circ} \text{ В.}$$

1. Нормальный режим.

Поскольку нейтральный провод не идеальный $(\underline{Z}_{nN} > 0)$, в заданной цепи возникает смещение нейтрали, напряжение которого равно

$$\underline{U}_{nN} = \frac{\underline{U}_A \underline{Y}_A + \underline{U}_B \underline{Y}_B + \underline{U}_C \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N},$$

где

$$\underline{Y}_A = \frac{1}{\underline{Z}_a} = \frac{1}{100} = 0{,}01 \text{ См}, \qquad \underline{Y}_B = \frac{1}{\underline{Z}_b} = \frac{1}{50} = 0{,}02 \text{ См},$$

$$\underline{Y}_C = \frac{1}{\underline{Z}_c} = \frac{1}{j50} = -j0{,}02 \text{ См}, \qquad \underline{Y}_N = \frac{1}{\underline{Z}_N} = \frac{1}{100} = 0{,}01 \text{ См.}$$

После подстановки находим:

$$\underline{U}_{nN} = \frac{220 \cdot 0{,}01 + 220 e^{-j120^\circ} \cdot 0{,}02 + 220 e^{j120^\circ} \cdot 0{,}02 e^{-j90^\circ}}{0{,}01 + 0{,}02 + 0{,}02 e^{-j90^\circ} + 0{,}01} = 92{,}5 e^{j4^\circ} \text{ В.}$$

Далее находим фазные напряжения нагрузки:

$$\underline{U}_a = \underline{U}_A - \underline{U}_{nN} = (127{,}69 - j5{,}89) \text{ В},$$

$$\underline{U}_b = \underline{U}_B - \underline{U}_{nN} = (-202{,}31 - j196{,}42) \text{ В},$$

$$\underline{U}_c = \underline{U}_C - \underline{U}_{nN} = (-202{,}31 - j184{,}62) \text{ В.}$$

Линейные токи определяем по закону Ома:

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_a}{\underline{Z}_a}; \qquad \underline{I}_B = \frac{\underline{U}_b}{\underline{Z}_b}; \qquad \underline{I}_C = \frac{\underline{U}_c}{\underline{Z}_c}.$$

Подставляя числовые значения, получаем:

$$\underline{I}_A = \frac{127{,}69 - j5{,}89}{100} = (1{,}277 - j0{,}59) \text{ А};$$

$$\underline{I}_B = \frac{-202{,}31 - j196{,}42}{50} = (-4{,}06 - j3{,}93)\ \text{А};$$

$$\underline{I}_C = \frac{-202{,}31 - j184{,}62}{j50} = (3{,}692 + j4{,}046)\ \text{А}.$$

Ток в нейтральном проводе можно найти двумя способами. По первому закону Кирхгофа

$$\underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = (0{,}923 + j0{,}059) = 0{,}923e^{j4^\circ}\ \text{А}.$$

По закону Ома

$$\underline{I}_N = \underline{U}_{nN}\underline{Y}_N = 92{,}5e^{j4^\circ} \cdot 0{,}01 = 0{,}923\,e^{j4^\circ}\ \text{А}.$$

<u>2. Обрыв фазы *c*.</u>

Расчет этого случая полностью аналогичен проведенному выше:

$$\underline{U}_{nN} = -j95{,}26\ \text{В};$$

$$\underline{U}_a = \underline{U}_A - \underline{U}_{nN} = (127{,}68 - j5{,}89)\,\text{В}; \quad \underline{U}_b = \underline{U}_B - \underline{U}_{nN} = (-110 - j95{,}26)\ \text{В};$$

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_a}{\underline{Z}_a} = \frac{127{,}68 - j5{,}89}{100} = (1{,}277 - j0{,}059)\ \text{А};$$

$$\underline{I}_B = \frac{\underline{U}_b}{\underline{Z}_b} = \frac{-110 - j95{,}26}{50} = (2{,}2 - j1{,}91)\ \text{А};$$

$$\underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B = (-0{,}92 - j1{,}96)\ \text{А}; \quad \underline{I}_C = 0.$$

4.5. В схеме задачи 4.3 после отключения нейтрального провода произошло короткое замыкание фазы *a*. Найти линейные токи.

Решение.

При указанном в условии аварийном режиме схема замещения цепи принимает вид, показанный на рис. 4.5.1.

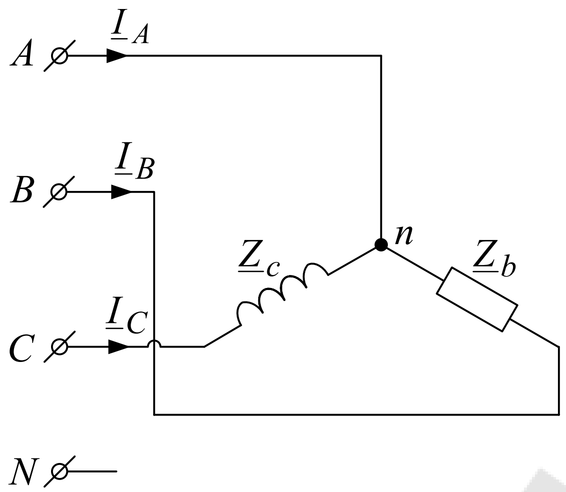


Рис. 4.5.1

Токи неповрежденных фаз при этом определяются линейными (а не фазными!) напряжениями источника:

$$\underline{I}_B = -\frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_b}; \qquad \underline{I}_C = \frac{\underline{U}_{CA}}{\underline{Z}_c}. \tag{1}$$

Задано $U_{фг} = 220$ В, следовательно $U_{лг} = \sqrt{3}U_{фг} = \sqrt{3} \cdot 220 = 380$ В. Принимаем

$$\underline{U}_{AB} = U_г e^{j30^\circ} = 380e^{j30^\circ} \text{ В}. \tag{2}$$

Тогда

$$\underline{U}_{CA} = 380e^{j150^\circ} \text{ В}. \tag{3}$$

Подставляя (2) и (3) в (1), получаем:

$$\underline{I}_B = -\frac{380e^{j30^\circ}}{50} = 7{,}6e^{-j150^\circ} = (-6{,}6 - j3{,}8) \text{ А},$$

$$\underline{I}_C = \frac{380e^{j150^\circ}}{50e^{j90^\circ}} = 7{,}6e^{j60^\circ} = (3{,}8 + j6{,}6) \text{ А}.$$

Ток короткозамкнутой линии находим по первому закону Кирхгофа:

$$\underline{I}_A = -(\underline{I}_B + \underline{I}_C) = -(-6{,}6 - j{,}3{,}8 + 3{,}8 + j6{,}6) = 2{,}8 - j2{,}8 = 4e^{-j45^\circ} \text{ А}.$$

Векторная диаграмма цепи представлена на рис. 4.5.2; $m_U = 40\dfrac{В}{см}$, $m_I = 2\dfrac{А}{см}$.

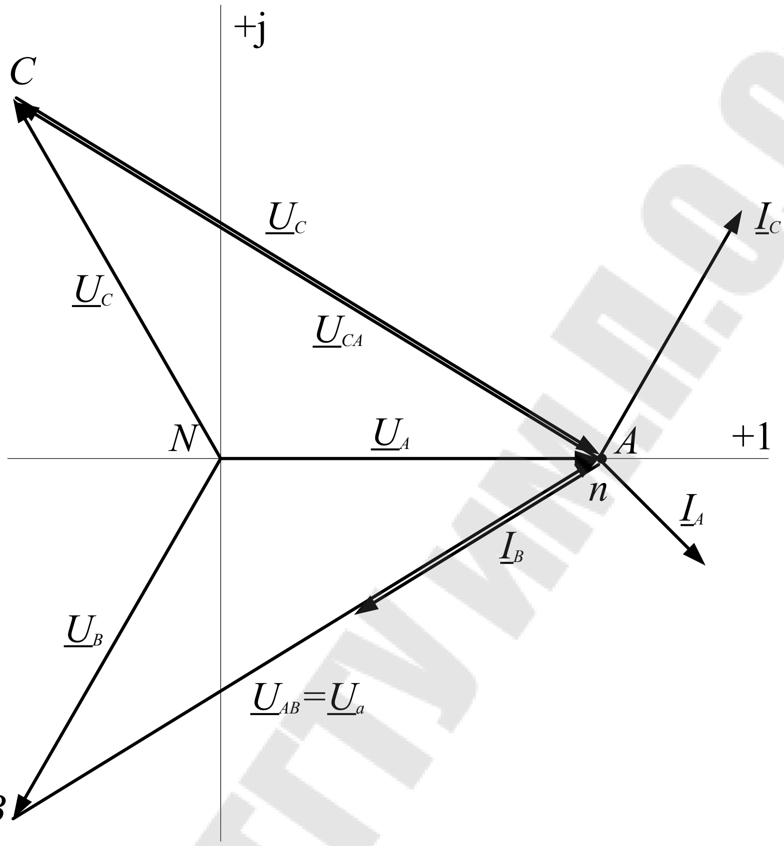


Рис. 4.5.2.

4.6. Определить показания приборов в схеме рис. 4.6.1, если $U_{лг} = 380$ В, $R = X = 25$ Ом.

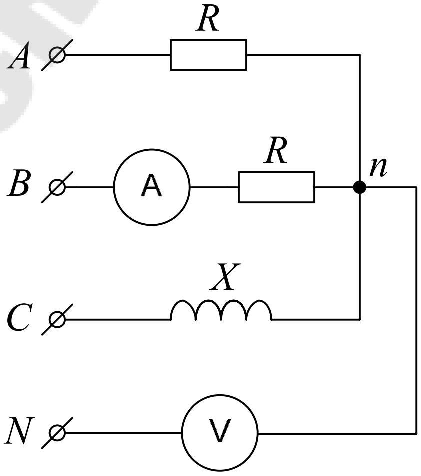


Рис. 4.6.1

Решение

В заданной цепи амперметр измеряет линейный ток I_B, а вольтметр – напряжение смещения нейтрали. Схема для расчета представлена на рис. 4.6.2.

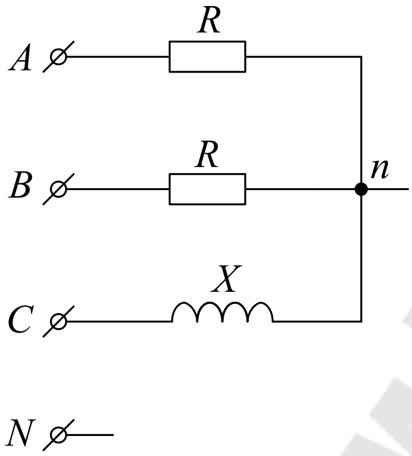


Рис. 4.6.2

Для такой схемы

$$\underline{U}_V = \underline{U}_{nN} = \frac{\underline{U}_A \underline{Y}_A + \underline{U}_B \underline{Y}_B + \underline{U}_C \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C}, \qquad (1)$$

где $\underline{Y}_A = \dfrac{1}{\underline{Z}_A} = 0{,}04$ См; $\underline{Y}_B = \dfrac{1}{\underline{Z}_B} = 0{,}04$ См; $\underline{Y}_C = \dfrac{1}{\underline{Z}_C} = 0{,}04e^{-j90^\circ}$ См.

Фазное напряжение генератора

$$U_{фг} = \frac{U_{лг}}{\sqrt{3}} = \frac{380}{\sqrt{3}} = 220 \text{ В.}$$

Полагаем

$$\underline{U}_A = U_{фг}\, e^{j0^\circ} = 220e^{j0^\circ} \text{ В.} \qquad (2)$$

Тогда

$$\underline{U}_B = 220e^{-j120^\circ} \text{ В,} \quad \underline{U}_C = 220e^{j120^\circ} \text{ В.} \qquad (3)$$

Подставляя (2) и (3) в (1), получаем:

$$\underline{U}_{nN} = \frac{220 \cdot 0{,}04 + 220e^{-j120^\circ} \cdot 0{,}04 + 220e^{j120^\circ} \cdot 0{,}04e^{-j90^\circ}}{0{,}04 + 0{,}04 + 0{,}04e^{-j90^\circ}} = 138{,}5e^{j11{,}6^\circ} \text{ В.}$$

Следовательно, $U_V = 138{,}5$ В.

Искомый ток определяем по закону Ома:

$$I_B = \frac{\underline{U}_b}{\underline{Z}_B} = \frac{\underline{U}_B - \underline{U}_{nN}}{R} = \frac{220e^{-j120^\circ} - 138{,}5e^{j11{,}6^\circ}}{25} =$$

$$= \frac{-110 - j190{,}5 - 136 - j28}{25} = 13{,}2e^{-j138{,}4^\circ} \text{ A.}$$

Следовательно, показание амперметра составляет 13,2 А.

4.7. В схеме рис. 4.7.1 определить параметры симметричного приемника, соединенного треугольником, если $U_л = 380$ В, $P_{W_A} = 418$ Вт, $P_{W_C} = 836$ Вт.

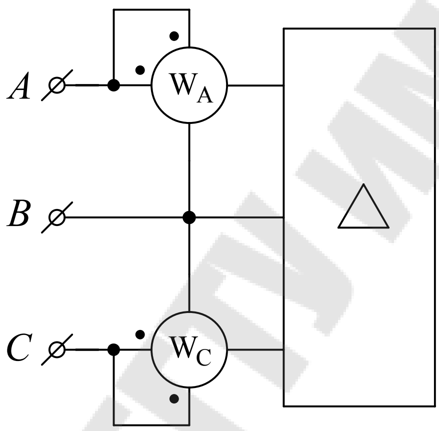


Рис. 4.7.1

Решение

Активная мощность, потребляемая нагрузкой, равна

$$P_{нагр} = P_{W_A} + P_{W_C}. \quad (1)$$

Если нагрузка симметрична, то

$$P_{нагр} = 3P_ф, \quad (2)$$

где $P_ф$ – активная мощность, потребляемая каждой из трех фаз. Из (1) и (2) находим:

$$P_ф = \frac{P_{W_A} + P_{W_C}}{3} = \frac{418 + 836}{3} = 418 \text{ Вт.}$$

Воспользуемся тем, что

$$P_ф = U_ф I_ф \cos\varphi_ф = \frac{U_ф^2}{Z_ф}\cos\varphi_ф; \qquad \varphi_ф = \operatorname{arctg}\frac{Q_ф}{P_ф}.$$

Т. к. нагрузка симметрична,

$$\varphi_ф = \operatorname{arctg}\frac{Q}{P} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}(P_{W_C} - P_{W_A})}{P_{W_A} + P_{W_C}} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}(836-418)}{418+836} = 30^\circ.$$

Поскольку фазы нагрузки соединены треугольником, $U_ф = U_л = 380$ В. Следовательно,

$$Z_ф = \frac{U_ф^2}{P_ф}\cos\varphi_ф = \frac{380^2}{418}\cos 30^\circ = 299 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_ф = Z_ф e^{j\varphi_ф} = 299 e^{30^\circ} = (259 + j149{,}5) \text{ Ом}.$$

Т.к. $\varphi > 0$, фаза приемника имеет активно-индуктивный характер, а параметры ее последовательной схемы замещения таковы:

$$R = \operatorname{Re} Z_ф = 259 \text{ Ом}, \qquad X_ф = \operatorname{Im} Z_ф = 149{,}5 \text{ Ом}.$$

4.8. Определить показание второго ваттметра в схеме рис. 4.8.1, если $U_л = 380$ В, $P_{W_1} = -1560$ Вт, а каждая фаза симметричной звезды нагрузки имеет коэффициент мощности $\cos\varphi_ф = 0{,}174$.

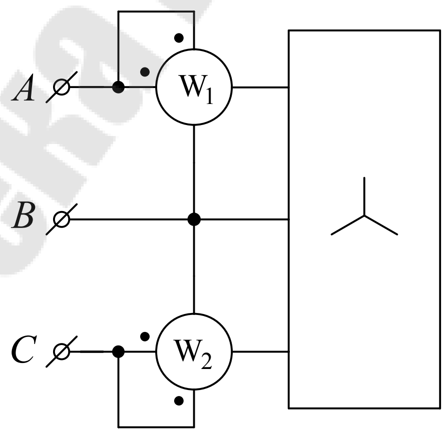


Рис. 4.8.1

Решение

По условию $\varphi_ф = \arccos 0{,}174 = \pm 80^\circ$. Воспользуемся тем, что

$$P_{W_1} = U_{AB} I_A \cos(\psi_{u_{AB}} - \psi_{i_A}), \tag{1}$$

где $\psi_{u_{AB}}$ – начальная фаза напряжения U_{AB}, ψ_{i_A} – начальная фаза тока i_A. Примем

$$\psi_{u_{AB}} = 30^\circ, \tag{2}$$

т.е. положим

$$\underline{U}_{AB} = U_л e^{j30^\circ} = 380 e^{j30^\circ} \text{ В}.$$

Тогда

$$\underline{U}_A = \frac{U_{AB}}{\sqrt{3}} e^{-j30^\circ} = 220 e^{j0^\circ} \text{ В}. \tag{3}$$

Т. к. нагрузка симметрична, из (3) следует, что

$$\underline{I}_A = I_A e^{\mp j\varphi_ф}, \text{ т.е. } \quad \varphi_{i_A} = \mp\varphi_ф = \mp 80^\circ. \tag{4}$$

В выражениях (4) верхний знак соответствуют случаю

$$\varphi_ф = 80^\circ, \tag{5}$$

а нижний знак – случаю

$$\varphi_ф = -80^\circ. \tag{6}$$

Подставляя (2) и (4) в (1), получим для случая (5)

$$P_{W_1} = 380 I_\text{A} \cos(30^\circ - (-80^\circ)) = 380 I_\text{A} \cos 110^\circ < 0, \tag{7}$$

а для случая (6)

$$P_{W_1} = 380 I_\text{A} \cos(30^\circ - 80^\circ) = 380 I_\text{A} \cos 50^\circ > 0. \tag{8}$$

По условию $P_{W_1} < 0,$ следовательно, вариант (6), (8) должен быть исключен. На этом основании делаем вывод, что

$$\varphi_ф = 80^\circ, \qquad \varphi_{i_A} = -80^\circ,$$

т. е.

$$I_A = \frac{P_{W_1}}{U_{AB} \cos(\psi_{u_{AB}} - \psi_{i_A})} = \frac{-1560}{380 \cos 110^\circ} = 12 \text{ А}, \qquad \underline{I}_A = 12 e^{-j80^\circ},$$

$$\underline{Z}_ф = \frac{\underline{U}_ф}{\underline{I}_ф} = \frac{\underline{U}_A}{\underline{I}_A} = \frac{220e^{j0^\circ}}{12e^{-j80^\circ}} = 18{,}33e^{j80^\circ} = (3{,}2 + j18{,}1)\ \text{Ом},$$

$$R_ф = \operatorname{Re} Z_ф = 3{,}2\ \text{Ом}, \qquad X_ф = \operatorname{Im} Z_ф = 18{,}1\ \text{Ом}.$$

Находим показания второго ваттметра:

$$P_{W_2} = P'_{W_1} = U_{CB} I_C \cos(\varphi_{u_{CB}} - \varphi_{i_C}),$$

$$\underline{U}_{CB} = -\underline{U}_{BC} = -380e^{-j90^\circ} = 380e^{j90^\circ}\ \text{В},$$

$$\underline{I}_C = \underline{I}_A e^{j120^\circ} = 12e^{j40^\circ}\ \text{А},$$

следовательно,

$$\varphi_{u_{CB}} = 90^\circ, \qquad \varphi_{i_C} = 40^\circ,$$

$$P_{W_2} = 380 \cdot 12 \cos(90^\circ - 40^\circ) = 2931\ \text{Вт}.$$

4.9. Симметрия эдс генератора с фазным напряжением $U_{фг} = 220$ В нарушена, т.к. обмотка фазы *a* подключена к нейтральной точке не тем концом. Симметричная нагрузка соединена звездой с нейтральным проводом, сопротивление которого $\underline{Z}_N = j0{,}025$ Ом. Сопротивление токам нулевой, прямой и обратной последовательностей таковы: для фазы генератора $\underline{Z}_{г_0} = j0{,}5$ Ом, $\underline{Z}_{г_1} = j9$ Ом, $\underline{Z}_{г_2} = j1$ Ом; для линии $\underline{Z}_{л_0} = j2$ Ом, $\underline{Z}_{л_1} = \underline{Z}_{л_2} = j1$ Ом; для фазы нагрузки $\underline{Z}_0 = j0{,}5$ Ом, $\underline{Z}_1 = j4$ Ом, $\underline{Z}_2 = j1$ Ом. Найти симметричные составляющие токов.

Решение.

Приняв исходную систему фазных напряжений генератора

$$\underline{U}_A = -220\ \text{В}, \quad \underline{U}_B = 220e^{-j120^\circ}\ \text{В}, \quad \underline{U}_C = 220e^{j120^\circ}\ \text{В},$$

находим векторы нулевой, прямой и обратной последовательностей:

$$\underline{U}_0 = \frac{\underline{U}_A + \underline{U}_B + \underline{U}_C}{3} = \frac{-220 + 220e^{-j120^\circ} + 220e^{j120^\circ}}{3} = -146{,}67 \text{ В},$$

$$\underline{U}_1 = \frac{\underline{U}_A + a\underline{U}_B + a^2\underline{U}_C}{3} = \frac{-220 + e^{j120^\circ} \cdot 220e^{-j120^\circ} + e^{-j120^\circ} \cdot 220e^{j120^\circ}}{3} =$$

$$= 73{,}3 \text{ В},$$

$$\underline{U}_1 = \frac{\underline{U}_A + a^2\underline{U}_B + a\underline{U}_C}{3} = \frac{-220 + e^{-j120^\circ} \cdot 220e^{-j120^\circ} + e^{j120^\circ} \cdot 220e^{j120^\circ}}{3} =$$

$$= -146{,}67 \text{ В}.$$

Находим симметричные составляющие токов:

$$\underline{I}_{A0} = \underline{I}_{B0} = \underline{I}_{C0} = \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}_{г_0} + \underline{Z}_{л_0} + \underline{Z}_0 + 3\underline{Z}_N} = \frac{-146{,}67}{j0{,}5 + j2 + j0{,}5 + j0{,}25} =$$

$$= j117{,}2 \text{ А};$$

$$\underline{I}_{A_1} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_{г_1} + \underline{Z}_{л_1} + \underline{Z}_1} = \frac{73{,}3}{j9 + j1 + j4} = -j5{,}24 = 5{,}24e^{-j90^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_{B_1} = \underline{I}_{A_1} e^{-j120^\circ} = 5{,}24e^{-j90^\circ} \cdot e^{-j120^\circ} = 5{,}24e^{j150^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_{C_1} = \underline{I}_{A_1} e^{j120^\circ} = 5{,}24e^{-j90^\circ} \cdot e^{j120^\circ} = 5{,}24e^{j30^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_{A_2} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_{г_2} + \underline{Z}_{л_2} + \underline{Z}_2} = \frac{-146{,}67}{j1 + j1 + j1} = j48{,}8 = 48{,}8e^{j90^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_{B_2} = \underline{I}_{A_2} e^{j120^\circ} = 48{,}8e^{j90^\circ} \cdot e^{j120^\circ} = 48{,}8e^{-j150^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_{C_2} = \underline{I}_{A_2} e^{-j120^\circ} = 48{,}8e^{j90^\circ} \cdot e^{-j120^\circ} = 48{,}8e^{-j30^\circ} \text{ А}.$$

4.10. Трехпроводная трехфазная сеть с линейными напряжениями $\underline{U}_{AB} = 220e^{j0^\circ}$ В, $\underline{U}_{BC} = 220e^{-j90^\circ}$ В, $\underline{U}_{CA} = 311e^{j135^\circ}$ В питает электродвигатель, фазы которого соединены звездой и имеют сопротивление $\underline{Z}_1 = 4e^{j45^\circ}$ Ом для токов прямой последовательности и $\underline{Z}_2 = 2e^{j60^\circ}$ Ом для токов обратной последовательности. Найти токи в фазах двигателя.

Решение

Находим комплексы векторов нулевой, прямой и обратной последовательностей для заданной системы линейных напряжений:

$$\underline{U}_0 = \frac{\underline{U}_{AB} + \underline{U}_{BC} + \underline{U}_{CA}}{3} = \frac{220e^{j0^\circ} + 220e^{-j90^\circ} + 311e^{j135^\circ}}{3} = 0 \text{ В},$$

$$\underline{U}_1 = \frac{\underline{U}_{AB} + a\underline{U}_{BC} + a^2\underline{U}_{CA}}{3} =$$

$$= \frac{220e^{j0^\circ} + e^{j120^\circ} \cdot 220e^{-j90^\circ} + e^{-j120^\circ} \cdot 311e^{j135^\circ}}{3} = 245e^{j15^\circ} \text{ В},$$

$$\underline{U}_2 = \frac{\underline{U}_{AB} + a^2\underline{U}_{BC} + a\underline{U}_{CA}}{3} = \frac{220e^{j0^\circ} + e^{-j120^\circ} \cdot 220e^{-j90^\circ}}{3} +$$

$$+ \frac{e^{j120^\circ} \cdot 311e^{j135^\circ}}{3} = 66e^{-j105^\circ} \text{ В}.$$

Тогда заданные линейные напряжения

$$\underline{U}_{AB} = \underline{U}_0 + \underline{U}_1 + \underline{U}_2 = 245e^{j15^\circ} + 66e^{-j105^\circ} \text{ В},$$

$$\underline{U}_{BC} = \underline{U}_0 + a^2\underline{U}_1 + a\underline{U}_2 = e^{-j120^\circ} \cdot 245e^{j15^\circ} + e^{j120^\circ} \cdot 66e^{-j105^\circ} =$$

$$= 245e^{-j105^\circ} + 66e^{j15^\circ} \text{ В},$$

$$\underline{U}_{CA} = \underline{U}_0 + a\underline{U}_1 + a^2\underline{U}_2 = e^{j120^\circ} \cdot 245e^{j15^\circ} + e^{-j120^\circ} \cdot 66e^{-j105^\circ} =$$

$$= 245e^{j135^\circ} + 66e^{j135^\circ} = 311e^{j135^\circ} \text{ В}.$$

Чтобы найти симметричные составляющие фазных напряжений генератора $\underline{U}_{фг_1}$ и $\underline{U}_{фг_2}$, воспользуемся соотношениями между фазными и линейными напряжениями в симметричных системах прямой и обратной последовательностей:

$$\underline{U}_{фг_1} = \frac{\underline{U}_1}{\sqrt{3}} e^{-j30^\circ} = \frac{245 e^{j15^\circ}}{\sqrt{3}} e^{-j30^\circ} = 141{,}5 e^{-j15^\circ} \text{ В},$$

$$\underline{U}_{фг_2} = \frac{\underline{U}_2}{\sqrt{3}} e^{j30^\circ} = \frac{66 e^{-j105^\circ}}{\sqrt{3}} e^{j30^\circ} = 38 e^{-j75^\circ} \text{ В}.$$

При этом составляющую $\underline{U}_{фг_0}$ в данной задаче определять не нужно, т.к. из-за отсутствия нейтрального провода $\underline{I}_0 = 0$.

Симметричные составляющие токов находим по закону Ома:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{фг_1}}{\underline{Z}_1} = \frac{141{,}5 e^{-j15^\circ}}{4 e^{j45^\circ}} = 35{,}4 e^{-j60^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{фг_2}}{\underline{Z}_2} = \frac{38 e^{-j75^\circ}}{2 e^{j60^\circ}} = 19 e^{-j135^\circ} \text{ А}.$$

Находим фазные токи двигателя:

$$\underline{I}_A = \underline{I}_0 + \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 35{,}4 e^{-j60^\circ} + 19 e^{-j135^\circ} = 44{,}3 e^{-j84{,}5^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_B = \underline{I}_0 + a^2 \underline{I}_1 + a \underline{I}_2 = e^{-j120^\circ} \cdot 35{,}4 e^{-j60^\circ} + e^{j120^\circ} \cdot 19 e^{-j135^\circ} =$$

$$= 17{,}7 e^{-j164^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_C = \underline{I}_0 + a \underline{I}_1 + a^2 \underline{I}_2 = e^{j120^\circ} \cdot 35{,}4 e^{-j60^\circ} + e^{-j120^\circ} \cdot 19 e^{-j135^\circ} =$$

$$= 50{,}7 e^{j} 75{,}5^\circ \text{ А}.$$

4.11. Обмотки симметричного трехфазного генератора соединены звездой. Найти мгновенные значения всех фазных и линейных напряжений и действующие значения фазного и линейного напряжений, если $u_A = 100 \sin \omega t + 20 \sin 3\omega t + 15 \sin 5\omega t$,В.

Решение

1-е гармоники напряжения образуют систему прямой последовательности, 3-и – нулевой, а 5-е – обратной, следовательно,

$$u_B = 100\sin(\omega t - 120^\circ) + 20\sin 3\omega t + 15\sin(5\omega t + 120^\circ) \text{ В;}$$

$$u_C = 100\sin(\omega t + 120^\circ) + 20\sin 3\omega t + 15\sin(5\omega t - 120^\circ) \text{ В.}$$

Линейные напряжения найдем как разность фазных:

$$\underline{U}_{AB(1)} = \frac{100}{\sqrt{2}}e^{j0^\circ} - \frac{100}{\sqrt{2}}e^{-j120^\circ} = \frac{100}{\sqrt{2}}\sqrt{3}e^{j30^\circ} \text{ В;}$$

$$\underline{U}_{AB(3)} = \frac{20}{\sqrt{2}}e^{j0^\circ} - \frac{20}{\sqrt{2}}e^{j0^\circ} = 0 \text{ В;}$$

$$\underline{U}_{AB(5)} = \frac{15}{\sqrt{2}}e^{j0^\circ} - \frac{15}{\sqrt{2}}e^{j120^\circ} = \frac{15}{\sqrt{2}}\sqrt{3}e^{-j30^\circ} \text{ В.}$$

Следовательно,

$$u_{AB} = 173\sin(\omega t + 30^\circ) + 26\sin(5\omega t - 30^\circ) \text{ В;}$$

$$u_{BC} = 173\sin(\omega t - 90^\circ) + 26\sin(5\omega t + 90^\circ) \text{ В;}$$

$$u_{CA} = 173\sin(\omega t + 150^\circ) + 26\sin(5\omega t - 150^\circ) \text{ В.}$$

Действующие значения

$$U_ф = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{100^2 + 20^2 + 15^2} = 72{,}9 \text{ В;}\quad U_л = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{173^2 + 26^2} = 123{,}1 \text{ В.}$$

4.12. Фазное напряжение генератора содержит первую и третью гармоники. Найти амплитуды гармоник, если при измерении вольтметром были получены значения $U_{фг} = 125$ В, $U_{лг} = 210$ В.

Решение.

$$U_{фг} = \sqrt{\frac{U_{(1)}^2}{2} + \frac{U_{(3)}^2}{2}} \qquad (1)$$

$$U_{лг} = \sqrt{3}\sqrt{\frac{U_{(1)}^2}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}U_{(1)} \qquad (2)$$

Из (2) находим амплитуду первой гармоники:

$$U_{(1)} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot U_{лг} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 210 = 171{,}5 \text{ В}.$$

Подставляя результат в (1), находим амплитуду третьей гармоники:

$$U_{(3)} = \sqrt{2U_{фг}^2 - U_{(1)}^2} = \sqrt{2 \cdot 15625 - 29412{,}25} = 42{,}87 \text{ В}.$$

4.13. Найти мгновенные значения токов и показания приборов (рис. 4.13.1), если $e_A = 120\sin\omega t + 30\sin 3\omega t + 20\sin 5\omega t$ В, сопротивление проводов линии $R_л = 10$ Ом, $R = 60$ Ом, $\omega L = 30$ Ом.

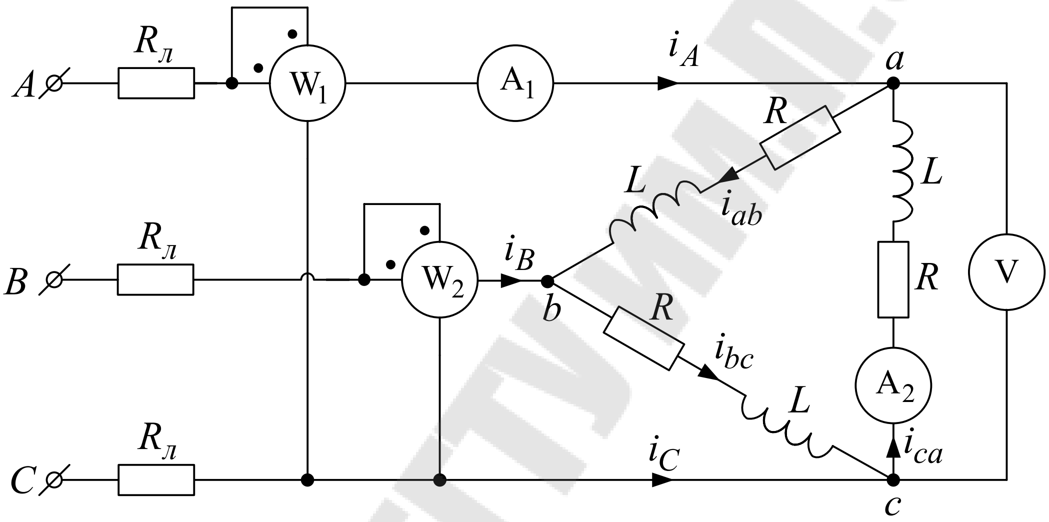


Рис. 4.13.1

Третьи гармоники образуют систему нулевой последовательности, которая проявляется только в четырёхпроводных цепях. Поэтому расчет проводим для 1-й и 5-й гармоник. При этом учитываем, что

$$\underline{Z}_{(1)} = R + j\omega L = (60 + j30) \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{(5)} = R + j5\omega L = (60 + j150) \text{ Ом}.$$

Преобразуем сопротивления нагрузки, соединенные треугольником, в эквивалентную звезду:

$$\underline{Z}'_{(1)} = \frac{\underline{Z}_{(1)}}{3} = (20 + j10) = 22{,}4e^{j26{,}35^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}'_{(5)} = \frac{\underline{Z}_{(5)}}{3} = (20 + j50) = 53{,}9e^{j68{,}10^\circ} \text{ Ом}.$$

Линейные токи

$$\underline{I}_{A_{(1)}} = \frac{\underline{E}_{A_{(1)}}}{\underline{Z}'_{(1)} + R_л} = \frac{120e^{j0^\circ}}{\sqrt{2}(30 + j10)} = 2{,}68e^{-j18{,}20^\circ} \text{ А;}$$

$$\underline{I}_{A_{(5)}} = \frac{\underline{E}_{A_{(5)}}}{\underline{Z}'_{(5)} + R_л} = \frac{120e^{j0^\circ}}{\sqrt{2(30 + j50)}} = 0{,}243e^{-j59^\circ} \text{ А.}$$

Амперметр A_1 показывает действующее значение линейного тока $I_1 = \sqrt{2{,}68^2 + 0{,}243^2} = 2{,}69$ А. Мгновенное значение тока в линейном проводе A

$$i_A = 3{,}79\sin(\omega t - 18{,}20^\circ) + 0{,}343\sin(5\omega t - 59^\circ) \text{ А.}$$

Учитывая, что

$$\underline{I}_{B(1)} = a^2\underline{I}_{A(1)}; \ \underline{I}_{C(1)} = a\underline{I}_{A(1)}; \quad \underline{I}_{B(5)} = a\underline{I}_{A(5)}; \ \underline{I}_{C(5)} = a^2\underline{I}_{A(5)},$$

где $a = e^{j120^\circ}$, получаем:

$$i_B = 3{,}79\sin(\omega t - 138{,}20^\circ) + 0{,}343\sin(5\omega t + 61^\circ) \text{ А;}$$

$$i_C = 3{,}79\sin(\omega t + 101{,}40^\circ) + 0{,}343\sin(5\omega t - 179^\circ) \text{ А.}$$

Из равенства

$$i_A = i_{ab} - i_{bc}$$

вытекает, что при симметричной нагрузке

$$\underline{I}_{A_{(1)}} = \underline{I}_{ab_{(1)}}\sqrt{3}e^{-j30^\circ}, \qquad \underline{I}_{A_{(5)}} = \underline{I}_{ab_{(5)}}\sqrt{3}e^{j30^\circ},$$

следовательно,

$$\underline{I}_{ab_{(1)}} = \frac{\underline{I}_{A_{(1)}}}{\sqrt{3}}e^{j30^\circ} = 1{,}55e^{j11{,}40^\circ} \text{ А,}$$

$$\underline{I}_{ab_{(5)}} = \frac{\underline{I}_{A_{(5)}}}{\sqrt{3}}e^{-j30^\circ} = 0{,}140e^{-j89^\circ} \text{ А.}$$

Мгновенные значения токов:

$$i_{ab} = 2{,}19\sin(\omega t + 11{,}40^\circ) + 0{,}198\sin(5\omega t - 89^\circ) \text{ А;}$$

$$i_{bc} = 2{,}19\sin(\omega t - 108{,}2^\circ) + 0{,}198\sin(5\omega t + 31^\circ) \text{ А;}$$

$$i_{ca} = 2{,}19\sin(\omega t + 131{,}4^\circ) + 0{,}198\sin(5\omega t + 151^\circ) \text{ А.}$$

Амперметр A_2 показывает действующее значение фазного тока $I_2 = \sqrt{1{,}55^2 + 0{,}14^2} = 1{,}56$ А. Показания ваттметров:

$$P_{W_1} = \mathrm{Re}(\underline{U}_{ac_{(1)}} \underline{I}^*_{A(1)}) + \mathrm{Re}(\underline{U}_{ac_{(5)}} \underline{I}^*_{A(5)});$$

$$P_{W_2} = \mathrm{Re}(\underline{U}_{bc_{(1)}} \underline{I}^*_{B(1)}) + \mathrm{Re}(\underline{U}_{bc_{(5)}} \underline{I}^*_{B(5)}),$$

где

$$\underline{U}_{ac_{(1)}} = -\underline{Z}_{(1)} \underline{I}_{ca_{(1)}} = 104e^{-j21{,}45^\circ} \text{ В;}$$

$$\underline{U}_{ac_{(5)}} = -\underline{Z}_{(5)} \underline{I}_{ca_{(5)}} = 22{,}6e^{j40{,}10^\circ} \text{ В;}$$

$$\underline{U}_{bc_{(1)}} = \underline{U}_{ac_{(1)}} e^{-j60^\circ} = 104e^{-j81{,}45^\circ} \text{ В,}$$

$$\underline{U}_{bc_{(5)}} = \underline{U}_{ac_{(5)}} e^{j60^\circ} = 22{,}6e^{j100{,}10^\circ} \text{ В.}$$

Следовательно,

$$P_{W_1} = 104 \cdot 2{,}68\cos(-24{,}45^\circ + 18{,}25^\circ) + 22{,}6 \cdot 0{,}243\cos(40{,}10^\circ + 59^\circ) = 227 \text{ Вт}$$

$$P_{W_2} = 104 \cdot 2{,}68\cos 56{,}35^\circ + 22{,}6 \cdot 0{,}243\cos 43{,}10^\circ = 157 \text{ Вт.}$$

Баланс активных мощностей: $P_{W_1} + P_{W_2} = P$;

$$P_{W_1} + P_{W_2} = 434 \text{ Вт;} \qquad P = 3(RI_2^2) = 3 \cdot 1{,}56^2 \cdot 60 = 432 \text{ Вт.}$$

4.14. Фазное напряжение генератора, соединенного треугольником, задано: $u_ф = 254{,}6\sin\omega t + 84{,}9\sin 3\omega t + 50{,}9\sin 5\omega t$, В. Найти фазные и линейные токи нагрузки, соединенной треугольником, в двух случаях: 1) нагрузка симметрична (рис. 4.14.1), $R = 5$ Ом, $\dfrac{1}{\omega C} = 25$ Ом; 2) нагрузка равномерна (рис. 4.14.2), $R = \omega L = \dfrac{1}{\omega C} = 20$ Ом.

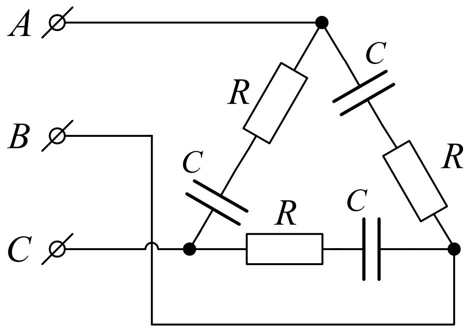


Рис. 4.14.1

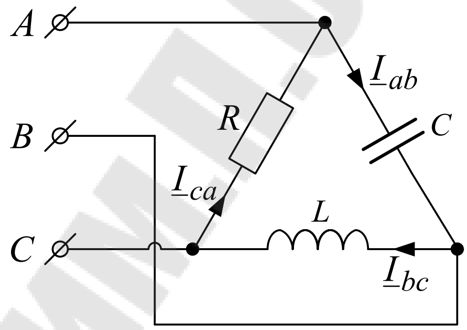


Рис. 4.14.2

Решение

Каждую фазу нагрузки питает линейное напряжение генератора, содержащее только некратные трем гармоники:

$$U_{AB} = 254{,}6\sin\omega t + 50{,}9\sin 5\omega t, \text{ В},$$

$$U_{BC} = 254{,}6\sin(\omega t - 120^\circ) + 50{,}9\sin(5\omega t + 120^\circ), \text{ В},$$

$$U_{CA} = 254{,}6\sin(\omega t + 120^\circ) + 50{,}9\sin(5\omega t - 120^\circ), \text{ В}.$$

1 случай.

На первой гармонике

$$I_{ф(1)} = \frac{U_{л(1)}}{Z_{ф(1)}} = \frac{\frac{254,6}{\sqrt{2}}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{254,6}{\sqrt{2}\sqrt{5^2 + 25^2}} = 7,06 \text{ А},$$

$$I_{л(1)} = \sqrt{3} I_{ф(1)} = \sqrt{3} \cdot 7,06 = 12,23 \text{ А}.$$

На пятой гармонике

$$I_{ф(5)} = \frac{U_{л(5)}}{Z_{ф(5)}} = \frac{\frac{50,9}{\sqrt{2}}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{5\omega C}\right)^2}} = \frac{50,9}{\sqrt{2}\sqrt{5^2 + 5^2}} = 5,09 \text{ А},$$

$$I_{л(5)} = \sqrt{3} I_{ф(5)} = \sqrt{3} \cdot 5,09 = 8,82 \text{ А}.$$

Следовательно,

$$I_ф = \sqrt{I_{ф(1)}^2 + I_{ф(5)}^2} = \sqrt{7,06^2 + 5,09^2} = 8,7 \text{ А},$$

$$I_л = \sqrt{I_{л(1)}^2 + I_{л(5)}^2} = \sqrt{12,23^2 + 8,82^2} = 15,09 \text{ А}.$$

2 случай

На первой гармонике

$$\underline{I}_{ab(1)} = \frac{\underline{U}_{AB(1)}}{\underline{Z}_{ab(1)}} = \frac{\frac{254,6}{\sqrt{2}} e^{j0^\circ}}{20 e^{-j90^\circ}} = 9 e^{j90^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_{bc(1)} = \frac{\underline{U}_{BC(1)}}{\underline{Z}_{bc(1)}} = \frac{\frac{254,6}{\sqrt{2}} e^{-j120^\circ}}{20 e^{j90^\circ}} = 9 e^{j150^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_{ca_{(1)}} = \frac{\underline{U}_{CA_{(1)}}}{\underline{Z}_{ca_{(1)}}} = \frac{\frac{254{,}6}{\sqrt{2}} e^{j120^\circ}}{20} = 9e^{j120^\circ} \text{ A;}$$

$$\underline{I}_{A_{(1)}} = \underline{I}_{ab_{(1)}} - \underline{I}_{ca_{(1)}} = 9e^{j90^\circ} - 9e^{j120^\circ} = 4{,}5 + j1{,}2 = 4{,}66e^{j12^\circ} \text{ A;}$$

$$\underline{I}_{B_{(1)}} = \underline{I}_{bc_{(1)}} - \underline{I}_{ab_{(1)}} = 9e^{j150^\circ} - 9e^{j90^\circ} = -7{,}8 - j4{,}5 = 9e^{-j150^\circ} \text{ A;}$$

$$\underline{I}_{C_{(1)}} = \underline{I}_{ca_{(1)}} - \underline{I}_{bc_{(1)}} = 9e^{j120^\circ} - 9e^{j150^\circ} = 3{,}3 + j3{,}3 = 4{,}67e^{j45^\circ} \text{ A.}$$

На пятой гармонике

$$\underline{I}_{ab_{(5)}} = \frac{\underline{U}_{AB_{(5)}}}{\underline{Z}_{ab_{(5)}}} = \frac{\frac{50{,}9}{\sqrt{2}} e^{j0^\circ}}{\frac{20}{5} e^{-j90^\circ}} = 9e^{j90^\circ} \text{ A;}$$

$$\underline{I}_{bc_{(5)}} = \frac{\underline{U}_{BC_{(5)}}}{\underline{Z}_{bc_{(5)}}} = \frac{\frac{50{,}9}{\sqrt{2}} e^{j120^\circ}}{5 \cdot 20 e^{j90^\circ}} = 0{,}36e^{j30^\circ} \text{ A;}$$

$$\underline{I}_{ca_{(5)}} = \frac{\underline{U}_{CA_{(5)}}}{\underline{Z}_{ca_{(5)}}} = \frac{\frac{50{,}9}{\sqrt{2}} e^{-j120^\circ}}{20} = 1{,}8e^{-j120^\circ} \text{ A;}$$

$$\underline{I}_{A_{(5)}} = \underline{I}_{ab_{(5)}} - \underline{I}_{ca_{(5)}} = 9e^{j90^\circ} - 1{,}8e^{j120^\circ} = 0{,}9 + j10{,}56 = 10{,}6e^{j85{,}13^\circ} \text{ A;}$$

$$\underline{I}_{B_{(5)}} = \underline{I}_{bc_{(5)}} - \underline{I}_{ab_{(5)}} = 0{,}36e^{j30^\circ} - 9e^{j90^\circ} = 0{,}31 - j8{,}82 = 8{,}83e^{-j88^\circ} \text{ A;}$$

$$\underline{I}_{C_{(5)}} = \underline{I}_{ca_{(5)}} - \underline{I}_{bc_{(5)}} = 1{,}8e^{-j120^\circ} - 0{,}36e^{j30^\circ} = -1{,}21 - j1{,}74 = 2{,}12e^{-j55{,}2^\circ} \text{ A.}$$

Фазные и линейные токи:

$$I_{ab} = \sqrt{I_{ab_{(1)}}^2 + I_{ab_{(5)}}^2} = \sqrt{9^2 + 9^2} = 12{,}73 \text{ A;}$$

$$I_{bc} = \sqrt{I_{bc_{(1)}}^2 + I_{bc_{(5)}}^2} = \sqrt{9^2 + 0{,}36^2} = 9{,}01 \text{ А};$$

$$I_{ca} = \sqrt{I_{ca_{(1)}}^2 + I_{ca_{(5)}}^2} = \sqrt{9^2 + 1{,}8^2} = 9{,}18 \text{ А};$$

$$I_A = \sqrt{I_{A_{(1)}}^2 + I_{A_{(5)}}^2} = \sqrt{4{,}66^2 + 10{,}6^2} = 11{,}6 \text{ А};$$

$$I_B = \sqrt{I_{B_{(1)}}^2 + I_{B_{(5)}}^2} = \sqrt{9^2 + 8{,}83^2} = 12{,}6 \text{ А};$$

$$I_C = \sqrt{I_{C_{(1)}}^2 + I_{C_{(5)}}^2} = \sqrt{4{,}67^2 + 2{,}12^2} = 5{,}13 \text{ А};$$

4.15. К источнику, фазы которого соединены звездой, подключен приемник, фазы которого также соединены звездой. Фазное напряжение источника $u_ф = 254{,}6\sin\omega t + 84{,}9\sin 3\omega t + 50{,}9\sin 5\omega t$. Между нейтральными точками источника и приемника включают сначала вольтметр, а затем амперметр. Определить показания каждого из Указанных приборов и линейный ток I_B в двух случаях: 1) нагрузка симметрична, $\underline{Z}_ф = R + j\omega L = (10 + j2)$ Ом; 2) нагрузка равномерна, $\underline{Z}_a = R,\ \underline{Z}_b = j\omega L,\ \underline{Z}_c = -\dfrac{j}{\omega C},\ R = \omega L = \dfrac{1}{\omega C} = 12$ Ом.

Решение

Вольтметр, включенный между нейтральными точками источника и приемника, измеряет напряжение смещения нейтрали. Амперметр, включенный между теми же точками, превращает трехпроводную цепь в четырехпроводную и измеряет силу тока в нейтральном проводе.

<u>1 случай</u>

При симметричной нагрузке смещение нейтрали обусловлено гармониками, кратными трем. В нашем случае

$$U_{nN} = U_{nN_{(3)}} = U_V = \frac{84{,}9}{\sqrt{2}} = 60 \text{ В}.$$

На первой гармонике

$$I_{\phi(1)} = \frac{U_{\phi(1)}}{Z_{\phi(1)}} = \frac{\frac{254,6}{\sqrt{2}}}{\sqrt{10^2+2^2}} = 17,65 \text{ А.} \qquad (1)$$

На пятой гармонике

$$I_{\phi(5)} = \frac{U_{\phi(5)}}{Z_{\phi(5)}} = \frac{\frac{50,9}{\sqrt{2}}}{\sqrt{10^2+(5\cdot 2)^2}} = 2,55 \text{ А.} \qquad (2)$$

Отсюда

$$I_B = I_л = \sqrt{I_{\phi(1)}^2 + I_{\phi(5)}^2} = \sqrt{17,65^2 + 2,55^2} = 17,83 \text{ А.} \qquad (3)$$

При наличии нейтрального провода фазные токи приемника содержат не только первую и пятую [см. (1) и (2)], но и третью гармонику:

$$I_{\phi(3)} = \frac{U_{\phi(3)}}{Z_{\phi(3)}} = \frac{\frac{84,9}{\sqrt{2}}}{\sqrt{10^2+(3\cdot 2)^2}} = 5,15 \text{ А.}$$

В этом случае вместо (3) будем иметь:

$$I_B = I_л = \sqrt{I_{\phi(1)}^2 + I_{\phi(3)}^2 + I_{\phi(5)}^2} = \sqrt{17,65^2 + 5,15^2 + 2,55^2} = 18,56 \text{ А.}$$

При этом в нейтральном проводе протекает ток

$$I_N = 3I_{\phi(3)} = 3\cdot 5,15 = 15,45 \text{ А.}$$

Следовательно, показание амперметра составляет 15,45 А.

2 случай

При несимметричной нагрузке, в отсутствие нейтрального провода, смещение нейтрали создают все имеющиеся гармоники:

$$\underline{U}_{nN(1)} = \frac{\underline{U}_{A(1)}\underline{Y}_{A(1)} + \underline{U}_{B(1)}\underline{Y}_{B(1)} + \underline{U}_{C(1)}\underline{Y}_{C(1)}}{\underline{Y}_{A(1)} + \underline{Y}_{B(1)} + \underline{Y}_{C(1)}}, \qquad (4)$$

$\underline{U}_{nN(3)} = 60$ В [см. 1 случай],

$$\underline{U}_{nN_{(5)}} = \frac{\underline{U}_{A_{(5)}} \underline{Y}_{A_{(5)}} + \underline{U}_{B_{(5)}} \underline{Y}_{B_{(5)}} + \underline{U}_{C_{(5)}} \underline{Y}_{C_{(5)}}}{\underline{Y}_{A_{(5)}} + \underline{Y}_{B_{(5)}} + \underline{Y}_{C_{(5)}}}, \quad (5)$$

$$\underline{U}_{A_{(1)}} = \frac{254{,}6}{\sqrt{2}} e^{j0^\circ} = 180 e^{j0^\circ} \text{ В},$$

$$\underline{U}_{B_{(1)}} = 180 e^{-j120^\circ} \text{ В}, \qquad \underline{U}_{C_{(1)}} = 180 e^{j120^\circ} \text{ В},$$

$$\underline{U}_{A_{(5)}} = \frac{50{,}9}{\sqrt{2}} e^{j0^\circ} = 36 e^{j0^\circ} \text{ В},$$

$$\underline{U}_{B_{(5)}} = 36 e^{j120^\circ} \text{ В}, \qquad \underline{U}_{C_{(5)}} = 36 e^{-j120^\circ} \text{ В},$$

$$\underline{Y}_{A_{(1)}} = \underline{Y}_{A_{(5)}} = \frac{1}{R} = \frac{1}{12} = 0{,}083 \text{ См},$$

$$\underline{Y}_{B_{(1)}} = \frac{-j}{\omega L} = 0{,}083 e^{-j90^\circ} \text{ См}, \qquad \underline{Y}_{C_{(1)}} = j\omega C = 0{,}083 e^{j90^\circ} \text{ См},$$

$$\underline{Y}_{B_{(5)}} = \frac{-j}{5\omega L} = 0{,}017 e^{-j90^\circ} \text{ См}, \qquad \underline{Y}_{C_{(5)}} = j5\omega C = 0{,}417 e^{j90^\circ} \text{ См}.$$

После подстановки в (4) и (5) получаем:

$$\underline{U}_{nN_{(1)}} = \frac{14{,}94 e^{j0^\circ} + 14{,}94 e^{j150^\circ} + 14{,}94 e^{-150^\circ}}{0{,}083 e^{j0^\circ}} = \frac{-10{,}93}{0{,}083 e^{j0^\circ}} = 131{,}68 e^{j180^\circ} \text{ В},$$

$$\underline{U}_{nN_{(5)}} = \frac{2{,}988 + 0{,}61 e^{j30^\circ} + 15{,}01 e^{-j30^\circ}}{0{,}41 e^{j78{,}27^\circ}} = \frac{18{,}0 e^{-j23{,}55^\circ}}{0{,}41 e^{j78{,}27^\circ}} = 44{,}14 e^{-j101{,}52^\circ} \text{ В}.$$

В итоге имеем:

$$\underline{U}_{nN} = \underline{U}_{nN_{(1)}} + \underline{U}_{nN_{(3)}} + \underline{U}_{nN_{(5)}} = 131{,}68 e^{j180^\circ} + 60 + 44{,}14 e^{-j101{,}52^\circ} =$$

$$= 91{,}56 e^{-j151{,}54^\circ} \text{ В}.$$

Следовательно, $U_V = 91{,}56$ В.

Линейные токи содержат только некратные трем гармоники. В частности,

$$\underline{I}_B = \underline{I}_{B(1)} + \underline{I}_{B(5)},$$

$$\underline{I}_{B_{(1)}} = (\underline{U}_{B_{(1)}} - \underline{U}_{nN_{(1)}})\underline{Y}_{B_{(1)}} = 13{,}39e^{-j165{,}03^\circ}\text{ А},$$

$$\underline{I}_{B_{(5)}} = (\underline{U}_{B_{(5)}} - \underline{U}_{nN_{(5)}})\underline{Y}_{B_{(5)}} = 1{,}27e^{j6{,}86^\circ}\text{ А},$$

откуда

$$\underline{I}_B = 13{,}39e^{-j165{,}03^\circ} + 1{,}27e^{j6{,}86^\circ} = 12{,}13e^{-j164{,}18^\circ}\text{ А}.$$

При наличии нейтрального провода линейные (фазные) токи содержат все имеющиеся гармоники.

На первой гармонике

$$I_{\phi_{(1)}} = \frac{U_{\phi_{(1)}}}{Z_{\phi_{(1)}}} = \frac{\frac{254{,}6}{\sqrt{2}}}{12} = 15\text{ А},$$

$$\underline{I}_{A_{(1)}} = 15e^{j0^\circ}\text{ А}, \qquad \underline{I}_{B_{(1)}} = I_{\phi_{(1)}}e^{-j120^\circ}e^{-j90^\circ} = 15e^{j150^\circ}\text{ А},$$

$$\underline{I}_{C_{(1)}} = I_{\phi_{(1)}}e^{j120^\circ}e^{j90^\circ} = 15e^{-j150^\circ}\text{ А},$$

$$\underline{I}_{N_{(1)}} = \underline{I}_{A_{(1)}} + \underline{I}_{B_{(1)}} + \underline{I}_{C_{(1)}} = 15 + 15e^{j150^\circ} + 15e^{-j150^\circ} = -11\text{ А}.$$

На третьей гармонике

$$\underline{I}_{A_{(3)}} = \frac{\underline{U}_{A_{(3)}}}{\underline{Z}_{a_{(3)}}} = \frac{\frac{84{,}9}{\sqrt{2}}}{12} = 5\text{ А}, \quad \underline{I}_{B_{(3)}} = \frac{\underline{U}_{B_{(3)}}}{\underline{Z}_{b_{(3)}}} = \frac{\frac{84{,}9}{\sqrt{2}}}{3\cdot 12e^{j90^\circ}} = 1{,}67e^{-j90^\circ}\text{ А},$$

$$\underline{I}_{C_{(3)}} = \frac{\underline{U}_{C_{(3)}}}{\underline{Z}_{c_{(3)}}} = \frac{\frac{84{,}9}{\sqrt{2}}}{\frac{12}{3}e^{-j90^\circ}} = 15e^{j90^\circ}\text{ А},$$

$$\underline{I}_{N(3)} = \underline{I}_{A(3)} + \underline{I}_{B(3)} + \underline{I}_{C(3)} = 5 + 1{,}67e^{-j90^\circ} + 15e^{j90^\circ} = 14{,}2e^{j69{,}4^\circ} \text{ A.}$$

На пятой гармонике

$$\underline{I}_{A(5)} = \frac{\underline{U}_{A(5)}}{\underline{Z}_{a(5)}} = \frac{36e^{j0^\circ}}{12} = 3 \text{ A}, \quad \underline{I}_{B(5)} = \frac{\underline{U}_{B(5)}}{\underline{Z}_{b(5)}} = \frac{36e^{j120^\circ}}{5 \cdot 12e^{j90^\circ}} = 0{,}6e^{j30^\circ} \text{ A},$$

$$\underline{I}_{C(5)} = \frac{\underline{U}_{C(5)}}{\underline{Z}_{c(5)}} = \frac{36e^{-j120^\circ}}{\frac{12}{5}e^{-j90^\circ}} = 15e^{-j30^\circ} \text{ A},$$

$$\underline{I}_{N_{(5)}} = \underline{I}_{A_{(5)}} + \underline{I}_{B_{(5)}} + \underline{I}_{C_{(5)}} = 3 + 0{,}6e^{j30^\circ} + 15e^{-j30^\circ} = 18e^{-j23{,}6^\circ}, \text{ A.}$$

В итоге

$$\underline{I}_B = \underline{I}_{B_{(1)}} + \underline{I}_{B_{(3)}} + \underline{I}_{B_{(5)}} = 15e^{j150^\circ} + 1{,}67e^{-j90^\circ} + 0{,}6e^{j30^\circ} = 13{,}89e^{j153{,}82^\circ}, \text{ A.}$$

$$\underline{I}_N = \underline{I}_{N_{(1)}} + \underline{I}_{N_{(3)}} + \underline{I}_{N_{(5)}} = -11 + 14{,}2e^{j69{,}4^\circ} + 18e^{-j23{,}6^\circ} = 22{,}9e^{j78{,}54^\circ}, \text{A.}$$

Показание амперметра составляет 22,9 А.

РАЗДЕЛ 5. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ

ВВОДНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

1. *Классический метод расчета переходных процессов*

Искомый послекоммутационный ток (или послекоммутационное напряжение) представляют суммой установившейся и свободной составляющих:

$$i = i_у + i_{св}, \qquad u = u_у + u_{св}.$$

Установившийся режим обусловлен действием источников энергии, поэтому составляющие $i_у$ и $u_у$ определяют путём расчета послекоммутационной цепи обычными методами. Свободный режим обусловлен несоответствием предкоммутационного запаса электромагнитной энергии цепи его послекоммутационному значению. Общее выражение свободного тока имеет вид

$$i_{св}(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k e^{p_k t},$$

где n – порядок характеристического уравнения цепи; $p_к$ – корни характеристического уравнения; $A_к$ — постоянные интегрирования.

Для составления характеристического уравнения цепи выражают входное сопротивление послекоммутационной цепи в комплексном виде, производят замену сомножителя $j\omega$ на p, а полученное выражение $Z(p)$ приравнивают нулю: $Z(p) = 0$. Характеристическое уравнение можно получить путем приравнивания нулю входного сопротивления $Z(p)$ относительно воображаемого разрыва любой ветви послекоммутационной цепи. Однако если в послекоммутационной цепи имеется источник тока, то характеристическое сопротивление следует рассчитывать относительно любой ветви схемы, не содержащей источника тока, полагая при этом ветвь с источником тока разомкнутой. В случаях, когда разветвленная цепь имеет лишь один реактивный элемент, целесообразно выражать входное сопротивление относительно ветви с этим элементом.

Выражение свободного тока определяется видом корней характеристического уравнения.

При различных вещественных корнях выражение свободного тока имеет вид

$$i_{св} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \ldots + A_n e^{p_n t}.$$

Если m корней характеристического уравнения равны между собой (т. е. корень p имеет кратность m), то

$$i_{св} = \left(A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \ldots + A_m t^m\right) e^{pt}.$$

Паре комплексно-сопряженных корней $p_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_{св}$ соответствует

$$i_{св} = A e^{-\delta t} \sin(\omega_{св} t + \psi).$$

В этом случае постоянными интегрирования являются A и ψ.

Для определения постоянных интегрирования используют начальные условия. В качестве независимых начальных условий берут значения токов индуктивных катушек $i_L(0)$ и напряжений на конденсаторах $u_C(0)$ к моменту коммутации:

$$i_L(-0) = i_L(+0), \qquad u_C(-0) = u_C(+0). \tag{5}$$

2. *Операторный метод расчета переходных процессов*

Функция $f(t)$ [ток $i(t)$ или напряжение $u(t)$] вещественного переменного t (время), называемая *оригиналом*, заменяется соответствующей ей функцией $F(p)$ комплексного переменного p, называемой *изображением*.

Эти функции связаны прямым преобразованием Лапласа

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt.$$

В таблице 5.1 приводятся оригиналы важнейших функций и их изображения.

Уравнения для изображения тока и напряжения получают по законам Ома и Кирхгофа, записанным для операторных схем замещения. Все переменные величины заменяются их операторными изображениями [$i(t)$ на $I(p)$, $u(t)$ и $e(t)$ соответственно на $U(p)$ и $E(p)$], индуктивные сопротивления заменяются последовательными схемами, состоящими из операторного сопротивления pL и источника напряжения с ЭДС $Li(-0)$, емкостные сопротивления заменяются последовательными схемами, состоящими из операторного сопротивления $\frac{1}{pC}$ и источника напряжения с ЭДС $\frac{u_C(-0)}{p}$. Направление ЭДС $Li(-0)$ совпадает с направлением тока $i(t)$, а направление ЭДС

$\dfrac{u_C(-0)}{p}$ противоположно направлению напряжения u_C. При этом $u_L(p) = pLI(p) - Li(-0)$; $u_C(p) = \dfrac{1}{pC} I(p) + \dfrac{U_C(-0)}{p}$. Операторная схема замещения произвольной ветви (рис. 1) показана на рис. 2.

Таблица 5.1.

№ п/п	Оригинал	Изображение	№ п/п	Оригинал	Изображение
1	$\delta(t)$	1	10	$\frac{1}{a}(1-e^{-at})$	$\frac{1}{p(p+a)}$
2	1	$\frac{1}{p}$	11	$\frac{1}{a^2}(1-e^{-at} \times$ $\times(1+at))$	$\frac{1}{p(p+a)^2}$
3	t	$\frac{1}{p^2}$	12	$\frac{1}{a-b}(e^{-bt}-e^{-at})$	$\frac{1}{(p+a)(p+b)}$
4	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	13	$\frac{ae^{-at}-be^{-bt}}{a-b}$	$\frac{p}{(p+a)(p+b)}$
5	$e^{\mp at}$	$\frac{1}{p \pm a}$	14	$\cos\omega_0 t$	$\frac{p}{p^2+\omega_0^2}$
6	$e^{\mp j\omega_0 t}$	$\frac{1}{p \pm j\omega_0}$	15	$\sin\omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{p^2+\omega_0^2}$
7	$e^{j(\omega_0 t+\psi)}$	$\frac{j\psi}{p-j\omega_0}$	16	$\sin(\omega_0 t+\psi)$	$\frac{p\sin\psi+\omega_0\cos\psi}{p^2+\omega_0^2}$
8	te^{-at}	$\frac{1}{(p+a)^2}$	17	$e^{-at}\sin\omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{(p+a)^2+\omega_0^2}$
9	$(1-at)e^{-at}$	$\frac{p}{(p+a)^2}$	18	$e^{-at}\cos\omega_0 t$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega_0^2}$

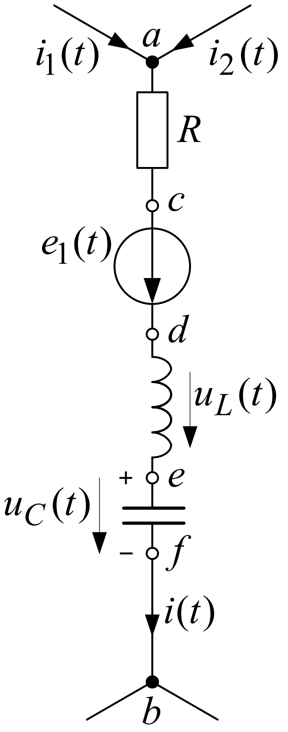


Рис. 1

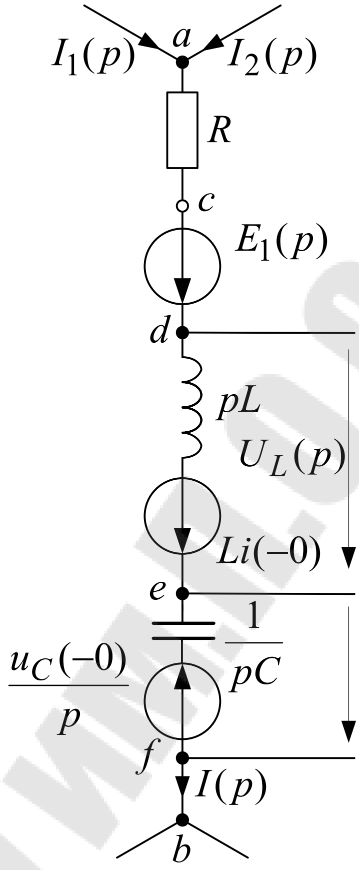


Рис. 2

Обычно изображение искомого тока или напряжения имеет вид рациональной дроби

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)}=\frac{b_0p^m+b_1p^{m-1}+\ldots+b_{m-1}p+b_m}{p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_{n-1}p+a_n}=\frac{b_0p^m+b_1p^{m-1}+\ldots+b_{m-1}p+b_m}{(p-p_1)(p-p_2)\ldots(p-p_n)},$$

причем степень многочлена $F_1(p)$ ниже степени многочлена $F_2(p)$. Тогда оригинал определяется выражением

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)}\doteq\sum_{k=1}^{n}\frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)}e^{p_kt},$$

где $p_1, p_2, ..., p_n$ – корни уравнения $F_2(p)=0$.

Если уравнение $F_2(p)=0$ имеет один нулевой корень, т.е. если $F_2(p)=pF_3(p)$, то оригинал находят по формуле

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)}=\frac{F_1(p)}{pF_3(p)} \doteq \frac{F_1(0)}{F_3(0)}+\sum_{k=1}^{n}\frac{F_1(p_k)}{p_k F_3'(p_k)}e^{p_k t}.$$

Если же в наборе n корней уравнения $F_2(p)=0$ корень p_1 имеет кратность m_1, корень p_2 – кратность m_2, …, корень p_n – кратность m_n, то оригинал вычисляют по формуле

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} \doteq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(m_k-1)!}\left[\frac{d^{m_k-1}}{dp^{m_k-1}}\frac{F_1(p)e^{pt}}{\dfrac{F_2(p)}{(p-p_k)^{m_k}}}\right]_{p=p_k},$$

причём выражение, стоящее в знаменателе квадратной скобки, дифференцируют ***<u>после сокращения</u>*** на $(p-p_k)^{m_k}$.

Если уравнение $F_2(p)=0$ имеет одновременно и простые, и кратные корни, то слагаемые, соответствующие разным видам корней, определяют по разным формулам получения оригиналов.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

5.1. В схеме рис. 5.1.1 найти $i_1(t)$ и $i_L(t)$, если $U=100$ В, $R_1=20$ Ом, $R_2=30$ Ом, $L=15$ мГн.

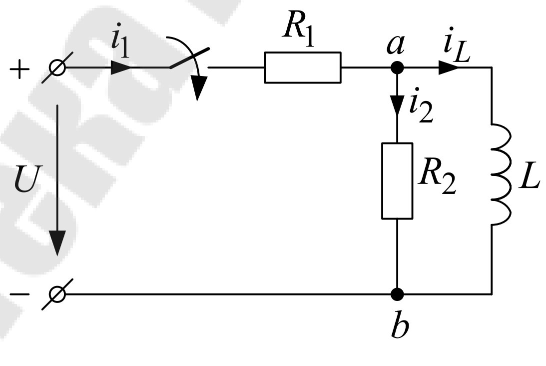


Рис. 5.1.1

Решение

Исходим из выражений

$$i_1=i_{1_y}+i_{1_{св}}, \qquad i_L=i_{L_y}+i_{L_{св}}. \qquad (1)$$

Поскольку задана цепь постоянного тока, в установившемся режиме участок ab послекоммутационной цепи закорочен идеальной катушкой: $R_{ab} = 0$. Поэтому установившиеся составляющие искомых токов

$$i_{1_y} = i_{L_y} = \frac{U}{R_1} = \frac{100}{20} = 5\,\text{А}.$$

Характеристическое уравнение послекоммутационной цепи, составленное по отношению к воображаемому разрыву в этой цепи ветви с катушкой (рис. 5.1.2), имеет вид

$$Z_{b'b''}(p) = pL + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 0. \qquad (2)$$

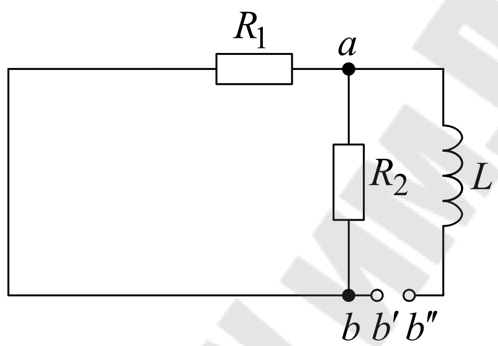


Рис. 5.1.2

Подставляя числовые данные условия в уравнение (2), получим:

$$0{,}015p + \frac{20 \cdot 30}{20 + 30} = 0{,}015p + 12 = 0.$$

Отсюда

$$p = p_1 = -\frac{12}{0{,}015} = -800\,\text{с}^{-1}.$$

Т.к. характеристический корень – единственный, свободные составляющие всех переходных характеристик цепи имеют вид $A\,e^{p_1 t}$. В частности,

$$i_{L_{св}}(\text{t}) = A_L e^{-800t}.$$

Возвращаясь к (1), получаем:

$$i_L(t) = 5 + A_L e^{-800t}. \qquad (3)$$

Постоянную интегрирования A_L найдем, воспользовавшись начальным условием. По первому закону коммутации

$$i_L(-0) = i_L(+0). \qquad (4)$$

Рассматривая докоммутационную цепь, находим:

$$i_L(-0) = 0. \qquad (5)$$

С другой стороны, из (3) получаем:

$$i_L(+0) = 5 + A_L. \qquad (6)$$

Используя (4) – (6), находим: $A_L = -5$, следовательно,

$$i_L(t) = 5(1 - e^{-800t}), \text{ А}. \qquad (6)$$

Тогда

$$i_1 = i_2 + i_L = \frac{U_{ab}}{R} + i_L = \frac{1}{R} L \frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + i_L = 5 - 3e^{-800t}, \text{ А}.$$

5.2. Определить токи i_1 и i_2 и напряжение u_C после коммутации в схеме рис. 5.2.1, если $E = 50$ В, $J = 0{,}5$ А, $R_1 = 200$ Ом, $R_2 = 300$ Ом, $R_3 = 200$ Ом, $C = 4$ мкФ.

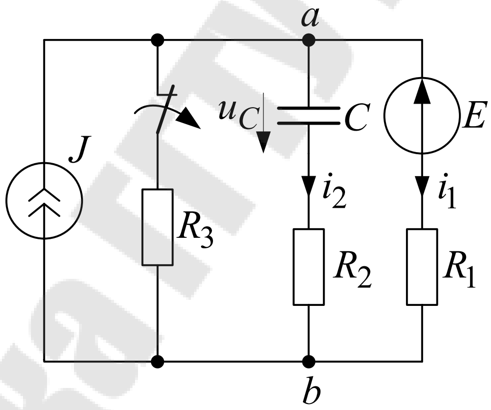


Рис. 5.2.1

Решение

Полагаем

$$u_C = u_{C_y} + u_{C_{св}}; \qquad i_1 = i_{1_y} + i_{1_{св}}; \qquad i_2 = i_{2_y} + i_{2_{св}}.$$

В установившемся режиме

$$i_{1_y} = J = 0{,}5 \text{ А}; \quad i_{2_y} = 0; \quad u_{C_y} = E + JR_1 = 150 \text{ В}.$$

Характеристическое уравнение

$$C(R_1 + R_2)p + 1 = 0$$

имеет один корень $p_1 = -500$ с$^{-1}$. Поэтому свободные составляющие

$$u_{C_{св}} = Ae^{p_1 t}; \qquad i_{1_{св}} = B_1 e^{p_1 t}, \qquad i_{2_{св}} = B_2 e^{p_1 t},$$

а искомые величины

$$u_C = 150 + Ae^{p_1 t}; \qquad i_1 = 0{,}5 + B_1 e^{p_1 t}; \qquad i_2 = B_2 e^{p_1 t}. \qquad (1)$$

Для вычисления постоянных интегрирования A, B_1 и B_2 определим начальные значения. Из (1) для $t = +0$ имеем:

$$u_C(+0) = 150 + A; \qquad i_1(+0) = 0{,}5 + B_1; \qquad i_2(+0) = B_2;$$

Независимым начальным условием служит величина

$$u_C(+0) = u_C(-0) = u_{ab}(-0) = \frac{\dfrac{E_1}{R_1} + J}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_3}} = \frac{\dfrac{50}{200} + 0{,}5}{\dfrac{1}{200} + \dfrac{1}{200}} = 75 \text{ В}.$$

Начальные значения токов в ветвях найдем из уравнений Кирхгофа, записанных для момента времени $t = +0$:

$$J = i_1(+0) + i_2(+0); \qquad u_C(+0) + R_2 i_2(+0) - R_1 i_1(+0) = E.$$

Имеем:

$$i_2(+0) = 0{,}15 \text{ А}; \qquad i_1(+0) = 0{,}35 \text{ А},$$

откуда $A = -75$ В; $B_1 = -0{,}15$ А; $B_1 = 0{,}15$ А. В итоге

$$u_C = 150 - 75e^{-500t} \text{ В}; \; i_1 = 0{,}5 - 0{,}15e^{-500t} \text{ А}; \quad i_2 = 0{,}15e^{-500t} \text{ А}.$$

5.3. В схеме рис. 5.3.1 определить закон изменения тока в цепи после коммутации, если $R_1 = R_2 = 2$ Ом; $\omega L = 3$ Ом; $e(t) = 127\sin(\omega t - 50^\circ)$ В; $\omega = 314$ рад/с.

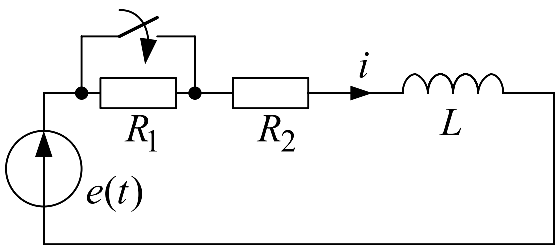


Рис. 5.3.1

Решение

Характеристическое уравнение послекоммутационной цепи

$$pL + R_2 = 0$$

имеет корень

$$p = -\frac{R_2}{L} = -\frac{R_2}{\frac{\omega L}{\omega}} = -\frac{2 \cdot 314}{3} = -210 \text{ с}^{-1}.$$

Следовательно,

$$i_{св}(t) = Ae^{pt},$$

где

$$A = i_{св}(+0).$$

Комплексная амплитуда тока в цепи до коммутации

$$\underline{I}_m = \frac{127e^{-j50^\circ}}{4+3j} = 25{,}4e^{-j86{,}50^\circ} \text{ А}.$$

Следовательно, мгновенное значение тока до коммутации

$$i = 25{,}4\sin(\omega t - 86{,}50^\circ), \text{ А}.$$

В момент коммутации (при $\omega t = 0$)

$$i(-0) = 25{,}4\sin(-86{,}50^\circ) = -25{,}35 \text{ А}.$$

После коммутации установившийся ток имеет комплексную амплитуду

$$\underline{I}_m = \frac{127e^{-j50^\circ}}{2+3j} = 35{,}2e^{-j106{,}20^\circ} \text{ А},$$

поэтому мгновенное значение установившегося тока

$$i_y = 35{,}2\sin(\omega t - 106{,}20^\circ) \text{ А}.$$

Следовательно,

$$i_y(+0) = 35{,}2\sin(-106{,}20^\circ) = -33{,}8 \text{ А}.$$

По первому закону коммутации

$$i(-0) = i(+0) = -25{,}35 \text{ А.}$$

При этом

$$i(+0) = i_у(+0) + i_{св}(+0).$$

Следовательно,

$$i_{св}(+0) = i(+0) - i_у(+0) = -25{,}35 + 33{,}8 = 8{,}45 \text{ А.}$$

В итоге имеем:

$$i = i_у + i_{св} = 35{,}2\sin(\omega t - 106{,}20^\circ) + 8{,}45e^{-210t} \text{ А.}$$

5.4. Определить напряжения на емкостях в схеме рис. 5.4.1, если $e = 123\sin(100t - 43^\circ)$, В, $R_1 = 500$ Ом, $R_2 = 400$ Ом, $C_1 = 20$ мкФ, $C_2 = 30$ мкФ.

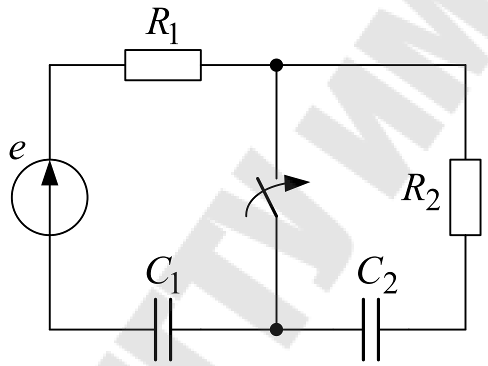


Рис. 5.4.1

До коммутации в цепи протекал синусоидальный ток, комплексная амплитуда которого равна

$$\underline{I}_m = \frac{\underline{E}_m}{R_1 + R_2 - \dfrac{j}{\omega C'}}, \tag{1}$$

где

$$\underline{E}_m = 123e^{-j43^\circ} \text{ В;} \quad C' = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = \frac{20 \cdot 30}{20 + 30} = 12 \text{ мкФ;} \quad \omega = 100 \text{ рад/с.}$$

Подставляя в (1) числовые значения, находим:

$$\underline{I}_m = \frac{123e^{-j43^\circ}}{500 + 400 - j833{,}3} = \frac{123e^{-j43^\circ}}{1226{,}5e^{-j43^\circ}} = 0{,}1 \text{ А.}$$

Пользуясь законом Ома, находим комплексы докоммутационных амплитуд напряжений на последовательно соединенных емкостях:

$$\underline{U}_{C_{1m}} = -jX_{C_1} \cdot \underline{I}_m = \frac{-j}{\omega C_1}\underline{I}_m = \frac{-j}{100 \cdot 20 \cdot 10^{-6}} \cdot 0{,}1 = -j50 = 50e^{-j90^\circ} \text{ В},$$

$$\underline{U}_{C_{2m}} = -jX_{C_2} \cdot \underline{I}_m = \frac{-j}{\omega C_2}\underline{I}_m = \frac{-j}{100 \cdot 30 \cdot 10^{-6}} 0{,}1 = -j33{,}3 = 33{,}3\mathrm{e}^{-j90^\circ} \text{ В}.$$

Следовательно, до коммутации

$$u_{C_1}(t) = 50\sin(\omega t - 90^\circ), \text{ В}; \ u_{C_2}(t) = 33{,}3\sin(\omega t - 90^\circ), \text{ В}.$$

Отсюда

$$u_{C_1}(-0) = -50 \text{ В}, \qquad u_{C_2}(-0) = -33{,}3 \text{ В}. \tag{2}$$

После коммутации от цепи отключаются последовательно соединенные элементы R_2 и C_2, образующие при замыкании ключа обособленный контур, в котором разряжается емкость C_2:

$$u_{C_{2y}} = 0.$$

Через емкость C_1 после коммутации в установившемся режиме протекает ток с амплитудой

$$\underline{I}_m = \frac{\underline{E}_m}{R_1 - \dfrac{j}{\omega C_1}} = \frac{123e^{-j43^\circ}}{500 - j500} = \frac{123e^{-j43^\circ}}{707{,}1e^{-j45^\circ}} = 0{,}174e^{j2^\circ} \text{ А}.$$

Следовательно,

$$\underline{U}_{C_{1m}} = -\frac{j}{\omega C_1}\underline{I}_m = \frac{-j}{100 \cdot 20 \cdot 10^{-6}} \cdot 0{,}174e^{j2^\circ} == 87e^{-j88^\circ} \text{ В}.$$

Это означает, что в установившемся режиме

$$u_{C_1}(t) = u_{C_{1y}} = 87\sin(\omega t - 88^\circ), \text{ В}.$$

Коммутация превращает заданную докоммутационную цепь в две независимые цепи, в которых протекают независимые переходные процессы. Для каждой из послекоммутационных цепей мы составляем свое характеристическое уравнение:

$$\frac{1}{p_1 C_1} + R_1 = 0; \qquad \frac{1}{p_2 C_2} + R_2 = 0. \tag{3}$$

Из (3) находим:

$$p_1 = -\frac{1}{R_1 C_1} = -\frac{1}{500 \cdot 20 \cdot 10^{-6}} = -100 \text{ с}^{-1},$$

$$p_2 = -\frac{1}{R_2 C_2} = -\frac{1}{400 \cdot 30 \cdot 10^{-6}} = -83{,}3 \text{ с}^{-1}.$$

Следовательно,

$$u_{C_{1св}} = A_1 e^{p_1 t} = A_1 e^{-100\,t}; \quad u_{C_{2св}} = A_2 e^{p_2 t} = A_2 e^{-83{,}3t},$$

откуда

$$u_{C_1}(t) = A_1 e^{-100\,t} + 87\sin(\omega t - 88^\circ), \text{ В}; \qquad u_{C_2}(t) = A_2 e^{-83{,}3t}. \quad (4)$$

Чтобы определить постоянные A_1 и A_2, воспользуемся начальными условиями. По второму закону коммутации

$$u_{C_1}(-0) = u_{C_1}(+0); \qquad u_{C_2}(-0) = u_{C_2}(+0). \quad (5)$$

Из (4) следует, что

$$u_{C_1}(+0) = A_1 + 87\sin(-88^\circ), \;\; u_{C_2}(+0) = A_2. \quad (6)$$

Объединяя (2), (4) – (6), находим:

$$A_1 = 37 \text{ В}, \qquad A_2 = -33{,}3 \text{ В}.$$

В итоге

$$u_{C_1}(t) = 37e^{-100t} + 87\sin(\omega t - 88^\circ), \text{ В}; \quad u_{C_2}(t) = -33{,}3e^{-83{,}3t}, \text{ В}.$$

5.5. Определить токи i_1 и i_2 в схеме цепи рис. 5.5.1, если $E = 60$ В; $L_1 = 0{,}6$ Гн; $L_2 = 0{,}5$ Гн; $M = 0{,}45$ Гн; $R_1 = 50$ Ом; $R_2 = R_3 = 20$ Ом.

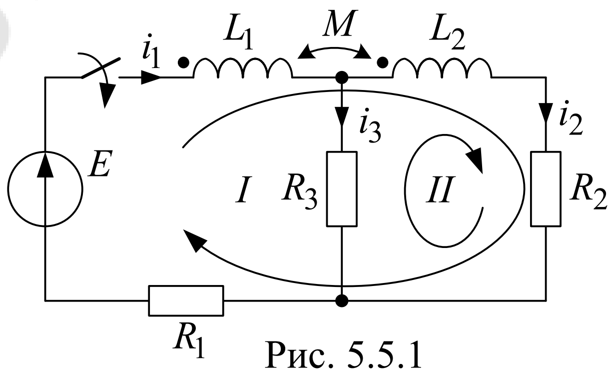


Рис. 5.5.1

Решение

Докоммутационные токи $i_1(-0)=0$, $i_2(-0)=0$. Следовательно,

$$i_1(0)=0; \quad i_2(0)=0.$$

После коммутации

$$i_1=i_{1_y}+i_{1_{св}}; \qquad i_2=i_{2_y}+i_{2_{св}},$$

где $i_{1_y}=\dfrac{E}{R_1+\dfrac{R_2R_3}{R_2+R_3}}=1$ А; $\quad i_{2_y}=i_{1_y}\dfrac{R_3}{R_2+R_3}=0{,}5$ А.

Чтобы получить характеристическое уравнение, составим главный определитель цепи, выбрав контуры *I* и *II*, как показано на рис. 5.5.1, и заменим $j\omega$ на p:

$$\begin{vmatrix} R_1+R_2+p(L_1+L_2+2M) & R_2+p(L_2+M) \\ R_2+p(L_2+M) & R_2+R_3+pL_2 \end{vmatrix}.$$

Приравняв этот определитель нулю, получим характеристическое уравнение

$$p^2+790p+24615=0.$$

Оно имеет действительные корни $p_1=-33$ с$^{-1}$, $p_2=-757$ с$^{-1}$, поэтому свободные составляющие токов запишем в виде

$$i_{1_{св}}=A_1e^{-33t}+A_2e^{-757t}; \qquad i_{2_{св}}=B_1e^{-33t}+B_2e^{-757t}.$$

Найдем начальные значения свободных составляющих токов в индуктивностях:

$$i_{1_{св}}(0)=i_1(0)-i_{1_y}(0)=-1 \text{ А}; \qquad i_{2_{св}}(0)=i_2(0)-i_{2_y}(0)=-0{,}5 \text{ А}.$$

Составим систему уравнений для определения постоянных интегрирования

$$\left.\begin{aligned} &i_{1_{св}}(0)=A_1+A_2; \\ &\left.\frac{\mathrm{d}i_{1_{св}}}{\mathrm{d}t}\right|_0=-33A_1-757A_2; \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} & i_{2_{св}}(0) = B_1 + B_2; \\ & \left.\frac{\mathrm{d}\,i_{2_{св}}}{\mathrm{d}\,t}\right|_0 = -33B_1 - 757B_2. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Уравнения Кирхгофа для свободных составляющих имеют вид:

$$-i_{1_{св}} + i_{2_{св}} + i_{3_{св}} = 0;$$

$$R_1 i_{1_{св}} + L_1 \frac{\mathrm{d}\,i_{1_{св}}}{\mathrm{d}\,t} + M \frac{\mathrm{d}\,i_{2_{св}}}{\mathrm{d}\,t} + R_3 i_{3_{св}} = 0;$$

$$L_2 \frac{\mathrm{d}\,i_{2_{св}}}{\mathrm{d}\,t} + M \frac{\mathrm{d}\,i_{1_{св}}}{\mathrm{d}\,t} + R_2 i_{2_{св}} - R_3 i_{3_{св}} = 0,$$

и, в частности, для начального момента времени ($t = 0$)

$$-i_{1_{св}}(0) + i_{2_{св}}(0) + i_{3_{св}}(0) = 0;$$

$$R_1 i_{1_{св}}(0) + L_1 \left.\frac{\mathrm{d}\,i_{1_{св}}}{\mathrm{d}\,t}\right|_0 + M \left.\frac{\mathrm{d}\,i_{2_{св}}}{\mathrm{d}\,t}\right|_0 + R_3 i_{3_{св}}(0) = 0;$$

$$L_2 \left.\frac{\mathrm{d}\,i_{2_{св}}}{\mathrm{d}\,t}\right|_0 + M \left.\frac{\mathrm{d}\,i_{1_{св}}}{\mathrm{d}\,t}\right|_0 + R_2 i_{2_{св}}(0) - R_3 i_{3_{св}}(0) = 0.$$

Отсюда находим зависимые начальные условия:

$$\left.\frac{\mathrm{d}\,i_{1_{св}}}{\mathrm{d}\,t}\right|_0 = 308 \text{ А/с}; \qquad \left.\frac{\mathrm{d}\,i_{2_{св}}}{\mathrm{d}\,t}\right|_0 = -277 \text{ А/с}.$$

Из систем уравнений (1) и (2) находим: $A_1 = -0{,}62$ А; $A_2 = -0{,}38$ А; $B_1 = -0{,}905$ А; $B_2 = 0{,}405$ А. Искомые токи:

$$i_1 = 1 - 0{,}62e^{-33t} - 0{,}38e^{-757t} \text{ А};$$

$$i_2 = 0{,}5 - 0{,}905e^{-33t} + 0{,}405e^{-757t} \text{ А}.$$

5.6. Цепь (рис. 5.6.1) подключается к источнику постоянного напряжения $U = 125$ В. Найти напряжение на конденсаторе для трёх случаев: 1) $R = 250$ Ом, $L = 667$ мГн, $C = 2$ мкФ; 2) $R = 100$ Ом, $L = 40$ мГн, $C = 1$ мкФ; 3) $R = 100$ Ом, $L = 40$ мГн, $C = 5$ мкФ.

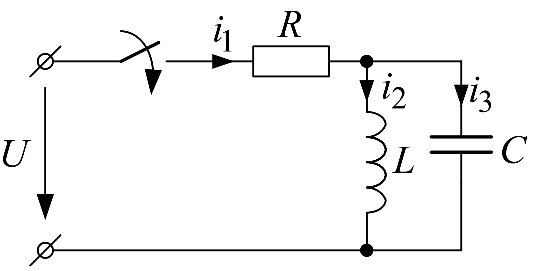


Рис. 5.6.1

Решение

Напряжение на конденсаторе

$$u_C = u_{C_у} + u_{C_{св}}. \tag{1}$$

При этом $u_{C_у} = 0$, так как в послекоммутационной цепи конденсатор коротко замкнут идеальной катушкой.

Характеристическое уравнение цепи

$$Z(p) = R + \frac{pL\dfrac{1}{pC}}{pL + \dfrac{1}{pC}} = \frac{RLCp^2 + Lp + R}{p^2 LC + 1} = 0 \tag{2}$$

имеет два корня:

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\frac{1}{4R^2C^2} + \frac{1}{LC}}. \tag{3}$$

Далее задачу решаем в такой последовательности.

Для каждого из трех заданных случаев из (3) определим вид корней и в соответствии с ним найдем $u_{C_{св}}$. Для определения постоянных интегрирования составим уравнения по законам Кирхгофа:

$$i_1 = i_2 + i_3, \qquad U = Ri_1 + u_C. \tag{4}$$

Запишем независимые начальные условия

$$u_C(-0) = u_C(+0) = 0, \tag{I}$$
$$i_2(-0) = i_2(+0) = 0. \tag{II}$$

Подставим их в уравнения (4) для начального момента времени (после коммутации):

$$i_1(+0) = i_2(+0) + i_3(+0), \qquad U = Ri_1(+0) + u_C(+0). \qquad (5)$$

Решив их, находим $i_3(+0)$. Затем, используя зависимость $i_3 = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ для момента $t = +0$, получим

$$i_3(+0) = C\left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{t=+0}. \qquad (6)$$

В завершение определим две неизвестные постоянные интегрирования.

1. Подставим в уравнение (3) числовые значения **первого случая**.

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2\cdot 250\cdot 2\cdot 10^{-6}} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2\cdot 250\cdot 2\cdot 10^{-6}}\right) - \frac{1}{667\cdot 10^{-3}\cdot 2\cdot 10^{-6}}} =$$

$$= (-1000 \pm 500)\ \text{с}^{-1}, \text{т.е. } p_1 = -500\ \text{с}^{-1};\ p_2 = -1500\ \text{с}^{-1}.$$

Так как корни действительные и различные,

$$u_{C_{св}} = A_1 e^{-500t} + A_2 e^{-1500t}. \qquad (7)$$

Из уравнения (5) с учетом начальных условий (I) и (II) получим:

$$i_1(+0) = i_2(+0) + i_3(+0) = 0 + i_3(+0);$$

$$U = Ri_1(+0) + u_C(+0) = 250 i_1(+0) + 0 = 125.$$

Решая эту систему уравнений, находим:

$$i_3(+0) = 0{,}5\ \text{А}.$$

Далее записываем:

$$u_C = u_{C_у} + u_{C_{св}} = 0 + A_1 e^{-500t} + A_2 e^{-1500t};$$

$$i_3 = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = 2\cdot 10^{-6}(-500 A_1 e^{-500t} - 1500 A_2 e^{-1500t}).$$

Перепишем эти уравнения для момента $t = +0$ и подставим в них $u_C(+0) = 0$ и $i_3(+0) = 0{,}5$ А. Получим:

$$0 = A_1 + A_2; \qquad 0{,}5 = -10^{-3} A_1 - 3\cdot 10^{-3} A_2.$$

Отсюда $A_1 = -A_2 = 250.$ Таким образом, по (1) и (7) искомое напряжение

$$u_C = u_{C_{св}} = (250e^{-500t} - 250e^{-1500t}) \text{ В.} \tag{8}$$

Теперь вычислим все токи:

$$i_3 = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = 2\cdot 10^{-6}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(250e^{-500t} - 250e^{-1500t}) =$$

$$= (0{,}75e^{-1500t} - 0{,}25e^{-500t}) \text{ A;}$$

$$i_1 = \frac{U - u_C}{R} = \frac{125 - (250e^{-500t} - 250e^{-1500t})}{250} = (0{,}5 - e^{-500t} + e^{-1500t}) \text{ A;}$$

$$i_2 = i_1 - i_3 = (0{,}5 - 0{,}75e^{-500t} + 0{,}25e^{-1500t}) \text{ A.}$$

2. Подставим в формулу (3) числовые значения **второго случая**:

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2\cdot 100\cdot 1\cdot 10^{-6}} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2\cdot 100\cdot 1\cdot 10^{-6}}\right) - \frac{1}{40\cdot 10^{-3}\cdot 1\cdot 10^{-6}}} =$$

$$= -5\cdot 10^3 \text{ c}^{-1}.$$

Характеристический корень – двукратный, поэтому решение ищем в виде

$$u_{C_{св}} = B_1e^{-5000t} + B_2te^{-5000t}. \tag{9}$$

Как и в первом случае, из уравнения (5) с учетом начальных условий (I) и (II) находим:

$$i_3(+0) = 1{,}25 \text{ A.}$$

Подставив в уравнение (1) и в выражение i_3 уравнение (9), получим

$$u_C = u_{C_у} + u_{C_{св}} = 0 + B_1e^{-5000t} + B_2te^{-5000t};$$

$$i_3 = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = 10^{-6}(B_2 - 5000B_1 - 5000B_2t)e^{-5000t}.$$

Полагая в этих уравнениях $t = 0$ и подставляя в полученные выражения значения $u_C(0) = 0$ и $i_3(0) = 1{,}25$ А, приходим к уравнениям

$$0 = B_1; \qquad 1{,}25 = 10^{-6}(B_2 - 5000B_1).$$

Следовательно, $B_1 = 0$; $B_2 = 1{,}25 \cdot 10^6$. Таким образом, искомое напряжение по (1) и (9)

$$u_C = u_{C_{св}} = 1{,}25 \cdot 10^6 te^{-5000t} \text{ В}.$$

3. Рассмотрим **третий случай** числовых значений.

Подставляя эти значения в уравнение (3), находим

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2 \cdot 100 \cdot 5 \cdot 10^{-6}} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2 \cdot 100 \cdot 5 \cdot 10^{-6}}\right) - \frac{1}{40 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-6}}} =$$

$$= (-1000 \pm j2000) \text{ с}^{-1}.$$

Корни характеристического уравнения комплексно-сопряженные ($p_{1,2} = -\delta \pm j\omega$), поэтому свободную составляющую напряжения на конденсаторе следует искать в виде

$$u_{C_{св}} = Ae^{-\delta t}\sin(\omega t + \psi) = Ae^{-1000t}\sin(2000t + \psi). \qquad (10)$$

По аналогии с предыдущими случаями из уравнений (5) с учетом начальных условий (I) и (II) получим: $i_3(0) = 1{,}25$ А.

Подставив в (1) и в выражение i_3 уравнение (10), получим

$$u_C = u_{C_y} + u_{C_{св}} = 0 + Ae^{-1000t}\sin(2000t + \psi);$$

$$i_3 = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = 5 \cdot 10^{-6} A[2000\cos(2000t + \psi) - 1000\sin(2000t + \psi)]e^{-1000t}.$$

Переписывая эти уравнения для момента $t = +0$ и подставляя в них значения $u_C(0) = 0$ и $i_3(0) = 1{,}25$ А, получим:

$$0 = 5 \cdot 10^{-6} A\sin\psi; \qquad 1{,}25 = 5 \cdot 10^{-6}(2000A\cos\psi - 1000A\sin\psi).$$

Решая их, находим:

$$\psi = 0, \qquad A = 125.$$

Таким образом, по (1) и (10) искомое напряжение

$$u_C = 125e^{-1000t}\sin 2000t \text{ В}.$$

5.7. Решить задачу **5.6** операторным методом.

Решение

Поскольку заданная цепь содержит только один источник эдс, для её расчёта можно применить закон Ома в операторном виде:

$$I_1(p) = \frac{U(p)}{Z(p)},$$

где $U(p)$ – изображение входного напряжения:

$$U(p) = \frac{U}{p}.$$

Найдем операторное сопротивление цепи:

$$Z(p) = R + \frac{pL\dfrac{1}{pC}}{pL + \dfrac{1}{pC}} = \frac{RLCp^2 + Lp + R}{p^2LC + 1}.$$

Тогда

$$I_1(p) = \frac{U(p)}{Z(p)} = \frac{U(p^2LC + 1)}{p(RLCp^2 + Lp + R)}.$$

Изображение напряжения на конденсаторе получим, умножая изображение тока на операторное сопротивление участка с параллельным соединением ветвей:

$$U_C(p) = I_1(p)\frac{pL\dfrac{1}{pC}}{pL + \dfrac{1}{pC}} = \frac{U}{RC\left(p^2 + p\dfrac{1}{RC} + \dfrac{1}{LC}\right)} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}, \qquad (1)$$

где

$$F_1(p) = \frac{U}{RC}, \qquad F_2(p) = p^2 + \frac{1}{RC}p + \frac{1}{LC} = (p - p_1)(p - p_2). \qquad (2)$$

Уравнение $F_2(p) = 0$ имеет корни

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}. \qquad (3)$$

1. Решим задачу **для первого варианта** числовых значений.

По формулам (2) и (3) определяем:

$$F_1(p) = \frac{125}{(250 \cdot 2 \cdot 10^{-6})} = 0{,}25 \cdot 10^6;$$

$$F_2(p) = p^2 + p\frac{1}{250 \cdot 2 \cdot 10^{-6}} + \frac{1}{667 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-6}} = p^2 + 2000p + 0{,}75 \cdot 10^6.$$

Найдем корни уравнения $F_2(p) = p^2 + 2000p + 0{,}75 \cdot 10^6 = 0$:

$$p_1 = -500 \text{ с}^{-1}, \qquad p_2 = -1500 \text{ с}^{-1}.$$

Вычислим производную $F_2'(p)$ и ее значения при $p = p_1$ и $p = p_2$:

$$F_2'(p) = 2p + 2000,$$

$$F_2'(p_1) = 2(-500) + 2000 = 1000; \quad F_2'(p_2) = 2(-1500) + 2000 = -1000.$$

По формуле (1) определяем:

$$U_C(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{0{,}25 \cdot 10^6}{p^2 + 2000p + 0{,}75 \cdot 10^6}.$$

По формуле разложения

$$U_C(p) = \frac{F_1(p_1)}{F_2(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{F_1(p_2)}{F_2(p_2)} e^{p_2 t} = \frac{0{,}25 \cdot 10^6 e^{-500t}}{1000} + \frac{0{,}25 \cdot 10^6 e^{-1500t}}{-1000} =$$

$$= 250(e^{-500t} - e^{-1500t}) \text{ В}.$$

2. Решим задачу **для второго варианта** числовых значений.

По формулам (2) и (3) определяем:

$$F_1(p) = \frac{125}{100 \cdot 1 \cdot 10^{-6}} = 1{,}25 \cdot 10^6; \qquad F_2(p) = (p + 5000)^2;$$

$$p_1 = p_2 = -5000 \text{ с}^{-1}.$$

Изображение напряжения на конденсаторе

$$U_C(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{1{,}25 \cdot 10^6}{(p + 5000)^2}.$$

Т.к. корни – кратные (порядок кратности $m_k = m_1 = 2$),

$$\frac{F_2(p)}{(p-p_1)^{m_k}} = \frac{(p+5000)^2}{(p+5000)^2} = 1.$$

Таким образом,

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} \doteq \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,p}\frac{F_1(p)e^{pt}}{1}\right]_{p=p_1} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,p}(1{,}25\cdot 10^6 e^{p_1 t})\right]_{p=p_1} =$$

$$= (1{,}25\cdot 10^6 te^{pt})_{p=p_1} = 1{,}25\cdot 10^6 te^{-5000t} = u_C(t).$$

3. Рассмотрим **третий вариант** числовых значений.

По формулам (2) и (3) находим:

$$F_1(p) = \frac{125}{100\cdot 5\cdot 10^{-6}} = 0{,}25\cdot 10^6; \quad F_2(p) = p^2 + 2000p + 5\cdot 10^6;$$

$$p_{1,2} = -1000 \pm j2000\ \text{c}^{-1}.$$

Производная от $F_2(p)$ и ее значения при $p = p_1$ и $p = p_2$ равны:

$$F_2'(p) = 2p + 2000;$$

$$F_2'(p_1) = 2(-1000 + j2000) + 2000 = j4000;$$

$$F_2'(p_2) = 2(-1000 - j2000) + 2000 = -j4000.$$

Искомый оригинал имеет вид:

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{0{,}25\cdot 10^6}{p^2 + 2000p + 5\cdot 10^6} \doteq$$

$$\doteq \frac{0{,}25\cdot 10^6}{j4000} e^{(-1000+j2000)t} + \frac{0{,}25\cdot 10^6}{-j4000} e^{(-1000-j2000)t} =$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\left[0{,}25\cdot 10^6 e^{-1000t}\,\frac{e^{j2000t}}{4000e^{j90^\circ}}\right] =$$

$$= \frac{2 \cdot 0{,}25 \cdot 10^6 e^{-1000t}}{4000} \cos(2000t - 90^\circ) = 125 e^{-1000t} \sin 2000t = u_C(t).$$

5.8. Рассчитать операторным методом ток i_C в схеме рис. 5.8.1, если $J = 3$ А; $R_1 = 12$ Ом; $R_2 = 8$ Ом, $C = 100$ мкФ.

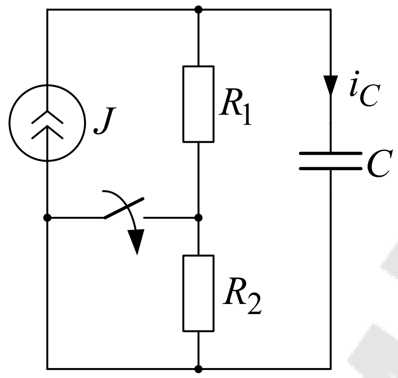


Рис. 5.8.1

Решение

До коммутации

$$i_C = 0,$$

$$u_C = (R_1 + R_2)J = (12 + 8) \cdot 3 = 60 \text{ В}.$$

Следовательно,

$$u_C(+0) = u_C(-0) = 60 \text{ В}.$$

Операторная схема замещения послекоммутационной цепи представлена на рис. 5.8.2.

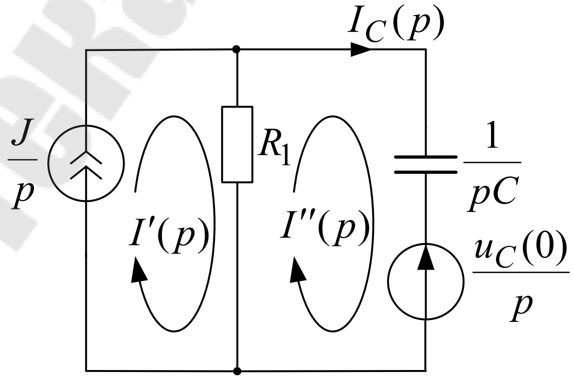


Рис. 5.8.2

Для этой схемы

$$\begin{cases} I'(p) = \dfrac{J}{p}, \\ I''(p)\left(R_1 + \dfrac{1}{pC}\right) - R_1 I'(p) = -\dfrac{U_C(0)}{p}. \end{cases}$$

Отсюда

$$I''(p) = \frac{R_1 J - U_C(0)}{R_1\left(p + \dfrac{1}{R_1 C}\right)} = \frac{12 \cdot 3 + 60}{12\left(p + \dfrac{1}{12 \cdot 100 \cdot 10^{-6}}\right)} = -\frac{2}{p + 833{,}3}.$$

Поскольку

$$i_C(t) \doteqdot I''(p),$$

окончательно получаем:

$$i_C(t) = -2e^{-833{,}3t}, \text{ А.}$$

5.9. В схеме рис. 5.9.1 происходит замыкание ключа. Определить операторным методом ток i_3, если $E = 200$ В; $J = 1$ А; $L = 0{,}5$ Гн; $C = 400$ мкФ; $R_1 = 100$ Ом; $R_2 = 100$ Ом.

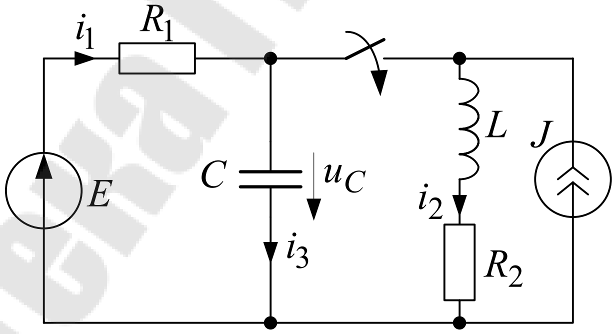


Рис. 5.9.1

Решение

До коммутации

$$i_2(-0) = J = 1 \text{ А}, \quad u_C(-0) = E = 200 \text{ В}.$$

В установившемся режиме после коммутации токи целесообразно рассчитать методом наложения:

$$i_{1_y} = \frac{E}{R_1 + R_2} - J\frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{200}{100 + 100} - \frac{100}{100 + 100} = 0{,}5 \text{ А},$$

$$i_{2_y} = \frac{E}{R_1 + R_2} + J\frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{200}{100 + 100} + \frac{100}{100 + 100} = 1{,}5 \text{ А},$$

$$i_{3_y} = 0, \qquad u_{C_y} = R_2 i_{2_y} = 100 \cdot 1{,}5 = 150 \text{ В}.$$

По законам коммутации

$$i_2(+0) = i_2(-0) = 1 \text{ А}; \quad u_C(+0) = u_C(-0) = 200 \text{ В}.$$

Следовательно, начальные значения свободных составляющих тока в индуктивности и напряжения на емкости соответственно равны:

$$i_{2_{св}}(0) = i_2(0) - i_{2_y}(0) = 1 - 1{,}5 = -0{,}5 \text{ А};$$

$$u_{C_{св}}(0) = u_C(0) - u_{C_y}(0) = 200 - 150 = 50 \text{ В}.$$

Составим эквивалентную операторную схему замещения для свободных составляющих (рис. 5.9.2).

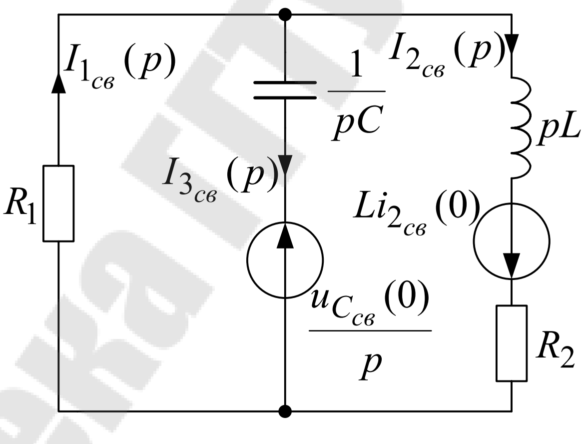


Рис. 5.9.2

Для этой схемы находим операторное изображение искомого тока:

$$I_{3_{св}}(p) = \frac{-p\left[R_1 LC i_{2_{св}}(0) + LC u_{C_{св}}(0)\right] - (R_1 + R_2) C u_{C_{св}}(0)}{p^2 R_1 LC + p(R_1 R_2 C + L) + (R_1 + R_2)} =$$

$$= \frac{-4}{p^2 \cdot 0{,}02 + p \cdot 4{,}5 + 200} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}.$$

Решая уравнение $F_2(p) = 0$, т.е.

$$p^2 \cdot 0{,}02 + p \cdot 4{,}5 + 200 = 0,$$

находим характеристические корни: $p_1 = -61\ \text{с}^{-1}$; $p_2 = -164\ \text{с}^{-1}$.

Оригинал искомого тока найдем по теореме разложения:

$$i_{3_{св}} = \frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{F_1(p_2)}{F_2'(p_2)} e^{p_2 t},$$

где $F_2'(p) = 0{,}04p + 4{,}5$. Имеем:

$$i_3 = i_{3_{св}} = 1{,}942e^{-61t} + 1{,}942e^{-164t},\ \text{А}.$$

5.10. Операторным методом найти ток i_2 после коммутации в схеме рис. 5.10.1, если $J(t) = 2\sin(2500t + 30^\circ)$ А, $C = 1$ мкФ; $L = 0{,}2$ Гн; $R = 100$ Ом;.

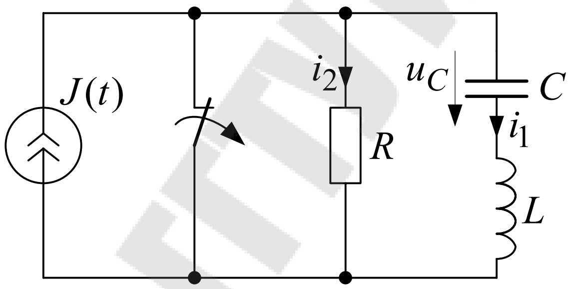


Рис. 5.10.1

Решение

До коммутации

$$i_1(-0) = 0, \qquad u_C(-0) = 0.$$

В установившемся режиме после коммутации комплексы амплитуд искомых величин равны

$$\underline{I}_{1_m} = \underline{J}_m \frac{R}{R + j(X_L - X_C)} = 2e^{j30^\circ} \frac{100}{100 + j(500 - 400)} = 1{,}414e^{-j15^\circ}\ \text{А},$$

$$\underline{I}_{2_m} = \underline{J}_m \frac{j(X_L - X_C)}{R + j(X_L - X_C)} = 2e^{j30^\circ} \frac{j(500 - 400)}{100 + j(500 - 400)} = 1{,}414e^{j75^\circ}\ \text{А},$$

$$\underline{U}_{C_m} = -jX_C \cdot \underline{I}_{1_m} = 400e^{-j90^\circ} \cdot 1{,}414e^{-j15^\circ} = 565{,}7e^{-j105^\circ}\ \text{В}.$$

Следовательно, мгновенные значения искомых величин выражаются равенствами

$$i_{1_y} = 1{,}414\sin(2500t - 15^\circ),\ \text{А}; \qquad i_{2_y} = 1{,}414\sin(2500t + 75^\circ),\ \text{А};$$

$$u_{C_y} = 565{,}7\sin(2500t - 105^\circ),\ \text{А}.$$

По законам коммутации

$$i_1(0) = i_1(-0) = 0; \qquad u_C(0) = u_C(-0) = 0.$$

Следовательно, начальные значения свободных составляющих тока в индуктивности и напряжения на емкости соответственно равны:

$$i_{1_{св}}(0) = i_1(0) - i_{1_y}(0) = 0 - 1{,}414\sin(-15^\circ) = 0{,}366\ \text{А};$$

$$u_{C_{св}}(0) = u_C(0) - u_{C_y}(0) = 0 - 565{,}7\sin(-105^\circ) = 546\ \text{В}.$$

Эквивалентная операторная схема для свободных составляющих представлена на рис. 5.10.2.

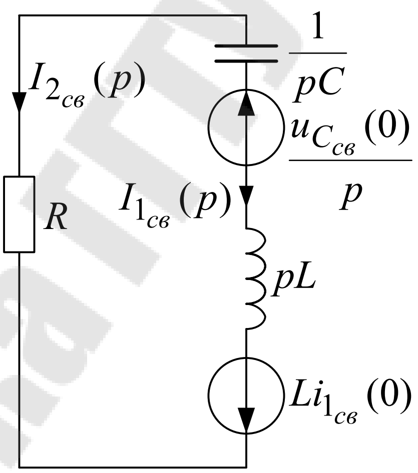


Рис. 5.10.2

В этой схеме $i_{1_{св}}(0) = 0{,}366$ А, $\quad u_{C_{св}}(0) = 546$ В.

Из схемы рис. 5.10.2 следует, что

$$I_{2_{св}}(p) = \frac{\dfrac{u_{C_{св}}(0)}{p} - Li_{1_{св}}(0)}{R + pL + \dfrac{1}{pC}} = \frac{-0{,}0732\cdot 10^{-6}p + 546\cdot 10^{-6}}{0{,}2\cdot 10^{-6}p^2 + 10^{-4}p + 1} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}.$$

Уравнение $F_2(p)=0$, т.е.

$$0{,}2\cdot 10^{-6}p^2+10^{-4}p+1=0\,,$$

имеет корни $p_{1,2}=-250\pm j2220\ \text{с}^{-1}$. Оригинал тока $i_{2_{св}}$ находим по теореме разложения:

$$i_{2_{св}}=2\,\text{Re}\frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)}e^{p_1 t}\,,$$

где $F_2'(p_1)=0{,}4\cdot 10^{-6}p+10^{-4}$. Имеем:

$$i_{2_{св}}=2\,\text{Re}\frac{-0{,}0732\cdot 10^{-6}(-250+j2220)+546\cdot 10^{-6}}{0{,}4\cdot 10^{-6}(-250+j2220)+10^{-4}}e^{-250t}e^{j2220t}=$$

$$=2\,\text{Re}\,0{,}660e^{-106{,}08^\circ}e^{-250t}e^{j2220t}=2\,\text{Re}\,0{,}660e^{-250t}e^{j(2220t-106{,}08^\circ)}=$$

$$=1{,}321e^{-250t}\cos(2220t-106{,}08^\circ)=1{,}321e^{-250t}\sin(2220t-75^\circ)\ \text{А}.$$

Ток установившегося режима $i_{2_y}=\sqrt{2}\sin(2500t+75^\circ)$. Следовательно,

$i_2=i_{2_y}+i_{2св}=\sqrt{2}\sin(2500t+75^\circ)+1{,}321e^{-250t}\sin(2220t-16{,}08^\circ)$, А.

5.11. В цепи рис. 5.11.1 найти ток i_2 после замыкания контакта K, если $E=30$ В, $R=100$ Ом, $R_1=200$ Ом, $L_1=L_2=0{,}3$ Гн, $M=0{,}1$ Гн.

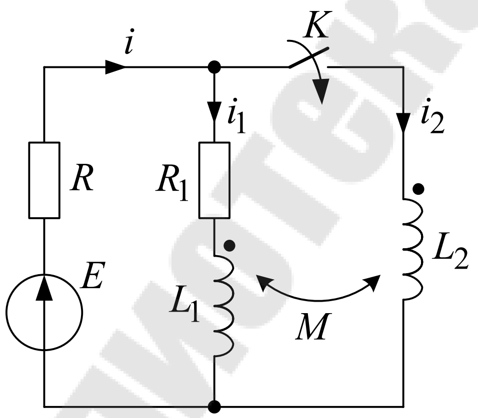


Рис. 5.11.1

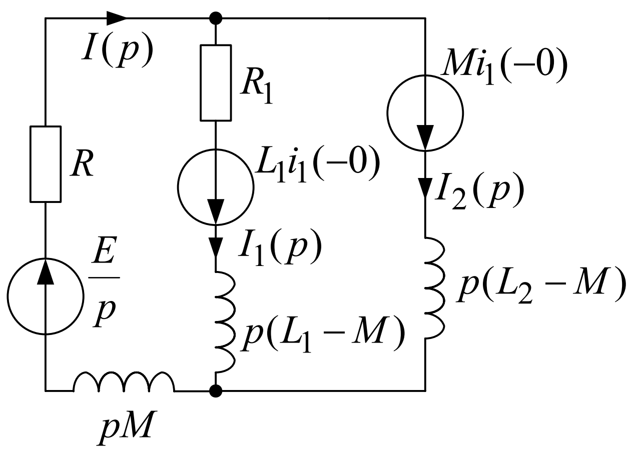


Рис. 5.11.2

Решение

До коммутации

$$i_1 = i_1(-0) = \frac{E}{R + R_1} = \frac{30}{100 + 200} = 0.1 \text{ А}.$$

Из операторной схемы замещения послекоммутационной цепи (рис. 5.11.2) получаем:

$$I(p) = I_1(p) + I_2(p),$$
$$RI(p) + R_1 I_1(p) + pL_1 I_1(p) - L_1 i_1(-0) + pMI_2(p) = E(p),$$
$$RI(p) + pL_2 I_2(p) + pMI_1(p) - Mi_1(-0) = E(p),$$

где $E(p) = \dfrac{E}{p}$. Решая эти уравнения относительно $I_2(p)$, находим:

$$I_2(p) = \frac{p\big(E(L_1 - M) - [R(L_1 - M) + R_1 M]\big)i_1(-0) + ER_1}{p\big(p^2(L_1L_2 - M^2) + p(L_1R + L_2R + L_2R_1 - 2MR) + RR_1\big)}.$$

Подставив числовые значения и сократив числитель и знаменатель на общий множитель ($p + 1000$), получим:

$$I_2(p) = \frac{75}{p(p + 250)},$$

откуда $i_2 = 0{,}3(1 - e^{-250t})$ А.

5.12. В схеме рис. 5.12.1 найти операторным методом ток неразветвлённой части цепи, если $R_1 = 10$ Ом; $R_2 = 5$ Ом; $R_3 = 15$ Ом; $e(t) = 170\sin(314 + 30^\circ)$,В; $L_1 = 30$ мГн; $L_2 = 50$ мГн; $M = 25$ мГн.

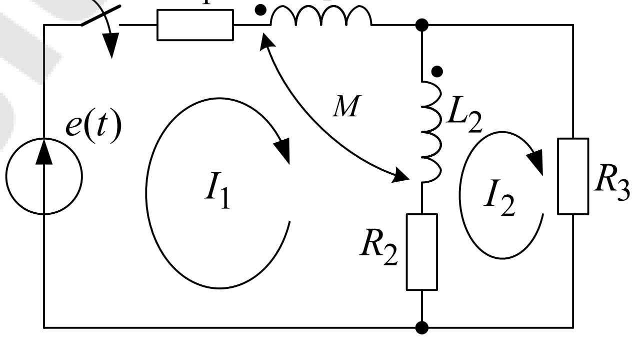


Рис. 5.12.1

Решение

Составляем операторные уравнения по методу контурных токов:

$$I_1(p)\big(R_1+R_2+p(L_1+L_2+2M)\big)-I_2(p)\big(R_2+p(L_2+M)\big)=E(p);$$
$$-I_1(p)\big(R_2+p(L_2+M)\big)+I_2(p)\big(R_2+R_3+pL_2\big)=0,$$

где $E(p)=\dfrac{170e^{j30^\circ}}{(p-j\omega)}$. Совместное решение этих уравнений дает:

$$I_1(p)=\frac{170(20+0{,}05p)}{(p-j\omega)(0{,}000875p^2+2{,}6p+275)}=\frac{F_1(p)}{F_2(p)}.$$

Уравнение $F_2(p)=0$ имеет корни $p_1=314j$, $p_2=-2860\ \text{с}^{-1}$ и $p_3=-114\ \text{с}^{-1}$. Далее находим:

$$F_1(p_1)=4301e^{j68^\circ20'};\ \ F_1(p_2)=20910e^{j210^\circ};\ F_1(p_3)=2429.3e^{j30^\circ};$$

$$F_2'(p)=0{,}000875p^2+2{,}6p+275+(p-j\omega)(0{,}000175p+2{,}6);$$

$$F_2'(p_1)=820{,}94e^{j96^\circ};\quad F_2'(p_2)=6317e^{j174^\circ};$$

$$F_2'(p_3)=995{,}86e^{-j125{,}56^\circ}.$$

Искомый ток

$$i(t)=\mathrm{Im}\left(\frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)}e^{p_1t}+\frac{F_1(p_2)}{F_2'(p_2)}e^{p_2t}+\frac{F_1(p_3)}{F_2'(p_3)}e^{p_3t}\right)=$$

$$=\mathrm{Im}\left(5{,}1e^{j(\omega t-8^\circ40')}+3{,}03e^{j203^\circ44'}e^{-2860t}+3{,}01e^{j140^\circ}e^{-114t}\right)=$$

$$=5{,}13\sin(\omega t-8^\circ40')-1{,}16e^{-2860t}+1{,}97e^{-114t},\ \text{А}.$$

5.13. Определить ток в цепи рис. 5.13.1 после размыкании ключа, если $E=100$ В, $R=200$ Ом, $L=0{,}3$ Гн, $L_2=0{,}2$ Гн.

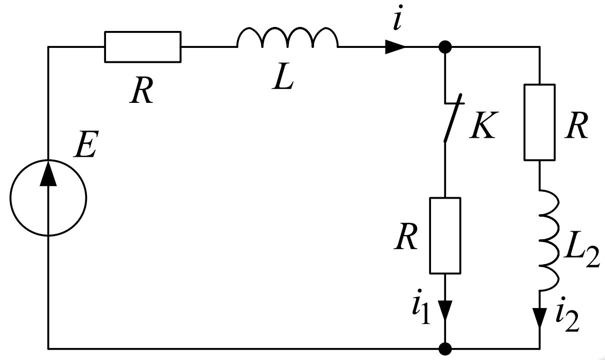


Рис. 5.13.1

Решение

До размыкания ключа в цепи протекали токи

$$i = \frac{E}{R + \frac{R^2}{2R}} = \frac{2E}{3R} = \frac{2 \cdot 100}{3 \cdot 200} = 0{,}333 \text{ А}.$$

$$i_1 = i_2 = \frac{i}{2} = \frac{0{,}333}{2} = 0{,}167 \text{ А}.$$

Следовательно,

$$i(-0) = 0{,}333 \text{ А}, \qquad i_2(-0) = 0{,}167 \text{ А}. \qquad (1)$$

Послекоммутационная цепь имеет единственный контур. При этом по первому закону коммутации

$$Li(-0) + L_2 i_2(-0) = (L + L_2) \cdot i(+0).$$

Отсюда

$$i(+0) = \frac{Li(-0) + L_2 i_2(-0)}{L + L_2}. \qquad (2)$$

Подставляя (1) в (2), находим:

$$i(+0) = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}333 + 0{,}2 \cdot 0{,}167}{0{,}3 + 0{,}2} = 0{,}267 \text{ А}. \qquad (3)$$

Характеристическое уравнение послекоммутационной цепи

$$2R + p(L + L_2) = 0$$

имеет единственный корень $p = p_1 = -\frac{2R}{L + L_2} = -\frac{2 \cdot 200}{0{,}3 + 0{,}2} = -800 \text{ с}^{-1}$.

Следовательно,

$$i_{св} = Ae^{p_1 t} = Ae^{-800t}\,. \tag{4}$$

В установившемся режиме в послекоммутационной цепи протекает ток

$$i_y = \frac{E}{2R} = \frac{100}{2 \cdot 200} = 0{,}25 \text{ А}\,. \tag{5}$$

Из (4) и (5) находим зависимость тока от времени:

$$i(t) = i_y + i_{св} = 0{,}25 + Ae^{-800t}\,. \tag{6}$$

Постоянную интегрирования A находим с помощью начального условия (3), полагая в выражении (6) $t = 0$:

$$0{,}267 = 0{,}25 + A\,.$$

Отсюда $A = 0{,}017$. В итоге имеем:

$$i(t) = 0{,}25 + 0{,}017e^{-800t} \text{ А.}$$

5.14. Найти напряжения u_{C_1} и u_{C_2} после замыкании ключа в схеме рис. 5.14.1, если $E = 80$ В, $C_1 = 5$ мкФ, $C_2 = 3$ мкФ, $R = 90$ Ом.

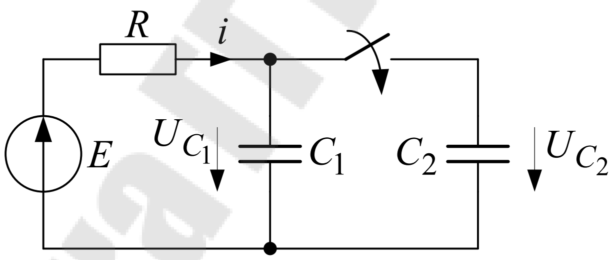


Рис. 5.14.1

Решение

Рассматривая докоммутационную цепь, сразу находим:

$$u_{C_1}(-0) = E = 80 \text{ В}, \quad u_{C_2}(+0) = 0. \tag{1}$$

По второму закону коммутации

$$C_1 \cdot u_{C_1}(-0) = (C_1 + C_2) \cdot u_C(+0), \tag{2}$$

где

$$u_C(+0) = u_{C_1}(+0) = u_{C_2}(+0)\,.$$

Подставляя (1) в (2), находим:

$$u_C(+0) = \frac{EC_1}{C_1 + C_2} = \frac{80 \cdot 5 \cdot 10^{-6}}{5 \cdot 10^{-6} + 3 \cdot 10^{-6}} = 50 \text{ В}. \qquad (3)$$

Характеристическое уравнение послекоммутационной цепи

$$R + \frac{1}{p(C_1 + C_2)} = 0$$

имеет единственный корень

$$p = p_1 = -\frac{1}{R(C_1 + C_2)} = -\frac{1}{90(5 \cdot 10^{-6} + 3 \cdot 10^{-6})} = -1388{,}8 \text{ с}^{-1}.$$

Следовательно,

$$u_{C_{св}} = \mathrm{A}e^{p_1 t} = Ae^{-1388{,}8t} \text{ В}. \qquad (4)$$

В установившемся режиме в послекоммутационной цепи

$$u_{C_у} = E = 80 \text{ В}. \qquad (5)$$

Из (4) и (5) находим:

$$u_C(t) = u_{C_у} + u_{C_{св}} = E + Ae^{-1388{,}8t} = 80 + Ae^{-1388{,}8t} \text{ В}. \qquad (6)$$

Постоянную интегрирования A находим с помощью начального условия (3), полагая в выражении (6) $t = 0$:

$$50 = 80 + A.$$

Отсюда $A = -30$. В итоге имеем:

$$u_C(t) = 80 - 30e^{-1388{,}8t}, \text{ В}.$$

СОДЕРЖАНИЕ

Грачев Станислав Анатольевич
Соленков Виталий Владимирович
Шабловский Ярослав Олегович

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Практикум
по курсу «Теория линейных электрических цепей» для студентов электротехнических специальностей
В трех частях
Часть 2
Трехфазные электрические цепи. Переходные процессы

Подписано в печать 24.11.08.
Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Ризография. Усл. печ. л. 4,42. Уч.-изд. л. 3,09.
Изд. № 197.
E-mail: ic@gstu.gomel.by
http://www.gstu.gomel.by

Отпечатано на цифровом дупликаторе с макета оригинала авторского для внутреннего использования.
Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П.О. Сухого».
246746, г. Гомель, пр. Октября, 48