

# ИЗУЧЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ МЕТОДОМ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

**Д. И. Кошевой**

*Учреждение образования «Гомельский государственный технический  
университет имени П. О. Сухого», Беларусь*

Научный руководитель Л. Г. Бычкова

Целью данной работы является изучение характеристик электростатических полей: расчет параметров и построение картины электростатического поля системы тел методом сеток для создания компьютерной лабораторной работы.

Все процессы и явления можно условно разделить на два класса: формализуемые и неформализуемые. Первые могут быть описаны математической моделью,

т. е. системой дифференциальных уравнений, которые дополняются краевыми условиями. Большинство процессов и явлений, происходящих в природе, требуют описания сложными моделями, часто трехмерными. Поэтому часто они не могут быть решены аналитически, и поэтому сложные задачи удобно решать численными методами. Одним из таких методов является метод конечных разностей (метод сеток). Метод сеток основан на замене дифференциальных уравнений поля уравнениями в конечных разностях, которые получают заменой производных их приближенными выражениями через разностные отношения или значения функции в отдельных точках координатной сетки. Решение полученной таким образом системы алгебраических уравнений производят теми или иными способами численного подбора. Основным недостатком этого метода – сложность точного описания границ и оптимального наложения на область расчета конечно-разностной сетки. Для обеспечения высокой точности расчета необходимо применение сеток с малыми размерами ячеек, т. е. с высокой степенью дискретизации, что приводит к большому времени счета и объему требуемой оперативной памяти. Выходом здесь может являться применение сеток с высокой степенью неоднородности, которые содержат элементы с малыми размерами в областях больших градиентов решения и вблизи криволинейных границ и большие элементы в областях с малыми градиентами решения. Трудоемкость метода компенсируется двумя главными преимуществами:

1. Возможностью рассчитывать электромагнитные поля, при каких угодно границах.

2. Возможностью использовать ЭВМ.

Расчет был выполнен для кабеля с эксцентриситетом. Радиусы внешней и внутренней жилы, а так же смещение между ними указаны на рис. 1, поле которого можно рассчитать теоретически и сравнить с полученным методом сеток. Построение квадратной сетки можно осуществить только с нескольких попыток. Поэтому сначала была выбрана сетка с достаточно крупным равномерным шагом и выполнен пробный расчет. Погрешность вычисления оказалась недопустимой, что потребовало не только уменьшения шага сетки, но и ее измельчения в области большой кривизны границы внутреннего электрода (рис. 2). Для каждого узла сетки было составлено уравнение вида:

$$\varphi_{i+1,R} + \varphi_{i,R+1} + \varphi_{i-1,R} + \varphi_{i,R-1} - 4\varphi_{i,R} = 0.$$

Если целостность сетки нарушалась (рис. 3), уравнение записывалось следующим образом:

$$\frac{1}{a+b} \left( \frac{\varphi_p - \varphi_0}{b} + \frac{\varphi_R - \varphi_0}{a} \right) + \frac{1}{c+a} \left( \frac{\varphi_Q - \varphi_0}{c} + \frac{\varphi_S - \varphi_0}{a} \right) = 0.$$

Полученная система уравнений была решена с помощью ЭВМ. При расчете потенциал внешней границы был принят равным 0, внутренней  $\varphi = 10$  В. Рассчитанные значения потенциалов показаны на рис. 2.

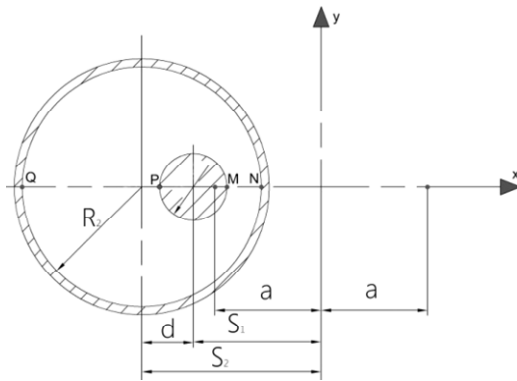


Рис. 1. Обозначения:  $S_1 = 7,25$  мм;  $S_2 = 10,75$  мм;  
 $R_1 = 1$  мм;  $R_2 = 8$  мм;  $a = 7,18$  мм

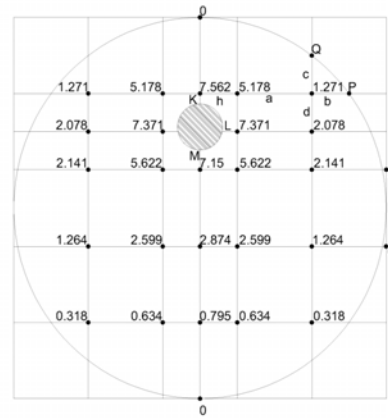


Рис. 2

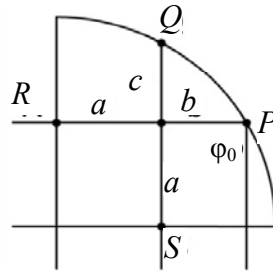


Рис. 3

Далее по результатам расчета была построена картина электростатического поля. Графическое построение плоскопараллельного поля сводится к вычерчиванию линий равного потенциала  $U = \text{const}$  и перпендикулярных им линий напряженности  $v = \text{const}$ . Линии напряженности строятся перпендикулярно линиям равного потенциала так, чтобы сегменты были подобны друг другу. Сегменты были выбраны таким образом, чтобы отношение их средней ширины к высоте было одинаковым. Тогда емкость каждого сегмента на единицу длины устройства равна

$$C_0 = \frac{\tau}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{M}{N} \varepsilon \varepsilon_0.$$

Картина поля показана на рис. 4.

Вначале были построены линии равного потенциала  $\varphi = \text{const}$ , а именно 7,5; 5; 2 В.

Линии напряженности (штриховые линии) поля перпендикулярны линиям равного потенциала и направлены в сторону его уменьшения, так как по определению  $E = -\text{grad}\varphi$ . Далее была рассчитана емкость системы:

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{M}{N} = \frac{4 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 10}{4} = 80,85 \text{ пФ},$$

где  $M = 0$  – количество сегментов в поясе;  $N = 4$  – число поясов.

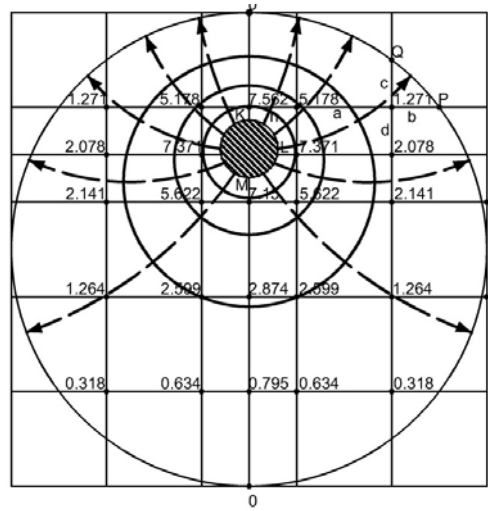


Рис. 4

Для проверки правильности полученных результатов был проведен аналитический расчет характеристик поля.

В качестве тестовой системы выбран кабель со смещенной жилой (рис. 1), поле которого можно рассчитать теоретически и сравнить с полученным методом сеток. Расчет проведен методом зеркальных изображений, согласно которому, задача сводится к расчету поля двух параллельно заряженных цилиндров. Емкость такой системы рассчитывается по формуле

$$C = \frac{\tau}{U} = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0}{\ln \frac{(S_1 + a)(S_2 - a)}{R_1 R_2}},$$

где  $a$ ,  $S_2$ ,  $S_1$  вычисляются из решения системы уравнений:

$$(S_1 - a)(S_1 + a) = R_1^2; \quad (S_2 - a)(S_2 + a) = R_2^2;$$

$$S_2 - S_1 = d;$$

$$S_1 = (R_2^2 - R_1^2 - d^2)/2d; \quad S_2 = (R_2^2 - R_1^2 + d^2)/2d;$$

$$a = \sqrt{S_1^2 - R_1^2} = \sqrt{S_2^2 - R_2^2}.$$

Алгоритм вычислений: сначала рассчитываются  $S_2$ ,  $S_1$ , а затем  $C$ . Данные для расчета указаны на рис. 1. В результате расчета емкость длины системы на единицу длины устройства получилась равной  $C = 76,46$  пФ. Картина поля, построенная по результатам расчетов, показана на рис. 5.

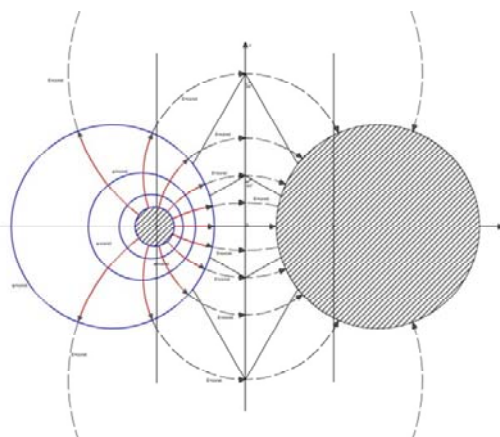


Рис. 5

Картины поля, построенные по аналитическому расчету и полученные в эксперименте, совпадают. Величина емкости совпадает с точностью 95 % (таблица). Полученные результаты показывают, что при данном выборе структуры сетки результаты расчета характеристик поля с достаточной точностью совпадают с аналитическим расчетом.

Экспериментальный метод	Аналитический расчет
$C = 80,85$ пФ	$C = 76,47$ пФ

В работе были рассмотрены особенности построения сетки методом математического моделирования электростатического поля при большой кривизне граничных поверхностей. Показано, что в области большой кривизны граничных поверхностей шаг сетки необходимо уменьшить, если ее ячейки больше элементов системы.

Полученные результаты внедрены в учебный процесс в качестве лабораторной работы, выполняемой на ЭВМ.

#### Литература

1. Теоретические основы электротехники / под ред. П. А. Ионкина. – М. : Высш. шк., 1976. – Т. 2 : Нелинейные цепи и основы электромагнитного поля.
2. Говорков, В. А. Теория электромагнитного поля в упражнениях и задачах / В. А. Говорков, С. Д. Купалян. – М. : Высш. шк., 1963.