

ТРЕУГОЛЬНЫЙ КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ В ДЕКАРТОВОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

К. С. Курочка, О. В. Роговцова

Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого», Беларусь

При проектировании реальных технических систем и их дальнейшего исследования с использованием метода конечных элементов инженер сталкивается с необходимостью использования конечных элементов различных типов. Для уменьшения сложностей при формировании глобальной матрицы жесткости подобных систем целесообразно осуществлять построение локальных матриц жесткости в системе координат одного вида.

Рассмотрим линейный треугольный конечный элемент, в каждом узле которого будет по 2 степени свободы. Функцию перемещений будем аппроксимировать следующими соотношениями:

$$F(x, y) = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ \vartheta(x, y) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^3 \left([E] \{N_i\} \begin{Bmatrix} u(x_i, y_i) \\ \vartheta(x_i, y_i) \end{Bmatrix} \right),$$

где $u(x, y)$, $\vartheta(x, y)$ – искомые перемещения вдоль оси X и Y соответственно; $N_i(x, y)$ – функция формы i -го узла; $[E]$ – единичная матрица размерности 2×2 ; i – номер узла конечного элемента; x_i, y_i – координаты i -го узла.

Направим координатные оси вдоль сторон треугольника и положим длины этих сторон равными единице, тогда функции формы примут вид:

$$N_1(x, y) = 1 - x - y; \quad N_2(x, y) = x; \quad N_3(x, y) = y.$$

В случае произвольно ориентированного треугольника функции формы могут быть найдены с помощью преобразования координат. Будем считать, что данный элемент находится в косоугольной локальной системе координат, которая связывается с исходной декартовой системой соотношениями вида:

$$\{x^*\} = [\Xi] \{x\},$$

где x^* – вектор локальных координат; x – вектор глобальных координат;

$$[\Xi] = \frac{1}{2S} \begin{bmatrix} y_3 - y_1 & x_1 - x_3 & x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ y_1 - y_2 & x_2 - x_1 & x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ 0 & 0 & 2S \end{bmatrix} \quad \text{– матрица координатных преобразований;}$$

x_i, y_i ($i = \overline{1,3}$) – координаты узлов треугольника в глобальной системе координат.

Переход от локальной системы координат к глобальной будем осуществлять при нахождении локальной матрицы жесткости, т. е. при вычислении определенного интеграла в принципе возможных перемещений [1]. Для этого по известным математическим правилам выполним замену переменных по последним формулам. В итоге будет найдена матрица жесткости для треугольного элемента уже в глобальной системе координат.

Литература

1. Zienkiewicz, O. C. The finite element method. Vol. 1: the basis. Fifth edition / O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor. – Boston : Butterworth-Heinemann, 2000. – 694 p.