УДК 539.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ

С. Ф. Андреев

Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого», Беларусь

Целью данной работы является построение алгоритма решения геометрически нелинейной задачи об изгибе бесконечной пластины, ослабленной криволинейным концентратором напряжений произвольной заданной формы (включения, щели, отверстия, трещины и др.).

Задача сводится к решению системы уравнений Кармана относительно функции больших прогибов $w(x, y)$ и функции напряжений Эри $F(x, y)$:

$$D\nabla^2\nabla^2 w = g + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2 \cdot}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2 \cdot}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y \cdot}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)h,$$

$$\nabla^2\nabla^2 F = E\left(\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y \cdot}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \cdot}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \qquad (1)$$

где D – цилиндрическая жескость; h – толщина пластины; ∇^2 – дифференциальный оператор Лапласа; E – модуль упругости.

Для приближенного решения в случае произвольно заданной формы контура, изменяющейся в процессе деформации, будем использовать метод комплексных потенциалов Колосова–Мусхелишвили в сочетании с конформным отображением [1].

Решение уравнений (1) ищем методом малого параметра, вводя в расчеты величину $\beta = h / R_0$, где R_0 – характерный размер криволинейного контура концентратора:

$$w = \sum_{J=0}^{N} w_J \beta^{2j}, \quad F = \sum_{J=0}^{N} F_J \beta^{2j}.$$

Форма контура определяется конформным отображением $x + i \cdot y = \omega(\xi)$. Здесь $\xi = \rho \cdot e^{I \cdot \vartheta}$ – комплексные криволинейные локальные координаты, $0 \le \vartheta \le 2\pi$, $\rho \ge 1$, $i = \sqrt{-1}$. Дальнейшее решение сводим к решению бигармонических уравнений:

$$\begin{cases}\nabla^2\nabla^2\left(Kw_0(\xi,\overline{\xi})\right) = 0,\\ \nabla^2\nabla^2 F_0(\xi,\overline{\xi}) = E \cdot L_2(w_0(\xi,\overline{\xi})),\end{cases} \quad \begin{cases}\nabla^2\nabla^2\left(Kw_J\right) = h \cdot L_1(F_{J-1}(\xi,\overline{\xi}), w_{J-1}(\xi,\overline{\xi})),\\ \nabla^2\nabla^2 F_J = E \cdot L_2(w_J(\xi,\overline{\xi})),\end{cases} \qquad (2)$$

где $L_1(F(\xi,\overline{\xi}), w(\xi,\overline{\xi}))$ и $L_2(w(\xi,\overline{\xi}))$ – дифференциальные операторы правых частей уравнений (1) в криволинейных координатах.

Для решения неоднородных уравнений (2) в каждом *J*-м приближении используем комплексные потенциалы $\Phi_J^{(S)}(\xi)$ и $\Psi_J^{(S)}(\xi)$, $(S = 1{,}2)$, регулярные в области $\xi \ge 1$ и удовлетворяющих граничным условиям для $\xi = \sigma = e^{i\vartheta}$:

$$\chi^{(S)}\cdot\Phi_J^{(S)}(\tau)+\Phi_J^{(S)}(\tau)-\frac{\sigma^{-2}}{\omega(\tau)}\left\{\omega(\sigma)\left(\overline{\Phi_J^{(S)}(\sigma)}\right)'+\overline{\omega'(\sigma)}\cdot\overline{\Psi_J^{(S)}(\sigma)}\right\}=$$

$$=\chi^{(S)}\cdot\Phi_{J-1}^{(S)}(\tau)+\Phi_{J-1}^{(S)}(\tau)-\frac{\sigma^{-2}}{\omega(\tau)}\left\{\omega(\sigma)\left(\overline{\Phi_{J-1}^{(S)}(\sigma)}\right)'+\overline{\omega'(\sigma)}\cdot\overline{\Psi_{J-1}^{(S)}(\sigma)}\right\}.$$

Литература

1. Мусхелишвили, Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – М. : Наука, 1966. – 707 с.