

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ РАЗМЕРНОСТЕЙ

А. О. Емельянчиков

Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого», Беларусь

Научный руководитель А. А. Бабич

Итак, размерности основных величин образуют «базис» размерностей. Раз так, то можно использовать методы линейной алгебры для связи разложений по различным базисам с целью поиска размерностей. Пусть A – некоторая физическая величина в базисе основных размерностей:

$$A = (A)[A], \quad (1)$$

где $[A] = M^a L^b T^c A^d K^e K D^f$ моль^g; (2)

(A) – абсолютное значение; $[A]$ – размерность.

Предположим, что A зависит только от трех величин – массы, длины и времени:

$$[A] = M^a L^b T^c. \quad (3)$$

В физике высоких энергий физические величины зависят от фундаментальных констант – c (скорость света) и \hbar (постоянная Планка). При этом в качестве базиса физических величин естественно выбрать базис, в котором за основу возьмем c , \hbar и некоторую третью величину.

Выпишем размерности c и \hbar :

$$[c] = LT^{-1}; \quad (4)$$

$$[\hbar] = ML^2T^{-1}. \quad (5)$$

Далее представим произвольную физическую величину A в виде:

$$A = \hbar^\alpha c^\beta \Theta^\gamma, \quad (6)$$

где Θ (омикрон) – некоторая третья физическая величина.

Размерность величины Θ имеет вид:

$$\Theta = M^x L^y T^z. \quad (7)$$

Приравняем размерности величины A (формулы (3) и (6)):

$$[A] = M^a L^b T^c = \hbar^\alpha c^\beta \Theta^\gamma.$$

Подставив формулы (4), (5), (7) в формулу (6), получим соотношение:

$$\begin{aligned}
 M^a L^b T^c &= [M L^2 T^{-1}]^\alpha [L T^{-1}]^\beta [M^x L^y T^z]^\gamma = \\
 &= M^{\alpha+x\gamma} L^{2\alpha+\beta-y\gamma} T^{-\alpha-\beta+z\gamma}; \\
 M^a L^b T^c &= M^{\alpha+x\gamma} L^{2\alpha+\beta-y\gamma} T^{-\alpha-\beta+z\gamma}.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Сравнивая показатели степеней левой и правой частей, получаем систему:

$$\begin{cases} a = \alpha + x\gamma; \\ b = 2\alpha + \beta + y\gamma; \\ c = -\alpha - \beta + z\gamma. \end{cases} \tag{9}$$

Решаем систему относительно параметров α , β , γ :

$$\alpha = \frac{-(y+z)a + xb + xc}{x-y-z}; \tag{10}$$

$$\beta = \frac{(y+2z)a - (x+z)b + (y-2x)c}{x-y-z}; \tag{11}$$

$$\gamma = \frac{c+b-a}{x-y-z}. \tag{12}$$

В принципе нас интересуют целые числа решений.

Уравнения, которые решаются на множестве целых чисел Z , называются диофантовыми уравнениями. Можно предложить для решения линейных диофантовых уравнений следующий метод. Пусть известно некоторое частное решение (x_0, y_0, z_0) .

Тогда общее решение может быть записано в виде:

$$ax + by + cz = d; \tag{13}$$

$$x = x_0 + bt_1 + ct_2; \tag{14}$$

$$y = y_0 - at_1 - ct_2; \tag{15}$$

$$z = z_0 - at_2 + bt_2. \tag{16}$$

Проверим это:

$$a(x_0 + bt_1 + ct_2) + b(y_0 - at_1 - ct_2) + c(z_0 - at_2 + bt_2) = d;$$

$$ax_0 + abt_1 + act_2 + by_0 - abt_1 - bct_2 + cz_0 - act_2 + bct_2 = d,$$

так как выполняется равенство

$$ax_0 + by_0 + cz_0 = d.$$

В системе единиц $(c) = (\hbar) = 1$ в зависимости от выбора наблюдаемой Θ мы можем измерять физическую величину A в единицах этой наблюдаемой Θ . В основе Θ выбираем массу M , либо длину L , либо время T и энергию E . Тогда величина A выразится в единицах Θ , т. е. либо в кг, либо метрах, секундах, либо в единицах энергии.

$$A = \hbar^\alpha c^\beta \Theta^\gamma;$$

$$A = \Theta^\gamma; \tag{17}$$

				M(г)			L(м)		
	a	b	c	α	β	γ	α	β	γ
M(масса)	1	0	0	0	0	1	1	-1	-1
L(длина)	0	1	0	1	-1	-1	0	0	1
T(время)	0	0	1	1	-2	-1	0	-1	1
P(импульс)	1	1	-1	2	1	1	1	0	-1
E(энергия)	1	2	-2	0	2	1	1	1	-1
I(момент импульса)	1	2	-1	1	0	0	1	0	0
σ (сечение)	0	2	0	2	-2	-2	0	0	2
				T(с)			E(эВ)		
	a	b	c	α	β	γ	α	β	γ
M(масса)	1	0	0	1	-2	-1	0	-2	1
L(длина)	0	1	0	0	1	1	1	2	-1
T(время)	0	0	1	0	0	1	1	0	-1
P(импульс)	1	1	-1	1	1	-1	0	-1	1
E(энергия)	1	2	-2	1	0	-1	0	0	1
I(момент импульса)	1	2	-1	1	0	0	1	0	0
σ (сечение)	0	2	0	0	2	2	2	2	-2

В физике высокая энергия измеряется в электронвольтах эВ (кэВ, ГэВ, МэВ, ТэВ).

Электронвольт – внесистемная единица энергии, используемая в атомной и ядерной физике, в физике элементарных частиц и в родственных областях науки (биофизике, физхимии, астрофизике и т. п.).

Основные сведения

Один электронвольт равен энергии, которая необходима для переноса электрона в электростатическом поле между точками с разницей потенциалов в 1 В.

В физике элементарных частиц в электронвольтах (и производных единицах) обычно выражается не только энергия, но и масса элементарных частиц, (как мы увидим ниже) исходя из эквивалентности массы и энергии $E = mc^2$ (или $m = E/c^2$), где c – скорость света. Импульс элементарной частицы также может быть выражен в электронвольтах (строго говоря, в эВ/с).

Температура, которая является мерой средней кинетической энергии частиц, тоже иногда выражается в электронвольтах.

В химии часто используется молярный эквивалент электронвольта. Если один моль электронов перенесен между точками с разностью потенциалов 1 В, он приобретает (или теряет) энергию, равную произведению 1 эВ на число Авогадро.

Выберем в качестве основных размерных единиц энергию, т. е. $\Theta = E$. Тогда из таблицы следует:

$$[L] = \Theta B^{-1}$$

$$[M] = \Theta B^1$$

$$[T] = \Theta B^{-1}$$

$$[P] = \Theta B^1$$

$$[E] = \Theta B^1$$

$$[I] = \Theta B^0$$

$$[\sigma] = \Theta B^{-2},$$

что масса имеет размерность энергии, длина и время – размерность энергии как степень «-1» и т. д.

Опять же из таблицы получим «переводные формулы»:

$$M = \hbar^0 c^{-2} \Theta^1$$

$$L = \hbar^1 c^2 \Theta^{-1}$$

$$T = \hbar^1 c^0 \Theta^{-1}$$

$$P = \hbar^0 c^{-1} \Theta^1$$

$$E = \hbar^0 c^0 \Theta^1$$

$$I = \hbar^1 c^0 \Theta^0$$

$$\sigma = \hbar^2 c^2 \Theta^{-2}.$$