

**М. И. Михайлов**

**СБОРНЫЙ МЕТАЛЛОРЕЖУЩИЙ  
МЕХАНИЗИРОВАННЫЙ  
ИНСТРУМЕНТ:  
РЕСУРСОСБЕРЕГАЮЩИЕ МОДЕЛИ  
И КОНСТРУКЦИИ**

Под редакцией члена-корреспондента НАН Беларуси,  
доктора технических наук, профессора Ю. М. Плескачевского

Гомель  
ГГТУ им. П. О. Сухого  
2008

УДК 621.9

**Михайлов, М. И.** Сборный металлорежущий механизированный инструмент: Ресурсосберегающие модели и конструкции / М. И. Михайлов ; под ред. Ю. М. Плескачевского. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2008. – 339 с. : ил. – ISBN 978-985-420-614-1.

В монографии приведены принятые термины и определения в области формообразования поверхностей и срезания припуска. Получены математические модели прямой и обратной задач формообразования. Изложены методики и результаты исследований геометрической и статической точности сборного механизированного инструмента. Определено влияние конструктивных и технологических параметров режущих элементов на их напряженно-деформированное состояние. Описаны конструкции сборных металлорежущих механизированных инструментов и даны практические рекомендации по их применению.

Для научных сотрудников, инженеров, аспирантов и студентов, занимающихся исследованиями и проектированием сборных металлорежущих инструментов.

Табл. 20, ил. 161, список лит. – 241 назв.

Рецензенты: заведующий кафедрой «Материаловедение, обработка и упрочнение материалов» БелГУТа доктор технических наук, профессор *П. Н. Богданович*;  
кандидат технических наук, профессор *А. А. Пучков*  
(ГГТУ им. П. О. Сухого)

*Рекомендовано к изданию Советом ГГТУ им. П. О. Сухого  
(протокол № 4 от 20.12.2004 г.)*

**ISBN 978-985-420-614-1**

© Михайлов М. И., 2008

© Оформление. Учреждение образования  
«Гомельский государственный технический  
университет имени П. О. Сухого», 2008

Научное издание

**Михайлов Михаил Иванович**

**СБОРНЫЙ МЕТАЛЛОРЕЖУЩИЙ  
МЕХАНИЗИРОВАННЫЙ  
ИНСТРУМЕНТ:  
РЕСУРСОСБЕРЕГАЮЩИЕ МОДЕЛИ  
И КОНСТРУКЦИИ**

**Монография**

Редактор *Н. И. Жукова*  
Компьютерная верстка *Н. Б. Козловская*

Подписано в печать 11.06.08.

Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».  
Ризография. Усл. печ. л. 19,76. Уч.-изд. л. 22,21.  
Тираж 100 экз. Заказ № /62.

Издатель и полиграфическое исполнение:  
Издательский центр  
учреждения образования «Гомельский государственный  
технический университет имени П. О. Сухого».  
ЛИ № 02330/0131916 от 30.04.2004 г.  
246746, г. Гомель, пр. Октября, 48.

Обложка и переплет изготовлены в типографии УО «БелГУТ»  
ЛП № 02330/0148780 от 30.04.2004 г.

ISBN 978-985-420-614-1



9 789854 206141 >

# ВВЕДЕНИЕ

Современный уровень развития техники характеризуется необычайным увеличением диапазона и усложнением используемых форм рабочих поверхностей деталей и одновременным повышением требований к точности их обработки. Во многих случаях только усложнение геометрической структуры рабочей поверхности детали и повышение точности ее формы позволяет получить новые потребительские свойства, расширить функциональные возможности, увеличить надежность, ресурс, КПД и улучшить эксплуатационные характеристики деталей и машин в целом.

Важнейшим аспектом машиностроительного производства является формообразующая обработка деталей, для которой в отличие от неформообразующей обработки (все виды химико-термической обработки, нанесение защитных и износостойких покрытий и др.) характерно изменение формы и параметров детали по сравнению с заготовкой.

Особое значение приобретает полнейшее развитие технологии механической обработки: ее требуют до 80 % всех изготавливаемых деталей, на нее приходится почти 40 % общей трудоемкости изготовления машин. По прогнозам международной организации технологов-машиностроителей (СИРП) и специалистов нашей страны, с созданием более совершенных машин, объем механической обработки будет увеличиваться, например, для самолетов он увеличивается пропорционально их скорости. Поэтому большое значение приобретает совершенствование способов формообразующей обработки деталей, достижение качественно нового уровня в проектировании режущих инструментов с широким использованием для этих целей вычислительной техники. Актуальность перечисленных задач и необходимость ускоренного их решения усиливается тем, что мы сейчас вступили в период, когда нужны не просто хорошие, а интенсивные технологии, при использовании которых все звенья технологического процесса эксплуатируются с максимальной отдачей и наивысшей эффективностью.

К технологии, наряду с малооперационностью, непрерывностью, обеспечением материало-, энерго- и трудосбережения, сейчас предъявляется обязательное требование автоматизации управления процессом обработки по заданному режиму на базе широкого применения ЭВМ и металлорежущих станков с ЧПУ. Стремление к максимальному использованию потенциальных возможностей металлообрабатывающего оборудования, при более полном учете характерных особенностей протекания каждого вида обработки, что усложняет задачи теории. Роль полноценных теорий в этих условиях существенно возрастает.

Поиски новых путей интенсификации процесса обработки материалов резанием и управления им требуют создания стройной, цельной, физически обоснованной теории проектирования режущего инструмента.

Практическая направленность технологии, под влиянием которой складывается теория проектирования режущего инструмента, оказала существенное влияние на ее формирование: обычно стремятся раскрыть не суть явлений, а найти пути улучшения обрабатываемости различных материалов, за счет конструктивного изменения инструмента. Определенный прогресс в этом направлении создал некоторые диспропорции между практикой и теорией не в пользу последней. В связи с этим дальнейшее развитие теоретических основ проектирования инструмента является актуальной задачей и требует систематизации, углубления и обобщения.

Внедрение в машиностроительное производство числового программного управления обусловило необходимость построения моделей технологического процесса обработки деталей, потребовало широкого использования математических методов моделирования и вычислительной техники, что, в конечном итоге, привело к революционным изменениям в технологии машиностроения как науке. Технология машиностроения из науки, носившей преимущественно качественный и описательный характер, превращается в науку точную. Неотъемлемой ее составной частью является теория формообразования поверхностей при механической обработке деталей, служащая отправным пунктом при проектировании конструкций металлорежущих станков, инструментов и способов обработки.

Режущие инструменты зачастую считают фактором второстепенного значения для процесса механической обработки, больше внимания уделяя металлорежущим станкам из-за связанных с ними значительных капитальных затрат.

Выделим основные факторы, определяющие себестоимость продукции:

- 1) цеховые предпосылки (планировка, необходимые транспортные средства, складские помещения и т. д.);
- 2) станочное оборудование, технологические факторы (конструкция деталей, материалы);
- 3) рабочая сила (уровень квалификации);
- 4) организация производства (планирование, учет и т. д.);
- 5) инструмент.

Проведенные фирмой «SANDVIK Coromant» исследования показали, что первые четыре пункта требуют либо крупных капитальных вложений, либо длительного времени на их реализацию. И несмотря на то, что на них приходится большая часть общих затрат, достигаемая экономия времени и денег оказывается невелика. Металлорежущий инструмент позволяет провести улучшение показателей процесса механической обработки без существенных затрат времени или денежных средств. Путем правильного выбора конструкции инструмента и режимов резания можно достичь сокращения на 25 % основного технологического времени (которое составляет 20 % времени производственного цикла). Недаром, уже в 1907 году, президент американского общества инженеров-механиков Ф. Тейлор образно сформулировал: «Вся экономия лежит на острие лезвия резца».

Современным требованиям производства по производительности, экономичности, надежности, стойкости наиболее полно удовлетворяют сборные инструменты, оснащенные многогранными пластинами из спеченных твердых сплавов. Переход на инструменты, оснащенные МНП, снизил расход твердых сплавов на обработку металлов резанием примерно на 50 %.

Работоспособность сборного режущего инструмента и его надежность оказывает существенное влияние на экономическую эффективность процесса производства.

Статистические исследования, проведенные на металлообрабатывающих промышленных предприятиях, показывают, что около 30–50 % инструментов, особенно сборных, выходят из строя вследствие поломок. Проблема прочности режущей части инструмента, в первую очередь, связана с явлениями, происходящими в контактах между элементами системы крепления. Несмотря на исследования, проведенные в этом направлении, ряд вопросов остается нерешенным. Среди них – влияние геометрии спеченных многогранных пластин на жесткость инструмента, т. к. жесткость режущего инструмента определяет его прочность и износостойкость.

Исследования жесткости режущего инструмента были начаты учеными Н. А. Дроздовым, А. И. Кашириным, А. П. Соколовским, Д. Н. Решетовым, И. С. Амосовым и др.

Исследования жесткости сборного режущего инструмента показали всю сложность возникающих явлений, которые приводят к неоднозначной зависимости между ней, видом инструмента и способом обработки. Так, повышение стойкости сборного режущего инструмента за счет уменьшения вибрации можно получить путем применения виброгасящих покрытий на основе полимерных материалов.

Применение покрытий на основе полимерных композитов позволяет уменьшить отрицательное влияние термо-ЭДС в зоне обработки на износостойкость инструмента и снижает расход остродефицитных инструментальных материалов. Использование покрытий на основе эпокси-полиэфирных смол в конструкциях твердосплавного сборного инструмента дает возможность снизить усталостные разрушения режущей кромки, а также уменьшить микросколы вершины зуба инструмента.

Формализации расчетов на прочность, точность и надежность всех элементов технологической системы посвящено большое количество работ. Процесс технологического формирования поверхностей деталей менее формализован, но накоплен огромный практический опыт, который используется в виде базы данных при автоматизированном проектировании технологических процессов получения деталей. Такой подход позволяет принимать только наработанные решения и требует постоянного расширения исследований для каждого нового материала заготовки и инструмента.

Кроме того, в процессе проектирования машины конструктор вынужден идеализировать топографию контактирующих поверхностей и их физико-механические свойства. Для последовательной реализации этих оприорных конструкторских решений, в процессе проектирования технологии необходимо, чтобы вид обработки и режущий инструмент были производными от топографии и физико-механических свойств получаемой в результате обработки поверхности. Реализовать эту идею можно только с использованием теории технологической наследственности, разработанной П. И. Ящерицыным, Э. В. Рыжовым, А. М. Дальским и их учениками. Произвести комплексную оптимизацию параметров режущего инструмента затруднительно из-за отсутствия удобных для практики математических моделей, описывающих все особенности конструкций сборного ручного и механизированного инструмента.

Кроме того, на технологическую надежность большое влияние оказывает рациональная система инструментального обеспечения, в которой наиболее полно проявляются эффекты резервирования различных ее элементов.

# **Глава    ФОРМООБРАЗОВАНИЕ**

## **1        ПОВЕРХНОСТЕЙ ДЕТАЛЕЙ**

### **И ЕГО ВЛИЯНИЕ НА ПАРАМЕТРЫ**

### **РЕЖУЩЕГО ИНСТРУМЕНТА**

#### **1.1. Методы формообразования и поверхности при обработке материалов резанием**

Как известно, целью любого метода формообразующей обработки является получение поверхности заданной формы и размеров, которая в допустимых пределах может отличаться от номинальной [1]–[50]. Наибольшее распространение в формообразовании получили понятия, базирующиеся на основе первой геометрической модели формообразования [51], которые позволили выделить следующие методы образования производящих линий: копирования (Кп), следа (Сл), обката (Об) и касания (Кс).

В работе [52], и базирующихся на ней исследованиях [17], [53], [54], в качестве определяющего признака классификации и описания методов формообразования поверхностей принят закон генерации производящих линий во времени. При условии, что темп генерации образующей выше, чем направляющей, все временные схемы образования поверхностей разделяют на семь классов: прерывистый (П–П), полупрерывистый (Н–П), одновременно-прерывистый (Е–П), непрерывный (Н–Н), одновременно-непрерывный (Е–Н), единовременный (Е–Е) и комбинированный.

Качественно методы формообразования характеризуют степень универсальности и сложности реализации. Под универсальностью метода понимают возможность формообразования по нему поверхностей различного порядка сложности. Например, способ формообразования, по которому производящие линии генерируются одновременно (штамповка), характеризуется минимальной универсальностью, т. к. по нему можно обработать только одну поверхность. Напротив, способ обработки, по которому обе производящие линии генерируются прерывисто (обработка сфероидальным инструментом), характеризуется максимальной универсальностью, т. к. по нему можно обработать любую поверхность.

Рассмотрим пример, приведенный в работе [9], где: «...для установления зависимости между качественными характеристиками рассмотрим два варианта формообразования поверхности при обработке ее на станке. Пусть инструмент контактирует с обрабатываемой поверхностью по линии  $l_1$ , а его относительное движение задано скоростью  $v$  и траекторией  $l_2$  фиксированной точки  $C$  линии контакта  $l_1$ . Очевидно, что скорость возникновения линии  $l_1$  больше, чем линии  $l_2$ , следовательно,  $l_1$  – образующая, а  $l_2$  – направляющая поверхности». Этот пример позволяет раскрыть ограниченность такого подхода, т. к. главным признаком образующей автор считает скорость возникновения линии. В этом случае возникает вопрос: что же является образующей при обработке плоскости шаровой абразивной головкой? Однако такое представление не раскрывает сущности конкретных способов, что затрудняет решение задач их синтеза, оптимизации и систематизации. Поэтому определенными преимуществами обладает представление способов формообразующей обработки как совокупности общих структурных признаков [9], [17], [55].

В качестве основной количественной характеристики размерной обработки резанием часто используется производительность формообразования, как площадь формообразуемой поверхности в единицу времени.

Проведенные исследования П. И. Ящерицыным, А. М. Дальским, Э. В. Рыжовым, В. М. Кованом и другими учеными показывают, что одинаковые по точности и высоте шероховатости поверхности деталей машин могут иметь различные эксплуатационные свойства. Это объясняется тем, что у поверхностей с одинаковой конечной шероховатостью могут быть различные степени наклепа, неодинаковые характер

и величина остаточных напряжений, различные степень искажения кристаллического строения и степень нарушения цельности поверхности.

Шероховатость поверхности оказывает существенное влияние на условия смазки, контактную жесткость, герметичность соединений, отражающую и поглощающую способность поверхностей и др.

Так, например, в работах [1], [2] показано влияние отдельных геометрических параметров качества поверхности на эксплуатационные свойства деталей машин.

Кроме того, установлено, что абсолютные значения опорной площади поверхностей при различных методах обработки и сопоставимой величины шероховатости могут существенно различаться. При этом не всегда поверхность с более низкой шероховатостью имеет большую опорную площадь, чем поверхность с высокой шероховатостью, но полученная другим методом обработки [2], [52], [56]–[58].

Оригинальными являются опыты, проведенные П. И. Ящерицыным, которые позволили выделить влияние исходной шероховатости, полученной лезвийным инструментом с последующей абразивной обработкой на качество обработанной поверхности. Им установлено, что с увеличением размера срезаемого шлифованием гребешка исходной шероховатости увеличивается количество теплоты, которое усиливает проявление отдыха (разупрочнения) и, в связи с этим, снижает микротвердость обработанной поверхности.

Исследования Е. Г. Коновалова, В. А. Сидоренко, П. И. Ящерицына, И. В. Кудрявцева, Д. Д. Паншева, Ю. Г. Проскурякова, В. М. Торбию, П. С. Чистосердова, Ю. Г. Шнейдера, В. Пшибыльского и других ученых позволили установить влияние исходной шероховатости на качество обработанной, методами ППД (поверхностно-пластического деформирования), поверхности детали.

Большое количество работ посвящено исследованиям шероховатости кинематических поверхностей [1]–[3], [5], [7], [8], [18], [27], [30], [38], [45], [46], [52], [57], [59]–[89] и др.

Авторы этих работ в основном решали задачу определения размеров остаточных гребешков шероховатости, полученных в результате различных методов обработки. Гребешки шероховатости изучались в одной из секущих плоскостей (продольной или поперечной). Кроме того, авторами выявлено влияние геометрии, чаще всего углов в плане, радиуса закруглений режущих кромок на размеры шероховатостей.

Актуальность постановки указанных задач обусловлена прежде всего тем, что они носят общий характер. В результате, их решение кроме раскрытия частных вопросов может выражать вероятные пути интенсификации формообразующей обработки различных поверхностей.

На базе теории формообразования созданы многие высокоэффективные способы обработки [4], [5], [7], [8]–[12], [14], [17], [20]–[23], [25], [27], [29], [30], [36], [38], [44], [50], [52], [54], [58], [60], [61], [64]–[67], [72]–[80], [88], [89] и получены основополагающие результаты по общей теории проектирования режущих инструментов [8], [9], [14], [15], [18], [22], [23], [27], [29], [30], [37], [45]–[49], [52], [53], [60]–[64], [67], [81]–[85], [89] и др. Однако еще недостаточно разработаны принципы анализа, синтеза и выбора методов и схем формообразующей обработки.

При анализе, синтезе и оптимизации способов обработки их рассматривали [9], во-первых, как процесс формообразования, т. е. получения поверхности с заданными формой и размерами; во-вторых, как совокупность физических, химических и других процессов, связанных с удалением материала резанием, его поверхностно-пластическим или объемным деформированием; в-третьих, – как потоки материалов.

В работах [9], [17] формообразованные поверхности моделируются применением теории множеств. Указывается, что если «обработанная поверхность конгруэнтна номинальной», то «достигается полное формообразование».

Контакт производящих элементов инструмента, задаваемых множеством  $M_{\Pi}$ , по форме может быть поверхностным ( $M_{\Pi} \cap M_{\Pi} = \sigma$ ), линейным ( $M_{\Pi} \cap M_{\Pi} = L$ ) или точечным ( $M_{\Pi} \cap M_{\Pi} = T$ ), а во времени осуществляться одновременно (мгновенно)  $E$ , периодически (дискретно)  $\Pi$  и непрерывно  $H$ .

Такой методический подход позволил закодировать основные методы обработки. Кроме того, используя этот метод, автор приходит к выводу, что поверхностный контакт характерен только для деформирующих инструментов.

За время контакта производящего элемента с номинальной поверхностью он оставляет на ней след в виде точки ( $T$ ), линии ( $L$ ) или поверхности ( $\sigma$ ), представляющий собой результат взаимодействия.

Характер контакта во времени и вид взаимодействия инструмента с номинальной поверхностью отражают процесс генерации ее направляющей по соответствующему координатному направлению. Форма мгновенного контакта однозначно связана с типом характери-

стического образа инструмента (точка, линия, поверхность) и, в значительной степени, обуславливает метод генерации образующей номинальной поверхности.

Указанные в таблице 1.1 характеристики контакта инструмента с номинальной поверхностью определяют вид ее формообразования (частичное или полное), и поэтому относятся к существенным признакам способов обработки. В работе [86] впервые сформулированы задачи анализа, синтеза и классификации принципиальных схем резания, а также формы образуемых поверхностей, систематизированы известные схемы и показаны пути поиска новых технических решений.

Таблица 1.1

**Виды и параметры контакта инструмента  
с номинальной поверхностью**

| Форма мгновенного контакта | Характер контакта во времени | Вид взаимодействия инструмента с номинальной поверхностью | Результат взаимодействия |
|----------------------------|------------------------------|---|--------------------------|
| T                          | E                            | МК  | $T$                      |
| T                          | H                            | C, O, CO  | $\{L\}$                  |
| T                          | P                            | C, O, CO  | $\{L_i\}$                |
| T                          | P                            | МК  | $\{T_i\}$                |
| L                          | E                            | МК  | $L$                      |
| L                          | H                            | C   | $\sigma$                 |
| L                          | P                            | C   | $\{\sigma_i\}$           |
| L                          | P                            | МК  | $\{L_i\}$                |
| $\sigma$                   | E                            | МК  | $\sigma$                 |
| $\sigma$                   | H                            | C, O, CO  | $\sigma$                 |
| $\sigma$                   | P                            | C, O, CO  | $\{\sigma_i\}$           |
| $\sigma$                   | P                            | МК  | $\{\sigma\}$             |

Размерную обработку резанием при определенных допущениях рассматривают как процесс образования поверхности производящим элементом в виде точки, линии или поверхности, которые двигаются относительно заготовки [51], [52]. При этом обработанную поверхность представляют как след режущей кромки или огибающую исходной инструментальной поверхности.

Согласно известному в дифференциальной геометрии кинематическому методу исследования, любую поверхность можно рассматривать как множество последовательных положений (след)

образующей линии, которая движется в пространстве по траектории, заданной направляющей. Образующая и направляющая являются производящими линиями поверхности. Ими могут быть любые две линии на поверхности, расположенные по разным координатным направлениям.

Наиболее полно модели формообразования поверхностей представлены в работах [9], [29], [48], [50], [52], [66], [73], [79], [82] и др. Заслуживает внимания описание процесса формообразования, основанное на многопараметрических отображениях: обрабатываемые детали, режущие инструменты и их движения описаны общим уравнением отображения, представляющего собой математическую модель формообразования. На данной основе разработана система типовых моделей полного и частичного формообразования применительно к разным способам обработки, созданы новые способы обработки и режущие инструменты [48]. Различные аспекты теории формообразования поверхностей резанием обобщены в монографии [50], где предложена классификация схем формообразования как разновидностей относительного движения инструмента и заготовки, представленных с помощью аксоидов этих элементов для выявления инструментальных поверхностей, допускающих обработку заданной поверхности. В результате исследований процессов формообразования поверхностей дисковыми, режущими и червячными инструментами [29], [86] дан анализ используемых на практике схем формообразования поверхностей режущей кромкой и производящей поверхностью инструмента, условий формообразования номинальной поверхности инструментом. Разработаны методы определения оптимальных параметров установки инструментов, погрешности формообразования и решены другие задачи, что позволило сформулировать теоретические основы проектирования инструментов.

Практическим приложением теории формообразования поверхностей является разработка методических основ создания и реализации физико-механических способов обработки. Этой проблеме посвящена работа [55], в которой предложены принципы классификации способов обработки резанием и дано представление о структурной схеме любого способа как технологической системе обработки резанием. Технологические основы создания методов обработки в машиностроении [87]–[89] и общая методика их сравнительного анализа по показателям эффективности [72], [89] раскрывают отдельные аспекты указанной проблемы.

Анализ выполненных работ подчеркивает необходимость в более детальном изучении кинематических поверхностей и их систематизации.

С возрастанием скорости течения для сталей марок 20 и 45 поверхностная микротвердость уменьшается, а с увеличением подачи и глубины резания возрастает, причем глубина оказывает меньшее влияние. Микротвердость по глубине распределяется неравномерно, и авторами были выделены три зоны. Размеры поверхностной (первой) зоны, определяющей качество поверхности, в основном зависят от условий предшествующей обработки, размеры подповерхностной (второй) характеризуются сравнительно большой глубиной и невысоким приростом микротвердости, а микротвердость третьей зоны соответствует исходному материалу.

Специфическая направленность предлагаемой работы не позволяет раскрыть полный обзор работ изучавших вопросы технологической наследственности, но даже приведенные выше примеры позволяют заключить, что изучение процесса формирования качества поверхности детали необходимо производить с использованием системного подхода.

Для реализации этого подхода поверхности детали, в зависимости от основных факторов процесса обработки, можно условно разделить на геометрическую, кинематическую, статическую и динамическую. Кинематическая поверхность отличается от геометрической остаточной шероховатостью, полученной в результате процесса ее формообразования при условии идеальной обрабатываемости материала заготовки и недеформируемости всех элементов технологической системы. Статическая поверхность является производной от кинематической и дополняется отклонениями, обусловленными пространственными деформациями элементов технологической системы (станка, заготовки, инструмента и приспособления), полученными статическими составляющими сил резания и температуры. Динамическая поверхность, являясь производной от статической, формируется с дополнительным учетом обрабатываемости материала заготовки, силовых и тепловых процессов зоны обработки, вибраций в зоне резания, а также с учетом износа элементов технологической системы.

В рамках работы рассмотрим только вопросы формирования кинематических поверхностей.

## 1.2. Принятые понятия и определения

Кинематическая точность является сложным понятием, отражающим, с геометрической точки зрения, отличие действительной кинематической поверхности детали от геометрической.

Одним из способов задания номинальных поверхностей является кинематический, т. е. способ, при котором известны параметры номинальных образующих и направляющих. Аналогичным образом задаются и действительные кинематические поверхности. Отличием является только то, что номинальными образующими и направляющими являются, в основном, гладкие линии, а кинематическими образующими и направляющими – обводы траекторий и формообразующих кромок инструмента. Формообразование наиболее распространенных элементарных поверхностей деталей можно отразить тремя условными схемами: следа, огибания и комбинированной, т. е. сочетанием признаков первых двух.

Анализ литературы по методам формообразования [8]–[14], [17]–[43], [56], [57], [61], [65]–[77] позволяет заключить, что основными элементами, характеризующими методы, являются траектории движения формообразующих кромок инструмента, количество кромок и расположение их в инструменте. Основные понятия по формообразованию представим в виде таблицы 1.2, а схемы формообразования для наиболее распространенных методов обработки – в таблице 1.3.

Таблица 1.2

**Термины и определения процесса формообразования**

| Термин   | Определение  |
|--|--|
| Образующая и направляющая                            | Характеристические линии кинематического формирования поверхности, чаще всего расположенные по разным координатным направлениям  |
| Номинальные кинематические образующая и направляющая | Теоретические (расчетные) линии пересечения номинальной кинематической поверхности плоскостями, в которых расположены образующая и направляющая соответствующей геометрической поверхности |
| Формообразование                                     | Процесс формирования направляющей и образующей обработанной поверхности  |
| Срезание припуска                                    | Процесс удаления припуска с поверхности заготовки режущим элементом инструмента  |

Продолжение табл. 1.2

| Термин  | Определение  |
|---|--|
| Действительные образующая и направляющая                            | Теоретические линии пересечения действительной поверхности плоскостями, в которых расположены образующая и направляющая соответствующей геометрической поверхности                       |
| Метод формообразования поверхности резанием                         | Метод формирования направляющей и образующей поверхности резанием  |
| Зубья формообразующие   | Зубья инструмента, участвующие в формообразовании поверхности детали   |
| Формообразующие кромки  | Кромки формообразующих зубьев (главные, вспомогательные), обращенные к обработанной поверхности и участвующие в формообразовании поверхности детали                                      |
| Движения резания  | Движения (главное и подачи) инструмента и заготовки, обеспечивающие срезание основного припуска  |
| Движения формообразования   | Относительные движения инструмента и заготовки, обеспечивающие формообразование обработанной поверхности   |
| Схема формообразования  | Схематическое изображение образующей и направляющей геометрической и кинематической поверхностей, а также формообразующей части режущего инструмента с указанием движений и погрешностей |
| Схема огибания  | Схема формообразования, в которой образующая и направляющая геометрической поверхности являются огибающими к соответствующим линиям кинематической поверхности                           |
| Схема следа   | Схема формообразования, в которой образующая и направляющая геометрической поверхности совпадают с соответствующими линиями кинематической поверхности                                   |
| Комбинированная схема формообразования                              | Схема формообразования, в которой образующая формируется по схеме следа, а направляющая – по схеме огибания или наоборот   |
| Схема формообразования (следа, огибания, комбинированная) одинарная | Схема формообразования, в которой образующая и направляющая формируются одним формообразующим зубом  |

Продолжение табл. 1.2

| Термин  | Определение  |
|---|--|
| Схема формообразования (следа, огибания, комбинированная) групповая     | Схема формообразования, в которой образующая и направляющая формируются несколькими зубьями  |
| Схема формообразования (следа, огибания, комбинированная) одноцикловая  | Схема формообразования, в которой направляющая и образующая формируются за один цикл относительного движения заготовки и инструмента   |
| Схема формообразования (следа, огибания, комбинированная) многоцикловая | Схема формообразования, в которой направляющая или образующая формируются за несколько циклов относительного движения инструмента и заготовки  |
| Схема формообразования (следа, огибания, комбинированная) постоянная    | Схема формообразования, в которой геометрические параметры образующей и направляющей кинематической поверхности постоянны  |
| Схема формообразования (следа, огибания, комбинированная) переменная    | Схема формообразования, в которой геометрические параметры образующей или направляющей кинематической поверхности переменны  |
| Геометрическая поверхность  | Теоретическая поверхность, образующая и направляющая которой представляют собой геометрическую реализацию аналитической, точечной или каркасной формы их задания   |
| Кинематическая поверхность  | Теоретическая поверхность, образованная номинальными кинематическими образующей и направляющей, которые представлены в виде обводов следов геометрических формообразующих кромок инструмента и траекторий их движения  |
| Статическая поверхность   | Теоретическая поверхность, образующая и направляющая которой могут быть сформированы в виде обводов следов геометрических формообразующих кромок инструмента и траекторий их движения с учетом статических деформаций элементов технологической системы                  |
| Динамическая поверхность  | Теоретическая поверхность, образующая и направляющая которой могут быть сформированы в виде обводов следов формообразующих кромок инструмента и траекторий их движения с учетом свойств материалов, тепловых и динамических деформаций элементов технологической системы |

Продолжение табл. 1.2

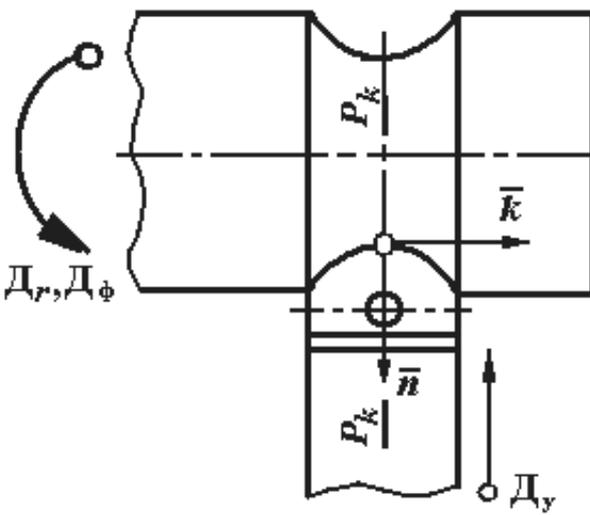
| Термин  | Определение   |
|---|---|
| Номинальные кинематическая, статическая или динамическая поверхности          | Теоретические поверхности (кинематическая, статическая или динамическая), сформированные без учета износа и геометрических погрешностей элементов технологической системы                                     |
| Действительные кинематическая, статическая или динамическая поверхности       | Теоретические поверхности (кинематическая, статическая или динамическая), сформированные с учетом износа и геометрических погрешностей элементов технологической системы                                      |
| Поперечная секущая плоскость припуска   | Секущая плоскость, содержащая векторы, нормали и касательные к кинематическим образующим геометрических поверхностей заготовки и детали   |
| Продольная секущая плоскость припуска   | Секущая плоскость, содержащая векторы, нормали и касательные к кинематическим направляющим геометрических поверхностей заготовки и детали   |
| Схема срезания припуска   | Схематическое изображение тела припуска в поперечной и продольной секущих плоскостях, разделенного на слои, с выделением их разнонаправленной штриховкой  |
| Профильная схема срезания припуска  | Схема срезания припуска, в которой линии наибольшей протяженности, разделяющие припуск на слои в секущих плоскостях, параллельны соответственно образующей и направляющей геометрической поверхности детали   |
| Генераторная схема срезания припуска  | Схема срезания припуска, в которой линии наибольшей протяженности, разделяющие припуск на слои в секущих плоскостях не параллельны соответственно образующей и направляющей геометрической поверхности детали |
| Комбинированная схема срезания припуска                                       | Схема срезания припуска, в которой тело припуска в поперечной секущей плоскости разделено по профильной схеме, а в продольной – по генераторной, или наоборот   |
| Схема срезания припуска (профильная, генераторная, комбинированная) одинарная | Схема срезания, в которой каждый слой удаляется одним зубом инструмента   |
| Схема срезания припуска (профильная, генераторная, комбинированная) групповая | Схема срезания, в которой каждый слой удаляется несколькими зубьями инструмента   |

Окончание табл. 1.2

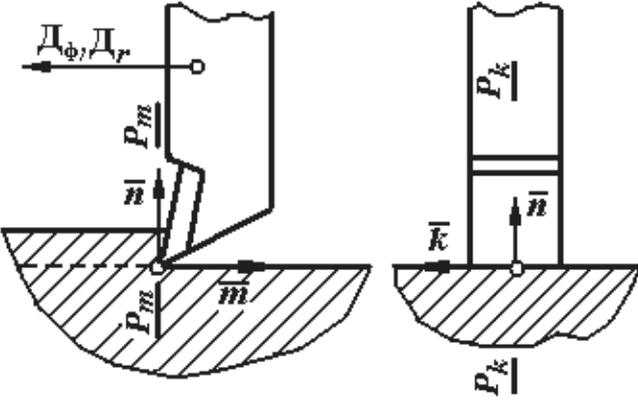
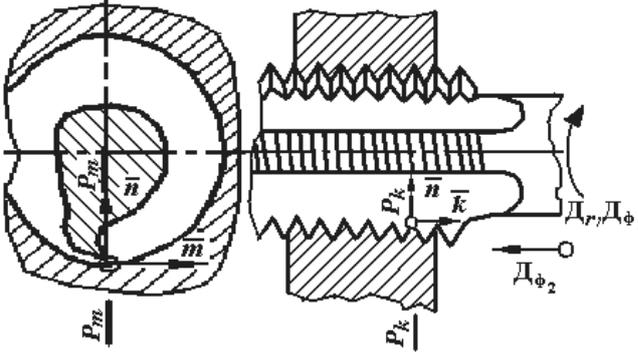
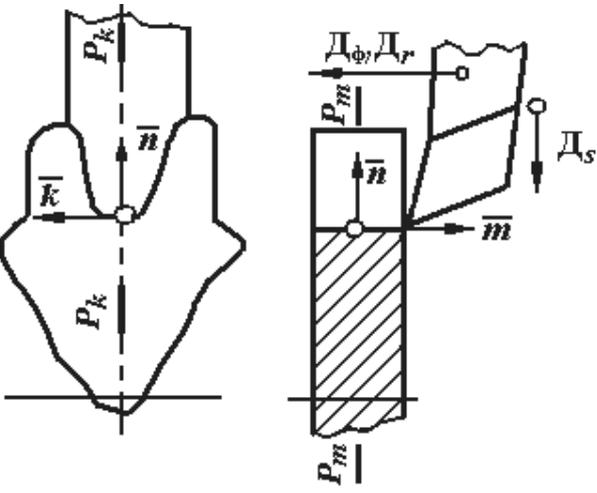
| Термин  | Определение  |
|---|--|
| Схема срезания припуска (профильная, генераторная, комбинированная) одноцикловая  | Схема срезания, в которой припуск удаляется за один цикл движений резания        |
| Схема срезания припуска (профильная, генераторная, комбинированная) многоцикловая | Схема срезания, в которой припуск удаляется за несколько циклов движений резания |
| Схема срезания припуска (профильная, генераторная, комбинированная) постоянная    | Схема срезания припуска, в которой геометрические размеры слоев постоянны        |
| Схема срезания припуска (профильная, генераторная, комбинированная) переменная    | Схема срезания припуска, в которой геометрические размеры слоев переменны        |

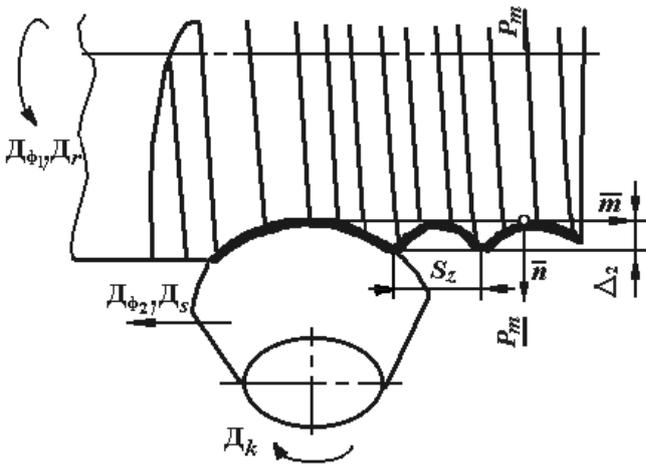
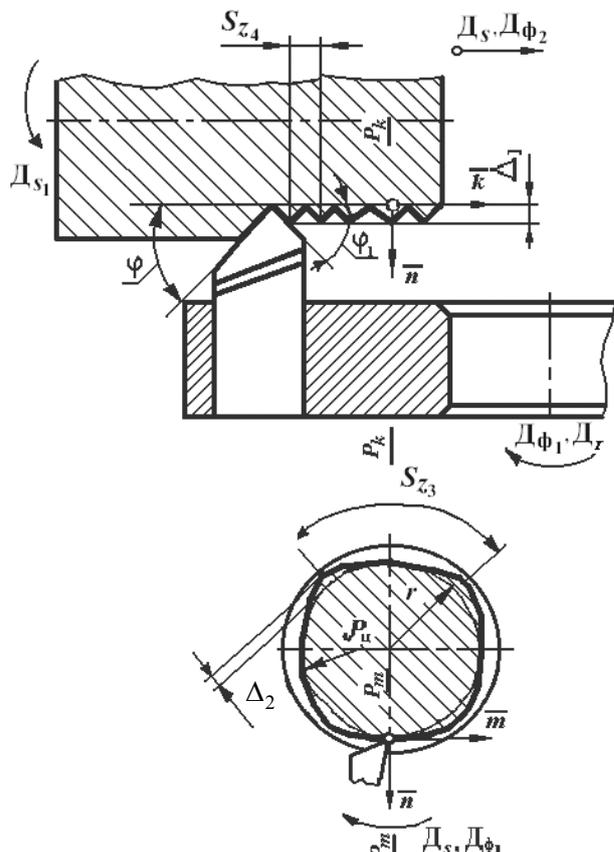
Таблица 1.3

### Примеры схем формообразования типовых поверхностей деталей

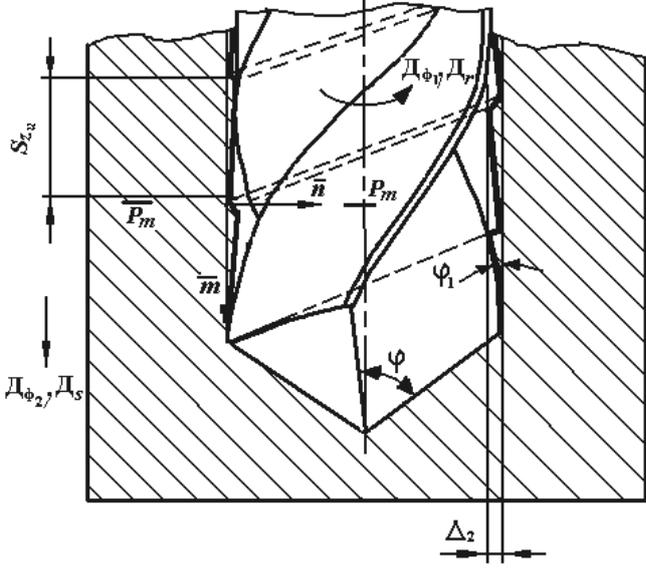
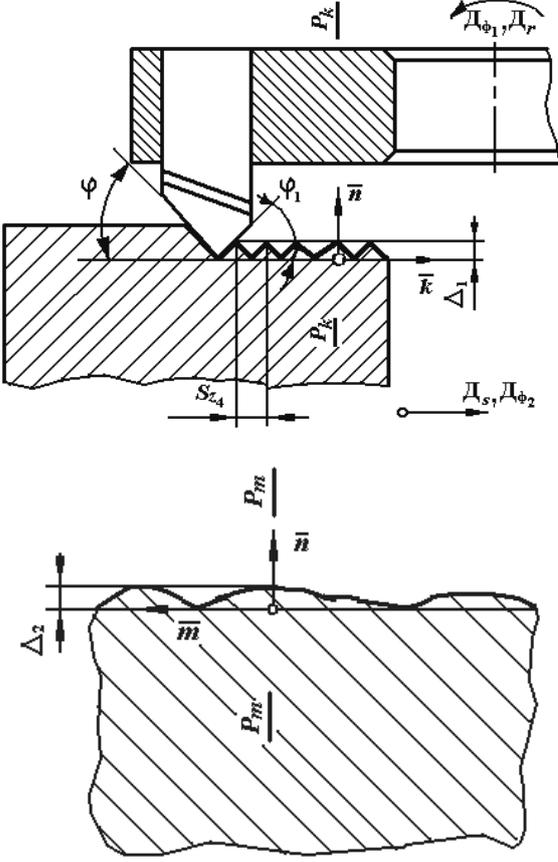
| Эскиз схемы формообразования   | Назначение, признаки, оценки  |
|--|---|
| <b>Схемы следа</b>   |   |
| <p>– одинарная, постоянная, одноцикловая</p>  | <p>Калибрование канавки фасонным резцом</p> <p>– движение формообразования – вращательное движение заготовки</p> $D_\phi \equiv D_r$ <p>– формообразующий зуб может быть и режущим</p> <p>– <math>\Delta_1 = \Delta_2 = 0</math>,</p> <p>где <math>\Delta_1</math> и <math>\Delta_2</math> – соответственно, кинематические погрешности обрабатывающей и направляющей</p> |

Продолжение табл. 1.3

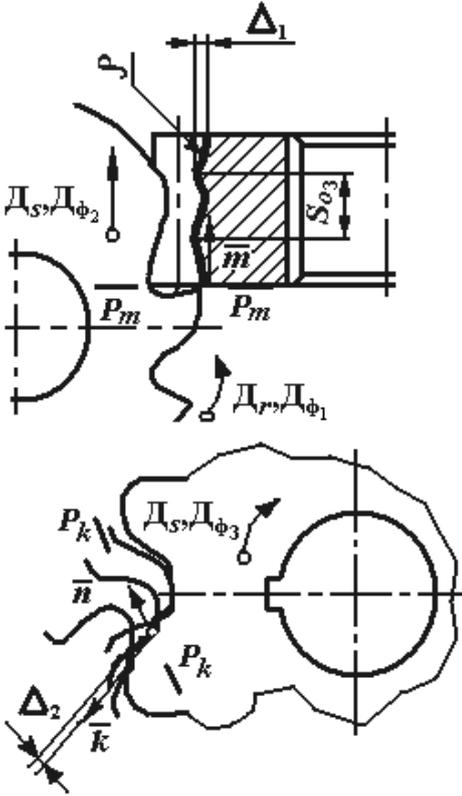
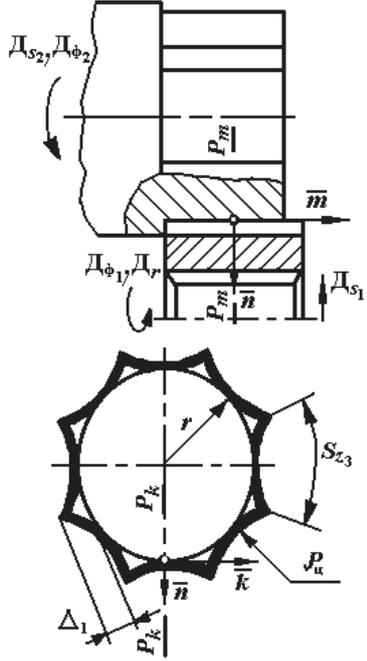
| Эскиз схемы формообразования   | Назначение, признаки, оценки  |
|--|---|
| <p>– одинарная, постоянная, многоцикловая</p>   | <p>Строгание плоской поверхности резцом</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– <math>D_\phi \equiv D_r</math></li> <li>– формообразующий зуб может быть и режущим</li> <li>– <math>\Delta_1 = \Delta_2 = 0</math></li> </ul>  |
| <p>– групповая, постоянная, многоцикловая</p>  | <p>Калибрование резьбы метчиком</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– движения формообразования – функционально связанные вращательное и поступательное</li> <li><math>D_{\phi 1} \equiv D_{r1}, D_{\phi 2} \equiv D_s</math></li> <li>– инструмент имеет отдельные формообразующие зубья – калибрующие</li> <li>– <math>\Delta_1 = \Delta_2 = 0</math></li> </ul> |
| <p>– одинарная, постоянная, одноцикловая</p>  | <p>Нарезание зубчатого колеса строгальным фасонным резцом</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– <math>D_\phi \equiv D_r</math></li> <li>– формообразующий зуб может быть и режущим</li> <li>– <math>\Delta_1 = \Delta_2 = 0</math></li> </ul>  |

| Эскиз схемы формообразования  | Назначение, признаки, оценки   |
|---|--|
| <b>Схемы огибания</b>   |  |
| <p>– одинарная, постоянная, многоцикловая</p>    | <p>Точение ротационным резцом</p> <p>– движения формообразования совпадают с движениями резания</p> $D_{\phi_1} = D_r, D_{\phi_2} \equiv D_s$ <p>– формообразующий зуб является режущим</p> <p>– погрешности <math>\Delta_1 = f(\rho, s_z, d)</math>,</p> $\Delta_2 = f(\rho, s_z, \beta),$ <p>где <math>\rho</math> – радиус кривизны инструмента в <math>P_k</math>; <math>d</math> – диаметр детали; <math>s_z</math> – подача на зуб; <math>\beta</math> – угол наклона плоскости задней поверхности</p> |
| <p>– групповая, переменная, многоцикловая</p>  | <p>Фрезерование цилиндра торцовой фрезой</p> <p>– движения формообразования совпадают с движениями резания</p> $D_{\phi_1} = D_r, D_{\phi_2} \equiv D_s$ <p>– формообразующий зуб является режущим</p> <p>– погрешности <math>\Delta_1 = f(\rho, s_z, d)</math>,</p> $\Delta_2 = f(\rho, s_z),$ <p>где <math>\rho</math> – радиус кривизны инструментальной поверхности в <math>P_k</math>; <math>d</math> – диаметр детали; <math>s_z</math> – подача на зуб</p>  |

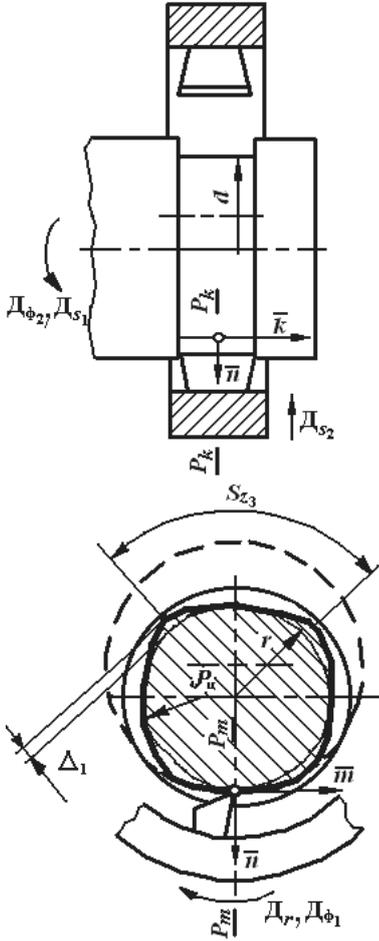
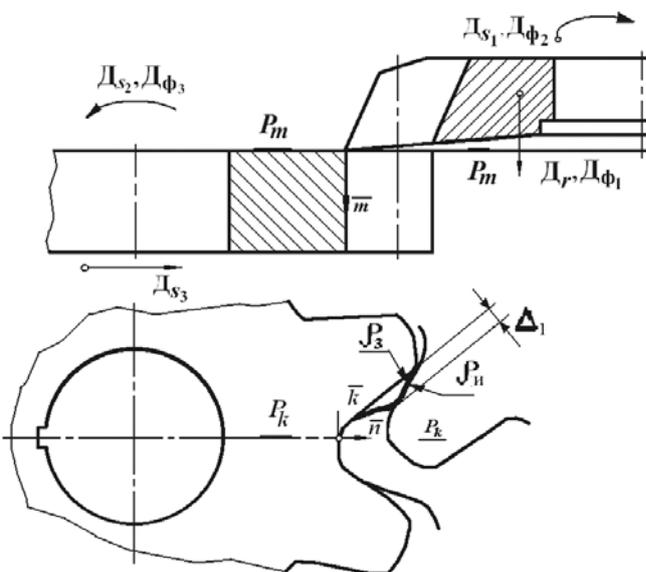
Продолжение табл. 1.3

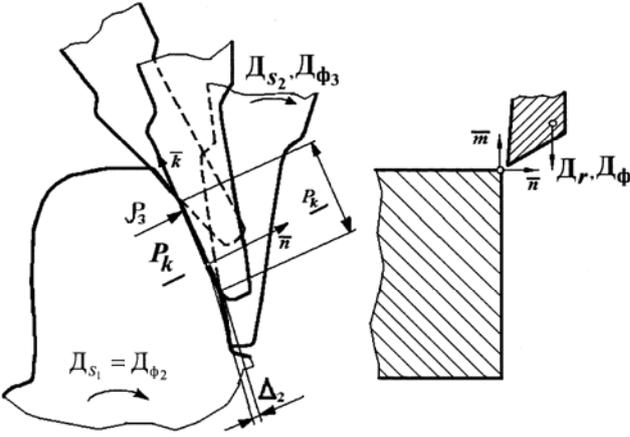
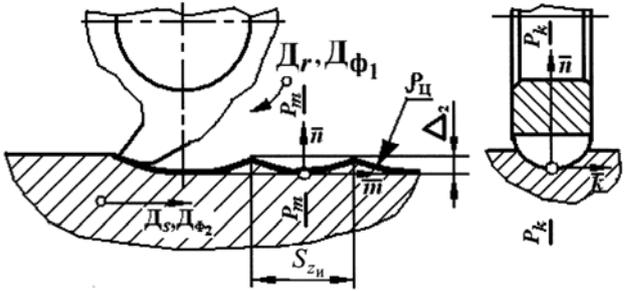
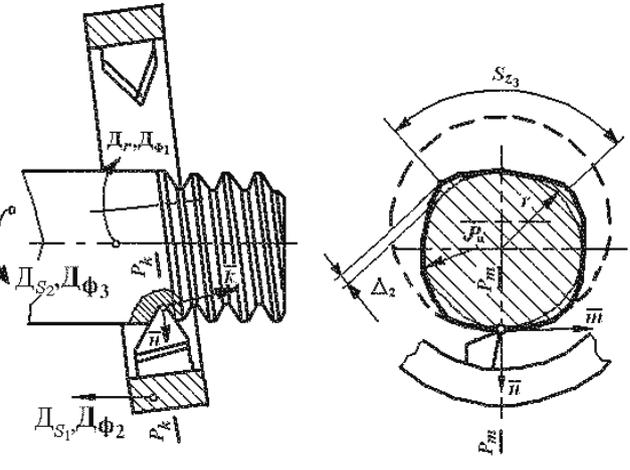
| Эскиз схемы формообразования  | Назначение, признаки, оценки   |
|---|--|
| <p>– групповая, переменная, многоцикловая</p>    | <p>Сверление, рассверливание, зенкерование, развертывание отверстия</p> <p>– движения формообразования совпадают с движениями резания</p> $D_{\phi 1} \equiv D_r, D_{\phi 2} \equiv D_s$ <p>– формообразующий зуб является режущим</p> <p>– погрешности</p> $\Delta_1 = f(s_z, \varphi, \varphi_1, d),$ $\Delta_2 = f(s_z, \varphi, \varphi_1, d),$ $\Delta_{2\max} = s_0 \sin \varphi \cdot \sin \varphi_1 / \sin(\varphi + \varphi_1)$ |
| <p>– групповая, переменная, многоцикловая</p>  | <p>Обработка плоских поверхностей торцевой фрезой</p> <p>– движения <math>D_{\phi 1} \equiv D_r, D_{\phi 2} \equiv D_s</math></p> <p>– формообразующий зуб является режущим</p> <p>– погрешности</p> $\Delta_{1\max} = s_z \sin \varphi \cdot \sin \varphi_1 / \sin(\varphi + \varphi_1)$ $\Delta_2 = f(s_z, R)$   |

Продолжение табл. 1.3

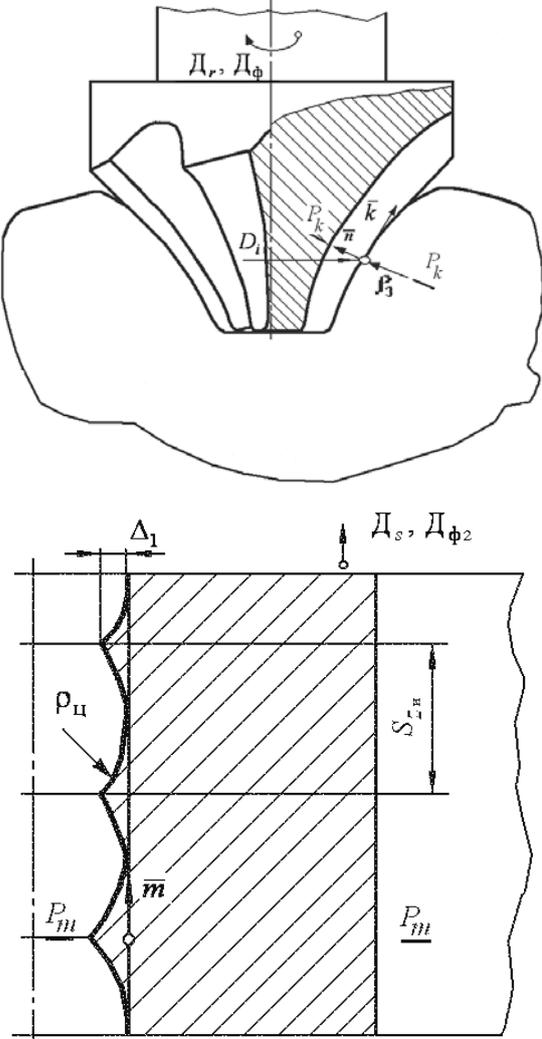
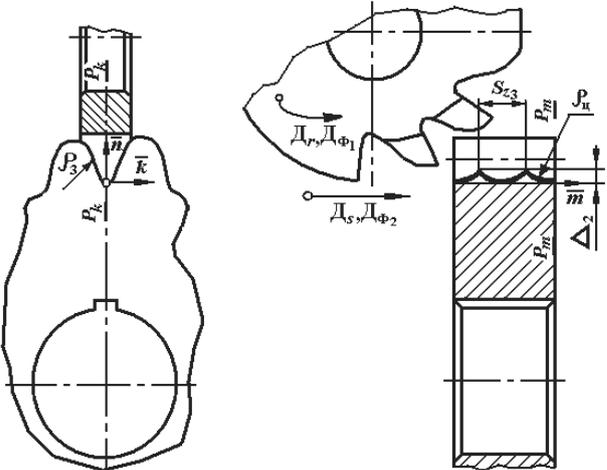
| Эскиз схемы формообразования  | Назначение, признаки, оценки   |
|---|--|
| <p data-bbox="196 356 802 394">– групповая, переменная, многоцикловая</p>     | <p data-bbox="866 356 1394 434"><i>Нарезание зубчатых колес червячными фрезами</i></p> <p data-bbox="866 445 1361 483">– движения <math>D_{\phi 1} \equiv D_r, D_{\phi 2} \equiv D_{s1},</math></p> <p data-bbox="866 495 1018 533"><math>D_{\phi 3} \equiv D_{s2}</math></p> <p data-bbox="866 544 1378 622">– формообразующий зуб является режущим</p> <p data-bbox="866 633 1331 672">– погрешности <math>\Delta_1 = f(\rho, s_{03}, \rho_3)</math></p> $\Delta_{1\max} = R\sqrt{R^2 - s_{03}^2} / 4,$ $\Delta_2 = f(\rho_3, s_{z\text{и}}, \alpha_3),$ <p data-bbox="866 824 1394 981">где <math>\rho</math> – радиус кривизны траектории зуба инструмента; <math>\rho_3</math> – радиус кривизны поверхности зуба колеса; <math>\alpha_3</math> – угол зацепления</p> |
| <b>Комбинированные схемы</b>  |  |
| <p data-bbox="196 1290 802 1328">– групповая, переменная, многоцикловая</p>  | <p data-bbox="866 1290 1394 1368"><i>Обработка цилиндрической поверхности наружной фрезой</i></p> <p data-bbox="866 1379 1361 1417">– движения <math>D_{\phi 1} \equiv D_r, D_{\phi 2} \equiv D_{s3},</math></p> <p data-bbox="866 1429 1378 1507">– формообразующий зуб является режущим</p> <p data-bbox="866 1518 1187 1556">– погрешности <math>\Delta_2 = 0</math></p> $\Delta_{1\max} \cong s_{z3}^2 / 8(1/R + 1/r), R \approx \rho_{\text{и}}$  |

Продолжение табл. 1.3

| Эскиз схемы формообразования  | Назначение, признаки, оценки   |
|---|--|
| <p>– групповая, переменная, многоцикловая</p>   | <p>Обработка цилиндрической поверхности канавки внутренней дисковой фрезой</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– <math>D_{\phi 1} \equiv D_r, D_{\phi 2} \equiv D_{s1},</math></li> <li>– формообразующий зуб является режущим</li> <li>– <math>\Delta_1 = 0, \Delta_2 = f(\rho_{и}, s_{z3}, d),</math></li> </ul> $\Delta_{2\max} \approx \beta^2/8(1/r - 1/R),$ <p>где <math>\beta = (1/r - 1/R)s_{z3}; R \approx \rho_{и}</math></p> |
| <p>– групповая, переменная, многоцикловая</p>  | <p>Нарезание зубчатого колеса наружным долбяком</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– <math>D_{\phi 1} \equiv D_r, D_{\phi 2} \equiv D_{s1}, D_{\phi 3} \equiv D_{s2}</math></li> <li>– <math>\Delta_2 = 0, \Delta_1 = f(\rho_{и}, \rho_3, s_{04}, s_{03})</math></li> </ul>  |

| Эскиз схемы формообразования  | Назначение, признаки, оценки   |
|---|--|
| <p>– групповая, переменная, многоцикловая</p>    | <p>Нарезание зубьев конического колеса резцами</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– <math>D_{\phi 1} \equiv D_r, D_{\phi 2} \equiv D_{s1},</math></li> <li><math>D_{\phi 3} \equiv D_{s2},</math></li> <li>– <math>\Delta_1 = f(s_{z_и}, \rho_3), \Delta_2 = 0</math></li> </ul>   |
| <p>– групповая, переменная, многоцикловая</p>  | <p>Обработка фасонной канавки наружной дисковой фасонной фрезой</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– <math>D_{\phi 1} \equiv D_r, D_{\phi 2} \equiv D_s,</math></li> <li>– формообразующий зуб является режущим</li> <li>– <math>\Delta_{1min} = 0, \Delta_2 = f(s_{z_и}, \rho_{и}),</math></li> <li><math>\Delta_{2max} \approx R\sqrt{R^2 - s_{z_4}^2}/4,</math></li> <li>при <math>R = \rho_{и}</math></li> </ul>   |
| <p>– групповая, переменная, многоцикловая</p>  | <p>Нарезание резьбы внутренней резьбонарезной дисковой фрезой</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– <math>D_{\phi 1} \equiv D_r, D_{\phi 2} \equiv D_{s1}</math></li> <li>– <math>D_{\phi 3} \equiv D_{s2},</math></li> <li>– <math>\Delta_{1min} = 0, \Delta_2 = f(\epsilon, \rho_{и}, d, s_{z_3}),</math></li> <li><math>\Delta_{2max} \approx \beta^2/8(1/r - 1/R),</math></li> <li><math>\beta = (1/r - 1/R)s_{z_3}, R \approx \rho_{и}</math></li> </ul> |

Окончание табл. 1.3

| Эскиз схемы формообразования  | Назначение, признаки, оценки  |
|---|---|
| <p data-bbox="194 360 801 398">– групповая, переменная, многоцикловая</p>     | <p data-bbox="865 360 1390 439"><i>Нарезание зубьев колеса пальцевой модульной фрезой</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li data-bbox="865 450 1193 488">– <math>D_{\phi 1} \equiv D_r, D_{\phi 2} \equiv D_s,</math></li> <li data-bbox="865 510 1278 548">– <math>\Delta_{1\min} = 0, \Delta_2 = f(\rho_n, \rho_3, s_{z_n})</math></li> </ul>  |
| <p data-bbox="194 1489 801 1527">– групповая, переменная, многоцикловая</p>  | <p data-bbox="865 1489 1382 1563"><i>Нарезание зубьев колеса дисковой модульной фрезой</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li data-bbox="865 1574 1193 1612">– <math>D_{\phi 1} \equiv D_r, D_{\phi 2} \equiv D_s,</math></li> <li data-bbox="865 1635 1278 1673">– <math>\Delta_{1\min} = 0, \Delta_2 = f(\rho_n, \rho_3, s_{z_3}),</math></li> </ul> $\Delta_{2\max} \approx R - \sqrt{R^2 - s_{z_3}^2 / 4},$ <p data-bbox="890 1771 1050 1809">при <math>R = \rho_n</math></p> |

Рассмотрим на отдельных примерах выделенные схемы срезания припуска. Для этого проанализируем рис. 1.1, на котором изображены сечения срезаемого слоя, разделенные по профильной (рис. 1.1, а, б, в, г, д, е, ж, о, п) и по генераторной (рис. 1.1, з, и, к, л, м, н) схемам.

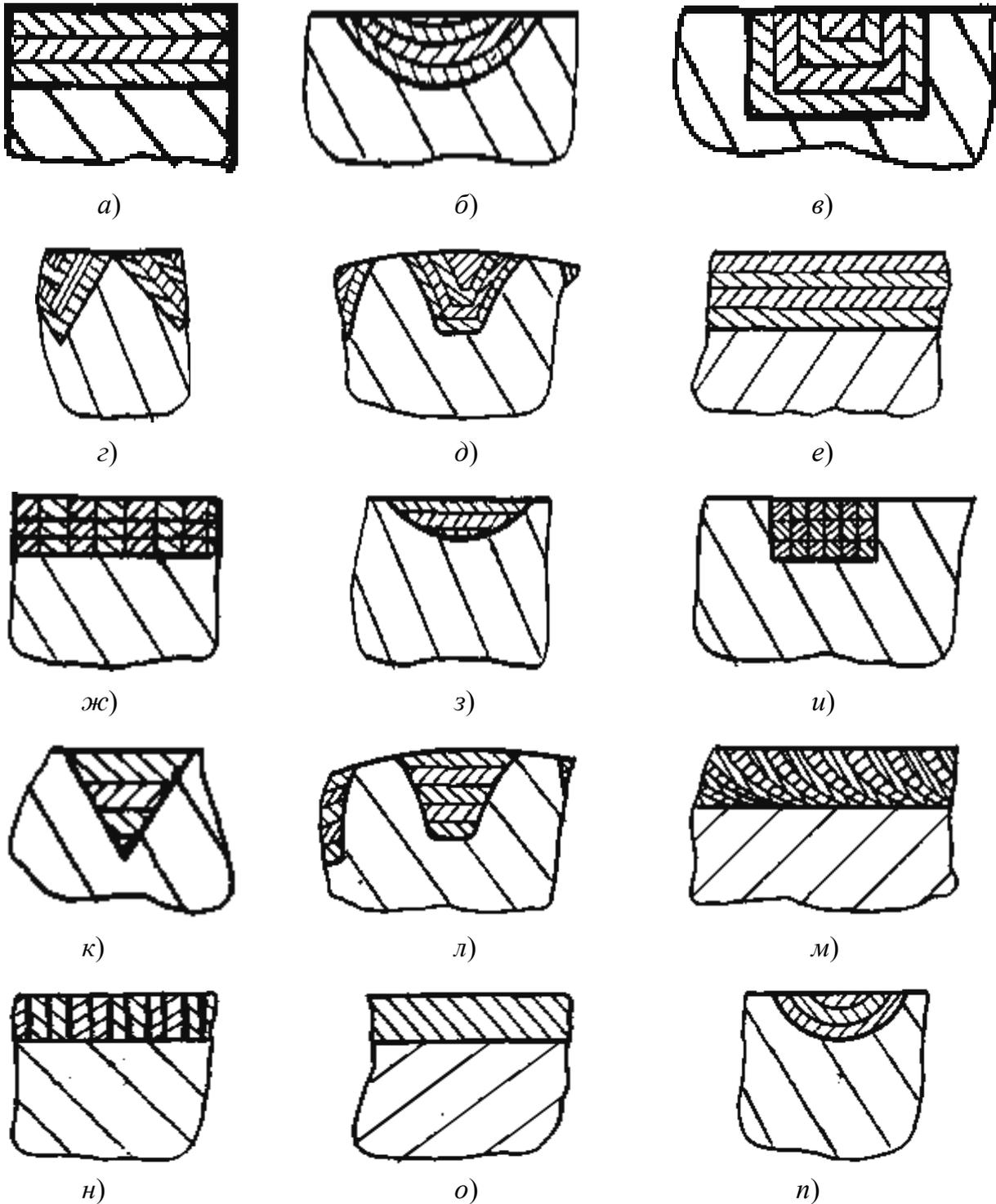


Рис. 1.1. Схемы срезания припуска

Если принять, что сечения на рис. 1.1, *a–d* выполнены поперечной секущей плоскостью, а на рис. 1.1, *e* – продольной, то они будут отражать профильную одинарную, схему срезания припуска. Кроме того, приняв, что изображена одноцикловая схема, то она будет реализована многозубым стержневым инструментом (протяжкой для наружного протягивания). Если принять, что это многоцикловая схема, то она будет реализована однозубыми строгальными резцами. Если принять, что сечения на рис. 1.1, *з, к, л, н* выполнены поперечной секущей плоскостью, а на рис. 1.1, *м* – продольной, то они будут отражать генераторную одинарную, переменную схему срезания припуска. Приняв, что это многоцикловая схема, то она будет реализована многозубым дисковым инструментом за несколько проходов, а если на рис. 1.1, *м* припуск был бы разделен дугами окружностей, то схема была бы реализована дисковой протяжкой. Если сечения на рис. 1.1, *а, б, в, г, д, н* выполнены поперечной секущей плоскостью, а сечения рис. 1.1 *м* – продольной, или сечение рис. 1.1, *з, и, к, л, н* – поперечной, а сечение рис. 1.1, *е* – продольной, то они будут отражать комбинированные схемы срезания припуска. Если схемы, объединяющие сечения на рис. 1.1, *а, б, г, д, н* и рис. 1.1, *м* будут реализованы многоцикловой обработкой однозубым инструментом, то в качестве такого инструмента необходимо использовать борштангу, а если многозубым инструментом – то это будет фасонная дисковая фреза. Для реализации схем с сечениями, изображенными на рис. 1.1, *з, к, л, н* и рис. 1.1, *е* по одноцикловой обработке требуется применить многозубый инструмент – призматическую протяжку.

Анализ схем формообразования типовых деталей позволяет в систематизированном виде определить все виды и типы режущего инструмента, реализующие ту или иную схему формообразования. Так например, для реализации одноцикловой схемы следа при формообразовании прямозубых зубчатых колес применяются строгальные модульные резцы, призматические протяжки, головки контурного зубодолбления и т. д. Для реализации многоцикловой схемы огибания необходимо применить червячные фрезы, резцовые борштанги, сборные с МНП дисковые и пальцевые фрезы, абразивные дисковые и червячные инструменты, червячные шеверы и т. д. Комбинированная схема, у которой образующая формируется по схеме огибания, а направляющая – по схеме следа реализуется при много-

цикловой обработке строгальными резцами с трапециевидным профилем формообразующего зуба (с круговой подачей заготовки и линейной подачей резца), зубострогальной рейкой, зуборезным долбяком, сборным с МНП строгальным резцом, резцовой долбежной борштангой (с круговой подачей заготовки и инструмента), дисковыми и речными шеверами, абразивными хонами и т. д. Комбинированная схема, у которой образующая формируется по схеме следа, а направляющая – по схеме огибания реализуется при многоцикловой обработке резцовой борштангой (с осевой подачей заготовки или инструмента), дисковыми или пальцевыми модульными фрезами, дисковыми протяжками и т. д.

### 1.3. Геометрические и кинематические поверхности: анализ и способы задания

Еще Леонардо да Винчи, наблюдая за износом зубьев колес водоподъемных машин, предложил прообраз циклоидального зацепления. Впоследствии циклоидальное зацепление почти полностью вытеснено более технологичным эвольвентным. Однако на преимущества выпукло-вогнутого профиля циклоидального зацепления, с точки зрения уменьшения износа по сравнению с эвольвентным, указывается и в современных исследованиях [90].

Исследования многих авторов в области форм деталей машин [91] и других позволили установить, что если принять:

а) в качестве образующей трактрису, то поверхность опорной пяты будет представлять собой псевдосферу (рис. 1.2, а). Для трактрисы характерно

$$\frac{\cos\alpha}{\rho} = \frac{1}{R} = \text{const},$$

т. е. давление такой пяты на контртело будет равномерным;

б) в качестве образующей подшипника скольжения с горизонтальной осью вращения – дугу окружности (рис. 1.2, б), то  $y = R \cos\alpha$

и  $p_n = \frac{C}{R} = \text{const}$ ;

в) в качестве образующей цепную линию (рис. 1.2, в), то

$$y \cos\alpha = a = \text{const}$$

и закон распределения контактных давлений вдоль осевого сечения будет

$$p_n = \frac{C}{y^2}, \quad C = \frac{\gamma \cos \alpha}{(k_1 + k_2)\omega\rho},$$

где  $\gamma$  – скорость изнашивания;  $k_1$  и  $k_2$  – коэффициенты износостойкости соответствующих поверхностей трения;  $\omega$  – угловая скорость.

Кроме того, поверхность вращения, образованная цепной линией, известна как минимальная поверхность – катеноид;

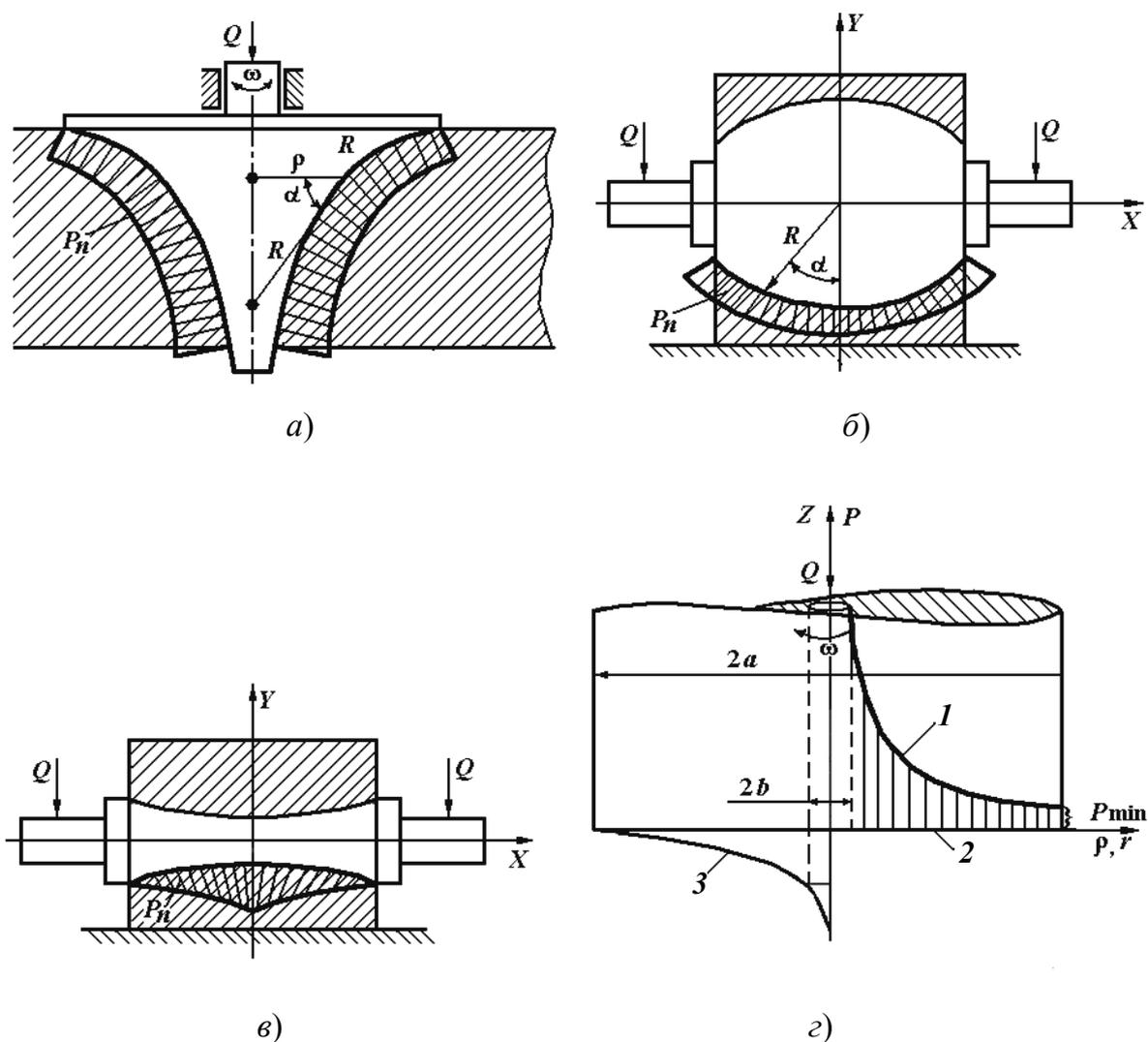


Рис. 1.2. Эпюры давлений в осевом сечении подшипников, имеющих формы:  
 а – псевдосферы; б – сферы; в – цепной линии; з – плоскости

г) в качестве образующей отрезок прямой, то  $p_n = \frac{Q}{2\pi(a-b)\rho}$  (кривая 1, рис. 1.2, з).

Форма образующей поверхности при условии равномерного износа показана на рис. 1.2, з (кривая 3).

$$z(r) = -\frac{v_n \gamma}{k_n \omega} 4 \left( 2G + \int_{r/a}^1 \frac{K(k_1)}{k_1} dk_1 - \int_0^{b/r} K(k) dk \right) + C_1,$$

где  $v_n = (1 - \mu^2) / \pi E$ , ( $E$  – модуль упругости,  $\mu$  – коэффициент Пуассона);  $k_n$  – коэффициент износостойкости;  $G$  – постоянная Каталана;  $K(k)$  – полный эллиптический интеграл первого рода [92].

Установлено [93], [94], что существуют формы деталей, обеспечивающие выравненное контактное давление. На рис. 1.3 приведены формы образующих поверхностей с выравненными контактными давлениями.

Если вал (рис. 1.3, а, б) обладает упругими свойствами, а втулка подшипника не деформируется, то для обеспечения равенства контактных давлений необходимо, чтобы зазор был выполнен в соответствии с зависимостью

$$\lambda(x) = \frac{Q \left[ (3l^2 + L^2 - 3Ll - 3a^2)x - \frac{x^4}{4L} \right]}{6EJ},$$

где  $EJ$  – изгибная жесткость вала,  $0 < x < L$ .

Для исключения переходных процессов при износе ползуна (рис. 1.3, в, з) необходимо, чтобы образующая поверхности контакта ползуна была выполнена по зависимости

$$\lambda(x) = \frac{QL^3}{12EJ_y} \left[ \frac{x}{L} - \frac{x^4}{4L^4} \right],$$

где  $EJ_y$  – изгибная жесткость ползуна.

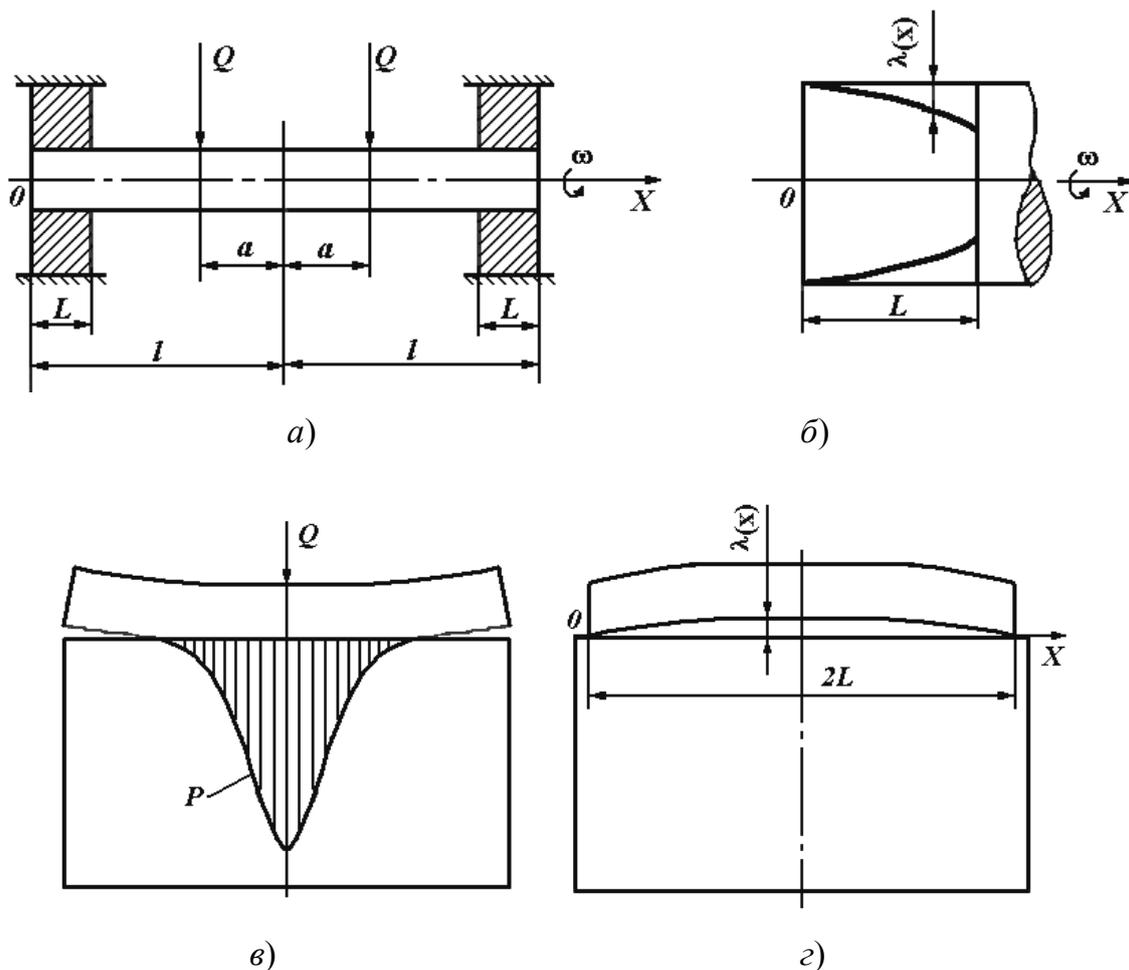


Рис. 1.3. Эскизы схем нагружения (а), (в) и теоретических образующих поверхностей деталей (б), (г)

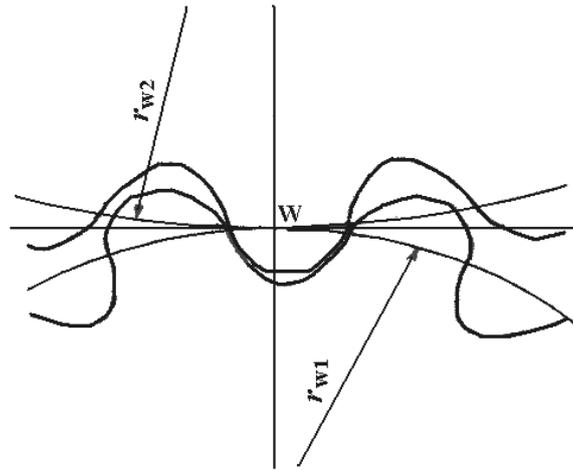
Теоретически определены формы образующих поверхностей деталей машин [95], обеспечивающие их оптимальный износ (рис. 1.4).

На рис. 1.4, а представлен эскиз зацепления колес, имеющих равномерный износ, а на рис. 1.4, б – профиль зуба производящей рейки.

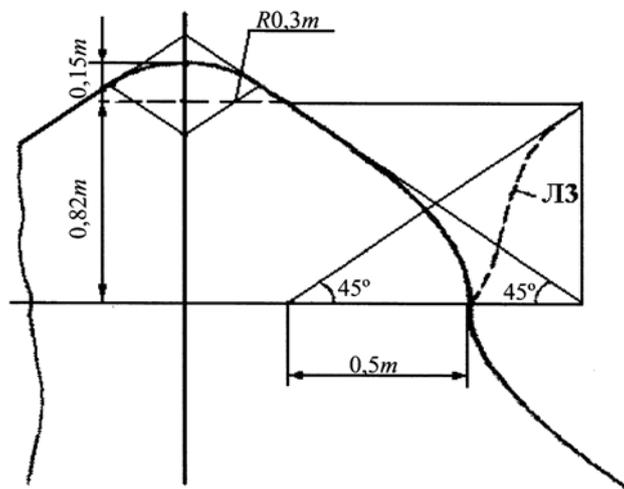
В работе [96] определена оптимальная форма образующей витка червяка, обеспечивающая высокую нагрузочную способность. Уравнение такой образующей в цилиндрических координатах будет иметь вид:

$$z = \sqrt{r_0^2 - (c_0 - \rho)^2} .$$

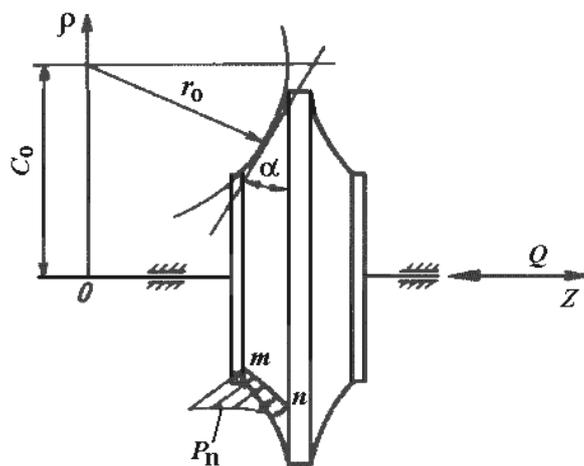
Приведенные на рис. 1.3 формы геометрических поверхностей имеют сложные законы изменения направляющих или образующих, изменения размеров которых часто не превышают допусков отклонений от формы. Технологически такие поверхности можно обеспечить путем правильного выбора схемы формообразования.



а)



б)

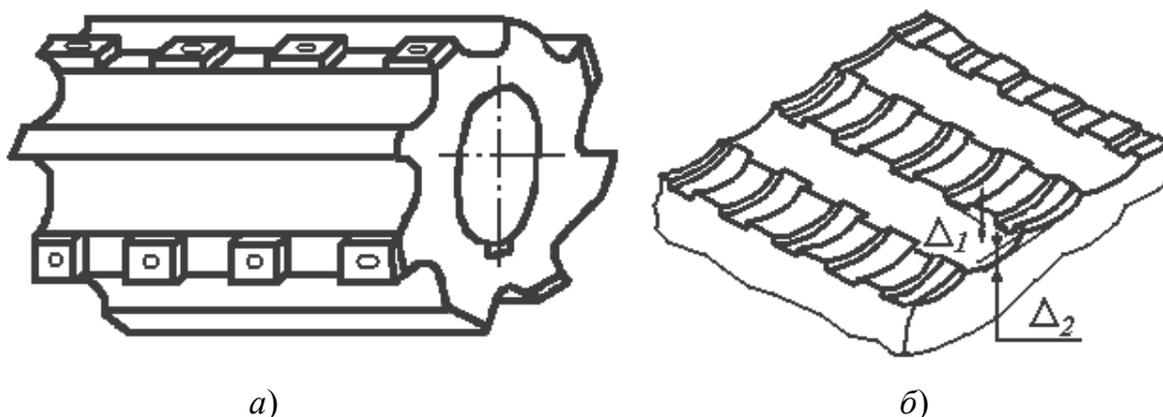


в)

Рис. 1.4. Эскизы образующих поверхностей зубьев зацепления (а), инструмента (б) и зуба червяка (в)

Наиболее технологичное получение приведенных сложных геометрических поверхностей деталей возможно только путем использования и анализа понятия кинематических поверхностей.

Цикличность движений инструмента и заготовки приводит к тому, что топография кинематической поверхности имеет регулярный характер. Такую поверхность можно представить в виде отдельных отсеков (рис. 1.5).



а) б)  
Рис. 1.5. Эскиз периферийной сборной фрезы (а)  
и топография кинематической поверхности (б)

Анализ рис. 1.5 позволяет заключить, что представленная кинематическая поверхность имеет достаточно сложный характер при простой конструкции инструмента. Классифицировать кинематические поверхности сложно, т. к. любая поверхность имеет участки гладкие регулярные и участки с особыми точками и линиями. Поэтому возникает необходимость систематизировать эти участки по типу точек, в дифференциальной окрестности которых они расположены [25], [97], [98], [99] и др. Можно выделить следующие типы участков кинематической поверхности:

*Гладкие регулярные локальные участки.* К этому типу относятся локальные участки кинематических поверхностей, полученных по всем схемам формообразования и расположенные в дифференциальной окрестности точек на поверхности (рис. 1.6, а).

*Гладкие нерегулярные локальные участки.* К этому типу относятся локальные участки выхода и входа формообразующих кромок при формировании закрытых поверхностей. Такие участки располагаются в дифференциальной окрестности точек линий сопряжений (стыка) двух гладких регулярных отсеков, причем в окрестности

только таких точек, в которых при переходе через линию касания указанных отсеков поверхности детали направление касательной не изменяется на противоположное (рис. 1.6, б);

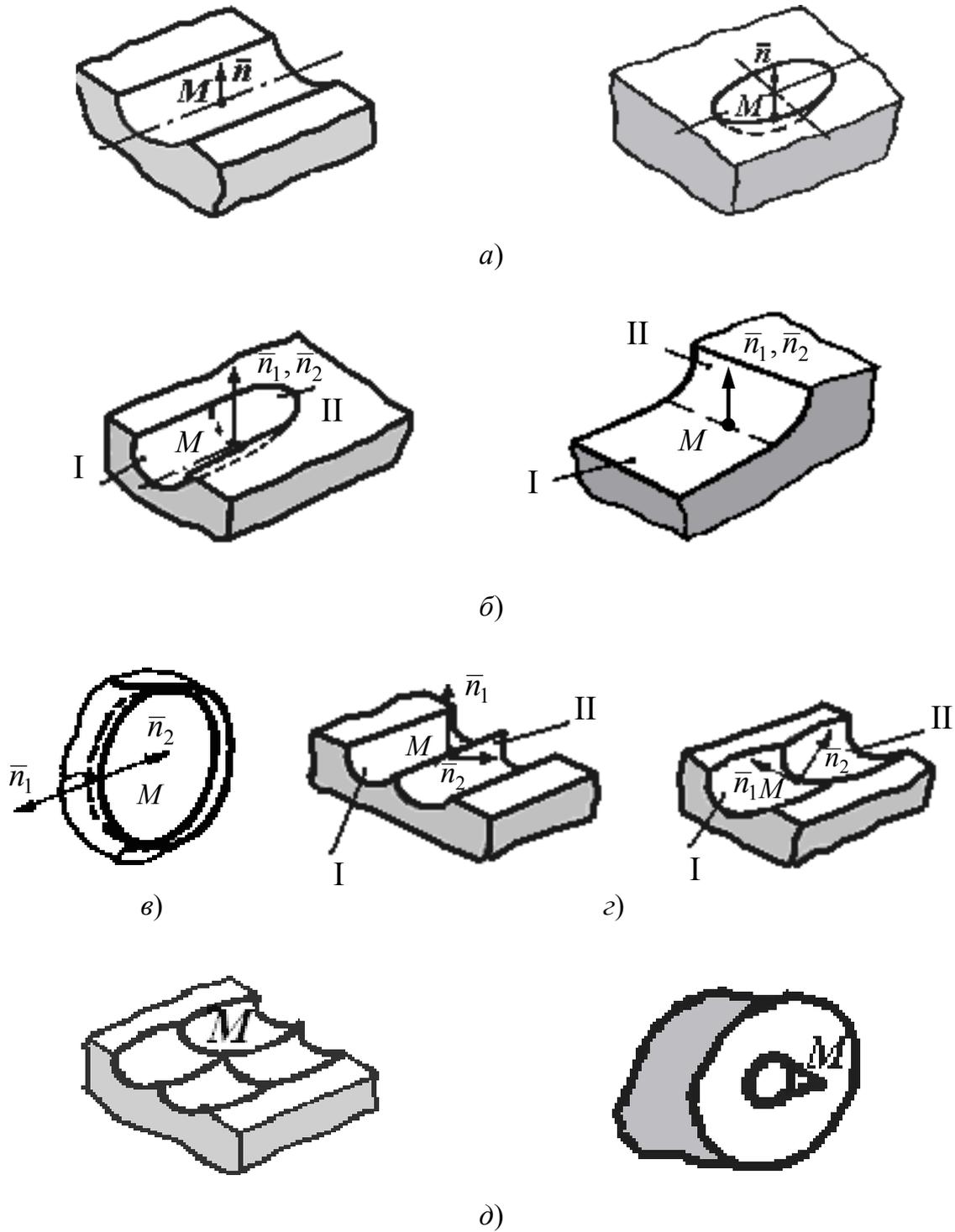


Рис. 1.6. Эскизы локальных отсеков кинематических поверхностей

*Локальные участки возврата.* К этому типу относятся нерегулярные локальные участки, образующиеся при обработке полых осесимметричных деталей. Такие участки располагаются в дифференциальной окрестности точек линии возврата двух касающихся друг друга отсеков поверхности, причем в окрестности только таких точек, в которых при переходе через линию касания указанных отсеков направление касательной изменяется на противоположное, когда имеет место обратное касание двух отсеков (рис. 1.6, в).

*Локальные участки излома.* К этому типу относятся нерегулярные локальные участки, образующиеся при формировании характеристических линий номинальных поверхностей по схемам огибания и комбинированной. Они располагаются в дифференциальной окрестности точек линии пересечения двух отсеков гладких регулярных поверхностей сложной формы (рис. 1.6, з).

*Особые локальные участки.* К этому типу относятся нерегулярные изолированные локальные участки, образующиеся при обработке поверхностей осесимметричных деталей на токарных операциях формообразующими кромками с углами в плане не равными нулю или при получении поверхностей по схеме огибания. Эти участки располагаются в дифференциальной окрестности изолированных, особых точек поверхности (конических точек, особых точек первого, второго и более высоких порядков), гладких нерегулярных особых точек; точек касания, пересечения или касания одновременно трех и более отсеков гладких регулярных поверхностей и т. п. (рис. 1.6, д).

Рассмотрим особенности моделирования кинематических поверхностей, сформированных по различным схемам формообразования.

Гладкие регулярные локальные участки можно описать уравнениями, связывающими декартовы координаты точек этой поверхности

$$F(xyz) = 0; \quad z = z(x, y). \quad (1.1)$$

Для получения более простых зависимостей, описывающих локальные участки кинематических поверхностей и обладающих инвариантностью относительно выбранных систем координат [27], [29], [30], [97]–[99], широко используется более общее аналитическое представление, введенное К.Ф. Гауссом [97]–[99] и др. Это представление основано на том, что все координаты точек поверхности выражаются через два независимых параметра  $u$  и  $v$

$$x = x(u, v); \quad y = y(u, v); \quad z = z(u, v). \quad (1.2)$$

Так как любая точка на поверхности сложной формы однозначно определяется только двумя независимыми параметрами  $u$  и  $v$ , то они являются криволинейными (в общем случае) координатами на кинематической поверхности детали.

Тогда поверхность можно задать в виде

$$\bar{r} = \bar{r}(u, v) = x(u, v)\bar{i} + y(u, v)\bar{j} + z(u, v)\bar{k}, \quad (1.3)$$

где  $\bar{r}$  – радиус-вектор точки поверхности относительно систем координат  $x y z$  или  $u v$ .

В качестве примера запишем уравнение локального участка полученного по схеме следа с линейными образующими и направляющими в параметрической форме

$$x = Cu; \quad y = Cv; \quad z = -D/C - Au - Bv$$

или

$$\bar{r} = \{Cu, Cv, -D/C - Au - Bv\} = \{0, 0, -D/C\} + u\{C, 0, -A\} + v\{0, C, -B\}.$$

Таким образом,  $u$  и  $v$  – общие координаты точки  $M$  плоскости с началом координат в точке  $(0, 0, -D/C)$  и масштабными векторами  $\bar{e}_x = \{C, 0, -A\}$  и  $\bar{e}_y = \{0, C, -B\}$ .

Уравнения (1.2) и (1.3) моделируют кинематическую поверхность только в том случае, когда  $u$  и  $v$  независимые параметры. Необходимым и достаточным условием зависимости  $u$  и  $v$  является коллинеарность векторов  $\partial\bar{r}/\partial u$  и  $\partial\bar{r}/\partial v$  в каждой точке поверхности, т. е. равенство нулю в каждой точке поверхности векторного произведения  $\partial\bar{r}/\partial u \times \partial\bar{r}/\partial v = 0$  [97]–[99] и др.

Требование независимости параметров  $u$  и  $v$  предполагает, что векторное произведение ортов касательных к координатным линиям однозначно определяет орт нормали  $n$  к поверхности в точке  $M$ .

Кинематические поверхности, сформированные по схеме следа в координатной форме можно записать

$$z = f_1(x) + f_2(y), \quad (1.4)$$

где  $f_1(x)$  – уравнение формообразующей кромки инструмента;  $f_2(x)$  – уравнение траектории движения формообразования.

Поверхности вращения, образованные по схеме следа можно получить, если в выражение, описывающее формообразующую кромку инструмента  $z = f(x)$  подставить вместо  $x$  выражение  $\sqrt{x^2 + y^2}$ .

Например, запишем уравнение кинематической поверхности при условии, что формообразующая кромка инструмента описывается уравнением

$$z = -c/ax + c,$$

а траектория движений формообразования:

$$z = -c/by + c.$$

Преобразовав эти уравнения к виду  $z - c = -(c/a)x$ ;  $z - c = -(c/b)y$ , получим, согласно (1.4), уравнение кинематической поверхности

$$x/a + y/b + z/c = 1,$$

что соответствует плоскости общего положения.

Запишем уравнение поверхности вращения для случая, когда формообразующая кромка инструмента задана уравнением

$$x^2/a^2 - z^2/b^2 = 1.$$

Тогда уравнение поверхности будет иметь вид

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

Известно, что эта поверхность является однополосным гиперболоидом.

Если формообразующую кромку не удастся записать простым аналитическим выражением, то необходимо попытаться описать ее многочленом второй степени. Коэффициенты многочлена можно определить из граничных условий. Полученная кинематическая поверхность также будет описываться аналогичного вида многочленом

$$\begin{aligned} & a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ & + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

или

$$\begin{aligned} & (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14})x + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24})y + \\ & + (a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34})z + a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44} = 0, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где  $a_{ik} = a_{ki}$ ;  $i, k = 1, 2, 3, 4$ .

Уравнение (1.5) можно записать в векторной форме

$$\bar{r}A\bar{r}^T + 2a\bar{r}^T + a_{44} = 0,$$

где  $A$  – аффино́р с координатами  $A_k^i = a_{ik}$ .

Так как уравнением (1.6) затруднительно пользоваться, то его можно свести к частным уравнениям простейших поверхностей путем соответствующих поворотов и переносов осей координат  $x$   $y$   $z$ .

Моделирование поверхности, сформированной по комбинированной схеме формообразования, зависит от способа реализации этой схемы. Если образующая поверхности формируется по схеме следа, а направляющая – по схеме огибания, то необходимо сформировать модель одного локального отсека и записать поверхность в параметрическом виде

$$F(xyzt) = 0.$$

Локальные отсеки могут быть описаны уравнениями, ранее полученными для поверхностей, сформированных по схеме следа.

Если образующая кинематической поверхности формируется по схеме огибания, а направляющая – по схеме следа, то вид уравнений кинематической поверхности зависит от количества формообразующих кромок и вида номинальной направляющей поверхности. В случае одной формообразующей кромки поверхность может быть сформирована за один или несколько проходов. Уравнения такой поверхности, состоящей из локальных отсеков, можно получить в параметрическом виде. Для этого записываем уравнение формообразующей кромки в виде уравнений (1.1) или (1.2), а уравнение траектории движения формообразования в виде (1.1), (1.2), (1.3), и в зависимости от формы направляющей формируем уравнение кинематической поверхности в виде уравнений (1.4) или (1.6).

Гладкие регулярные локальные участки кинематической поверхности удобно различать по типу соприкасающегося в рассматриваемой точке  $M$  параболоида [97]–[99] и др. Согласно теореме Бонне, параметры соприкасающегося с кинематической поверхностью в точке  $M$  параболоида, а следовательно, и вид гладкого регулярного локального участка сложной поверхности с точностью до ее расположения в пространстве полностью и однозначно определяется гауссовыми ко-

эффицентами первой  $E, F, G$  и второй  $L, M, N$  основных квадратичных форм (дифференциальных форм Гаусса) этой поверхности.

Две основные квадратичные формы Гаусса поверхности задаются выражениями

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2; \quad (1.7)$$

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2, \quad (1.8)$$

где  $E = \frac{(\partial^2 \bar{r} / \partial u^2)M}{H}$ ;  $H = \sqrt{LN - M^2}$ ;  $F = \frac{(\partial^2 \bar{r} / \partial u \partial v)M}{H}$ ;

$$G = \frac{(\partial^2 \bar{r} / \partial v^2)M}{H}; \quad L = (\partial \bar{r} / \partial u)^2; \quad M = (\partial \bar{r} / \partial u)(\partial \bar{r} / \partial v); \quad N = \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial v^2},$$

где  $\bar{r}$  – радиус-вектор точки поверхности;  $u$  и  $v$  – криволинейные оси координат на поверхности.

Знание значений Гауссовых коэффициентов основных дифференциальных форм позволяет условно выделить некоторые типы гладких регулярных участков.

Участки кинематической поверхности, сформированные при реализации схемы огибания, с криволинейной геометрической направляющей и образующей, можно отнести к локальным участкам эллиптического типа, т. к. в пределах этих участков соприкасающийся параболоид является эллиптическим параболоидом.

В пределах такого участка полная кривизна  $K > 0$ ,  $K = k_1 \cdot k_2$

$$K = (LN - M^2) / (EG - F^2),$$

где  $k_1$  и  $k_2$  – главные нормальные кривизны локального участка поверхности.

Тогда средняя кривизна локального участка

$$K_{cp} = \frac{LG - 2FM + NE}{2(EG - F^2)}.$$

Участки кинематической поверхности, сформированные при реализации схемы следа шаровидной или дисковой фрезой, радиус кривизны кромки которой равен радиусу кривизны фрезы, можно отнести к локальным участкам омбалического типа, т. к. в пределах этого участка главные нормальные кривизны равны друг другу  $k_1 = k_2$ .

Участки кинематической поверхности, формообразованные периферийными или дисковыми наружными (внутренними) фрезами, долбьяками можно отнести к локальным участкам параболического типа, т. к. в пределах такого участка соприкасающийся параболоид вырождается в параболический цилиндр и Гауссова кривизна его равна нулю. Такая поверхность в главном плоском сечении имеет точку перегиба или является прямой линией.

Вторая нормальная кривизна может быть либо положительной – для выпуклых гладких регулярных локальных участков и средняя кривизна  $K_{cp} > 0$ , либо отрицательной – для вогнутых локальных участков и  $K_{cp} < 0$ .

Участки кинематической поверхности, сформированные при реализации схемы следа с линейной геометрической направляющей и образующей, можно отнести к локальным участкам уплощения, т. к. в пределах этого участка соприкасающийся параболоид вырождается в плоскость, а главные нормальные кривизны равны нулю  $k_1 = k_2 = 0$ . Кроме того, средняя кривизна такого участка так же равна нулю  $K_{cp} = 0$ , и он инвариантен по отношению к стороне расположения поверхности детали.

Участки кинематической поверхности сформированные в процессе формообразования вогнутых осесимметричных наружных поверхностей по схеме следа или при формообразовании наружных поверхностей ротационными резцами и др. можно отнести к локальным участкам гиперболического типа, так как в пределах этих участков соприкасающийся параболоид является гиперболическим и полная кривизна любого из них отрицательна, т. е.  $K < 0$ . То есть главные нормальные кривизны имеют взаимно противоположные знаки, а это значит, что имеются как выпуклые, так и вогнутые линии в плоских нормальных сечениях. По этой причине такие локальные участки инвариантны к стороне расположения поверхности детали.

Как указывал Форрест, форма и параметры кинематической поверхности не зависят от выбора системы координат. Это расширяет возможности параметрического метода.

В инженерной практике геометрическими объектами оперируют только в трехмерном евклидовом пространстве (в пространстве  $E_3$ ) или проекциями в евклидовой плоскости (в пространстве  $E_2$ ). Кроме того, когда речь идет о кривой с бесконечными ветвями или о беско-

нечной поверхности, например, о параболоиде или гиперboloиде вращения, фактически всегда следует понимать дугу некоторой длины бесконечной кривой или ограниченный участок площади – неограниченной поверхности.

Свойства любой поверхности, описываемой уравнением (1.6) можно определить, используя теорию инвариантов. В качестве инвариантов относительно параллельного переноса и поворота осей приняты выражения

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22}a_{23} \\ a_{32}a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33}a_{31} \\ a_{13}a_{11} \end{vmatrix}; \quad I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33};$$

$$K_4 = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13}a_{14} \\ a_{21}a_{22}a_{23}a_{24} \\ a_{31}a_{32}a_{33}a_{34} \\ a_{41}a_{42}a_{43}a_{44} \end{vmatrix};$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix}. \quad (1.9)$$

Кроме инвариантов (1.9) используются полуинварианты (семиинварианты), которые являются инвариантами только ортогонального преобразования, т. е. поворота осей

$$K_3 = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{14} \\ a_{21}a_{22}a_{24} \\ a_{41}a_{42}a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}a_{13}a_{14} \\ a_{31}a_{33}a_{34} \\ a_{41}a_{43}a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22}a_{23}a_{24} \\ a_{32}a_{33}a_{34} \\ a_{42}a_{43}a_{44} \end{vmatrix};$$

$$K_2 = \begin{vmatrix} a_{11}a_{14} \\ a_{41}a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22}a_{24} \\ a_{42}a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33}a_{34} \\ a_{43}a_{44} \end{vmatrix}.$$

Эти инварианты определяют свойства поверхности, не зависящие от ее расположения в пространстве. Так, например, если  $I_1I_3 > 0$ ,  $I_2 > 0$  и  $K_4 < 0$ , то это будет локальный участок эллипсоида, если  $I_1I_3 \leq 0$  или  $I_2 \leq 0$  и  $K_4 > 0$ ,  $I_3 \neq 0$ , то это участок однополостного гиперboloида, если  $I_1I_3 \leq 0$  или  $I_2 \leq 0$  и  $K_4 < 0$ ,  $I_3 \neq 0$ , то это локальный участок двуполостного гиперboloида, если  $I_1I_3 \leq 0$  или  $I_2 \leq 0$  и  $K_4 = 0$ ,

$I_3 \neq 0$ , то это локальный участок конуса второго порядка, если  $I_3 = 0$  и  $K_4 < 0$ , то это локальный участок эллиптического параболоида, если  $I_1 K_3 < 0$ ,  $I_2 > 0$  и  $K_4 = 0$ ,  $I_3 = 0$ , то это локальный участок эллиптического цилиндра, если  $K_3 \neq 0$ ,  $I_2 < 0$  и  $K_4 = 0$ ,  $I_3 = 0$ , то это локальный участок гиперболического цилиндра, если  $K_3 = 0$ ,  $I_2 < 0$  и  $K_4 = 0$ ,  $I_3 = 0$ , то это локальный участок двух пересекающихся плоскостей, если  $K_3 \neq 0$ ,  $I_2 = 0$  и  $K_4 = 0$ ,  $I_3 = 0$ , то это локальный участок параболического цилиндра, если  $K_3 = 0$ ,  $I_2 = 0$  и  $K_4 = 0$ ,  $I_3 = 0$ ,  $K_2 < 0$ , то это локальный участок двух параллельных плоскостей.

Уравнение (1.5) можно также привести к каноническому виду [98], [99] и др. При параллельном переносе системы координат на вектор  $\bar{r}_0$ , координаты которого удовлетворяют уравнению  $A\bar{r}_0 = -[a]$ , в уравнении (1.5) исчезают линейные члены, и оно примет вид

$$b_{11}x_1^2 + b_{22}y_1^2 + b_{33}z_1^2 + 2b_{12}x_1y_1 + 2b_{13}x_1z_1 + 2b_{23}y_1z_1 + b_{44} = 0, \quad (1.10)$$

где  $x_1, y_1, z_1$  – координаты точки поверхности относительно новой системы.

В матричной форме уравнение (1.10) можно записать в виде

$$\bar{r}_1 [b] \bar{r}_1^T + b_{44} = 0; \quad \bar{r}_1 = (x_1, y_1, z_1); \quad b = \|b_{ij}\|.$$

В результате такого переноса начало новой системы координат является центром симметрии поверхности, т. е. если  $r_1 = (x_1, y_1, z_1)$  точка поверхности, то:  $-r_1 = (-x_1, -y_1, -z_1)$  – также точка поверхности.

Матрицы  $[a]$  и  $[b]$  – симметричные ( $a_{ij} = a_{ji}$  и  $b_{ij} = b_{ji}$ ), поэтому их собственные значения действительны, а собственные векторы ортогональны.

При последующем преобразовании к системе координат  $\Sigma_2$  с началом координат, совпадающим с системой  $\Sigma_1$  и осями координат, совпадающими по направлению с собственными векторами, уравнение поверхности 2-го порядка приобретает вид

$$\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 z_2^2 + c_{44} = 0, \quad (1.11)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  – собственные значения матрицы  $[b]$ .

В матричной форме уравнение (1.11) примет вид

$$\bar{r}_2 [c] \bar{r}_2^T + c_{44} = 0, \quad \bar{r}_2^T = (x_2, y_2, z_2),$$

$$C = \begin{vmatrix} \lambda_1 00 \\ 0\lambda_2 0 \\ 00\lambda_3 \end{vmatrix},$$

где  $x_2, y_2, z_2$  – координаты точки на поверхности 2-го порядка относительно  $\Sigma_2$ .

При определении погрешности кинематической поверхности возникает не только потребность в аналитическом представлении поверхности, но и определении касательной плоскости и расположения поверхности относительно декартовой системы координат.

Как известно [97]–[99], уравнение касательной плоскости в особой точке  $(x_0, y_0, z_0)$  имеет вид

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0, \quad (1.12)$$

где  $F'_x(x_0, y_0, z_0)$ ;  $F'_y(x_0, y_0, z_0)$ ;  $F'_z(x_0, y_0, z_0)$  – частные производные по  $x, y$  и  $z$  уравнения (1.5).

Исходя из канонических уравнений локальных участков поверхностей второго порядка и уравнения (1.12), легко составить уравнение касательных плоскостей соответственно к:

– эллипсоиду

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} + \frac{z_0z}{c^2} = 1;$$

– однополосному и двуполостному гиперболоиду

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} - \frac{z_0z}{c^2} = \pm 1;$$

– конусу в точке  $(x_0, y_0, z_0)$ , не являющейся его вершиной

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} - \frac{z_0z}{c^2} = 0;$$

– эллиптическому и гиперболическому параболоиду

$$\frac{x_0x}{p} \pm \frac{y_0y}{q} = z + z_0 \text{ и т. д.}$$

Кинематические поверхности, которые сложно задать аналитически задаются, чаще всего, дискретным способом. Из дискретных спосо-

бов задания поверхности наиболее разработанным является графический способ ботаксов и ватерлиний. Такой подход нашел развитие в работах Д. А. Вильямса, И. И. Котова, В. А. Осипова, Д. В. Павлова, Н. Н. Рыжова, С. А. Фролова и др.

В практике машиностроения дискретно заданную поверхность полностью или по частям аппроксимируют аналитическими функциями, чаще всего полиномиальными сплайнами [99], [100] и др. Сплайны обладают лучшими аппроксимативными свойствами, что при равных информационных затратах обеспечивает большую точность, простотой реализации на ЭВМ, универсальностью, позволяющей использовать одни и те же аппроксимирующие конструкции для различных типов сложных поверхностей.

Множество точек или линий, определяющих поверхность, называются ее каркасом: точечным – в первом случае, или линейным – во втором.

Если множество элементов (точек, линий), определяющих поверхность, непрерывно, то каркас называется непрерывным, в противном случае, он называется дискретным.

При аппроксимации следует стремиться минимизировать число аппроксимируемых отсеков путем увеличения площади каждого из них, рациональной их взаимной ориентации и обязательном обеспечении заданной точности. Изменение параметризации формообразующей поверхности детали с помощью уравнения  $u' = u'(u, v)$  и  $v' = v'(u, v)$  приводит к первым производным уравнения поверхности

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{r}}{\partial u'} &= \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial u'} + \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial u'}; \\ \frac{\partial \bar{r}}{\partial v'} &= \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial v'} + \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial v'}. \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

С учетом того, что

$$\dot{\bar{r}} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \dot{v} = [i\dot{v}] \det[A], \quad (1.14)$$

где  $[A] = \begin{bmatrix} d\bar{r}/du & 0 \\ 0 & d\bar{r}/dv \end{bmatrix}$  из (1.14) следует, что

$$[A'] = \begin{bmatrix} d\bar{r}/du' & 0 \\ 0 & d\bar{r}/dv' \end{bmatrix} = [A][P],$$

где  $[P] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial u'} & \frac{\partial u}{\partial v'} \\ \frac{\partial v}{\partial u'} & \frac{\partial v}{\partial v'} \end{bmatrix}$  – матрица преобразования Якоби.

Поскольку для исходной  $(u, v)$  – параметризации формообразуемого отсека поверхности, фундаментальная матрица основной квадратичной формы (Гаусса) равна

$$[G] = [A]^T [A] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \\ \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \end{bmatrix}, \quad (1.15)$$

то аналогичная матрица для новой  $(u', v')$  – параметризации того же отсека задается соотношением

$$[G'] = [A']^T [A'] = [P]^T [A]^T [A] [P] [P]^T [G] [P]. \quad (1.16)$$

Из уравнения (1.15), согласно известным свойствам детерминантов, имеем  $\det [G'] = \det [P]^2 \det [G]$ .

Тогда из системы (1.14) следует, что вектор  $\bar{n}$  единичной нормали к формообразуемой поверхности детали в результате преобразований не меняется.

Аналогично дифференцируя (1.16) и используя свойство инвариантности вектора  $\bar{n}$  по отношению к виду параметризации можно показать, что фундаментальную матрицу  $[G]$  можно преобразовать соотношением

$$[P'] = [P]^T [D] [P].$$

Из уравнений (1.15) и (1.16) можно показать, что главные радиусы кривизны и  $\bar{n}$ , направленные на поверхности детали инвариантны по отношению к способу параметризации формообразуемой поверхности детали.

## **1.4. Методика моделирования прямой задачи формообразования**

Для решения прямой задачи формообразования необходимо иметь математическую модель формообразующих кромок и траекторий их движения. При этом все движения формообразования должен совершать режущий инструмент. Если невозможно создать аналитическую модель формообразующих кромок, как линию пересечения передней и задней поверхностей, то одним из возможных путей решения этой задачи является использование методов формализованного построения формообразующего профиля зубьев режущего инструмента. Под формализованным построением профиля будем понимать алгоритм, реализующий вычисление координат опорных его точек.

Такое представление процесса формообразования поверхности, учитывая, что ее образующая может иметь любую форму, в том числе и непрерывно изменяющуюся при движении, является универсальным. В связи с этим, в описании метода формообразования поверхности должна отражаться форма характеристического образа инструмента.

Для реализации этого алгоритма необходимо в основной плоскости статической системы координат [19] записать формообразующие кромки инструмента, которые затем необходимо преобразовать в систему координат, одна плоскость которой является продольной секущей, а вторая – поперечной поверхности детали.

### **1.4.1. Математические модели формообразующих кромок инструмента**

Так как режущая кромка зуба сборного инструмента может быть непрерывной или прерывистой, то описание ее в системе координат, связанной с базовой осью или базовой плоскостью инструмента, можно производить в различной форме.

Например, режущие кромки сборной фрезы (рис. 1.7, *a*), имеющие на одном зубе непрерывный, а на смежном зубе прерывистый характер, можно записать в явном и неявном виде.

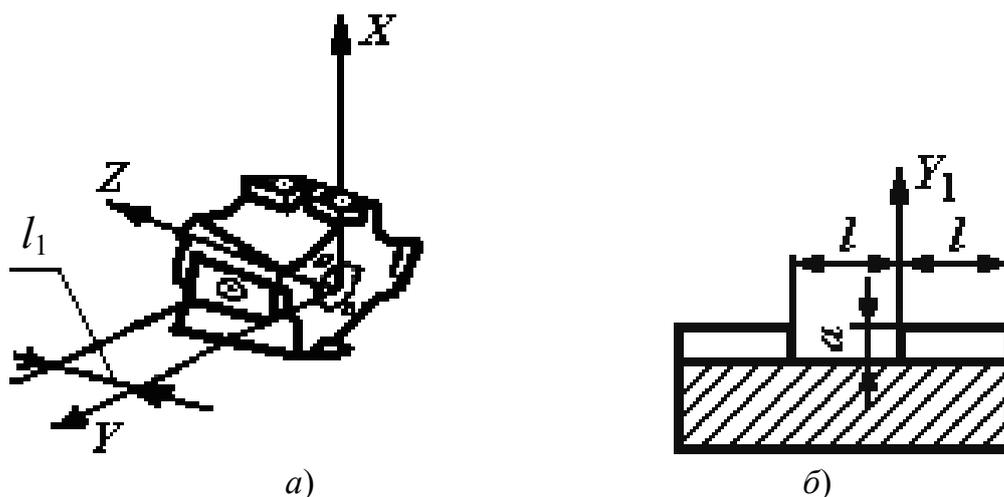


Рис. 1.7. Эскиз рабочей части сборного инструмента

Например, режущую кромку смоделируем в виде радиус-вектора

$$[r_u] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 & R_i \cos \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 & R_i \sin \varphi \\ 0 & 0 & 1 & Z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [e],$$

где  $R_i$  – текущий радиус зуба фрезы;  $\varphi$  – угол между смежными зубьями инструмента.

Или представим кромку в виде ряда Фурье

$$Y_1(Z_1) = a_0 + \sum_{k=1} \left( a_k \cos \frac{k\pi Z_1}{l_2} + b_k \sin \frac{k\pi Z_1}{l_2} \right), \quad (1.17)$$

где  $a_0 = 1/2l \int_{-l}^l Y_1(Z_1) dZ_1$ ;  $a_k = 1/l \int_{-l}^l Y_1(Z_1) \cos k\pi Z_1 / l dZ_1$ ;

$$b_k = 1/l \int_{-l}^l Y_1(Z_1) \sin k\pi Z_1 / l dZ_1.$$

Для прямоугольной пластины (рис. 1.7)

$$Y(Z_1) = 2a(1/4 + 1/\pi(\sin \pi Z/l + 1/3 \sin 3\pi Z/l + 1/5 \sin 5\pi Z/l + \dots)).$$

Рассмотрим несколько частных случаев расположения многогранных пластин в корпусах инструментов, где угловые кромки фрезы фирмы «Вальтер» [101] сформированы из трехгранных пластин (рис. 1.8, а).

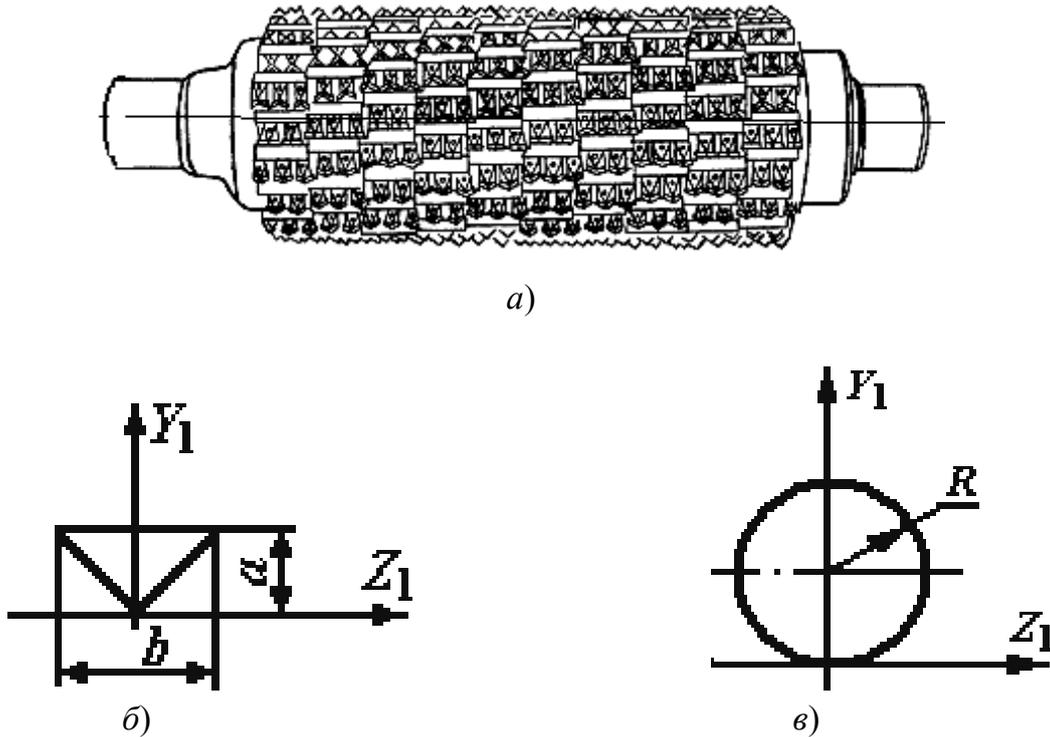


Рис. 1.8. Эскиз сборного периферийного инструмента (а) и формообразующих угловых (б) и дисковых режущих элементов (в)

**Случай 1.1.** Трехгранные пластины имеют  $\alpha \neq 0, \gamma \neq 0$  и их опорная поверхность параллельна основной плоскости.

В местной системе координат  $X_1 Y_1 Z_1$  (рис. 1.8, б) уравнения кромок запишем в виде

$$Y_1 = K|Z_1| \text{ при } -b/2 < Z_1 < b/2$$

или

$$Y_1(Z_1) = b/4 - 2b/\pi^2 \left( \frac{\cos 2\pi Z/b}{1^2} + \frac{\cos 6\pi Z/b}{3^2} + \dots \right), \quad (1.18)$$

где  $K = Y_1'$ .

**Случай 1.2.** Трехгранные пластины имеют  $\alpha = 0$  и для образования заднего угла зуба фрезы пластину необходимо повернуть в корпусе фрезы так, чтобы передняя поверхность не совпала с основной плоскостью. В местной системе координат  $Y_2 Z_2 X_2$  будем иметь аналогичные уравнения, а в системе  $Y_1 Z_1 X_1$

$$\bar{r}_1 = [A_1] \bar{r}_2,$$

$$\text{где } [A_1] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Случай 1.3.** Круглые пластины с  $\alpha \neq 0, \gamma \neq 0$  размещены в корпусе фрезы, и опорная поверхность пластины параллельна основной плоскости. В местной системе координат  $X_1Y_1Z_1$  уравнение кромки запишем в виде (рис. 1.8, в)

$$Y_1 = R \pm \sqrt{R^2 - Z_1^2}.$$

Для записи уравнений режущих кромок в системе координат  $OZYX$ , ось  $OZ$  которой по направлению совпадает с осью фрезы, можно воспользоваться известными преобразованиями систем координат [29], [98], [99] и др.

Рассмотрим несколько примеров моделирования инструментальных поверхностей, образующая которых формируется из сменных многогранных пластин (СМП) внешнего вращающегося инструмента. К таким инструментам можно отнести: осевой (сверла, зенкеры, развертки, борштанги), резьбонарезной и радиальный (фрезы фасонные, резьбонарезные, зуборезные).

**Случай 1.4.** Передняя поверхность многогранной пластины не совпадает с основной (формообразующей) плоскостью. Выберем местную систему координат, в которой расположен профиль пластины без искажения, состоящий из участков прямых (рис. 1.9).

Уравнения преобразования координат  $XYZ$  в  $X_2 Y_2 Z_2$  запишем в виде

$$Y = Y_2 \cos \gamma_{yi}; \quad X = X_2 = 0; \quad Z = Z_2. \quad (1.19)$$

В системе преобразования координат  $XYZ$  уравнение режущей кромки примет вид

$$Z = kY + b, \quad \text{при } Y(1) < Y < Y(2),$$

где  $k$  и  $b$  – параметры прямой.

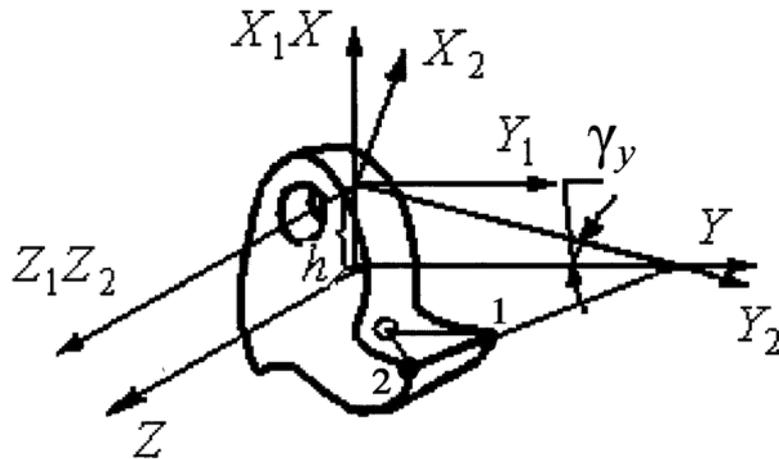


Рис. 1.9. Эскиз рабочей части сборного вращающегося инструмента с призматическим режущим элементом с  $\gamma_y \neq 0$ ,  $\lambda = 0$

По данным рис. 1.9  $\cos \gamma_{yi} = \sqrt{1 - Y_2^2(1) \sin^2 \gamma_y / Y_2^2}$ ,  $Y_2(1) \equiv R$ , тогда уравнение кромки в основной плоскости можно записать

$$\frac{Y_2^2}{Y_2^2(1) \sin^2 \gamma_y} - \frac{(Z_2 - b)^2}{k^2 Y_2^2(1) \sin^2 \gamma_y} = 1, \quad (1.20)$$

где  $R$  – максимальный радиус инструмента;  $\gamma_y$  – поперечный передний угол поворота пластины в точке кромки с радиусом  $R$ .

Формула (1.20) позволяет заключить, что прямая линия преобразуется в гиперболу и угол в плане в статической системе координат будет переменным

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{2kY_2}{\sqrt{Y_2^2 - Y_2^2(1) \sin^2 \gamma_y}}.$$

**Случай 1.5.** В качестве режущего элемента используется пластина конической формы с  $\alpha \neq 0$  (рис. 1.10).

В системе координат  $XYZ$  уравнение режущей кромки можно описать:

$$(Y - Y_0)^2 + (Z - Z_0)^2 = R^2,$$

где  $Y_0 Z_0$  – координаты центра передней поверхности пластины в системе  $XYZ$ ;  $R$  – радиус кривизны кромки.

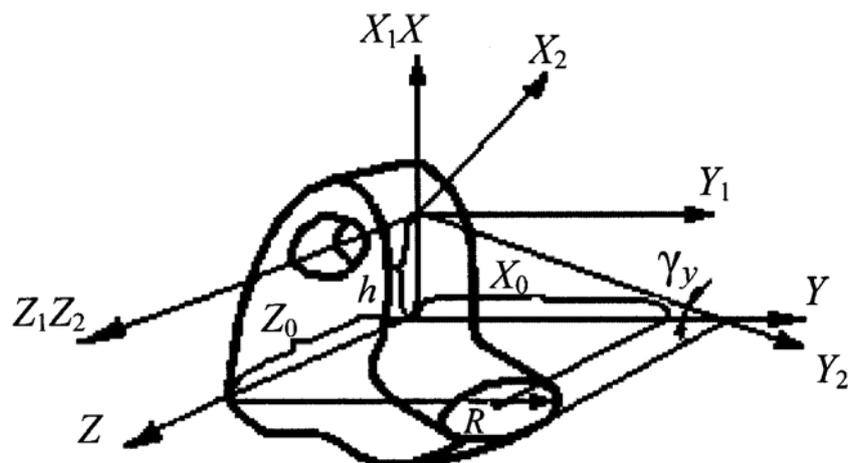


Рис. 1.10. Эскиз рабочей части сборного вращающегося инструмента с дисковым режущим элементом

Запишем уравнение кромки в системе  $X_2Y_2Z_2$ , ось  $OZ_2$  которой проходит через ось вращения инструмента, используя преобразования (1.19)

$$\left( \sqrt{Y_2^2 - Y_2^2(1)\sin^2 \gamma_y} - \sqrt{Y_{02}^2 - Y_2^2(1)\sin^2 \gamma_y} \right)^2 + (Z_2 - Z_{02})^2 = R^2. \quad (1.21)$$

Угол в плане в статической системе координат можно определить из выражения

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{Z_0 - Z_2}{2 \left\{ \left[ \left( \sqrt{R^2 - (Z_2 - Z_{02})^2} - \sqrt{Y_{02}^2 - Y_2^2(1)\sin^2 \gamma_y} \right)^2 + Y_2^2(1)\sin^2 \gamma_y \right] \left[ R^2 - (Z_2 - Z_0)^2 \right] \right\}^{0,5}}.$$

**Случай 1.6.** Режущая пластина (призматическая и коническая) имеет  $\alpha \neq 0$ ,  $\gamma \neq 0$ ,  $\lambda \neq 0$ . Опорная плоскость пластины повернута относительно оси инструмента на угол  $\lambda$ . Если в системе координат  $XYZ$  режущую кромку можно записать в виде

$$Z = kY + b \text{ при } Y(1) < Y < Y(2),$$

где  $k$  и  $b$  – параметры прямой, а  $Y(1)$ ,  $Y(2)$  – координаты начала и конца режущей кромки, то эта кромка в основной плоскости преобразуется в кривую второго порядка (рис. 1.11).

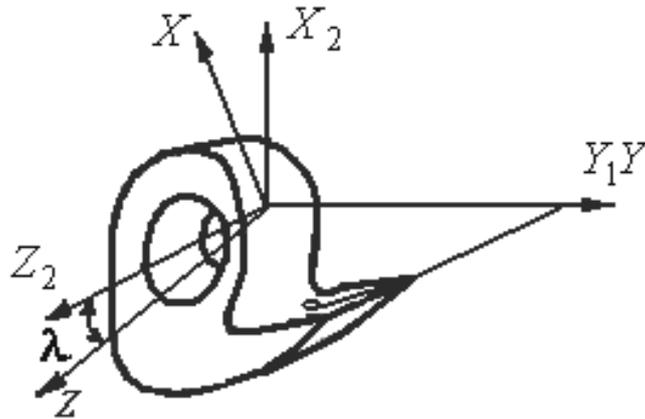


Рис. 1.11. Эскиз рабочей части сборного вращающегося инструмента с призматическим режущим элементом при  $\alpha \neq 0$ ,  $\gamma \neq 0$ ,  $\lambda \neq 0$

Уравнение преобразования системы  $XYZ$  в систему  $X_2 Y_2 Z_2$  принимаем в виде

$$Y = Y_2 \sqrt{1 - (Z_2^2 / Y_2^2) \operatorname{tg}^2 \lambda}; \quad X = X_2 = 0; \quad Z = Z_2 / \cos \lambda. \quad (1.22)$$

С учетом (1.22), уравнение режущей кромки примет вид

$$Z_2 = k \sqrt{Y_2^2 \cos^2 \lambda - Z_2^2 \sin^2 \lambda} + b \cos \lambda, \quad (1.23)$$

при  $b = 0$

$$Z_2 = \frac{k \cos \lambda}{\sqrt{1 + k^2 \sin^2 \lambda}} Y_2 - \text{прямая}. \quad (1.24)$$

Если главная режущая кромка параллельна оси  $OZ$ , т. е.  $Y = b$ , то уравнение ее в системе  $X_2 Y_2 Z_2$

$$\frac{Y_2^2}{(b)^2} - \frac{Z_2^2}{(b/\operatorname{tg} \lambda)^2} = 1 - \text{гипербола}. \quad (1.25)$$

В том случае, когда в качестве пластины принята пластина конической формы с  $\alpha \neq 0$ ,  $\lambda \neq 0$  и уравнением  $(Y - Y_0)^2 + (Z - Z_0)^2 = R^2$  в плоскости  $XYZ$ , режущая кромка ее в основной плоскости опишется уравнением

$$\frac{\left(\sqrt{Y_2^2 \cos^2 \lambda - Z_2^2 \sin^2 \lambda} - \sqrt{Y_{02}^2 \cos^2 \lambda - Z_{02}^2 \sin^2 \lambda}\right)^2}{R^2 \cos^2 \lambda} + \frac{(Z_2 - Z_{02})^2}{R^2 \cos^2 \lambda} = 1. \quad (1.26)$$

Зная уравнение, описывающее режущую кромку в основной плоскости, можно записать выражения для угла в плане.

В случае, когда режущая кромка прямая  $Z = kY + b$ ,

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{Z_2(k^2 \sin^2 \lambda + 1) - b \cos \lambda}{k \cos \lambda \sqrt{(Z_2 - b \cos \lambda)^2 + Z_2^2 k^2 \sin^2 \lambda}}.$$

Если уравнение кромки описывается выражением (1.24), то

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1 + k^2 \sin^2 \lambda}}{k \cos \lambda}.$$

При условии, что кромка в системе  $XYZ$  – прямая  $Y = b$ , то

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{Z_2 \operatorname{tg}^2 \lambda}{\sqrt{Z_2^2 \operatorname{tg}^2 \lambda + b^2}}.$$

**Случай 1.7.** Режущая пластина (призматической или конической формы) имеет  $\alpha \neq 0$  и ее опорная плоскость составляет угол  $\gamma_y$  с основной плоскостью в точке кромки с максимальным радиусом фрезы  $R$  и, кроме того, повернута относительно оси фрезы на угол  $\lambda$ .

В случае прямой режущей кромки, которую можно описать в системе  $XYZ$  в виде  $Z = kY + b$  при  $Y(1) < Y < Y(2)$ , то она преобразуется в системе  $X_2Y_2Z_2$  в кривую второго порядка (рис. 1.12).

Уравнения преобразования системы  $XYZ$  в систему  $X_2Y_2Z_2$  запишем в виде:

$$Y = (1/Y_2) \sqrt{Y_2^2 - (Y_2(1) \sin \gamma_y + Z_2 \operatorname{tg} \lambda)^2}; \quad X_2 = X = 0; \quad Z = Z_2 / \cos \lambda, \quad (1.27)$$

где  $Y_2(1) \equiv R$ ,  $R, \gamma_y$  – максимальные значения радиуса фрезы и поперечного переднего угла в этой точке.

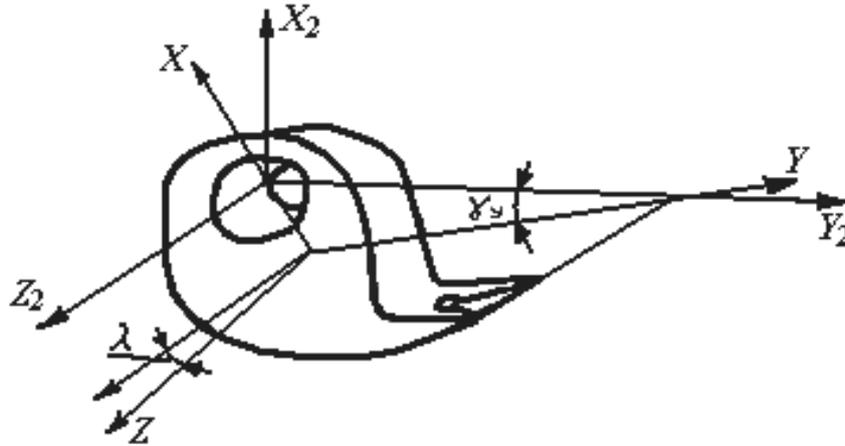


Рис. 1.12. Эскиз рабочей части сборного вращающегося инструмента с призматическим режущим элементом  $\alpha \neq 0, \gamma \neq 0, \lambda \neq 0$

С учетом (1.27) запишем уравнение режущей кромки

$$Z_2 = k \sqrt{Y_2^2 \cos^2 \lambda - (Y_2(1) \cos \lambda \sin \gamma_y + Z_2 \sin \lambda)^2} + b \cos \lambda, \quad (1.28)$$

при  $b = 0$

$$\begin{aligned} Z_2^2 (1 + k^2 \sin^2 \lambda) + 2Z_2 Y_2(1) k^2 \cos \lambda \sin \lambda \sin \gamma_y = \\ = k^2 \cos^2 \lambda (Y_2^2 - Y_2^2(1) \sin^2 \gamma_y). \end{aligned} \quad (1.29)$$

Если главная режущая кромка параллельна оси  $OZ$ , т. е.  $Y = b$ , то уравнение ее в системе  $X_2 Y_2 Z_2$

$$Y_2^2 - Z_2^2 \operatorname{tg}^2 \lambda - 2Z_2 Y_2(1) \sin \gamma_y \operatorname{tg} \lambda - (b^2 + Y_2^2(1) \sin^2 \gamma_y) = 0. \quad (1.30)$$

При условии, что режущая кромка в системе  $XYZ$  описывается уравнением  $(Y - Y_0)^2 + (Z - Z_0)^2 = R^2$ , то в системе  $X_2 Y_2 Z_2$

$$\begin{aligned} \sqrt{Y_2^2 - (Y_2(1) \sin \gamma_y + Z_2 \operatorname{tg} \lambda)^2} \sqrt{Y_{02}^2 - (Y_2(1) + Z_{02} \operatorname{tg} \lambda)^2} + \\ + \frac{(Z_2 - Z_0)^2}{\cos \lambda} = R^2. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Запишем уравнение угла в плане для перечисленных выше условий.

Если режущая кромка описывается уравнением  $Z = kY + b$  в системе  $ZYX$ , то

$$\varphi = \operatorname{arctg} \left[ \frac{Z_2(1 + k^2 \sin \lambda) + \cos \lambda (k^2 Y_2(1) \sin \gamma_y - b)}{k \cos \lambda \sqrt{(Z_2 - b \cos \lambda)^2 + k^2 (Y_2(1) \cos \lambda \sin \gamma_y + Z_2 \sin \lambda)^2}} \right]. \quad (1.32)$$

В случае, когда режущая кромка в системе координат  $XYZ$  описывается уравнением  $Z = kY$ , то

$$\varphi = \operatorname{arctg} \left[ \frac{Z_2(1 + k^2 \sin \lambda) + \cos \lambda k^2 Y_2(1) \sin \gamma_y}{k \cos \lambda \sqrt{Z_2^2 + k^2 (Y_2(1) \sin \gamma_y \cos \lambda + Z_2 \sin \lambda)^2}} \right]. \quad (1.33)$$

Для режущей кромки фрезы в системе  $ZYX$ , описываемой уравнением  $Y = b$ ,

$$\varphi = \operatorname{arctg} \left[ \frac{\operatorname{tg} \lambda (Z_2 \operatorname{tg} \lambda + Y_2(1) \sin \gamma_y)}{\sqrt{(Z_2 \operatorname{tg} \lambda + Y_2(1) \sin \gamma_y)^2 + b^2}} \right].$$

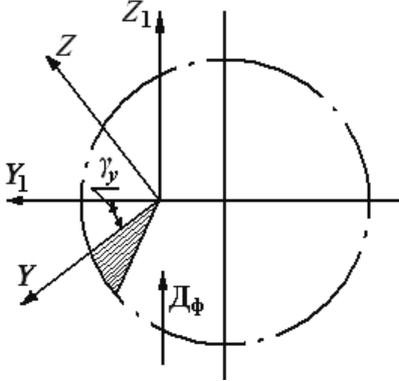
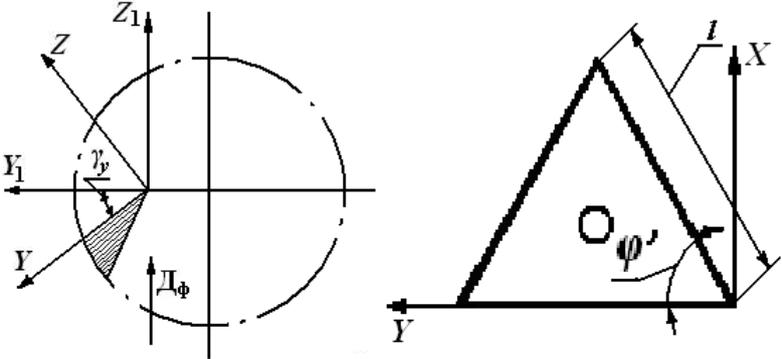
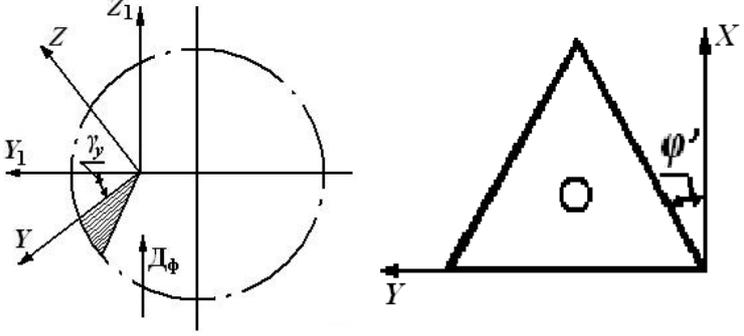
Для режущей пластины, кромка которой описывается в плоскости  $XYZ$  уравнением  $(Y - Y_0)^2 + (Z - Z_0)^2 = R^2$ , получим

$$\varphi = \operatorname{arctg} \left\{ \left[ 2(Z_2 - Z_{02}) \left( \sqrt{R^2 \cos^2 \lambda + (Z_2 - Z_{02})^2} + \sqrt{Y_{02}^2 \cos^2 \lambda - (Y_2(1) \sin \gamma_y + Z_0 \sin \lambda)^2} \right) - \sin \lambda (Y_2(1) \sin \gamma_y \cos \lambda + Z_2 \sin \lambda) \right] / \right. \\ \left. \sqrt{\left[ 2 \cos \lambda \sqrt{R^2 \cos^2 \lambda + (Z_2 - Z_0)^2} \times \sqrt{\left[ \sqrt{R^2 \cos^2 \lambda + (Z_2 - Z_{02})^2} + \sqrt{Y_{02}^2 \cos^2 \lambda - (Y_2(1) \sin \gamma_y + z_0 \sin \lambda)^2} \right]^2} + (Y_2(1) \cos \lambda \sin \gamma_y)^2 \right]} \right\}.$$

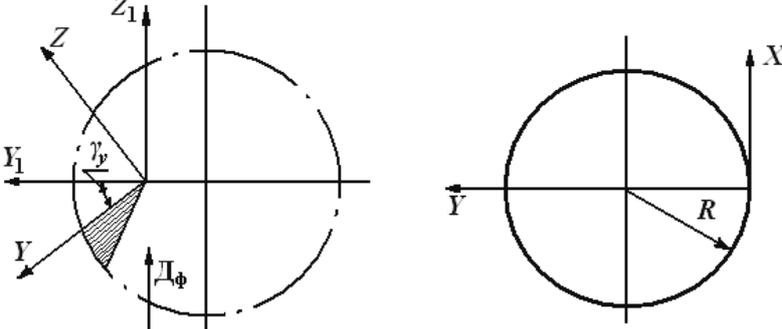
Для инструмента, совершающего поступательное движение формообразования и внутреннего вращающегося инструмента, получим аналогичные соотношения. К таким инструментам можно отнести: осевой (зенковки, зенкеры, борштанги), резьбонарезной и радиальный (фрезы фасонные, резьбонарезные и др.). Полученные соотношения представим в виде таблицы 1.4.

Таблица 1.4

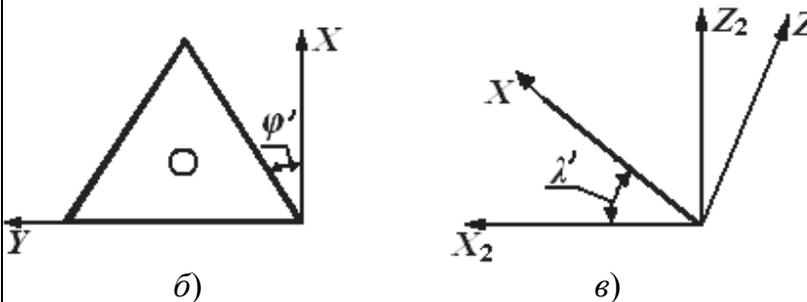
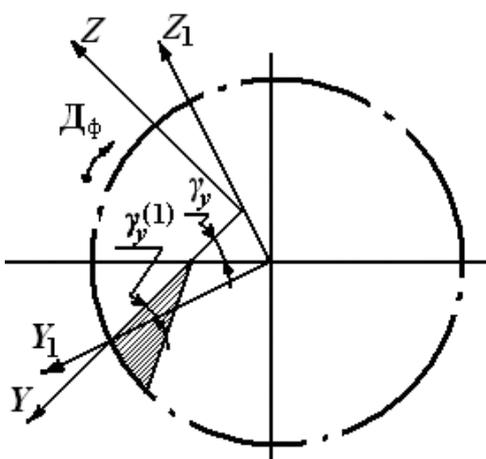
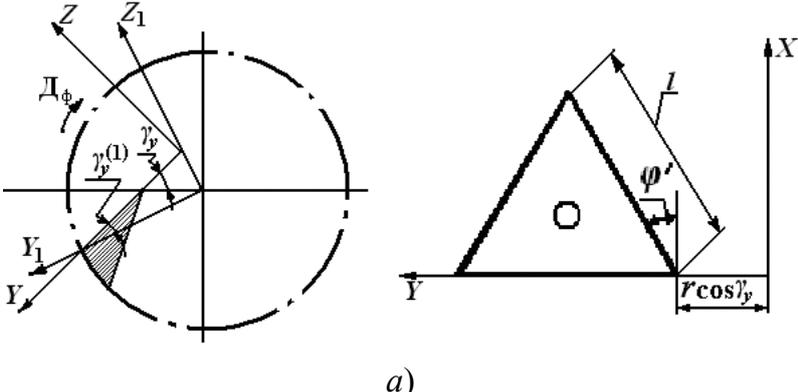
## Расчетные зависимости кинематических поверхностей

| Схемы | Условия  | Расчетные соотношения   |
|-------|--|---|
| 1     | Режущий зуб инструмента совершает поступательное движение формообразования |   |
| 1а    | Формообразующая кромка линейная<br>$\gamma_y \neq 0; \lambda = 0$          |  <p style="text-align: center;">а)</p> $y_1 = \frac{x_1}{\operatorname{tg} \varphi' \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma_y}}; \quad x_1 \in [0; l \sin \varphi']$  |
| 1б    | Формообразующая кромка линейная<br>$\gamma_y \neq 0; \lambda = 0$          |  <p style="text-align: center;">б)</p> $y_1 = \frac{\operatorname{tg} \varphi' x_1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma_y}}; \quad x_1 \in [0; l \cos \varphi']$ |

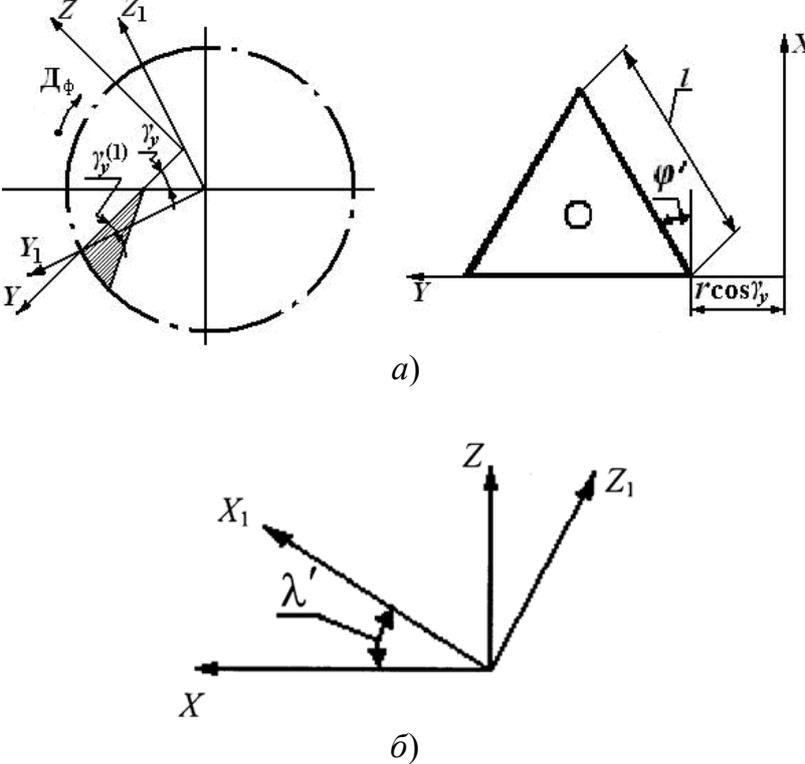
Продолжение табл. 1.4

| Схемы     | Условия  | Расчетные соотношения  |
|-----------|--|--|
|           | $\gamma_y = 0; \lambda \neq 0$   | $y_1 = x_1 \operatorname{tg} \varphi' \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \lambda'}$ $x_1 \in \left[ 0; \frac{l \cos \varphi'}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \lambda'}} \right]$   |
| <p>1z</p> | <p>Формообразующая кромка – дуга окружности<br/> <math>\gamma_y = 0; \lambda \neq 0</math></p> |  <p style="text-align: center;">z)</p> $\frac{x_1^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \lambda')}{R^2} + \frac{(y_1 - R)^2}{R^2} = 1$ $x_1 \in \left[ \frac{-R}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \lambda'}}; \frac{R}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \lambda'}} \right]$ $y_1 = R \pm \sqrt{R^2 - x_1^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \lambda')}$ |
|           | $\gamma_y \neq 0; \lambda = 0$   | $\frac{x_1^2}{R^2} + \frac{\left( y_1 \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma_y} - R \right)^2}{R^2} = 1$ $y_1 = \frac{\sqrt{R^2 - x_1^2} + R}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma_y}}; \quad x_1 \in [-R; R]$   |

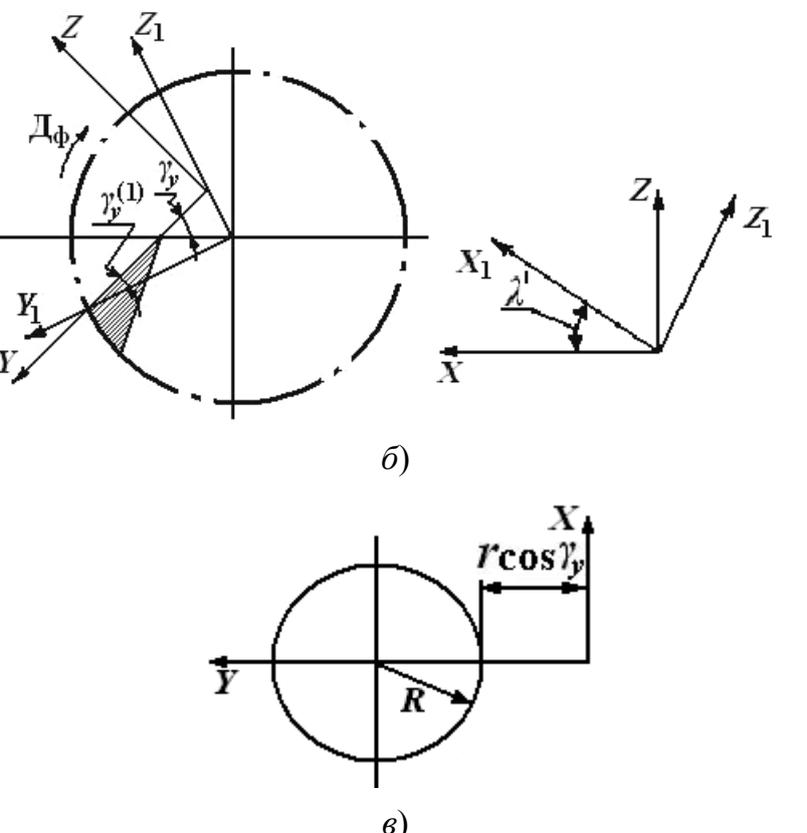
Продолжение табл. 1.4

| Схемы | Условия   | Расчетные соотношения   |
|-------|---|---|
| 1б, в | $\gamma_y \neq 0; \lambda' \neq 0$                                | <br>$y_2 = x_2 \frac{\operatorname{tg} \varphi' \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \lambda'}}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma_y}}, \quad x \in \left[ 0; \frac{l \cos \varphi'}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \lambda'}} \right]$   |
| 2     | Режущий зуб совершает вращательное движение формообразования      |    |
| 2а    | Формообразующая кромка линейная<br>$\gamma_y \neq 0; \lambda = 0$ | <br>$\frac{y_1^2}{r^2 \sin^2 \gamma_y} - \frac{(x_1 \operatorname{tg} \varphi' + r \cos \gamma_y)^2}{r^2 \sin^2 \gamma_y} = 1$ $x_1 \in [0; l \cos \varphi']$ $y_1 = \sqrt{r^2 + x_1^2 \operatorname{tg}^2 \varphi' + 2x_1 r \operatorname{tg} \varphi' \cos \gamma_y}$ |

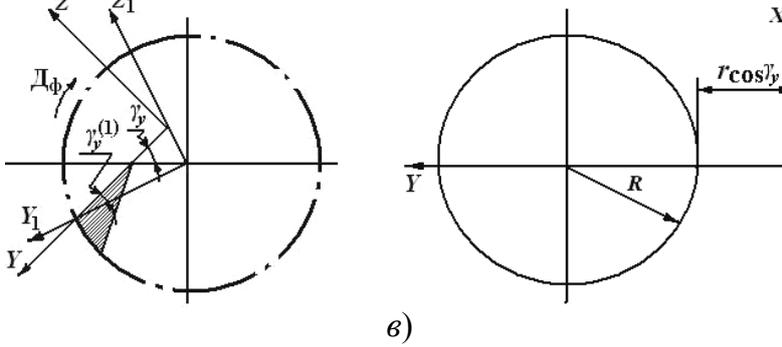
Продолжение табл. 1.4

| Схемы | Условия                            | Расчетные соотношения  |
|-------|------------------------------------|--|
| 2а, б | $\gamma_y = 0; \lambda \neq 0$     |  <p style="text-align: center;">а)</p> <p style="text-align: center;">б)</p> $y_1 = \operatorname{tg} \varphi' x_1 \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \lambda'} + r$ $x_1 \in \left[ 0; \frac{l \cos \varphi'}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \lambda'}} \right]$   |
|       | $\gamma_y \neq 0; \lambda' \neq 0$ | $\frac{y_2^2}{r^2 \sin^2 \gamma_y} - \frac{\left( x_2 \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \lambda' \operatorname{tg} \varphi'} + r \cos \gamma_y \right)^2}{r^2 \sin^2 \gamma_y} = 1$ $y_2 = \sqrt{\left( x_2 \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \lambda' \operatorname{tg} \varphi'} + r \cos \gamma_y \right)^2 + r^2 \sin^2 \gamma_y}$ $x_2 \in \left[ 0; \frac{l \cos \varphi'}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \lambda'}} \right]$ |

Продолжение табл. 1.4

| Схемы | Условия  | Расчетные соотношения  |
|-------|--|--|
| 2б, в | Формообразующая кромка – дуга окружности<br>$\gamma_y \neq 0; \lambda' \neq 0$ |  $\frac{x_2^2(1 + \operatorname{tg}^2 \lambda')}{R^2} + \frac{(\sqrt{y_2^2 - r^2 \sin^2 \gamma_y} - (R+r))^2}{R^2} = 1$ $y_2^2 + x_2^2(1 + \operatorname{tg}^2 \lambda') - 2(R+r)\sqrt{y_2^2 - r^2 \sin^2 \gamma_y} + 2Rr + r^2 \cos^2 \gamma_y = 0$ $x_2 \in \left[ -\frac{R}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \lambda'}}; \frac{R}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \lambda'}} \right]$ |
|       | $\gamma_y = 0; \lambda \neq 0;$<br>$r \neq 0$                                  | $\frac{x_1^2(1 + \operatorname{tg}^2 \lambda')}{R^2} + \frac{(y_1 - (R+r))^2}{R^2} = 1$ $x_1 \in \left[ \frac{-R}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \lambda'}}; \frac{R}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \lambda'}} \right]$   |

Окончание табл. 1.4

| Схемы | Условия                        | Расчетные соотношения   |
|-------|--------------------------------|---|
| 2в    | $\gamma_y \neq 0; \lambda = 0$ |  $\frac{x_1^2}{R^2} + \frac{\left( \sqrt{y_1^2 - r^2 \sin^2 \gamma_y} - (r \cos \gamma_y + R) \right)^2}{R^2} = 1$ $x_1 \in [-R; R]$ $y_1 = \sqrt{\left( \sqrt{R^2 - x_1^2} + R + r \cos \gamma_y \right)^2 + r^2 \sin^2 \gamma_y}$ |

### 1.4.2. Моделирование геометрических параметров зуба сборного инструмента

Моделирование геометрических параметров различными методами производилось П.Р. Родиным и его учениками [49] и др. Для облегчения автоматизации расчетов рассмотрим моделирование координатным методом.

Направления осей  $x$  и  $y$  совпадают с направлениями, в которых известно значение углов. Проекция единичных векторов  $i, j$  на переднюю поверхность обозначим соответственно  $\bar{U}$  и  $\bar{W}$  (рис. 1.13).

Векторное произведение полученных векторов будет соответствовать вектору нормали  $\bar{N}$

$$\bar{W} \times \bar{U} = \bar{N}. \tag{1.34}$$

Выразим вектора  $U$  и  $W$  через единичные

$$\bar{W} = \bar{j} \cos \gamma_y - \bar{k} \sin \gamma_y; \bar{U} = \bar{i} \cos \gamma_x - \bar{k} \sin \gamma_x. \tag{1.35}$$

Подставим выражение (1.35) в (1.34)

$$\begin{aligned}\bar{N} &= (\bar{j} \cos \gamma_y - \bar{k} \sin \gamma_y) \times (\bar{i} \cos \gamma_x - \bar{k} \sin \gamma_x); \\ \bar{N} &= \bar{k} \cos \gamma_x \cos \gamma_y + \bar{i} \sin \gamma_x \cos \gamma_y + \bar{j} \sin \gamma_y \cos \gamma_x.\end{aligned}\quad (1.36)$$

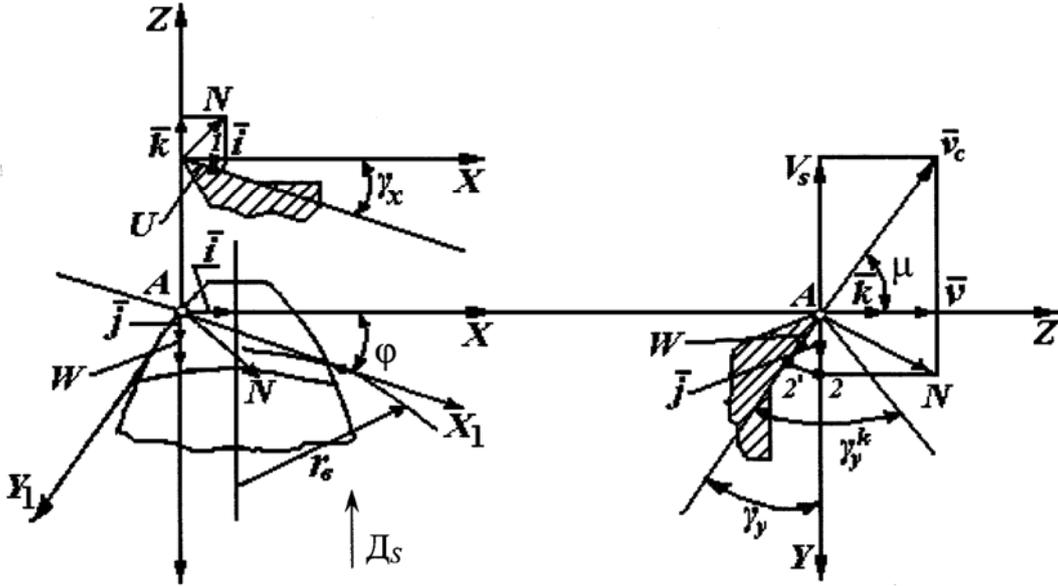


Рис. 1.13. Схема к расчету передних углов лезвия инструмента

Разделим (1.36) на произведение косинусов углов  $\gamma_x$  и  $\gamma_y$

$$\begin{aligned}\frac{\bar{k} \cos \gamma_x \cos \gamma_y + \bar{i} \sin \gamma_x \cos \gamma_y + \bar{j} \sin \gamma_y \cos \gamma_x}{\cos \gamma_x \cos \gamma_y} &= \\ &= \frac{\bar{N}}{\cos \gamma_x \cos \gamma_y} = \bar{N}' = \bar{i} \operatorname{tg} \gamma_x + \bar{j} \operatorname{tg} \gamma_y + \bar{k}.\end{aligned}\quad (1.37)$$

Представим выражение (1.37) в матричной форме

$$[\bar{N}'] = [\bar{i} \bar{j} \bar{k}] \begin{bmatrix} \operatorname{tg} \gamma_x \\ \operatorname{tg} \gamma_y \\ 1 \end{bmatrix}.\quad (1.38)$$

Уравнение (1.38) позволяет заключить, что в любой точке режущей кромки вектор нормали к передней поверхности можно выразить через тангенсы углов, заключенных между осями системы координат, расположенными в основной плоскости, и их проекциями на переднюю поверхность.

Определим выражение для передних углов в главной секущей плоскости. Для этого направим ось  $x_1$  новой системы координат в направлении главной секущей плоскости.

Используя (1.38), запишем связь между углами:

$$\begin{bmatrix} \operatorname{tg}\gamma_{x_1} \\ \operatorname{tg}\gamma_{y_1} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \operatorname{tg}\gamma_x \\ \operatorname{tg}\gamma_y \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Перепишем полученные уравнения в виде системы

$$\operatorname{tg}\gamma_{x_1} = \operatorname{tg}\gamma_x \cos\varphi + \operatorname{tg}\gamma_y \sin\varphi,$$

$$\operatorname{tg}\gamma_{y_1} = -\operatorname{tg}\gamma_x \sin\varphi + \operatorname{tg}\gamma_y \cos\varphi.$$

Как известно,

$$\gamma_{x_1} \equiv \gamma; \gamma_{y_1} \equiv \lambda.$$

В кинематической системе координат

$$\operatorname{tg}\gamma^k = \operatorname{tg}\gamma_x \cos\varphi^k + \operatorname{tg}\gamma_y^k \sin\varphi^k,$$

$$\gamma_y^k = \gamma_y + \mu,$$

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{v_s}{v} = \frac{S_0}{\pi D_A}.$$

Моделирование геометрических параметров режущего зуба вращающегося инструмента.

Выбираем точку на режущей кромке и вводим инструментальную систему координат  $xuz$  (рис. 1.14).

Повернем оси так, чтобы  $y_1$  прошла по касательной к профилю, а  $x_1$  – перпендикулярно.

В результате поворота получим

$$\begin{bmatrix} \operatorname{tg}\gamma_{x_1} \\ \operatorname{tg}\gamma_{y_1} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ -\cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \operatorname{tg}\gamma_x \\ \operatorname{tg}\gamma_y \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (1.39)$$

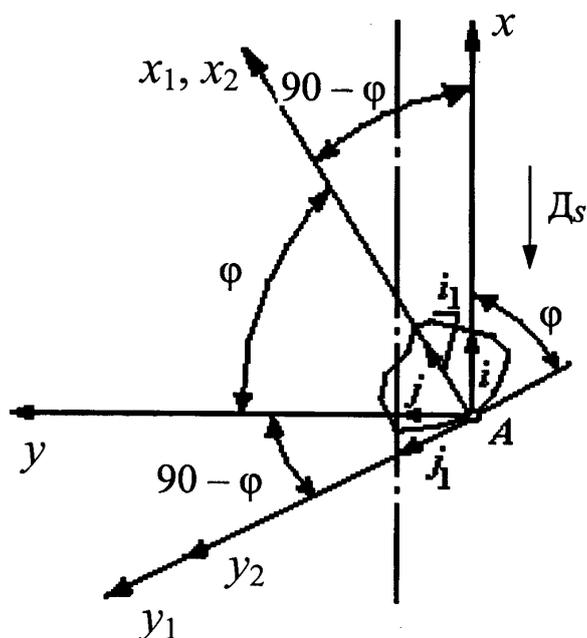
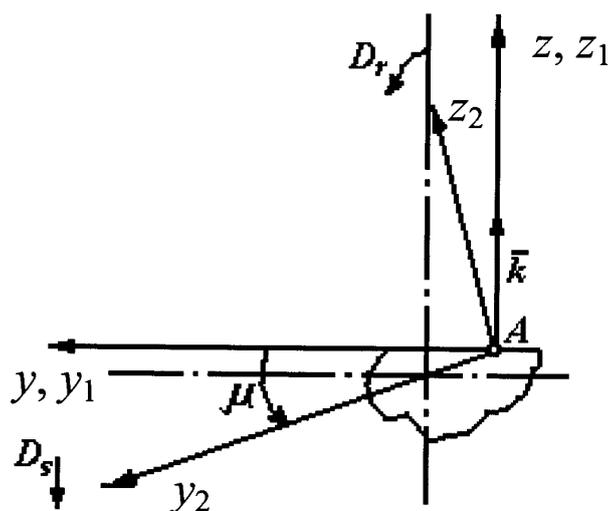


Рис. 1.14. Схемы к расчету углов вращающегося инструмента

Повернем систему вокруг оси  $x_1$  так, чтобы ось  $y_2$  проходила через рассматриваемую точку и центр вращения инструмента, в результате,  $z_2$  наклонится, а  $x_1$  совпадет с  $x_2$ .

Для полученной системы координат запишем связь между углами:

$$\begin{bmatrix} \operatorname{tg} \gamma_{x_2} \\ \operatorname{tg} \gamma_{y_2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \mu & -\sin \mu \\ 0 & \sin \mu & \cos \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \operatorname{tg} \gamma_{x_1} \\ \operatorname{tg} \gamma_{y_1} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (1.40)$$

Подставим уравнение (1.39) в уравнение (1.40):

$$\begin{bmatrix} \operatorname{tg}\gamma_{x_2} \\ \operatorname{tg}\gamma_{y_2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ -\cos\varphi\cos\mu & \sin\varphi\cos\mu & -\sin\mu \\ -\cos\varphi\sin\mu & \sin\varphi\sin\mu & \cos\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \operatorname{tg}\gamma_x \\ \operatorname{tg}\gamma_y \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Переходим от матричной формы к уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg}\gamma_{x_2} &= \operatorname{tg}\gamma_x \sin\varphi + \operatorname{tg}\gamma_y \cos\varphi; \\ \operatorname{tg}\gamma_{y_2} &= -\operatorname{tg}\gamma_x \cos\varphi\cos\mu + \operatorname{tg}\gamma_y \sin\varphi\cos\mu - \sin\mu; \\ 1 &= -\operatorname{tg}\gamma_x \cos\varphi\sin\mu + \operatorname{tg}\gamma_y \sin\varphi\sin\mu + \cos\mu. \end{aligned} \right\} \quad (1.41)$$

Учитывая, что  $\gamma \equiv \gamma_{x_2}$ ,  $\lambda \equiv \gamma_{y_2}$  получили требуемые уравнения.

Для автоматизации расчета углов сложного режущего инструмента, режущая кромка которого аппроксимирована СМП, с построением графика изменения углов в статической и кинематической системах координат можно воспользоваться конечно-разностной моделью [102].

Расчетная схема изображена на рис. 1.15. Так как произвольная  $i$ -я точка профиля может находиться на пересечении двух режущих кромок, то передний и задний углы в статической системе координат необходимо рассчитывать по следующим зависимостям:

$$\operatorname{tg}\gamma'_i = \operatorname{tg}(\gamma_{y\max} - t_i) \sin\varphi_{i,i-1}; \quad (1.42)$$

$$\operatorname{tg}\gamma''_i = \operatorname{tg}(\gamma_{y\max} - t_i) \sin\varphi_{i,i+1}; \quad (1.43)$$

$$\operatorname{tg}\alpha'_i = \operatorname{tg}(\alpha_{z\max} + \gamma_{y\max} - \gamma_{yi}) \sin\varphi_{i,i-1}; \quad (1.44)$$

$$\operatorname{tg}\alpha''_i = \operatorname{tg}(\alpha_{z\max} + \gamma_{y\max} - \gamma_{yi}) \sin\varphi_{i,i+1}, \quad (1.45)$$

где  $\gamma'_i$ ,  $\gamma''_i$ ,  $\alpha'_i$ ,  $\alpha''_i$  – соответственно, передние и задние углы зуба инструмента для  $i$ ,  $i-1$  и  $i$ ,  $i+1$  участков режущей кромки;  $\gamma_{y\max}$ ,  $\alpha_{z\max}$  – максимальные значения переднего и заднего узлов для точки с минимальным значением радиуса обрабатываемой детали

$$t_i = \arcsin\left(\frac{r}{r_i} \sin\gamma_{y\max}\right) - \gamma_{y\max}, \quad (1.46)$$

где  $r$ ,  $r_i$  – минимальное и текущее значения радиусов детали.

$$\gamma_{yi} = \gamma_{y\max} - |t_i|, \quad (1.47)$$

$$\varphi_{i,i-1} = \operatorname{arctg} \frac{|\Delta x_{i,i-1}|}{|\Delta y_{i,i-1}|}, \quad (1.48)$$

$$\Delta y_{i,i-1} = y'_i - y'_{i-1},$$

где  $y'_i = r_i$ ;  $y'_{i-1} = r_{i-1} \cos \Delta t'_i$ ;  $\Delta t'_i = t_i - t_{i-1}$ ;  $\varphi_{i,i+1} = \operatorname{arctg} \frac{|\Delta x_{i,i+1}|}{|\Delta y_{i,i+1}|}$ ;

$$\Delta y_{i,i+1} = y'_{i+1} - y'_i; \quad y'_{i+1} = r_{i+1} \cos \Delta t''_i, \quad \Delta t''_i = t_{i+1} - t_i,$$

где  $\Delta x_{i,i-1}$ ;  $\Delta x_{i,i+1}$  – расстояние между точками  $i$  и  $i-1$ ,  $i$  и  $i+1$  вдоль оси детали.

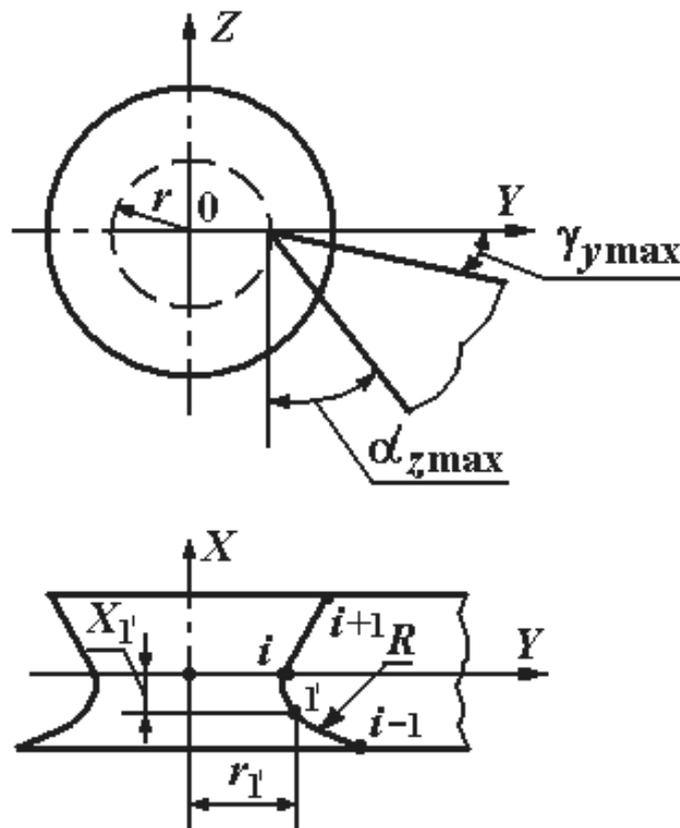


Рис. 1.15. Схема к расчету углов  $\gamma$  и  $\alpha$

Для радиусных участков детали требуется расчет координат промежуточных точек. Вначале необходимо получить уравнение окружности

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2, \quad (1.49)$$

где  $x, y$  – координаты произвольной точки дуги окружности. Подставив известные координаты произвольных точек дуги окружности, а также ее радиус в уравнение (1.49) найдем  $a$  и  $b$

$$(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = R^2, \quad (x_2 - a)^2 + (y_2 - b)^2 = R^2.$$

Чтобы найти радиус детали в произвольной точке  $1'$ , координату  $x$  этой точки подставляем в частный вид уравнения окружности (1.49) и получаем  $y_1$ , что соответствует  $r_1$ .

**Пример 1.1**

Необходимо построить графики изменения статических передних и задних углов фасонного резца при  $\alpha_{\max} = 12^\circ$ ;  $\gamma_{y \max} = 10^\circ$  (рис. 1.16);  $i = 1, 2, 3$ ;  $r_1 = 30$ ;  $r_2 = 25$ ;  $r_3 = 35$ ;  $r = r_{\min} = 25$ ;  $l_1 = 10$ ;  $l_2 = 15$ ;  $x_1 = -10$ ;  $x_2 = 0$ ;  $x_3 = 5$ .

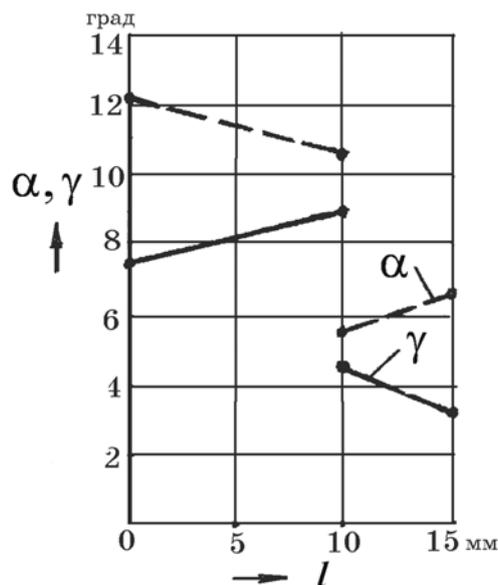


Рис. 1.16. График изменения передних и задних углов по длине формующей кромки

Используя формулу (1.49) рассчитаем значения углов  $t_i$ :

$$t_1 = \arcsin\left(\frac{25}{30} \sin 10\right) - 10 = -1,68^\circ; \quad t_2 = 0^\circ; \quad t_3 = -2,88^\circ.$$

Определим значения передних углов  $\gamma_{yi} = \gamma_{y\max} - |t_i|$

$$\gamma_{y1} = 10 - 1,68 = 8,32^\circ; \quad \gamma_{y2} = 10^\circ; \quad \gamma_{y3} = 7,12^\circ.$$

Рассчитаем значения углов в плане по формуле (1.48):

$$\begin{aligned}\Delta y_{i,i-1} &= r_i - (r_{i-1} \cos(t_i - t_{i-1})); \\ \Delta y_{2;1} &= 25 - (30 \cos(0 - (-1,68))) = -4,99; \\ \Delta y_{3;2} &= 10,03; \quad \Delta x_{2;1} = 10; \quad \Delta x_{3;2} = 5; \\ \varphi_{2;1} &= \arctg \frac{10}{|-4,99|} = 63,48^\circ; \quad \varphi_{3;2} = \arctg \frac{5}{10,03} = 26,496^\circ.\end{aligned}$$

Рассчитаем значения передних углов по формулам (1.42) и (1.43):

$$\begin{aligned}\gamma'_2 &= \arctg [\operatorname{tg}(10^\circ - 0) \sin 63,48^\circ] = 8,97^\circ; \\ \gamma'_3 &= \arctg [\operatorname{tg}(10^\circ - |-2,88^\circ|) \sin 26,496^\circ] = 3,19^\circ; \\ \Delta y_{i,i+1} &= r_{i+1} \cos(t_{i+1} - t_i) - r_i; \\ \Delta y_{1;2} &= 25 \cos(0 - (-1,68^\circ)) - 30 = -5,01; \\ \Delta y_{2;3} &= 9,96; \quad \Delta x_{1;2} = 0 - (-10) = 10; \quad \Delta x_{2;3} = 5; \\ \varphi_{1;2} &= \arctg \frac{10}{|-5,01|} = 63,39^\circ; \\ \varphi_{2;3} &= 26,66^\circ.\end{aligned}$$

$$\gamma''_1 = \arctg [\operatorname{tg}(10^\circ - |-1,68^\circ|) \sin 63,39^\circ] = 7,45^\circ; \quad \gamma''_2 = 4,52^\circ.$$

Рассчитаем значения задних углов по формулам (1.44) и (1.45):

$$\begin{aligned}\alpha'_2 &= \arctg [\operatorname{tg}(12 + 10^\circ - 10^\circ) \sin 63,48^\circ] = 10,77^\circ; \quad \alpha'_3 = 6,76^\circ; \\ \alpha''_1 &= \arctg [\operatorname{tg}(12^\circ + 10^\circ - 8,32^\circ) \sin 63,39^\circ] = 12,28^\circ; \quad \alpha''_2 = 5,448^\circ.\end{aligned}$$

### 1.4.3. Моделирование формообразования кромками инструмента

Решение задачи формообразования, при условии, что формообразующие кромки инструмента заданы или получены в той или иной форме в системе координат, связанной с базовыми элементами инструмента, заключается в преобразовании систем, отражающих движения формообразования.

Рассмотрим более общий случай, когда подвижная система координат  $O_1X_1Y_1Z_1$ , связанная с инструментом, совершает поворот на угол  $\varphi$  относительно произвольной оси  $r$ , представляющей собой

единичный вектор с компонентами  $r_x$ ,  $r_y$ , и  $r_z$  выходящий из начала координат  $O$ . Преимущество такого поворота состоит в том, что для некоторых угловых движений последовательность поворотов относительно основных осей систем координат  $OXYZ$  или  $O_1X_1Y_1Z_1$  можно заменить одним поворотом системы  $O_1X_1Y_1Z_1$  вокруг оси  $r$ . Чтобы получить матрицу поворота  $[Rr, \varphi]$  можно сначала произвести ряд поворотов относительно осей системы  $OXYZ$ , чтобы совместить ось  $r$  с осью  $OZ$ . Затем произведем требуемый поворот вокруг оси  $r$  на угол  $\varphi$  и опять ряд поворотов относительно осей системы  $OXYZ$ , возвращающих ось  $OZ$  в исходное положение. На рис. 1.17 видно, что совмещение осей  $OZ$  и  $r$  может быть реализовано с помощью поворота на угол  $\alpha$  относительно оси  $OX$  (ось  $r$ , в результате, окажется в плоскости  $XZ$ ), а затем на угол  $\beta$  вокруг оси  $OY$  (в результате, оси  $OZ$  и  $r$  совпадут). После поворота на угол  $\varphi$  относительно  $OZ$  или  $r$  произведем указанную выше последовательность поворотов, но в обратном порядке и изменим при этом знаки углов поворота на противоположные.

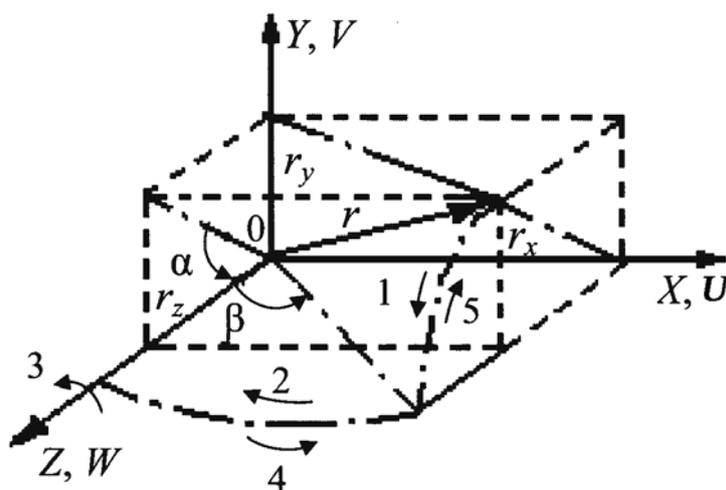


Рис. 1.17. Схема к расчету преобразования координат

Результирующая матрица поворота равна

$$[R\bar{r}, \varphi] = [Rx, -\alpha][Ry, \beta][Rz, \varphi][Ry, -\beta][Rx, \alpha] =$$

$$= \begin{bmatrix} 100 \\ 0c_\alpha s_\alpha \\ 0 - s_\alpha c_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\beta 0 s_\beta \\ 010 \\ -s_\beta 0 c_\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\varphi - s_\varphi 0 \\ s_\varphi c_\varphi 0 \\ 001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\beta 0 - s_\beta \\ 010 \\ s_\beta 0 c_\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 0c_\alpha - s_\alpha \\ 0s_\alpha c_\alpha \end{bmatrix},$$

где  $c_\varphi \equiv \cos\varphi$ ;  $s_\varphi \equiv \sin\varphi$ ;  $c_\beta \equiv \cos\beta$ ;  $s_\beta \equiv \sin\beta$ ;  $c_\alpha \equiv \cos\alpha$ ;  $s_\alpha \equiv \sin\alpha$ .

По рис. 1.17 легко определить, что

$$\sin \alpha = \frac{\bar{r}_y}{\sqrt{\bar{r}_y^2 + \bar{r}_z^2}}; \quad \cos \alpha = \frac{\bar{r}_z}{\sqrt{\bar{r}_y^2 + \bar{r}_z^2}};$$

$$\sin \beta = \bar{r}_x; \quad \cos \beta = \sqrt{\bar{r}_y^2 + \bar{r}_z^2}.$$

Подстановка этих равенств в предыдущее выражение для  $[R\bar{r}, \varphi]$  дает

$$[R\bar{r}, \varphi] = \begin{bmatrix} (\bar{r}_x^2 \upsilon_\varphi + c_\varphi)(\bar{r}_x \bar{r}_y \upsilon_\varphi - \bar{r}_z s_\varphi)(\bar{r}_x \bar{r}_z \upsilon_\varphi + \bar{r}_y s_\varphi) \\ (\bar{r}_x \bar{r}_y \upsilon_\varphi + \bar{r}_z s_\varphi)(\bar{r}_y^2 \upsilon_\varphi + c_\varphi)(\bar{r}_y \bar{r}_z \upsilon_\varphi - \bar{r}_x s_\varphi) \\ (\bar{r}_x \bar{r}_z \upsilon_\varphi - \bar{r}_y s_\varphi)(\bar{r}_y \bar{r}_z \upsilon_\varphi + \bar{r}_x s_\varphi)(\bar{r}_z^2 \upsilon_\varphi + c_\varphi) \end{bmatrix}, \quad (1.50)$$

где  $\upsilon_\varphi = \upsilon \text{ers } \varphi = 1 - \cos \varphi$ .

### Пример 1.2

Найти матрицу поворота  $[R\bar{r}, \varphi]$ , задающую поворот на угол  $\varphi$  вокруг вектора  $\bar{r} = (1, 1, 1)^T$ .

*Решение*

Поскольку вектор  $\bar{r}$  не является единичным, нужно нормировать его и определить после этого его координаты в системе отсчета  $OXYZ$ . Тем самым,

$$\bar{r}_x = \frac{1}{\sqrt{\bar{r}_x^2 + \bar{r}_y^2 + \bar{r}_z^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \bar{r}_y = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \bar{r}_z = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Подставляя эти значения в равенство (1.50), получим матрицу  $[R\bar{r}, \varphi]$ :

$$R_{\bar{r}, \varphi} = \begin{bmatrix} 1/3V\varphi + C\varphi & 1/3V\varphi - 1/\sqrt{3}S\varphi & 1/3V\varphi + 1/\sqrt{3}S\varphi \\ 1/3V\varphi + 1/\sqrt{3}S\varphi & 1/3V\varphi + C\varphi & 1/3V\varphi - 1/\sqrt{3}S\varphi \\ 1/3V\varphi - 1/\sqrt{3}S\varphi & 1/3V\varphi + 1/\sqrt{3}S\varphi & 1/3V\varphi + C\varphi \end{bmatrix}.$$

Поскольку трехмерная матрица поворота не несет информации о поступательном перемещении и используемом масштабе, вектор координат  $\bar{r} = (r_x, r_y, r_z)^T$  в трехмерном пространстве дополняют чет-

вертой координатой (или компонентой) так, что он принимает вид  $r = (\omega r_x, \omega r_y, \omega r_z, \omega)^T$ .

Однородная матрица преобразования может быть разбита на четыре подматрицы:

$$[A] = \begin{bmatrix} [R_{3 \times 3}] [r_{3 \times 1}] \\ [f_{1 \times 3}] [1 \times 1] \end{bmatrix}. \quad (1.51)$$

Верхняя левая подматрица размерностью  $3 \times 3$  представляет собой матрицу поворота. Верхняя правая подматрица размерностью  $3 \times 1$  представляет собой вектор положения начала координат повернутой системы отсчета относительно абсолютной; нижняя левая подматрица размерностью  $1 \times 3$  задает преобразование перспективы; четвертый диагональный элемент – глобальным масштабирующим множителем.

Легко заметить, что значения координат претерпевают изменения: масштаба, определяемое соответственно скалярам  $a$ ,  $b$  и  $c$ . Заметим, что матрицы элементарных поворотов  $[A_{\text{пов}}]$  не дает эффекта локального изменения масштаба.

Поскольку операция обращения подматрицы поворота совпадает с операцией транспортирования, то векторы строки подматрицы поворота задают положение основных осей абсолютной системы координат  $O_1X_1Y_1Z_1$ . Однако для однородной матрицы операции обращения и транспортирования не совпадают. Положение начала абсолютной системы координат  $O_1X_1Y_1Z_1$  можно определить лишь после того, как определена матрица однородного преобразования.

Если эти две системы координат связать со звеньями схемы формообразования, например с  $i$ -м ( $i-1$ )-м звеньями соответственно, то система координат ( $i-1$ )-го звена будет абсолютной системой координат, а система координат  $i$ -го звена, если последняя движется, – подвижной системой координат. Используя матрицу  $[A]$ , мы по известным координатам  $\bar{r}$  в системе  $O_1X_1Y_1Z_1$   $i$ -го звена, можем получить координаты этой точки в системе координат  $OXYZ$ , связанной с ( $i-1$ )-м звеном в соответствии со следующей формулой:

$$\bar{r}_{i-1} = [A]\bar{r}_i, \quad (1.52)$$

где  $[A]$  – однородная матрица преобразования, устанавливающая связь между системами координат;  $\bar{r}_i$  – расширенный вектор, положения  $(x_i, y_i, z_i, 1)^T$ , определяющий однородные координаты точки.

Как известно [19], уравнение поверхности обрабатываемой на станке детали в векторной форме имеет вид:

$$\bar{r}_k = [A_k^{jk}] \bar{r}_n; \quad (1.53)$$

$$f_i(g) = 0; \quad i = 1, 2, \dots, L, \quad L = n - 2,$$

где  $\bar{r}_k$  – обобщенный четырехмерный радиус-вектор точки обрабатываемой поверхности;  $[A_k^{jk}]$  – обобщенная матрица четвертого порядка, отображающая движение  $k$ -й системы координат относительно  $(k-1)$ -й;  $jk - 1 \dots 6$  – индекс, определяющий вид матрицы  $[A_k^{jk}]$ ;  $f_i(g)$  – связь, наложенная на аргументы  $g_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) матрицы  $[A_k^{jk}]$ ;  $n = L + m$ , причем  $n$  – количество систем координат жестко связанных с соответствующим подвижным звеном формообразующей системы;  $m = 0 \dots 2$  – размерность множества формообразующих точек инструмента:  $m = 0$  при одной формообразующей точке,  $m = 1$  при заданной линии формообразования (для лезвийного инструмента),  $m = 2$  для инструментальной формообразующей поверхности.

Связи  $f_i$  между параметрами  $g_k$  могут быть:

– геометрические или кинематические (хотя бы один из параметров  $g_k$  является постоянным) вида

$$f_{ik} = f_{ik}(g) = 0, \quad (ik \leq L);$$

– позиционные (конструктивные)

$$f_{ik} = g_{ik} - c_k = 0; \quad (i_k \leq L).$$

Так как система (1.53) определяет некоторую поверхность, то обязательно существуют два, не зависящих друг от друга, параметра  $g_{i1}$  и  $g_{i2}$ , однозначно определяющих координаты  $x, y, z$  обобщенного вектора:

$$\bar{r} = (x, y, z, 1)^T = \bar{r}(g_{i1}, g_{i2}).$$

Введем функцию геометрических и кинематических связей

$$F_0 = f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_{S-2}^2.$$

При фиксированных  $g_{i1}$  и  $g_{i2}$  функция  $F$  достигает своего абсолютного минимума в некоторой точке. Так как  $F$  является функцией от координат, то заданные значения  $g_{i1}$  и  $g_{i2}$  однозначно определяют значения оставшихся координат  $g_n$ , значит и зависимости (1.53).

## 1.5. Математическое моделирование обратной задачи формообразования сборным инструментом

В общем случае параметры образующей и направляющей геометрической поверхности детали отличны от параметров режущих элементов инструмента, поскольку последние назначают как исходя из условий формообразования, так и резания. В результате, одному характеристическому образу может соответствовать множество режущих инструментов. Например, характеристический образ в виде окружности присущ фасонному резцу для обработки торových поверхностей, концевой сферической фрезе, дисковой торовой фрезе и разным модификациям этих инструментов для обработки пазов, винтовых и других сложных поверхностей, спрофилированных по окружности.

Для сложной поверхности существует множество решений обратной задачи формообразования. Например, выпуклая поверхность может быть образована инструментом с выпуклой, прямой или вогнутой образующей инструментальной поверхности при разных направлениях и других параметрах его движения. Поэтому практический интерес представляет установление влияния общей схемы формообразования на эффективность способа обработки и при наличии такого влияния – определение критериев выбора инструментальной поверхности и траектории ее движения.

Решение обратной задачи формообразования позволяет определить необходимые движения инструмента относительно детали, а также рассчитать минимальное количество и рациональное размещение многогранных пластин в корпусе сборного инструмента.

Исходными условиями для решения этой задачи является вид действительной кинематической поверхности. Рассмотрим общий алгоритм и несколько типовых примеров решения такой задачи.

Общий алгоритм решения включает в себя следующую последовательность: вначале необходимо аппроксимировать локальные отсеки кинематической поверхности линиями, обеспечивающими технологичные формообразующие кромки и траектории их движения, определить чувствительность погрешности аппроксимации параметров аппроксимирующих линий, найти направление относительного движения инструмента и заготовки, а затем, по заданному значению  $h$ , кинематической погрешности, рассчитать количество размещаемых в корпусе инструмента многогранных пластин.

**Случай 1.8.** Локальный отсек кинематической поверхности формообразуется по схеме огибания, т. е. направляющую поверхности аппроксимируем дугой окружности, а образующая формируется кромками многогранных пластин.

Уравнение одной кромки в выбранной системе координат  $Y = P_1 + P_2 X$ . Причем, необходимо так расположить каждую режущую кромку, чтобы сумма квадратов погрешностей  $E_i^2$  была бы минимальной (рис. 1.18).

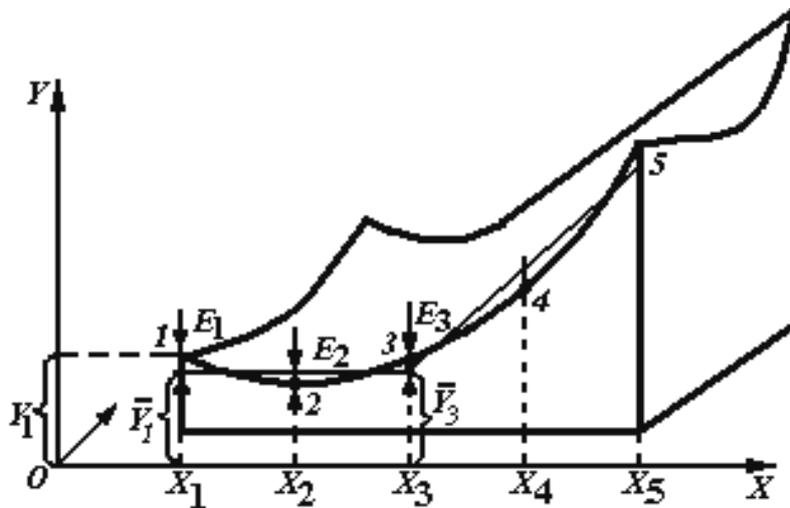


Рис. 1.18. Аппроксимация образующей поверхности детали

Для этого на образующей поверхности детали выделяем ряд характерных точек. Сгруппируем их по три, причем последнюю точку предыдущего множества считаем первой для следующего.

Определим координаты точек, принадлежащих режущей кромке первой пластины

$$Y = P_1 + P_2 X_i \quad \text{при } i = 1, 2, 3. \quad (1.54)$$

Погрешности от замены кривой образующей поверхности можно записать для выделенных точек в виде  $E_i = P_1 + P_2 X_i - Y_i$ .

Исходя из принятых условий замены получим функцию погрешностей

$$F = \sum_{i=1}^3 (P_1 + P_2 X - Y_i)^2$$

и коэффициенты  $P_1$  и  $P_2$  определим из условия минимизации функции  $F$ , для этого приравняем к нулю первые производные  $F$  по  $P_1$  и  $P_2$

$$P_1 = \frac{\sum_{i=1}^3 Y_i \sum_{i=1}^3 X_i^2 - \sum_{i=1}^3 X_i \sum_{i=1}^3 X_i Y_i}{3 \sum_{i=1}^3 X_i^2 - \left( \sum_{i=1}^3 X_i \right)^2};$$

$$P_2 = \frac{3 \sum_{i=1}^3 X_i Y_i - \sum_{i=1}^3 X_i \sum_{i=1}^3 Y_i}{3 \sum_{i=1}^3 X_i^2 - \left( \sum_{i=1}^3 X_i \right)^2}.$$

Для второго участка образующей, т. е. точек 3, 4, 5 составим уравнения, аналогичные (1.54).

Из условия отсутствия переходных участков на поверхности детали в точках пересечения смежных кромок можно рассчитать размеры пластин с  $\alpha \neq 0$ ,  $\gamma = 0$

$$l_{j-1} = \sqrt{(X_{nj} - X_{nj-1})^2 + (Y_{nj} - Y_{nj-1})^2},$$

где  $l_{j-1}$  – длина режущей кромки многогранной пластины;  $X_{nj}$ ,  $Y_{nj}$  – координаты точек пересечения двух смежных режущих кромок

$$X_{nj} = \frac{P_{j-1} - P_{j+1}}{P_{j+2} - P_j}; \quad Y_{nj} = P_{j-1} + P_{j+2} X_{nj}, \quad (1.55)$$

где  $j$  – номер точки пересечения двух смежных режущих кромок ( $j = 2, 3, \dots, k$ ).

Определим координаты центра  $X_0$ ,  $Y_0$  и  $Z_0$  и радиус  $R$  инструментальной поверхности, траектория которой заменяет участок направляющей кинематической поверхности с минимальным отклонением от нее.

Пусть уравнение искомой направляющей инструментальной поверхности имеет вид:

$$(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2 = R^2.$$

Тогда отклонение  $i$ -й точки участка направляющей кинематической поверхности от  $i$ -й точки направляющей инструментальной поверхности можно записать

$$E_i = X_i^2 + Y_i^2 - 2X_0 X_i - 2Y_0 Y_i + X_0^2 + Y_0^2 - R^2. \quad (1.56)$$

Для минимизации  $E^2$  приравняем к нулю частные производные квадрата выражения (1.56)

$$\frac{\partial E^2}{\partial X_0} = 0; \quad \frac{\partial E^2}{\partial Y_0} = 0; \quad \frac{\partial E^2}{\partial R} = 0.$$

Тогда

$$X_0 = [ac - g(nf - e \sum X_i)] / (2m);$$

$$Y_0 = (c - 2X_0 a) / (2g); \quad (1.57)$$

$$R = \sqrt{X_0^2 + Y_0^2 - (2X_0 \sum_{i=1}^n X_i + 2Y_0 \sum_{i=1}^n Y_i - e) / n},$$

где  $a = n \sum_{i=1}^n X_i Y_i - \sum_{i=1}^n X_i \sum_{i=1}^n Y_i$ ;  $c = nd - e \sum_{i=1}^n Y_i$ ;

$$g = n \sum_{i=1}^n Y_i^2 - \sum_{i=1}^n Y_i \sum_{i=1}^n Y_i$$
;  $e = \sum_{i=1}^n X_i^2 + \sum_{i=1}^n Y_i^2$ ;

$$d = \sum_{i=1}^n X_i^2 Y_i + \sum_{i=1}^n Y_i^3$$
;  $m = a^2 - g(n \sum_{i=1}^n X_i^2 - \sum_{i=1}^n X_i \sum_{i=1}^n X_i)$ ;

$$f = \sum_{i=1}^n X_i^3 + \sum_{i=1}^n X_i Y_i^2.$$

Результаты определения погрешности линейной аппроксимации радиусных образующих кинематических поверхностей представлены на рис. 1.19, 1.20.

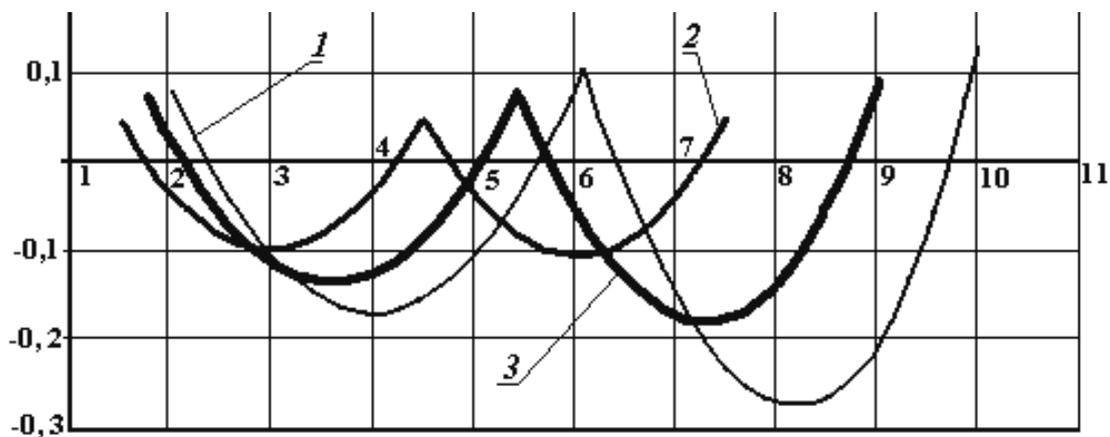


Рис. 1.19. Влияние длины дуги обрабатываемой поверхности на погрешность аппроксимации, образующей СМП

Увеличение длины дуги обрабатываемой радиусной кинематической поверхности на 1,5 мм при неизменном радиусе траектории повышает погрешность аппроксимации в 1,5 раза (рис. 1.19).

При изменении радиуса на величину 1 мм и неизменной длине дуги обрабатываемой кинематической поверхности погрешность аппроксимации уменьшается в 2 раза (рис. 1.20)

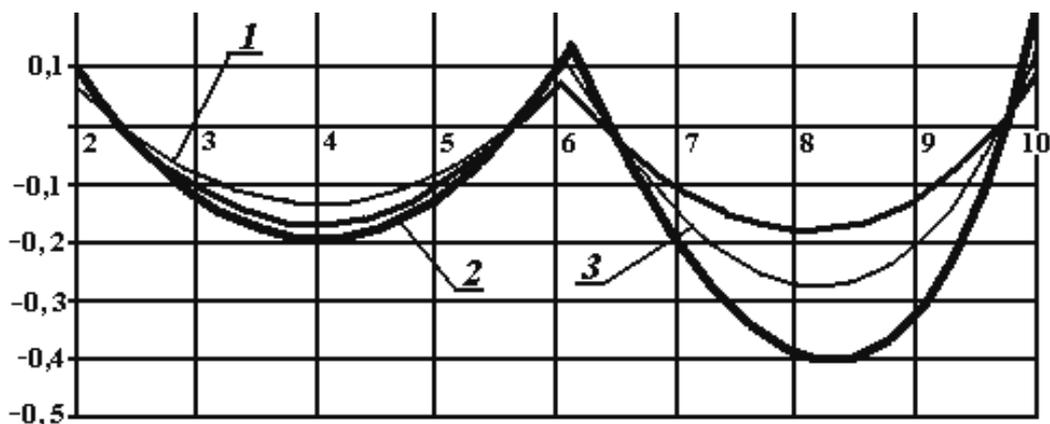


Рис. 1.20. Влияние радиуса на погрешность аппроксимации образующей

**Случай 1.9.** Определяем значение кинематической погрешности. Для этого образующую локального участка описываем векторным многочленом [97]–[99]

$$\bar{r} = \bar{r}(t) = \bar{P}_0 + t\bar{P}_1 + t^2\bar{P}_2 + t^3\bar{P}_3, \quad (0 \leq t \leq 1). \quad (1.58)$$

Векторные коэффициенты  $P_0, P_1, P_2, P_3$  определяем по известным граничным условиям

$$r(0) = \bar{r}_0, \quad \dot{r}(1) = \bar{r}_1, \quad \dot{r}(0) = \bar{T}_0, \quad \dot{r}(1) = \bar{T}_1.$$

Граничные условия задавались по характеру локального отсека.

Затем выразили коэффициенты только через известные граничные условия, т. е.

$$\bar{P}_0 = \bar{r}_0; \quad \bar{P}_1 = \bar{T}_1; \quad \bar{P}_2 = 3(\bar{r}_1 - \bar{r}_0) - 2\bar{T}_0 - \bar{T}_1; \quad \bar{P}_3 = 2(\dot{r}_0 - \dot{r}_1) + \bar{T}_0 + \bar{T}_1. \quad (1.59)$$

Подставив равенства (1.59) для векторов  $P_i$ , при  $i = 0...3$ , в формулу (1.58), получим соотношения, которые записывались в форме Фергюсона

$$\bar{r}(t) = [1t^2t^3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{r}_0 \\ \bar{r}_1 \\ \bar{T}_0 \\ \bar{T}_1 \end{bmatrix} \text{ при } (0 \leq t \leq 1). \quad (1.60)$$

Кривая (1.60) позволяет описывать любую форму образующей или направляющей. Причем изменить характер кривой можно изменяя направление и длину касательных векторов в граничных точках локального участка.

Уравнение (1.58) можно записать в форме Безье, для этого необходимо перегруппировать слагаемые многочлена (1.58) так, чтобы

$$\bar{r} = \bar{r}(t) = (1-t^3)\bar{r}_0 + 3t(1-t)^2\bar{r}_1 + 3t^2(1-t)\bar{r}_2 + t^3\bar{r}_3, \quad (0 \leq t \leq 1). \quad (1.61)$$

В уравнении (1.61) было принято, что  $\bar{P}_0 = \bar{r}_0$ ,  $\bar{P}_1 = 3(\bar{r}_1 - \bar{r}_0)$ ,

$$\bar{P}_2 = 3(\bar{r}_2 - 2\bar{r}_1 + \bar{r}_0), \quad \bar{P}_3 = \bar{r}_3 - 3\bar{r}_2 = 3\bar{r}_1 - \bar{r}_0.$$

Из формулы (1.61) можно получить, что

$$\bar{r}(0) = \bar{r}_0, \quad \bar{r}(1) = \bar{r}_3, \quad \dot{\bar{r}}(0) = 3(\bar{r}_1 - \bar{r}_0), \quad \dot{\bar{r}}(1) = 3(\bar{r}_3 - \bar{r}_2).$$

Тем самым, кривая (1.61) проходит через точки, задаваемые векторами  $\bar{r}_0$  и  $\bar{r}_3$ , а векторы касательных к кривой в этих точках коллинеарны соответственно векторам  $\bar{r}_1 - \bar{r}_0$  и  $\bar{r}_3 - \bar{r}_2$  (рис. 1.21).

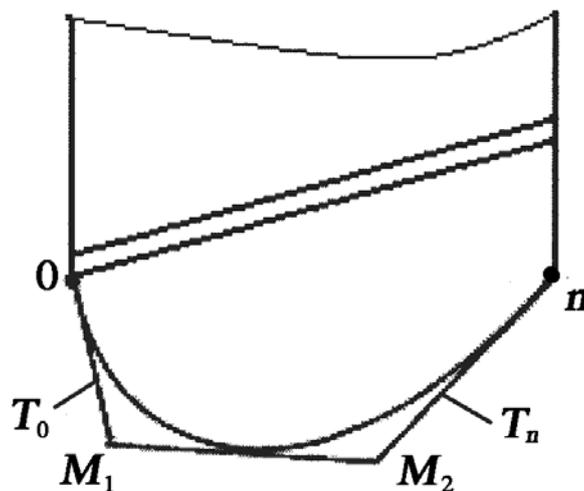


Рис. 1.21. К расчету параметров кривой инструментальной поверхности

Ломаная  $OM_1M_2n$  называется характеристической ломаной кривой (1.61).

В матричной форме запись уравнения кривой (1.61) имеет вид:

$$\bar{r}(t) = [1tt^2t^3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{r}_0 \\ \bar{r}_1 \\ \bar{r}_2 \\ \bar{r}_3 \end{bmatrix} \text{ при } (0 \leq t \leq 1). \quad (1.62)$$

Полученные по последнему соотношению образующая и направляющая регулярны, так как определена кривизна для граничных точек локального участка:

$$K_1(0) = \frac{2 |(\bar{r}_1 - \bar{r}_0)(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)|}{3 |\bar{r}_1 - \bar{r}_0|^3}, \quad K_1(1) = \frac{2 |(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)(\bar{r}_3 - \bar{r}_2)|}{3 |\bar{r}_3 - \bar{r}_2|^3},$$

Если образующая кинематической поверхности, состоящая из ряда локальных участков, имеет регулярный характер, то строится кривая Фергюсона, проходящая через точки  $M_0, M_1, \dots, M_n$ . В этом случае должны быть известны радиус-векторы точек стыка локальных участков  $\bar{r}_0, \bar{r}_1, \dots, \bar{r}_n$  и касательные векторы  $\bar{T}_0, \bar{T}_1, \dots, \bar{T}_n$  в этих точках. Так как образующая – гладкая регулярная линия, то, естественно потребовать, чтобы в общей точке стыка соседних участков  $i$  и  $i + 1$  выполнялись следующие равенства:

$$\bar{r}_i = \bar{r}_{i+1}, \quad \dot{\bar{r}}_i = \dot{\bar{r}}_{i+1}, \quad \ddot{\bar{r}}_i = \ddot{\bar{r}}_{i+1} \quad (i = 0, 1, \dots, n-1).$$

Из последней группы этих равенств получаем рекуррентное соотношение между векторами касательных в трех последовательных опорных точках:

$$\bar{T}_{i-1} + 4\bar{T}_i + \bar{T}_{i+1} = 3(\bar{r}_{i+1} - \bar{r}_{i-1}), \quad (i = 1, 2, \dots, n-1). \quad (1.63)$$

Задавая векторы  $\bar{T}_0$  и  $\bar{T}_n$  можно определить векторы  $\bar{T}_1, \bar{T}_2, \dots, \bar{T}_{n-1}$  из линейной системы

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \\ & 1 & 4 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & 0 & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 1 & 4 \\ & & & & & & \dots \\ & & & & & & & T_{n-2} \\ & & & & & & & T_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{T}_1 \\ \bar{T}_2 \\ \bar{T}_3 \\ \dots \\ T_{n-2} \\ T_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(\bar{r}_2 - \bar{r}_0) - \bar{T}_0 \\ 3(\bar{r}_3 - \bar{r}_1) \\ \dots \\ 3(\bar{r}_n - \bar{r}_{n-2}) - \bar{T}_n \end{bmatrix}. \quad (1.64)$$

Зная векторы касательных в точках стыка локальных участков, получаем составную кривую с непрерывной кривизной (см. рис. 1.21). Значение кинематической погрешности можно рассчитать по уравнению

$$\Delta_{ij} = |a_{ij}|; \quad a_{ij} = \frac{(Y_i - Y_{nj})(X_{nj+1} - X_{nj}) - (X_i - X_{nj})(Y_{nj+1} - Y_{nj})}{\sqrt{(Y_{nj+1} - Y_{nj})^2 + (X_{nj+1} - X_{nj})^2}}, \quad (1.65)$$

где  $\Delta_{ij}$  – кинематическая погрешность в  $i$ -й точке  $j$ -й режущей кромки.

Обработанная поверхность будет представлять сетчатый каркас из плоских алгебраических линий с прямой сеткой в плане.

В системе  $OXYZ$  (рис. 1.22) введем  $n+1$  плоскости, параллельные оси  $Y$ , т. е.  $y = b_1; y = b_2; \dots; y = b_{n+1}$  в каждой плоскости  $Y = b_i$  зададим кривую, определяемую многочленом от  $X$  степени  $m$ :

$$Z = P_{mi}(X) = \alpha_{0i} X^m + \alpha_{1i} X^{m-1} + \dots + \alpha_{mi}, \quad (1.66)$$

где  $i = 1, 2, \dots, n+1$  – номер плоскости.

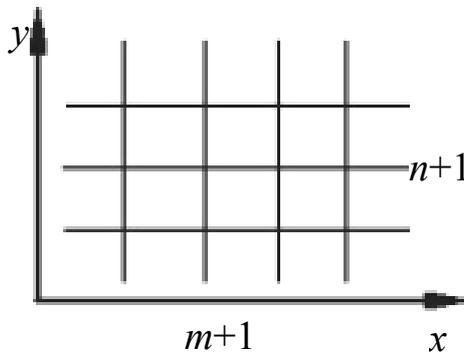


Рис. 1.22. Проекция линий сетчатого каркаса

Таких кривых будет  $(n+1)$ , и все они образуют дискретный простой каркас.

Введем  $m+1$  плоскости, параллельные оси  $X$ , т. е.

$$X = C_1, X = C_2, \dots, X = C_{m+1}.$$

Произвольная плоскость  $X = C_i$  пересекает кривые (1.66), причем каждую только в одной точке. Поэтому получим  $(n+1)$  точек, которые определяют многочлен от  $Y$  степени  $n$

$$Z = Q_{ni}(Y) = \beta_{0i}Y^n + \beta_{1i}Y^{n-1} + \dots + \beta_{ni}. \quad (1.67)$$

Таким образом, в каждой плоскости  $X = C_i$  имеется кривая (1.67). Таких кривых  $(m+1)$  и все они образуют второй дискретный простой каркас. Оба эти каркаса образуют дискретный сетчатый каркас  $\bar{R}(m, n)$ . Это означает, что в одном направлении будут кривые  $m$ -й степени, а в другом  $n$ -й.

Полученный дискретный каркас  $\bar{R}(m, n)$  можно интерполировать в непрерывный сетчатый каркас  $R(m, n)$ , т. е. если провести произвольную плоскость  $X = C_i$ , то она пересечет  $(n+1)$  кривых (1.67). Получим  $(n+1)$  точки, через которые проходит кривая  $n$ -й степени:

$$Z = Q_{m\eta}(Y).$$

Предварительно рассмотрим поверхность

$$Z = F(X, Y),$$

где  $F(X, Y)$  – многочлен от  $(X, Y)$ , содержащий каркас  $\bar{R}(m, n)$ .

Искомая поверхность должна удовлетворять требованиям:

1) в сечениях плоскостями  $X = \text{const}$  располагаются кривые  $n$ -го порядка;

2) в сечениях плоскостями  $Y = \text{const}$  – кривые  $m$ -го порядка.

Кроме того, структура многочленов, определяющих кривые сечения искомой поверхности должна быть той же, что и структура многочленов, определяющих кривые каркаса  $\bar{R}(m, n)$ . Выполнение требований позволяет выявить функцию  $F(X, Y)$

$$Z = f_0(X)Y^n + f_1(X)Y^{n-1} + \dots + f_n(X), \quad (1.68)$$

где  $f_{i(X)} = \gamma_0X^m + \gamma_1X^{m-1} + \dots + \gamma_m$ .



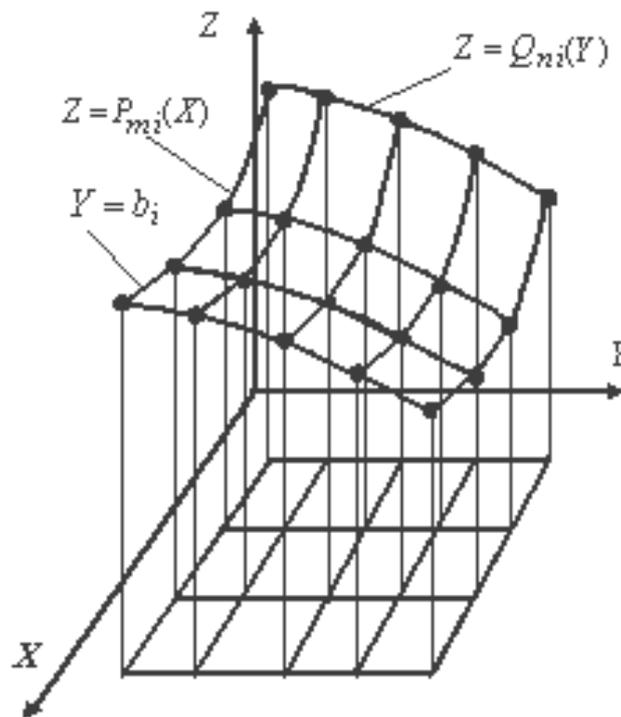


Рис. 1.23. Дискретный каркас

**Пример 1.4**

Определить минимальную степень многочлена, т. е. порядок аппроксимирующей кривой, при условии, что она проходит через данные точки и имеет касательные в них.

Будем аппроксимировать алгебраической кривой и определим многочлен

$$Z = P(X), \quad (1.72)$$

Найдем производную

$$Z' = P'(X). \quad (1.73)$$

Подставив в (1.72) и (1.73) координаты выбранных точек и значения угловых коэффициентов, получим систему  $2m$  уравнений. Если будет  $2m$  коэффициентов, то степень многочлена  $(2m-1)$ .

**Пример 1.5**

Пусть первый дискретный простой каркас, входящий в сетчатый, состоит из линий

$$Z = P_{m_i}(X); \quad Y = b_i,$$

где  $i = 1, 2, 3, \dots, n+1$ ,  $P_{mi}(X) = \alpha_0 X^m + \alpha_1 X^{m-1} + \dots + \alpha_m$  — это многочлены от  $X$  степени  $m$ .

Пусть второй дискретный простой каркас, входящий в сетчатый, состоит из линий

$$Z = Q_{ni}(Y); \quad X = C_i,$$

где  $i = 1, 2, 3, \dots, m+1$ ;  $Q_{ni}(Y) = \beta_0 Y^n + \beta_1 Y^{n-1} + \dots + \beta_n$  — это многочлен от  $Y$  степени  $n$ . Тогда уравнение дискретного сетчатого каркаса будет:

$$\begin{aligned} & \{ [Z - P_{m1}(X)]^2 + (Y - b_1)^2 \} \{ [Z - P_{m2}(X)]^2 + (Y - b_2)^2 \} \dots \\ & \{ [Z - P_{m,n+1}(X)]^2 + (Y - b_{n+1})^2 \} \{ [Z - Q_{n1}(Y)]^2 + (X - C_1)^2 \} \\ & \{ [Z - Q_{n2}(Y)]^2 + (X - C_2)^2 \} \dots \{ [Z - Q_{n,m+1}(Y)]^2 + (X - C_{m+1})^2 \} = 0. \end{aligned}$$

Действительно, любая точка, принадлежащая какой-либо линии или узлу каркаса, обращает в ноль один или два сомножителя, т. е. получим уравнение вида (1.66).

Уравнение отрезка прямой  $ab$  оси  $OX$  запишем в виде:

$$|X - a| + |X - b| - |a - b| = 0. \quad (1.74)$$

Это уравнение равно нулю только тогда, когда точка  $M_X$  принадлежит отрезку  $[a, b]$  (рис. 1.24).

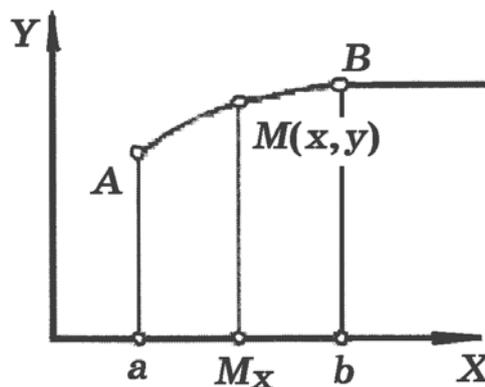


Рис. 1.24. Сечение сетчатого каркаса

В уравнении (1.66) точка  $M(X, Y)$  принадлежит данной кривой  $Y = f(X)$ , если

$$Y - f(X) = 0. \quad (1.75)$$

Значит, чтобы точка принадлежала  $[A, B]$  кривой (1.75), необходимо и достаточно одновременное обращение в ноль уравнений (1.74) и (1.75), такое условие можно записать

$$\left[|X - a| + |X - b| - |a - b|\right]^2 + [Y - f(X)]^2 = 0. \quad (1.76)$$

Это и будет уравнение отрезка кривой на плоскости.

Рассмотрим как можно задать уравнение отрезка кривой в пространстве. Пусть пространственная кривая (или плоская) задана уравнениями своих проекций (рис. 1.25)  $Y = f(X)$ ,  $Z = \varphi(X)$  или

$$Y - f(X) = 0, \quad Z - \varphi(X) = 0. \quad (1.77)$$

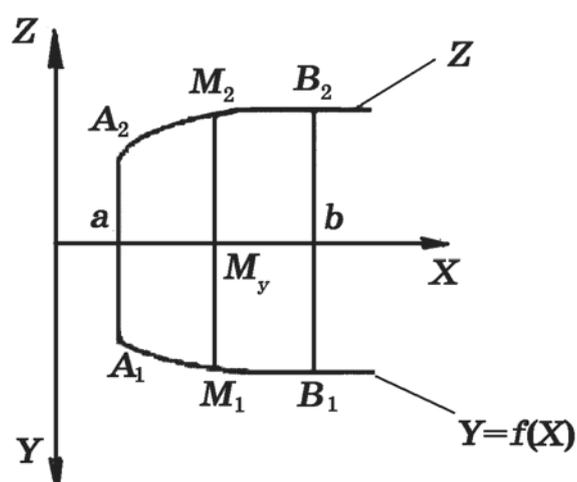


Рис. 1.25. К расчету параметров каркаса

Для того, чтобы точка принадлежала какому-нибудь отрезку  $[A, B]$  данной кривой (1.77), необходимо и достаточно одновременное обращение в ноль левых частей уравнений (1.74) и (1.77). Это условие можно записать

$$\left[|X - a| + |X - b| - |a - b|\right]^2 + [Y - f(X)]^2 + [Z - \varphi(X)]^2 = 0. \quad (1.78)$$

Обозначим левую часть (1.78) через  $F$ . Если таких отрезков кривых (1.78) имеется дискретное конечное множество, образующее дискретный простой каркас, то уравнение такого каркаса можно записать в следующем виде:

$$F_1 \cdot F_2 \cdot F_3 \cdot \dots \cdot F_i = 0. \quad (1.79)$$

Аналогично можно записать уравнение второго дискретного простого каркаса, состоящего из отрезков других линий

$$\Phi_1 \cdot \Phi_2 \cdot \Phi_3 \cdot \dots \cdot \Phi_j = 0. \quad (1.80)$$

Если указанные дискретные простые каркасы (1.79) и (1.80) образуют сетчатый каркас, то его уравнение можно записать в виде:

$$F_1 \cdot F_2 \cdot F_3 \cdot \dots \cdot F_i \cdot \Phi_1 \cdot \Phi_2 \cdot \Phi_3 \cdot \dots \cdot \Phi_j = 0. \quad (1.81)$$

Таким образом, уравнение (1.81) является аналитическим заданием отсека дискретного сетчатого каркаса, состоящего из отдельных отрезков линий.

Затем проверяем выполнение условия  $h \leq \Delta_{\max j}$ .

Если условие не выполняется, то необходимо выбрать режущие пластины с меньшей длиной грани и повторить расчет.

**Случай 1.10.** В соответствии с технологическими и эксплуатационными требованиями необходимо, чтобы кинематическая поверхность детали имела регулярно расположенные гребешки (рис. 1.26).

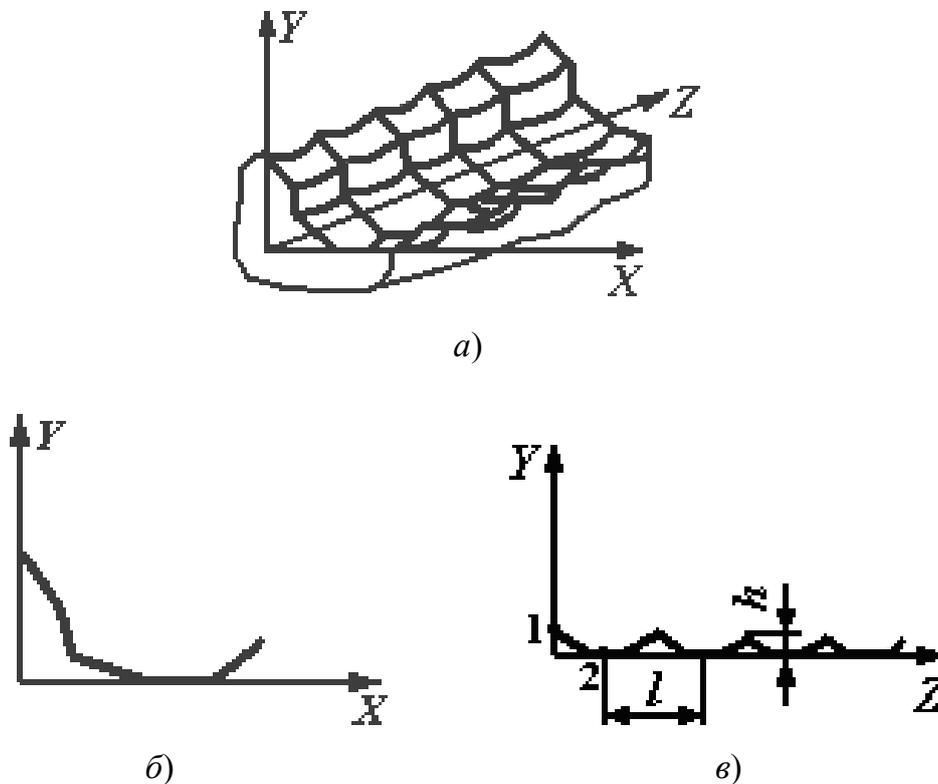


Рис. 1.26. Топография кинематической поверхности (а) и ее сечений (б) и (в)

Вид образующей позволяет сформировать режущую кромку зуба инструмента из многогранных пластин (рис. 1.26).

Вид направляющей позволяет заключить, что ее можно получить фрезой.

Для определения параметров фрезы рассчитаем предварительно ее радиус

$$R = \frac{4Y_1 + l^2}{8Y_1},$$

где  $R$  – радиус фрезы;  $Y_1$  – абсцисса точки 1.

Предварительно рассчитываем число зубьев фрезы

$$Z_{\text{TM}} = \frac{\pi}{t_1}, \quad t_1 = \arccos\left(\frac{R - Y_1}{R}\right).$$

Уточняем высоту остаточного гребешка

$$h' = \frac{lZ_{\text{TM}}}{2\pi} \left(1 - \frac{2\pi R}{lZ_{\text{TM}}} \cos t_1\right).$$

Если  $h_{\min} \leq h' \leq h_{\max}$ , то оставляем  $Z_{\text{ф}}$  и  $D$ , в случае невыполнения этого условия, непрерывную обработку заменяем на дискретную.

**Случай 1.11.** Направляющая поверхности детали винтовая [103]. В этом случае требуется перемещение полученных аппроксимирующих прямых образующей детали по винтовой линии.

Запишем уравнения аппроксимирующих прямых в начальном положении образующей. Для этого выберем две системы координат  $X_1Y_1Z_1$  (местную) и  $XYZ$  (рис. 1.27, а), которые в начальный момент обработки совпадают, тогда

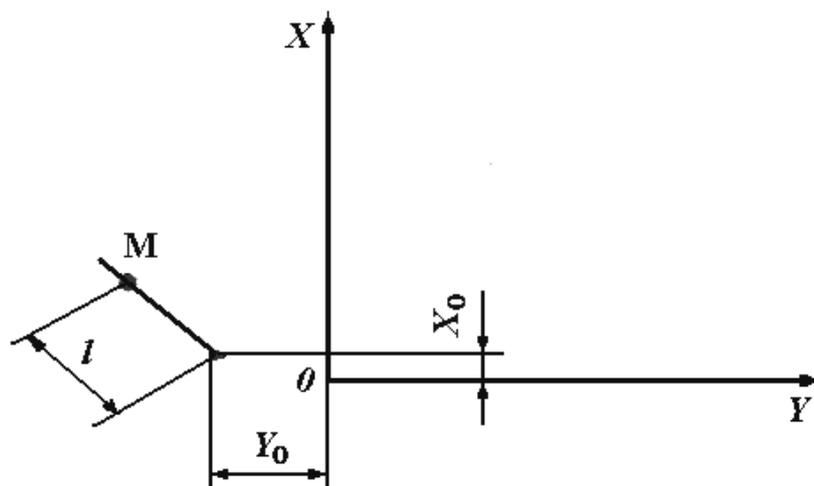
$$X = l \sin \lambda + X_0, \quad Y = -Y_0 - l \cos \lambda, \quad (1.82)$$

где  $l$  – расстояние от точки пересечения аппроксимирующих прямых до точки  $M$ .

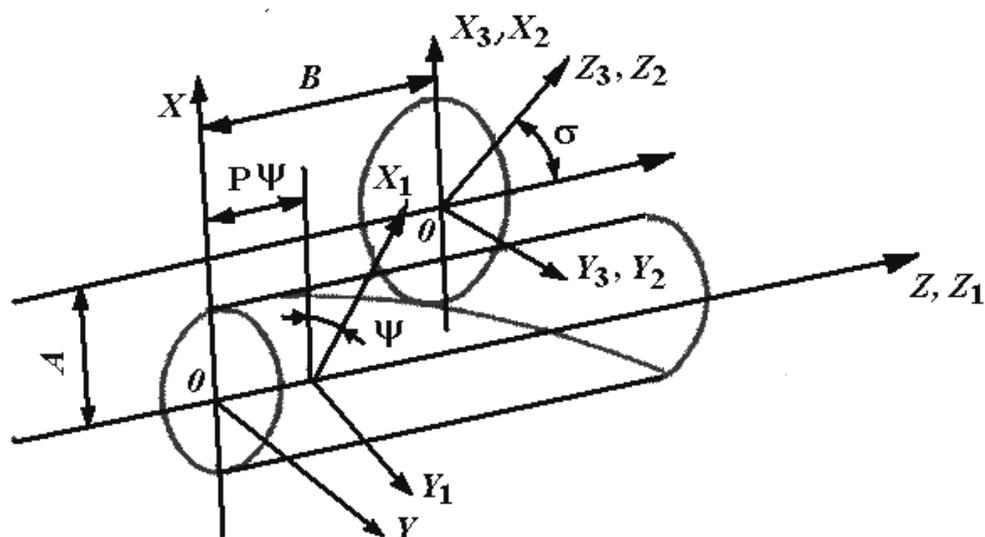
Если перемещать аппроксимирующую прямую по винтовой направляющей поверхности детали, то получим часть этой поверхности. Вместе с аппроксимирующей прямой будет перемещаться подвижная система координат  $X_1Y_1Z_1$ , которая также будет совершать винтовое движение относительно системы  $XYZ$ . Формулы перехода от системы  $XYZ$  к системе  $X_1Y_1Z_1$  следующие:

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= X \cos \psi + Y \sin \psi, \\ Y_1 &= -X \sin \psi + Y \cos \psi, \\ Z_1 &= Z - P\psi, \end{aligned} \right\} \quad (1.83)$$

где  $P$  – параметр винтовой поверхности детали;  $\psi$  – угол поворота системы  $XYZ$  относительно  $X_1Y_1Z_1$ .



a)



б)

Рис. 1.27. Расчетная схема формообразования винтовой поверхности

Подставив из системы (1.82) выражения  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  в систему (1.83), получим уравнения винтовой кинематической поверхности детали

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= X_0 \cos \psi - Y_0 \sin \psi + l \sin(\lambda - \psi), \\ Y_1 &= -X_0 \sin \psi - Y_0 \cos \psi - l \cos(\lambda - \psi), \\ Z_1 &= -P\psi. \end{aligned} \right\} \quad (1.84)$$

Определим нормаль к кинематической поверхности детали

$$\bar{N} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial l} \cdot \frac{\partial \bar{F}}{\partial \psi}, \quad (1.85)$$

где  $F = F(l, \psi)$  – уравнение поверхности детали.

Для получения более удобных выражений разложим вектор  $\bar{N}$  на оси координат  $\bar{N}_x$ ,  $\bar{N}_y$ ,  $\bar{N}_z$

$$\left. \begin{aligned} \bar{N}_{X_1} &= \frac{\partial Y_1}{\partial l} \frac{\partial Z_1}{\partial \psi} - \frac{\partial Z_1}{\partial l} \frac{\partial Y_1}{\partial \psi}, \\ \bar{N}_{Y_1} &= \frac{\partial Z_1}{\partial l} \frac{\partial X_1}{\partial \psi} - \frac{\partial X_1}{\partial l} \frac{\partial Z_1}{\partial \psi}, \\ \bar{N}_{Z_1} &= \frac{\partial X_1}{\partial l} \frac{\partial Y_1}{\partial \psi} - \frac{\partial Y_1}{\partial l} \frac{\partial X_1}{\partial \psi}. \end{aligned} \right\} \quad (1.86)$$

Подставим выражения (1.84) в уравнение (1.86)

$$\left. \begin{aligned} N_{X_1} &= P \cos(\lambda - \psi), \\ N_{Y_1} &= P \sin(\lambda - \psi), \\ N_{Z_1} &= \sin(\lambda - \psi)(X_0 \cos \psi - l \sin(\lambda - \psi) + Y_0 \sin \psi) + \\ &+ \cos(\lambda - \psi)(-l \cos(\lambda - \psi) - X_0 \sin \psi - Y_0 \cos \psi). \end{aligned} \right\} \quad (1.87)$$

Дисковая фреза является телом вращения, поэтому нормаль в точке касания инструментальной поверхности и поверхности детали будет пересекать ось фрезы. Координаты точки центра фрезы в системе  $X_1 Y_1 Z_1$  (рис. 1.27, б)

$$X_{1_{0_2}} = A, \quad Y_{1_{0_2}} = 0, \quad Z_{1_{0_2}} = B. \quad (1.88)$$

Выберем на оси фрезы единичный вектор  $\bar{k}_{0_2}$ . Проекция его на оси координат в системе  $X_1 Y_1 Z_1$  детали

$$k_{0_{2x}} = 0, \quad k_{0_{2y}} = -\sin \sigma, \quad k_{0_{2z}} = \cos \sigma. \quad (1.89)$$

Запишем условие пересечения векторов  $\bar{N}$  и  $\bar{k}_{0_2}$ :

$$(X_1 - X_{1_{0_2}})(\bar{N}_{y_1} \bar{k}_{0_{2z}} - \bar{N}_{z_1} \bar{k}_{0_{2y}}) - (Y_1 - Y_{1_{0_2}})(\bar{N}_{x_1} \bar{k}_{0_{2z}} - \bar{N}_{z_1} \bar{k}_{0_{2x}}) + \\ + (Z_1 - Z_{1_{0_2}})(\bar{N}_{x_1} \bar{k}_{0_{2y}} - \bar{N}_{y_1} \bar{k}_{0_{2x}}) = 0. \quad (1.90)$$

Уравнение (1.90) описывает контактную линию в системе координат  $X_1 Y_1 Z_1$ .

Для определения исходной инструментальной поверхности запишем аппроксимированную образующую поверхности детали в системе  $X_2 Y_2 Z_2$ , связанной с фрезой. Для этого случая уравнения перехода из системы  $X_1 Y_1 Z_1$  в  $X_2 Y_2 Z_2$  можно записать в виде:

$$\left. \begin{aligned} X_2 &= X_1 - A; \\ Y_2 &= Y_1 \cos \sigma + Z_1 \sin \sigma; \\ Z_2 &= -Y_1 \sin \sigma + Z_1 \cos \sigma, \end{aligned} \right\} \quad (1.91)$$

где  $A$  – расстояние между осями  $Y_2$  и  $Y_1$  в направлении  $X_1$ ;  $\sigma$  – угол поворота оси  $Z_2$  до совмещения с  $Z_1$  вокруг оси  $X_2$ .

Исходная поверхность дискового инструмента образовывалась круговым движением линии (1.91) относительно  $Z_2$ . Для записи уравнения искомой круговой поверхности введем условно неподвижную систему координат  $X_3 Y_3 Z_3$ , в которой будет поворачиваться  $X_2 Y_2 Z_2$  вместе с характеристикой. Формулы перехода от системы  $X_2 Y_2 Z_2$  к  $X_3 Y_3 Z_3$  будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} X_3 &= X_2 \cos \tau - Y_2 \sin \tau; \\ Y_3 &= X_2 \sin \tau + Y_2 \cos \tau; \\ Z_3 &= Z_2. \end{aligned} \right\} \quad (1.92)$$

Зависимости (1.91) подставим в (1.92) и получим

$$\left. \begin{aligned} X_3 &= (X_1 - A) \cos \tau - (Y_1 \cos \sigma + Z_1 \sin \sigma) \sin \tau; \\ Y_3 &= (X_1 - A) \sin \tau + (Y_1 \cos \sigma + Z_1 \sin \sigma) \cos \tau; \\ Z_3 &= -Y_1 \sin \sigma + Z_1 \cos \sigma. \end{aligned} \right\} \quad (1.93)$$

Подставив в (1.93) значения параметров  $X_1$ ,  $Y_1$ ,  $Z_1$ , получим уравнения

$$\begin{aligned}
X_3 &= (X_0 \cos \psi - Y_0 \sin \psi + l \sin(\lambda - \psi) - A) \cos \tau - \\
&- [(-X_0 \sin \psi - Y_0 \cos \psi - l \cos(\lambda - \psi) \cos \sigma - P\psi \sin \sigma) \sin \tau; \\
Y_3 &= (X_0 \cos \psi + Y_0 \sin \psi + l \sin(\lambda - \psi) - A) \sin \tau + \\
&+ [(-X_0 \sin \psi - Y_0 \cos \psi - l \cos(\lambda - \psi) \cos \sigma - P\psi \sin \sigma) \cos \tau; \\
Z_3 &= (X_0 \sin \psi + Y_0 \cos \psi + l \cos(\lambda - \psi)) \sin \sigma - P\psi \cos \sigma.
\end{aligned}$$

Если в полученные уравнения подставить параметры  $\tau, \psi, \lambda, l, \sigma, P$  для двух смежных зубьев и решить совместно полученные системы уравнений, то можно определить значения кинематической погрешности и, сравнив ее с допустимой, откорректировать окончательно количество и размещение многогранных пластин в корпусе инструмента.

Рационально использовать координатный метод при криволинейной образующей поверхности детали с переменным радиусом кривизны.

Для более простых форм образующих можно получить аналитические выражения количества режущих кромок инструмента.

**Случай 1.12.** Требуемая кинематическая поверхность должна иметь остаточные гребешки формы криволинейных пирамид. В этом случае направляющая и образующая представляют собой обводы режущих кромок пластин и траекторий движения (рис. 1.28, а, б).

Применяя круглые режущие пластины с  $\alpha \neq 0$ , число их в зубе фрезы определится из выражения

$$n_{\min} = \frac{B_{\min}}{t_1}, \quad t_1 = \sqrt{4R^2 - [(R - h + \rho - \sqrt{\rho^2 - \frac{S_Z^2}{4}})]^2}; \quad t_2 = S_Z.$$

Если применить дисковые пластины, у которых  $\alpha = 0$ , то для создания заднего угла их необходимо повернуть на угол  $\alpha$ .

В этом случае минимальное количество пластин можно определить по формуле

$$n_{\min} = \frac{B_{\min} \cos \alpha}{\sqrt{4R^2 \cos^2 \alpha - 4 \left( \rho - h + R \cos \alpha - \sqrt{\rho^2 - \frac{S_Z^2}{4}} \right)^2}}. \quad (1.94)$$

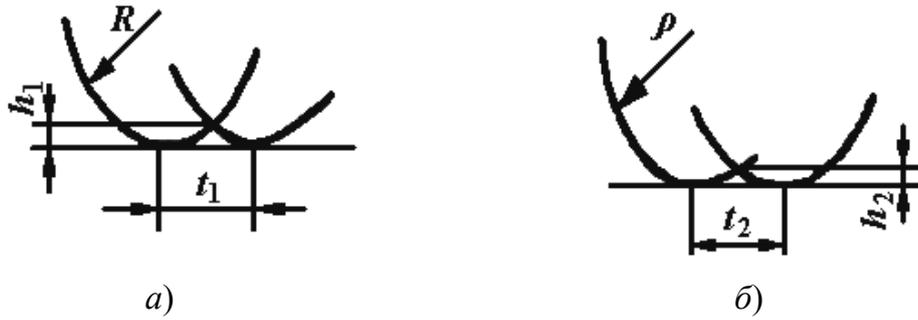


Рис. 1.28. Схема аппроксимации образующей и направляющей кинематической поверхности детали

В рассмотренных примерах форма гребешка легко образовывалась стандартными пластинами, но в практике часто форму пластины трудно подобрать, тогда приходится использовать известные методы аппроксимации.

**Случай 1.13.** Необходимо найти радиус пластины при известных двух точках участка образующей и угле  $\beta$  наклона касательной к профилю одной из них (рис. 1.29).

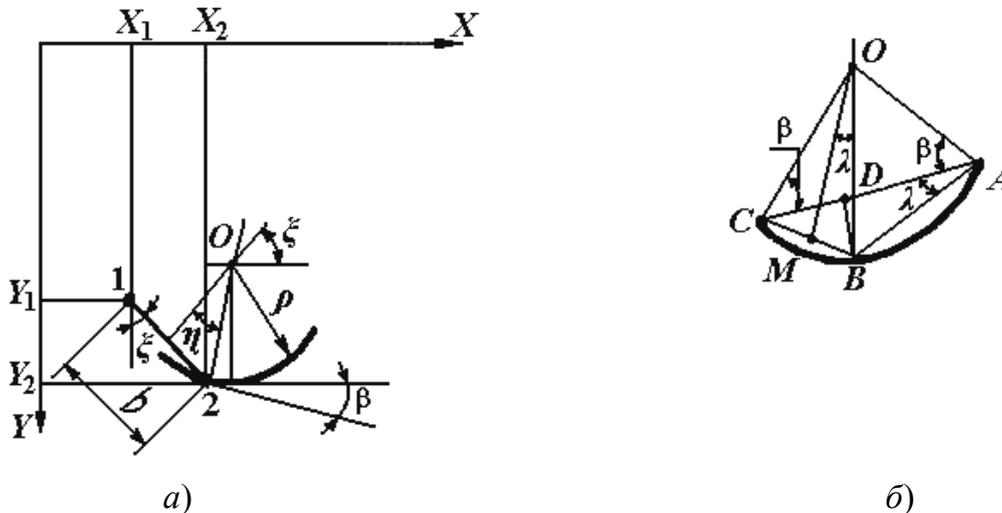


Рис. 1.29. Схема к расчету параметров СМП конусной формы

Вначале определим угол  $\xi$  наклона хорды, проведенной через заданные точки

$$\xi = \operatorname{arctg} \frac{X_2 - X_1}{Y_2 - Y_1},$$

затем – длину хорды  $b$

$$b = \sqrt{(Y_2 - Y_1)^2 + (X_2 - X_1)^2},$$

тогда радиус заменяющей окружности

$$\rho = \frac{b}{2 \sin \eta},$$

где  $\eta$  – половина центрального угла, стягиваемого хордой

$$\eta = \frac{\pi}{2} - \xi - \beta.$$

Координаты  $X_0 Y_0$  центра окружности определим из выражения

$$\left. \begin{aligned} Y_0 &= Y_2 \pm \rho \cos \beta; \\ X_0 &= X_2 \pm \rho \sin \beta. \end{aligned} \right\} \quad (1.95)$$

Знаки в формулах (1.95) зависят от расположения расчетных точек на теоретическом профиле детали.

**Случай 1.14.** Необходимо найти радиус пластины при известных трех точках участка образующей.

Рассмотрим графическую схему (рис. 1.29, б). Длина отрезка  $BC$  равна 1. Выберем точку  $O$  центра пластины, образующая которой проходит через точки  $ABC$  поверхности детали. Опустим перпендикуляр из точки  $O$  на отрезок  $BC$ . Тогда  $BM = MC = l/2$ . Треугольник  $AOC$  – равнобедренный, углы у основания обозначим через  $\beta$ . У треугольника  $AOB$  углы  $OBA$  и  $OAB$  равны  $\alpha + \beta$ . Следовательно,  $\angle AOB = \pi - 2(\alpha + \beta)$ ;  $\angle BOC = \pi - \angle AOB - \angle OAC - \angle ACO = 2\alpha$ . Так как  $OM$  – биссектриса угла  $BOC$ , то  $\angle BOM = 2\alpha$ . Из  $\triangle BOM$  –  $\sin \alpha = BM/OB$ .

Тогда  $R = l/(2 \sin \alpha)$ .

Аналитически это можно записать:

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha &= [(Y_A - Y_C)(X_B - X_A)] / \sqrt{[(Y_A - Y_C)^2][(Y_A - Y_B)^2 + (X_B - X_A)^2]}; \\ R &= \frac{\sqrt{(X_C - X_B)^2 + (Y_C - Y_B)^2}}{2 \sin \alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (1.96)$$

**Случай 1.15.** Чаще всего, заменяющей линией направляющей поверхности детали является циклоидальная кривая.

В системе координат  $X'O'Y'$  уравнения, определяющие такую направляющую, имеют вид (рис. 1.30):

$$\left. \begin{aligned} X' &= \frac{S_z \cdot Z}{2\pi} \left( t - \frac{2\pi R}{S_z \cdot Z} \sin t \right); \\ Y' &= \frac{S_z \cdot Z}{2\pi} \left( 1 - \frac{2\pi R}{S_z \cdot Z} \cos t \right), \end{aligned} \right\} \quad (1.97)$$

где  $S_z$  – подача на зуб инструмента;  $Z$  – число режущих зубьев;  $t$  – угол поворота инструмента;  $R$  – радиус точки режущей кромки инструмента.

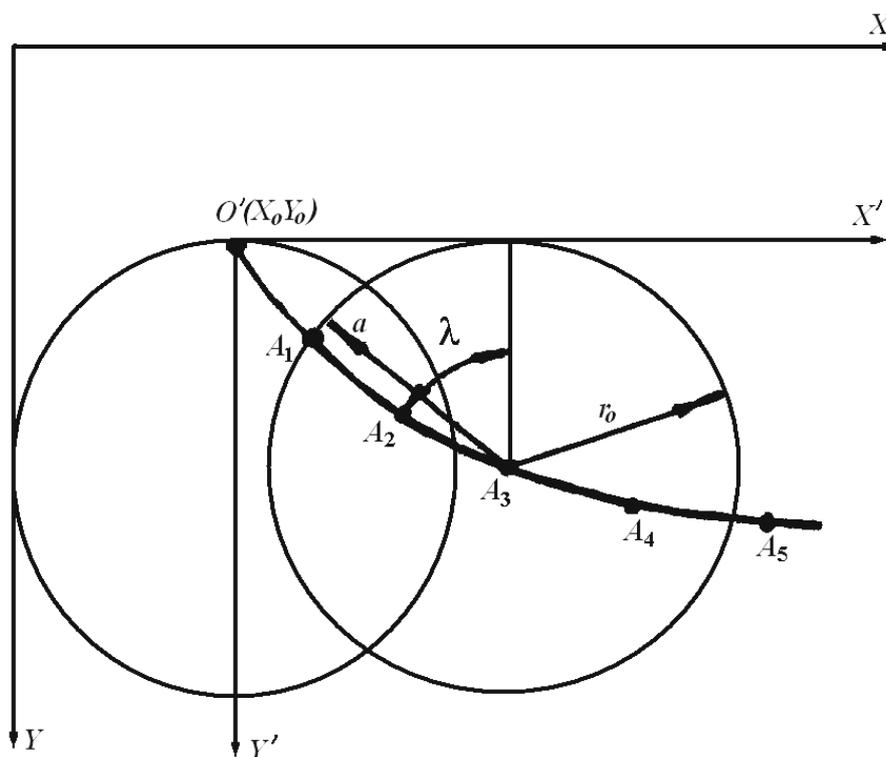


Рис. 1.30. Схема формирования направляющей поверхности детали

Для нахождения параметров циклоидальной заменяющей кривой необходимо знать координаты пяти точек теоретического профиля в глобальной системе координат.

**Случай 1.16.** Требуемая кинематическая поверхность должна иметь остаточные гребешки криволинейной формы, непрерывные по длине направляющей (рис. 1.31).

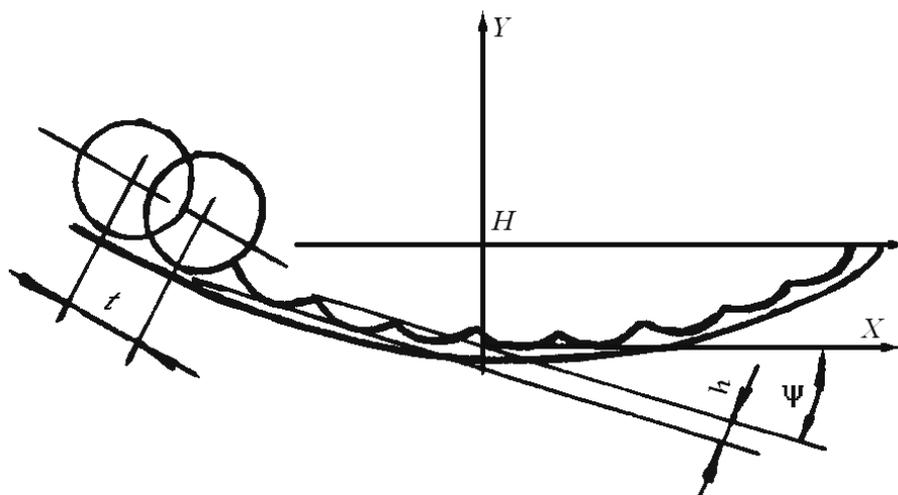


Рис. 1.31. Схема к расчету аппроксимации образующей сложной формы

Выбираем комбинированную схему формообразования в соответствии с формой, требуемой топографией поверхности.

В качестве режущих пластин выбираем круглые с задним углом  $\alpha \neq 0$ . Количество таких пластин в конструкции инструмента можно определить по формуле

$$n = \frac{L}{2\sqrt{h\left(1 + \frac{Df''(X)}{2[1 - f'^2(X)]^{3/2}}\right)(D - h)}},$$

где  $D$  – диаметр режущей пластины, мм;  $f'(x)$  и  $f''(x)$  – первая и вторая производные уравнения номинальной образующей;  $h$  – высота гребешка остаточной шероховатости.

В случае, если номинальная образующая эллиптической формы, то число пластин можно определить из выражения

$$n = L/t; \quad t = 2\sqrt{h(D - h)\left[1 \pm \frac{D}{2H(1 - 3K_x^2)^{3/2}}\right]}, \quad (1.98)$$

где  $H$  – длина хорды, стягивающая крайние точки номинальной образующей;  $k_x$  – кривизна образующей.

Формула (1.98) позволяет заключить, что пластины в корпусе инструмента распределяются с неравномерным шагом  $t$  (рис. 1.32).

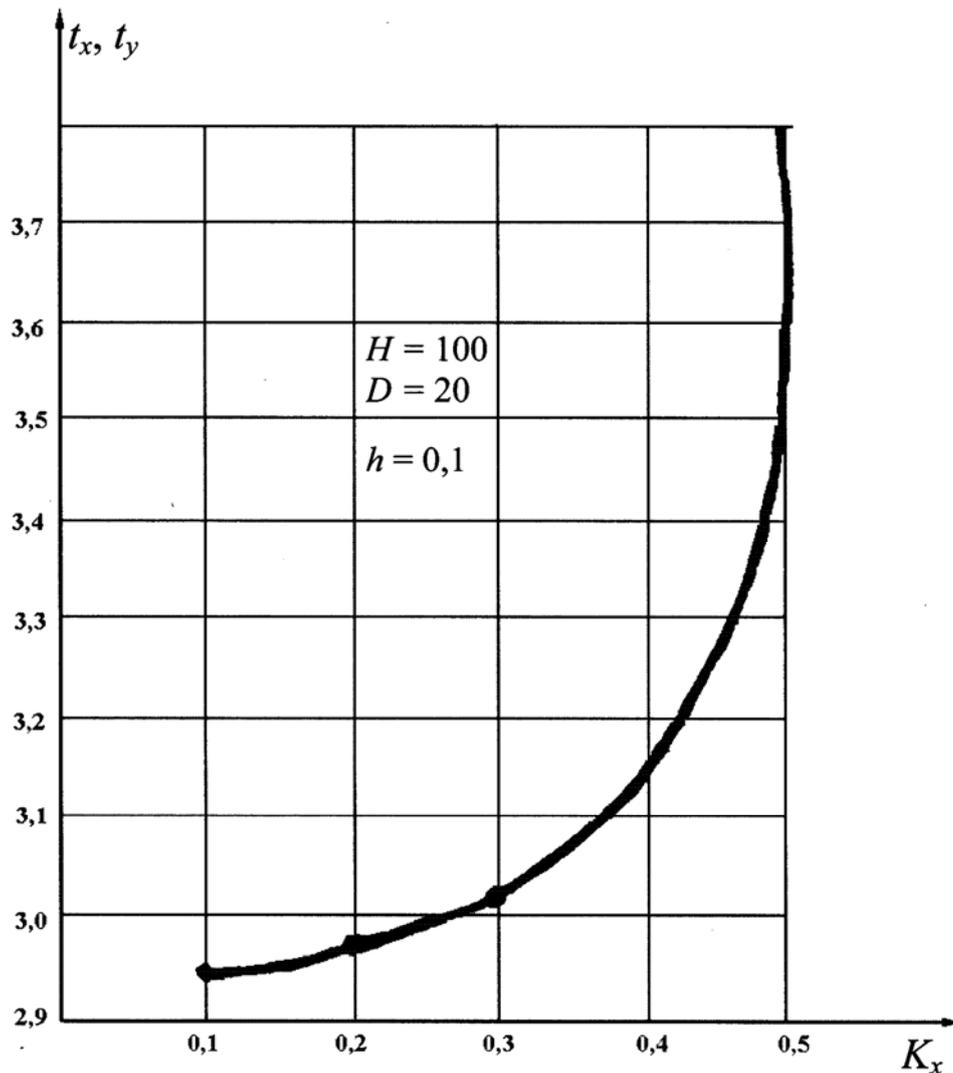


Рис. 1.32. Влияние кривизны образующей на шаг СМП в корпусе инструмента

Для более удобного расчета координат пластин определим составляющие их по осям

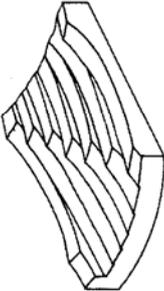
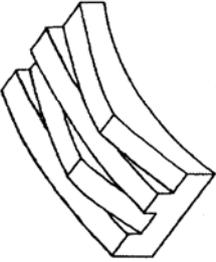
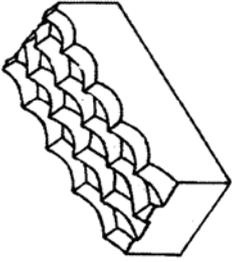
$$t_x = t \sin \psi; \quad t_y = t \cos \psi,$$

где  $\psi$  – угол подъема профиля образующей.

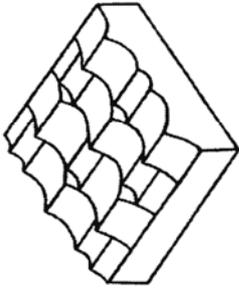
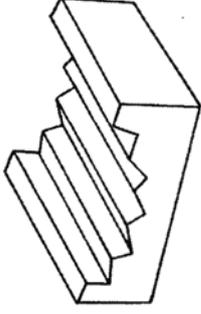
Выражения для определения количества пластин распространенных видов обработанных поверхностей представим в виде таблицы 1.5.

Таблица 1.5

Уравнения для расчета основных параметров по размещению режущих пластин в корпусах инструмента

| Вид кинематической поверхности  | Вид инструмента                               | Форма режущей пластины                | Расположение пластины в корпусе   | Количество пластин  |
|---|---|---------------------------------------|---|---|
| <br>— плоскость      | Наружный (фреза с винтовым расположением СМП) | Призматическая; трех-, четырехгранная | Радиальное или тангенциальное $\varphi = 90^\circ$ , $\varphi_1 = 0^\circ$ , $\lambda = 0^\circ$    | $n_{\min} = \frac{L}{t}$ где $L$ — длина участка образующей;<br>$t$ — шаг между СМП |
|   | Внутренний (фреза)                            | Призматическая; трех-, четырехгранная | Радиальное или тангенциальное $\varphi = 90^\circ$ , $\varphi_1 = 0^\circ$ , $\lambda = 0^\circ$    | $n_{\min} = \frac{L}{t}$  |
|   | Наружный (фреза)                              | Призматическая; трех-, четырехгранная | Радиальное или тангенциальное $\varphi = 90^\circ$ , $\varphi_1 = 0^\circ$ , $\lambda \neq 0^\circ$ | $n_{\min} = \frac{L \cos \lambda}{t}$   |
| Геометрическая поверхность  |   |                                       |   |   |
| <br>— цилиндрическая |   |                                       |   |   |
| <br>— плоскость    |   |                                       |   |   |

Окончание табл. 1.5

| Вид кинематической поверхности   | Вид инструмента      | Форма режущей пластины                       | Расположение пластины в корпусе   | Количество пластин  |
|--|----------------------|--|---|---|
|  <p>— плоскость</p>       | Наружный (фреза)     | Призматическая; трех-, четырех-гранная       | Радиальное или тангенциальное $\varphi = 90^\circ$ , $\varphi_1 = 0^\circ$ , $\lambda = 0^\circ$<br>Шаг между зубьями<br>$t_{z-(z-1)} = t_{z-(z-2)} = t_{z-(z-4)} = t_{z-(z-5)} = t_{z-(z-7)} \dots$ ,<br>где $z = (i-1)3$ ;<br>$i = 2, 3 \dots, n$ ;<br>$z$ — число зубьев фрезы | $n = \frac{L}{t} 3(i-1),$ где $i$ — число погрешностей $h_{\max}$ на длине $l = S_0$ ,<br>$i = 2, 3 \dots, n$ |
|  <p>— цилиндрическая</p> | Наружный протяжной   | Призматическая; трех-, четырех-, пятигранная | Радиальное или тангенциальное   | $n_{\min} = \frac{L}{t}$  |
| Геометрическая поверхность   | Внутренний протяжной | Круглая                                      | Радиальное  |   |
|  |                      |  |   |   |

# Глава 2 ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТОЧНОСТЬ СБОРНОГО ИНСТРУМЕНТА

## 2.1. Анализ стабильности геометрических параметров режущих элементов инструмента

### 2.1.1. Точность размеров и углов сменных многогранных пластин (СМП)

В качестве режущих элементов сборного механизированного инструмента наиболее рационально используются пластины, которые нашли широкое применение в промышленности (пластины форм 0139А, 0141А и 01176404, 03171405, 10171405). Произведем анализ форм этих пластин, которые имеют отклонения геометрических параметров в различных направлениях. На рис. 2.1 представлены профили пластин: номинальные (сплошные линии) и возможные действительные (штриховые и штрихпунктирные линии).

Стабильность режущей пластины формы 0139А в поперечном сечении исследовалась по следующим параметрам: отклонению от номинального значения ширины  $l_n$  пластины на расстоянии  $K = 3,5$  мм от ее опорной грани и действительному значению угла наклона грани  $\beta$  к вертикали. Номинальное значение угла  $\psi_n$  было определено по ГОСТ 2209-82, а номинальное значение ширины  $l_n$  рассчитано по размерам из этого ГОСТа.

Кроме того, были проведены исследования контурных площадей касания базовых граней пластин с эталонной плоскостью и определены отклонения от плоскостности этой грани по выделенным зо-

нам. Каждая грань пластины была обозначена цифрами: 1 – установочная грань (бóльшая), 2 – направляющая (продольная боковая) и 3 – зажимная грань (наклонная) (рис. 2.1, а).

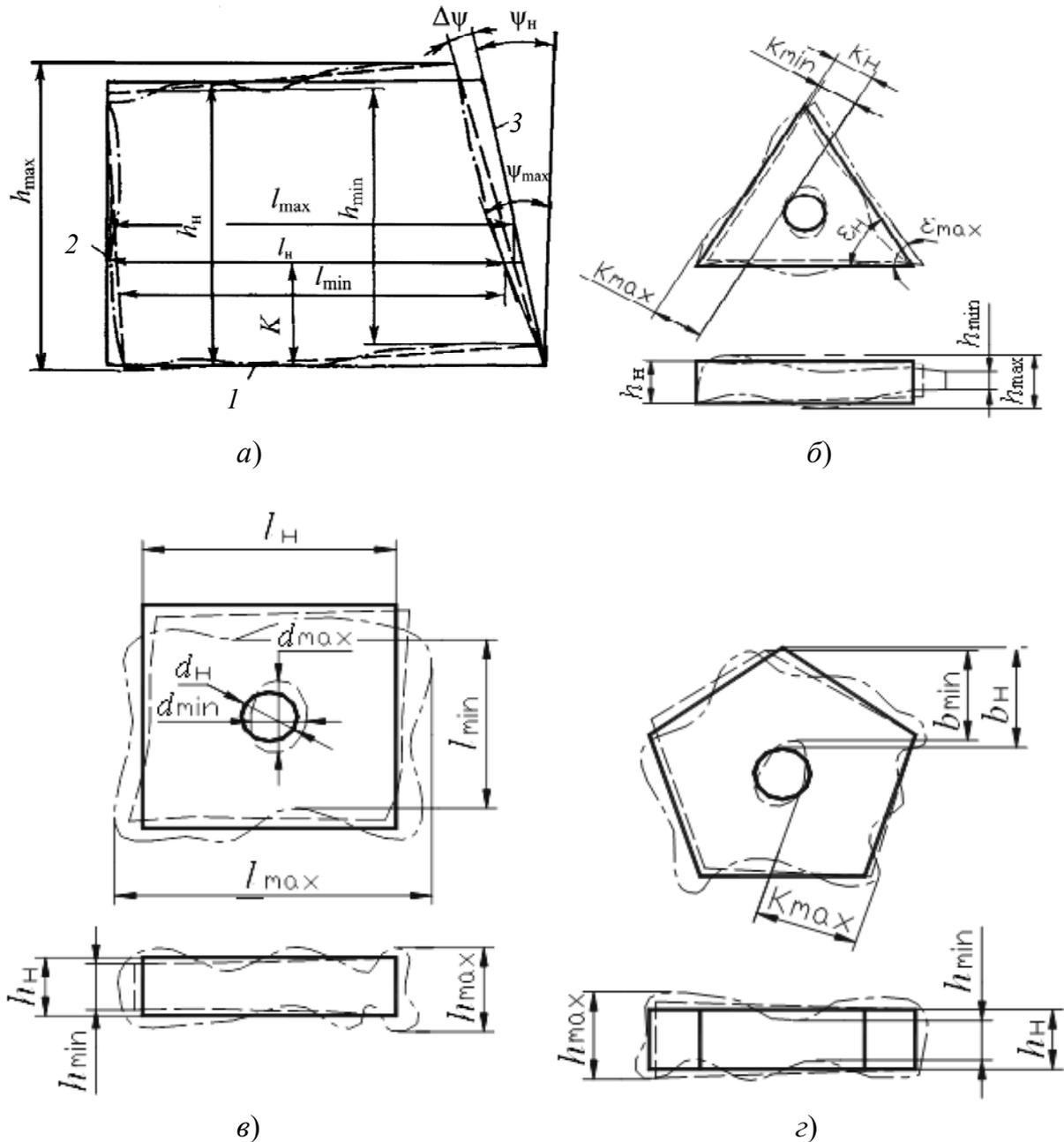


Рис. 2.1. Эскиз форм режущих пластин:  
 а – 0139А; 0141А; б – 01176404; в – 03171405; г – 10171405

Для измерения размера  $l_H$  было изготовлено специальное приспособление. Второй параметр – угол наклона зажимной грани  $\psi_H$  – был измерен на микроскопе ММИ-2. Измерению подвергались три партии (I–III) пластин по 80 штук в каждой. Полученные резуль-

таты были проанализированы по следующим показателям: среднему значению измеряемых величин, среднеквадратическому отклонению  $\sigma$  и коэффициенту вариации  $v$ . Кроме того, по критерию согласия Пирсона  $\chi^2$  и критерию Романовского был выбран закон распределения каждого параметра [98]. Значения этих показателей приведены в таблице 2.1. На рис. 2.2 представлены кривые распределения исследуемых параметров.

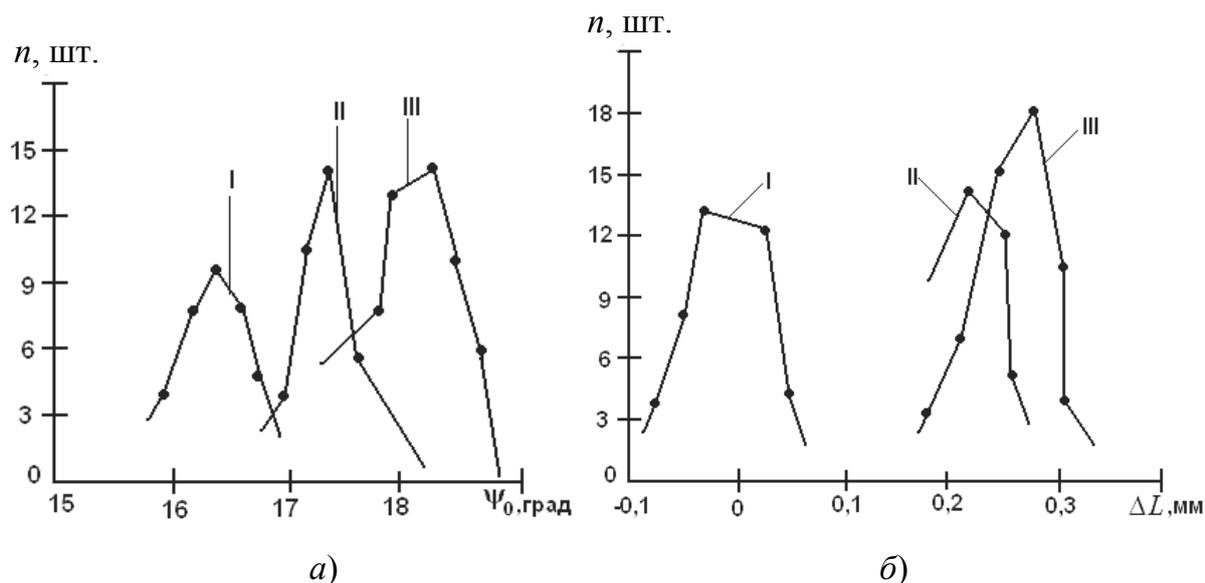


Рис. 2.2. Графики распределения параметров пластины для партий I–III:

$a$  – угол наклона зажимной грани;  $b$  – отклонения ширины пластины

Анализ таблицы 2.1 позволяет заключить, что наименьшие средние значения угла наклона зажимной грани и отклонения ширины пластины имеет партия пластин I, однако у нее наибольшие значения среднеквадратических отклонений и коэффициентов вариации этих параметров, что указывает на более низкую стабильность технологического процесса изготовления этих пластин. Более высокая стабильность технологии изготовления пластин проявляется у партии III, но сравнение по критерию Романовского средних значений измеренных параметров в партиях I и III указывает на большую значимость средних значений у партии III, что позволяет сделать вывод о существенных количественных отклонениях в технологии изготовления пластин.

Таблица 2.1

Анализ результатов измерений контролируемых параметров пластин формы 0139А

| Контролируемый параметр | Номер партии | $\bar{X}$ | $\sigma$ | $v$   | $\chi^2$ | S      |       |      | $\frac{ t }{v_t}$ | Закон распределения   |
|-------------------------|--------------|-----------|----------|-------|----------|--------|-------|------|-------------------|---|
|                         |              |           |          |       |          |        |       |      |                   |   |
| Угол $\Psi$             | I            | 16,15     | 0,3764   | 0,024 | 4,09     | —      | 0,154 | —    | 20,9              | $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 0,3764}} e^{-\frac{(x-16,15)^2}{0,1528}}$   |
|                         | II           | 17,20     | 0,3312   | 0,019 | 5,35     | 0,162  | —     | 7,18 | —                 | $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 0,3312}} e^{-\frac{(x-17,2)^2}{0,2194}}$    |
|                         | III          | 18,1      | 0,3631   | 0,02  | 7,24     | —      | 0,154 | —    | 20,9              | $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 0,3631}} e^{-\frac{(x-18,1)^2}{0,2637}}$    |
| Отклонения ширины $l$   | I            | 0,0135    | 0,0334   | 2,474 | 20,99    | —      | 0,012 | —    | 32,4              | $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 0,0334}} e^{-\frac{(x-0,0135)^2}{0,0022}}$  |
|                         | II           | 0,2312    | 0,0324   | 0,140 | 12,29    | 0,0196 | —     | 0,41 | —                 | $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 0,0324}} e^{-\frac{(x-0,2312)^2}{0,0021}}$  |
|                         | III          | 0,2206    | 0,0183   | 0,083 | 16,20    | —      | 0,012 | —    | 32,4              | $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 0,0183}} e^{-\frac{(x-0,2206)^2}{0,00066}}$ |

Пластины форм 01176404, 03171405, 10171405, также были объединены в три партии (I, II и III) по 80 штук в каждой. Первая партия – трехгранные пластины, вторая – четырехгранные и третья – пятигранные пластины. Для измерения высоты пластин в вершинах было изготовлено специальное приспособление (рис. 2.3). Остальные параметры измеряли на микроскопе ММИ-2. Полученные результаты измерений обрабатывались по статистическим показателям и представлены на рис. 2.4 и в таблице 2.2.

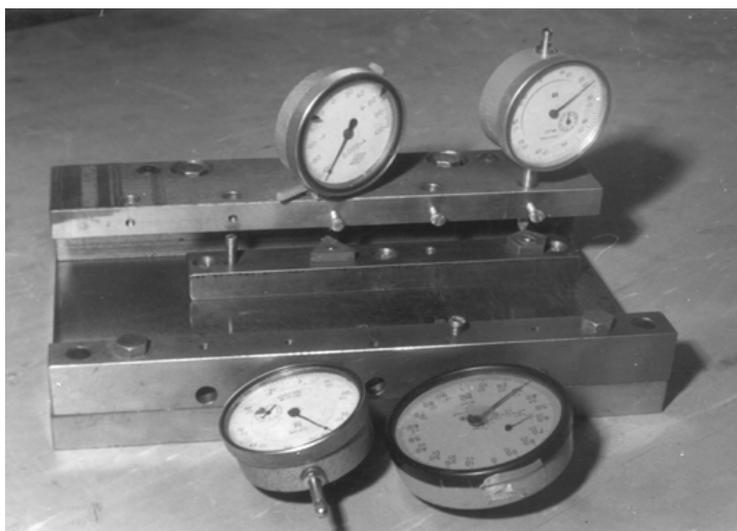


Рис. 2.3. Приспособление для измерения высоты  $h$  в вершинах пластин

Анализ полученных результатов позволяет сделать вывод, что расстояние от вершины до отверстия у пластин трехгранной формы имеет наибольшие отклонения от номинальных значений, а у пластин пятигранной формы этот параметр меньше в 1,49 раза. Анализ диаметров отверстий пластин позволяет заключить, что пластины трехгранной формы имеют наименьшее отклонение его от номинального значения, а у пластин четырехгранной формы этот параметр в 1,25 раза больше чем у остальных партий. Наиболее стабильными значениями расстояний от грани до отверстия обладают трехгранные пластины, а у пластин пятигранной формы этот параметр в 1,24 раза больше чем у трехгранных. Наименьшими отклонениями значений углов при вершине от их средних значений обладают пластины трехгранной формы, а у пластин пятигранной и четырехгранной форм этот параметр больше в 1,67 раза.

Дисперсионный анализ параметров пластин позволяет заключить, что дисперсия расстояний от грани до отверстия пластин трех-

гранной формы имеет минимальное значение, а у пластин четырех- и пятигранной форм она больше соответственно в 8,4 и 1,6 раза.

Пластины четырехгранной формы обладают наибольшим значением среднеквадратического отклонения длины грани, которое в 1,8 раза больше, чем это значение у пятигранных пластин, и в 4,5 раза больше, чем значение среднеквадратического отклонения у трехгранных пластин. Сравнивая значения дисперсий расстояний от вершины пластины до отверстия можно заключить, что наибольшие их значения у пластин четырехгранной формы, а наименьшие у пятигранных пластин. Значение среднеквадратического отклонения этого параметра трехгранных пластин меньше в 6,67 раза, чем у четырехгранных и превышает это значение для пятигранных пластин в 1,58 раза. Значения дисперсий диаметра отверстия у четырех- и пятигранных пластин не имеют существенных различий. У трехгранных пластин среднеквадратическое отклонение этого параметра в три раза меньше чем у четырех- и пятигранных. Наиболее стабильным параметром является угол при вершине, т. к. дисперсии его у пластин всех форм не имеют существенных различий. Анализ полученных значений коэффициентов вариации геометрических параметров пластин позволяет заключить, что наименьшее значение коэффициента вариации расстояний от вершины до отверстия имеют пластины пятигранной формы, которое в 11 раз меньше, чем значения его у пластин трех- и четырехгранной форм. Наибольшей стабильностью расстояний от грани до отверстия обладают пластины трех- и пятигранной форм, которые имеют наименьшие значения коэффициента вариации этого параметра, а наименьшей – пластины четырехгранной формы. При этом значение коэффициента вариации превышает в 6,8 раза значение этого коэффициента трехгранных пластин. Коэффициент вариации углов при вершине имеет наименьшее значение у пластин четырехгранной формы, а наибольшее – у пластин трехгранной формы. В среднем значение отклонений диаметров отверстий у всех форм пластин имеет небольшое значение, а коэффициент вариации у трехгранных пластин в три раза меньше, чем у четырех- и пятигранных.

Анализируя полученные результаты по критерию Колмогорова, можно заключить, что согласование теоретического и эмпирического значения функций наблюдается у всех типов пластин по всем измеряемым параметрам.

По критерию согласия Пирсона и Колмогорова был выбран закон распределения каждого параметра. Значения этих показателей приведены в таблице 2.2.

Таблица 2.2

## Анализ результатов измерений контролируемых параметров

| Контролируемый параметр                   | Номер партии | $\bar{x}$ | $\sigma$ | $\nu$  | $\lambda$ | Закон распределения  |
|---|--------------|-----------|----------|--------|-----------|--|
| Расстояние от вершины до отверстия $b$    | I            | 9,27      | 0,06     | 0,064  | 0,31      | $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 0,06} e^{-\frac{(x-9,27)^2}{0,072}}$                    |
|   | II           | 7,43      | 0,4      | 0,0538 | 0,2       | $P_{(m_i)} = \frac{7,43^{-320} e^{-7,43}}{320!}$   |
|   | III          | 6,244     | 0,038    | 0,006  | 0,48      | $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 0,038} e^{-\frac{(x-6,244)^2}{0,0028}}$                 |
| Расстояние от грани до отверстия $k$      | I            | 3,736     | 0,0263   | 0,007  | 0,222     | $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 0,0263} e^{-\frac{(x-3,736)^2}{0,0014}}$                |
|   | II           | 4,55      | 0,22     | 0,048  | 0,7       | $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 0,22} e^{-\frac{(x-0,22)^2}{0,0968}}$                   |
|   | III          | 4,63      | 0,0412   | 0,0089 | 0,56      | $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 0,0412} e^{-\frac{(x-4,63)^2}{0,0035}}$                 |
| Диаметр отверстия $d$                     | I            | 5,229     | 0,0209   | 0,0039 | 0,27      | $P_{(m_i)} = \frac{5,229^{-240} e^{-5,229}}{240!}$   |
|   | II           | 6,53      | 0,062    | 0,0094 | 0,45      | $P_{(m_i)} = \frac{6,53^{-320} e^{-6,53}}{320!}$   |
|   | III          | 6,405     | 0,0612   | 0,0095 | 0,8       | $P_{(m_i)} = \frac{6,405^{-400} e^{-6,405}}{400!}$   |
| Высота в вершинах $h$                     | I            | 4,822     | 0,031    | 0,006  | 0,056     | $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 0,031} e^{-\frac{(x-4,822)^2}{0,0019}}$                 |
|   | II           | 5,105     | 0,068    | 0,0133 | 0,198     | $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 0,068} e^{-\frac{(x-5,105)^2}{0,0092}}$                 |
|   | III          | 5,042     | 0,0415   | 0,008  | 0,111     | $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 0,0415} e^{-\frac{(x-5,042)^2}{0,0034}}$                |
| Отклонения угла при вершине $\varepsilon$ | I            | 0,43      | 0,0056   | 0,0056 | 1,5       | $P_{(m_i)} = \frac{(59^\circ 34')^{-240} e^{-(59^\circ 34')}}{240!}$                             |
|   | II           | 0,72      | 0,0047   | 0,0047 | 0,28      | $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 0,0047} e^{-\frac{(x-89^\circ 34')^2}{0,000044}}$       |
|   | III          | 0,72      | 0,005    | 0,0053 | 1,17      | $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 0,005} \cdot e^{-\frac{(x-108^\circ 43')^2}{0,000025}}$ |

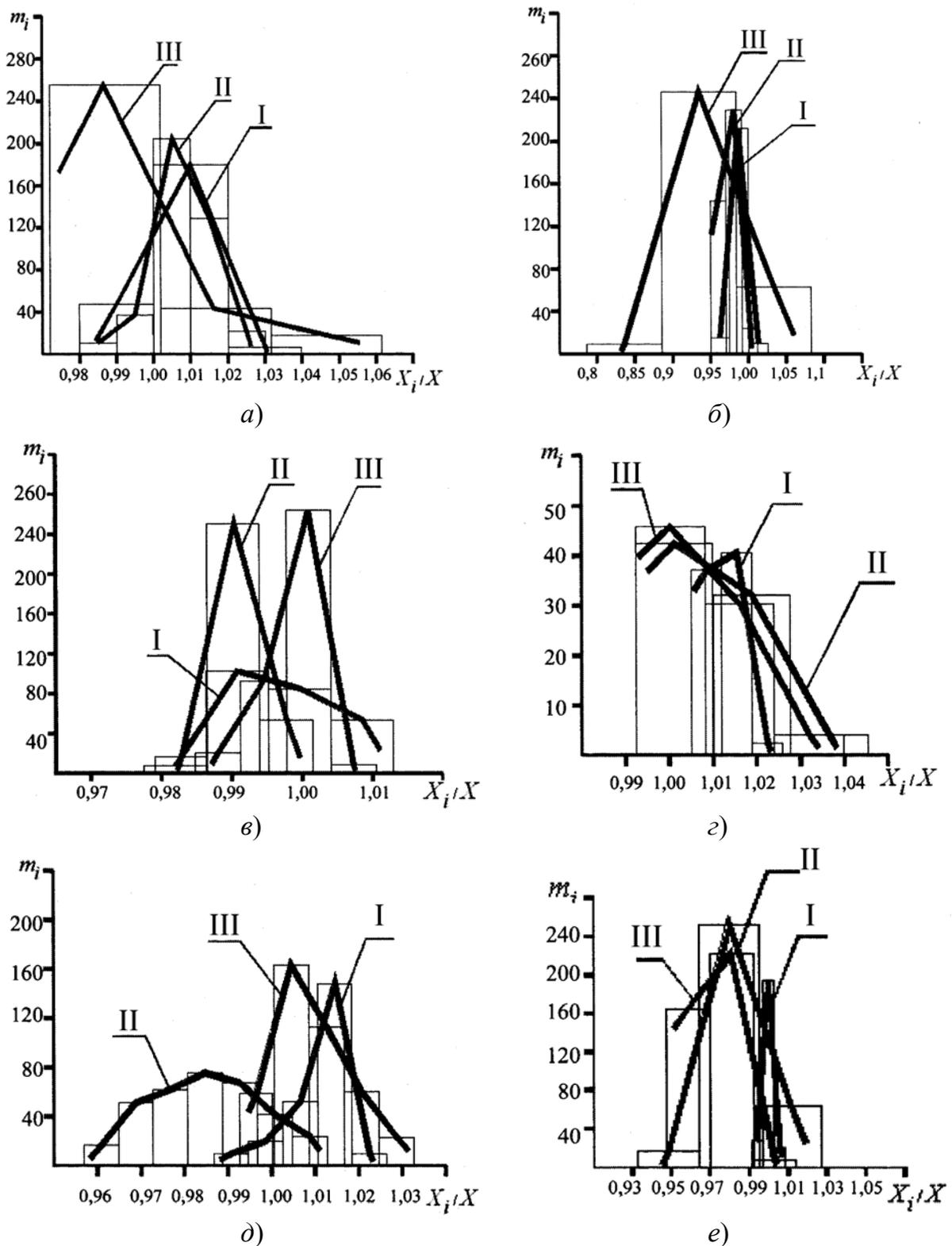


Рис. 2.4. Графики распределения относительных геометрических параметров пластин для партии I–III:

*a* – расстояний от вершины до отверстия; *б* – расстояний от боковой грани до отверстия; *в* – угла при вершине; *г* – диаметра отверстия; *д* – высоты в вершинах; *е* – длины грани пластины

На рис. 2.4 представлены графики относительных геометрических параметров пластин. Анализируя представленные в таблице 2.2 значения и графики (рис. 2.4) можно заключить, что наименьшее среднее значение отклонения угла при вершине и значения относительного диаметра отверстия имеют пластины трехгранной формы. Партия пластин III имеет наименьшие отклонения значений длин граней и расстояний от вершины до отверстия и у нее наименьшие значения среднеквадратических отклонений, чем у партии пластин I и II, что указывает на более высокую стабильность технологического процесса изготовления этих пластин. Более высокая стабильность технологии изготовления по расстоянию от грани до отверстия, отклонению диаметров отверстий и высот в вершинах пластин наблюдается у партии I, т. к. среднеквадратические отклонения и коэффициенты вариации здесь имеют более низкое значение, чем у партии пластин III и II, но сравнение по критерию Колмогорова средних значений измеренных параметров в партиях I и III указывает на большую значимость средних значений у партии III, что позволяет сделать вывод о существенных количественных отклонениях в технологии изготовления этих партий пластин.

### 2.1.2. Контурные площади касания базовых граней пластин

Контурные площади касания базовых граней пластин исследовались по методике тонких окрашивающих покрытий (как наиболее простой и достаточно точной) [104]. При этом использовался контрольный образец, плоскость которого (эталонная) напылялась окрашивающим веществом.

В качестве образца использовалась пластина зеркального стекла, эталонными плоскостями в которой служили ее шлифованные и полированные грани. При соприкосновении обезжиренной твердосплавной пластины с эталонной плоскостью образца, покрытой угольной пленкой, образовывался четкий затемненный отпечаток контурной площади касания, который был сфотографирован, а площадь его измерена. Для упрощения анализа контурных площадей касания и сопоставления результатов использовалось понятие относительной контурной площади касания, т. е.

$$S_{ij} = S'_{ij} / S_{ni},$$

где  $S_{ij}$ , и  $S'_{ij}$  – соответственно относительная и действительная контурные площади касания  $i$ -й грани  $j$ -пластины;  $S_{ni}$  – номинальная площадь  $i$ -й грани.

Кривые распределения относительной контурной площади касания опорной грани пластин, построенные по полученным данным, представлены на рис. 2.5, *к*. При сравнении эмпирических и теоретических распределений параметров по критерию Пирсона все графики согласуются с теоретическими кривыми нормального распределения с вероятностью согласия 0,05 (рис. 2.6). Из сравнения средних значений по критериям Стьюдента и Романовского, характеризующих различные партии, можно заключить, что партии пластин II и III не имеют больших различий, а партия I существенно отличается от остальных, что указывает на низкое качество изготовления пластин партии I. Анализируя результаты исследования относительных площадей касания граней можно сделать вывод о том, что грань I является наиболее благоприятной с точки зрения стабильности показателей (табл. 2.3). Кроме того, коэффициент вариации для грани I отличается наибольшей стабильностью.

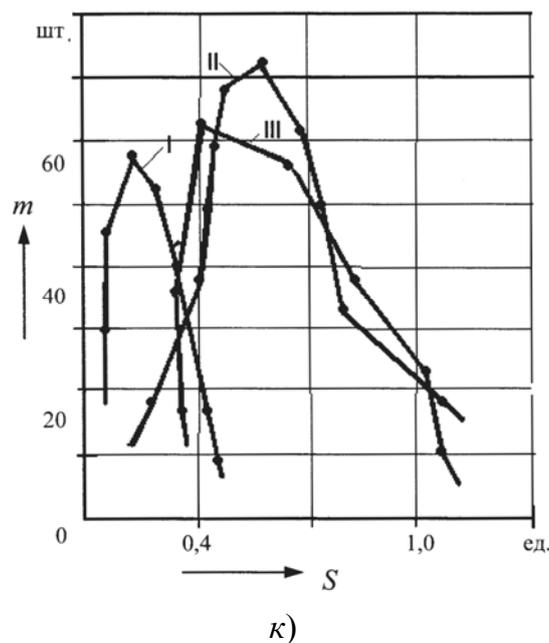
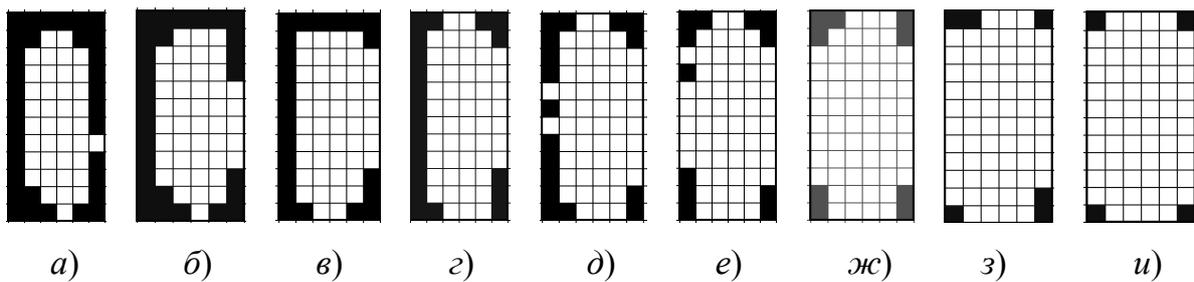


Рис. 2.5. Формы расчетных контурных площадей касания с вероятностями 0,1 (*а*); 0,2 (*б*); 0,3 (*в*); 0,4 (*г*); 0,5 (*д*); 0,6 (*е*); 0,7 (*ж*); 0,8 (*з*); 0,9 (*и*); графики распределения (*к*)

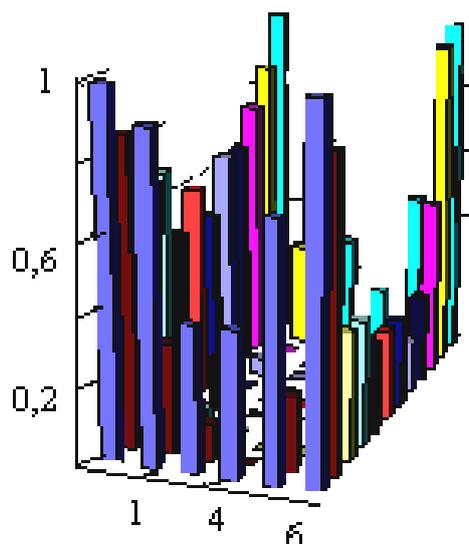


Рис. 2.6. Гистограмма распределения относительных площадей касания опорной грани пластины

Для более полного анализа контурных площадей касания граней пластин были построены аналитические формы касания с заданной вероятностью (рис. 2.5, *a–u*). При построении этих форм номинальная площадь разбивалась на элементарные площадки в  $1 \text{ мм}^2$ . Каждая элементарная площадка обрабатывалась статистически, т. е. определялись средние значения, среднеквадратическое отклонение и строились гистограммы распределений. По полученным гистограммам определялись элементарные площадки, имеющие контакт с заданной вероятностью.

Задаваясь вероятностями, определялись номера площадок, имеющих контакт, по которым формировалась контурная площадь касания с заданной вероятностью. Как видно на рис. 2.5, *a–u* для обеспечения надежности крепления режущих пластин необходима дополнительная обработка поверхности этой грани.

Законы изменения длин неконтактирующих участков приведены в таблице 2.3.

Формы расчетных контурных площадей касания с заданной вероятностью для трех-, четырех- и пятигранных пластин были получены по вышеприведенной методике и представлены на рис. 2.7.

Статистические показатели относительных контурных площадей касания приведены в таблице 2.4. По полученным данным строили усредненные кривые распределения относительной контурной площади касания базовых граней пластин (рис. 2.8).



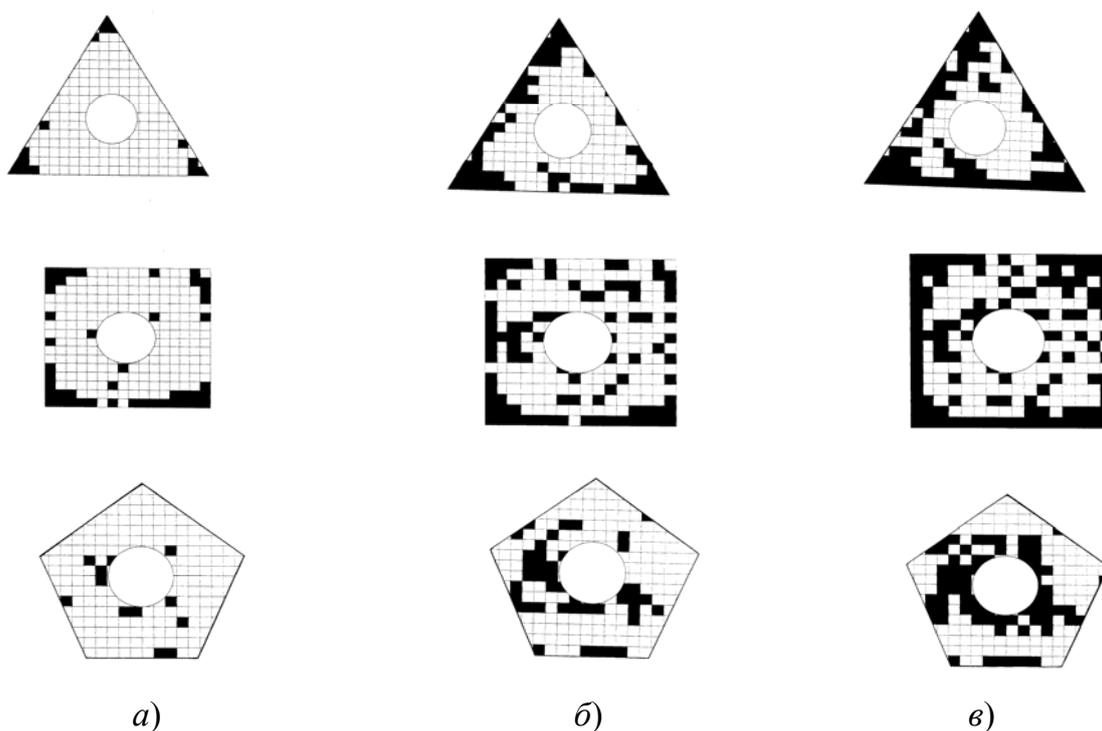


Рис. 2.7. Формы расчетных площадей касания пластин с вероятностями:  
 $a - 0,5$ ;  $б - 0,4$ ;  $в - 0,25$

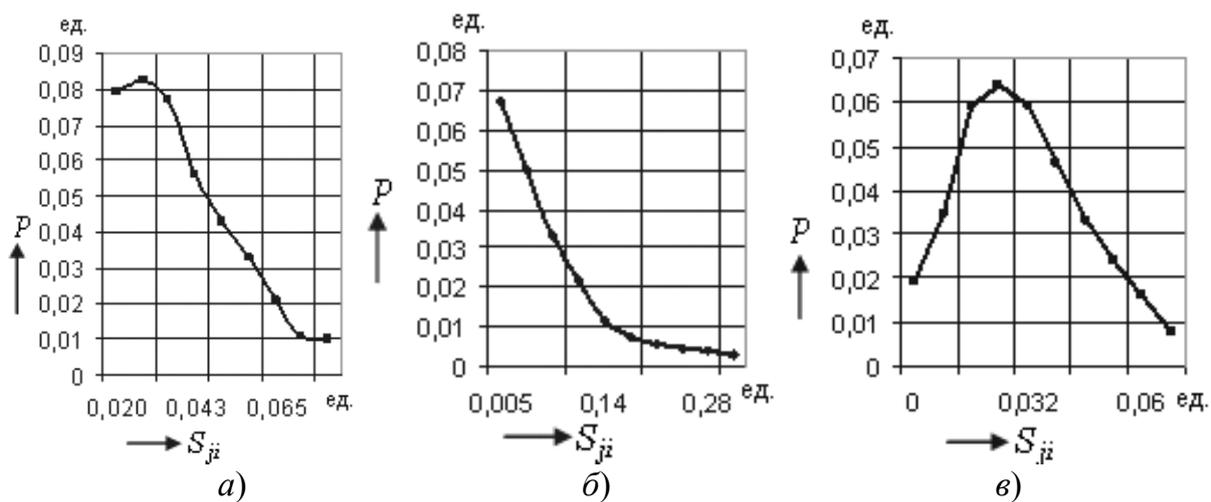


Рис. 2.8. Кривые плотности распределения относительной контурной площади касания базовых граней пластин:  
 $a$  – трехгранных;  $б$  – четырехгранных;  $в$  – пятигранных

Из сравнения средних значений по критериям Стьюдента и Романовского, характеризующих различные партии, можно заключить, что средние значения контурных площадей касания партий пластин I существенно отличаются от средних значений контурных площадей касания партий II и III. Это указывает на несовершенство технологии изготовления пластин.

Таблица 2.4

## Анализ результатов измерений контурных площадей касания

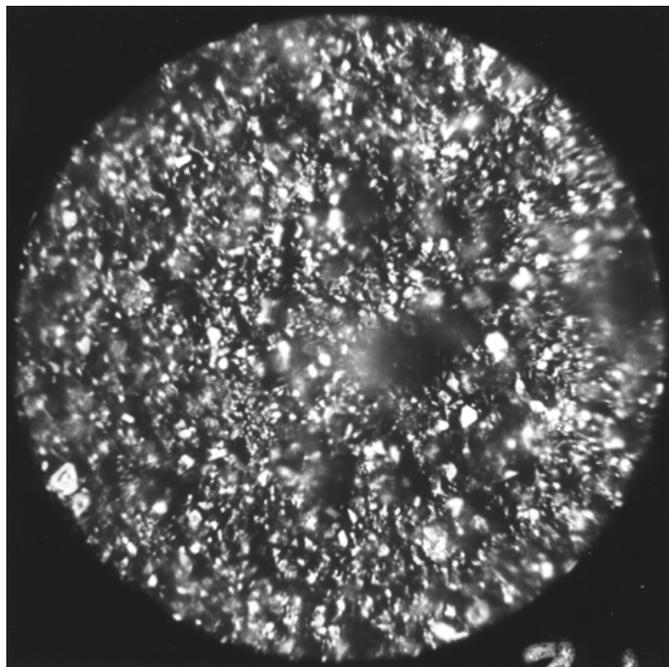
| Номер грани   | Номер партии | $\bar{x}$ , ед. | $\sigma$ , ед. | $\nu$  | $S$    |        |        | $\frac{ t }{\sigma_t}$ |      |       |
|---------------|--------------|-----------------|----------------|--------|--------|--------|--------|------------------------|------|-------|
|               |              |                 |                |        |        |        |        |                        |      |       |
| Базовая грань | I            | 0,0585          | 0,03298        | 0,5636 | 0,025  | –      | 0,0109 | 62,4                   | –    | 0,568 |
|               | II           | 0,0819          | 0,0565         | 0,6890 | 0,0245 | 0,0216 | –      | 62,4                   | 8,56 | –     |
|               | III          | 0,0550          | 0,0193         | 0,3490 | –      | 0,0216 | 0,0109 | –                      | 8,56 | 0,568 |

Анализируя графики распределения относительных площадей касания базовых граней (рис. 2.8) можно сделать вывод, что грани пластин партии III являются наиболее благоприятными, с точки зрения стабильности показателей (табл. 2.4). Кроме того, анализ расчетных значений контурных площадей касания опорных граней пластин позволяет сделать вывод, что они отличаются от номинальных и составляют в среднем 32,9 % и не превышают 51 % у трехгранных пластин, 34,7 % и 43,5 % у четырехгранных, 23,4 % и 37,3 % у пятигранных пластин, соответственно.

Для более полного представления состояния поверхности опорной грани СМП проведен их микроскопический анализ. На рис. 2.9 представлена микрофотография с увеличением в 500 раз. На приведенной фотографии можно видеть, что поверхность опорной грани имеет неравномерную топографию. Наблюдаются углубления больших размеров на фотографии в виде темных пятен. Картина поверхности подтверждает ранее полученные данные по исследованию площадей опорных граней пластин. На поверхности базовой грани пластины имеются углубления, которые наблюдаются и вблизи режущих кромок, где контакт пластины с опорной поверхностью державки резца особо влияет на жесткость инструмента.

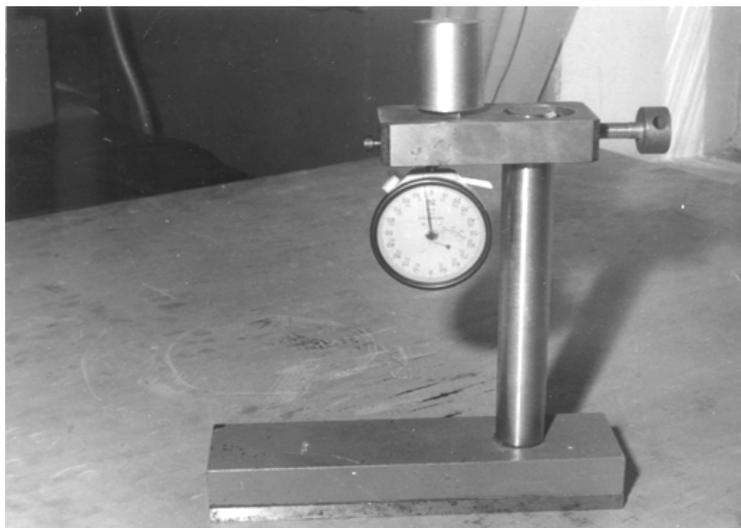
### 2.1.3. Плоскостность опорных граней СМП

Исследование плоскостности опорных граней пластин производилось по результатам измерения отклонений реальной поверхности от прилегающей плоскости.



*Рис. 2.9.* Микроструктура опорной грани поверхности СМПх500

Для измерения этих отклонений базовых граней было разработано и изготовлено специальное приспособление (рис. 2.10).



*Рис. 2.10.* Приспособление для измерения отклонения опорных поверхностей от прилегающей плоскости

Это приспособление состоит из контрольной плиты, рабочая поверхность которой имела отклонение от плоскостности 0,001 мм. В плите выполнено отверстие, диаметр которого был равен 0,2 мм. В этом отверстии перемещалась контрольная игла, которая крепилась в измерительной головке (рис. 2.10). Погрешность отсчета измерительной головки составляла 0,5 мкм.

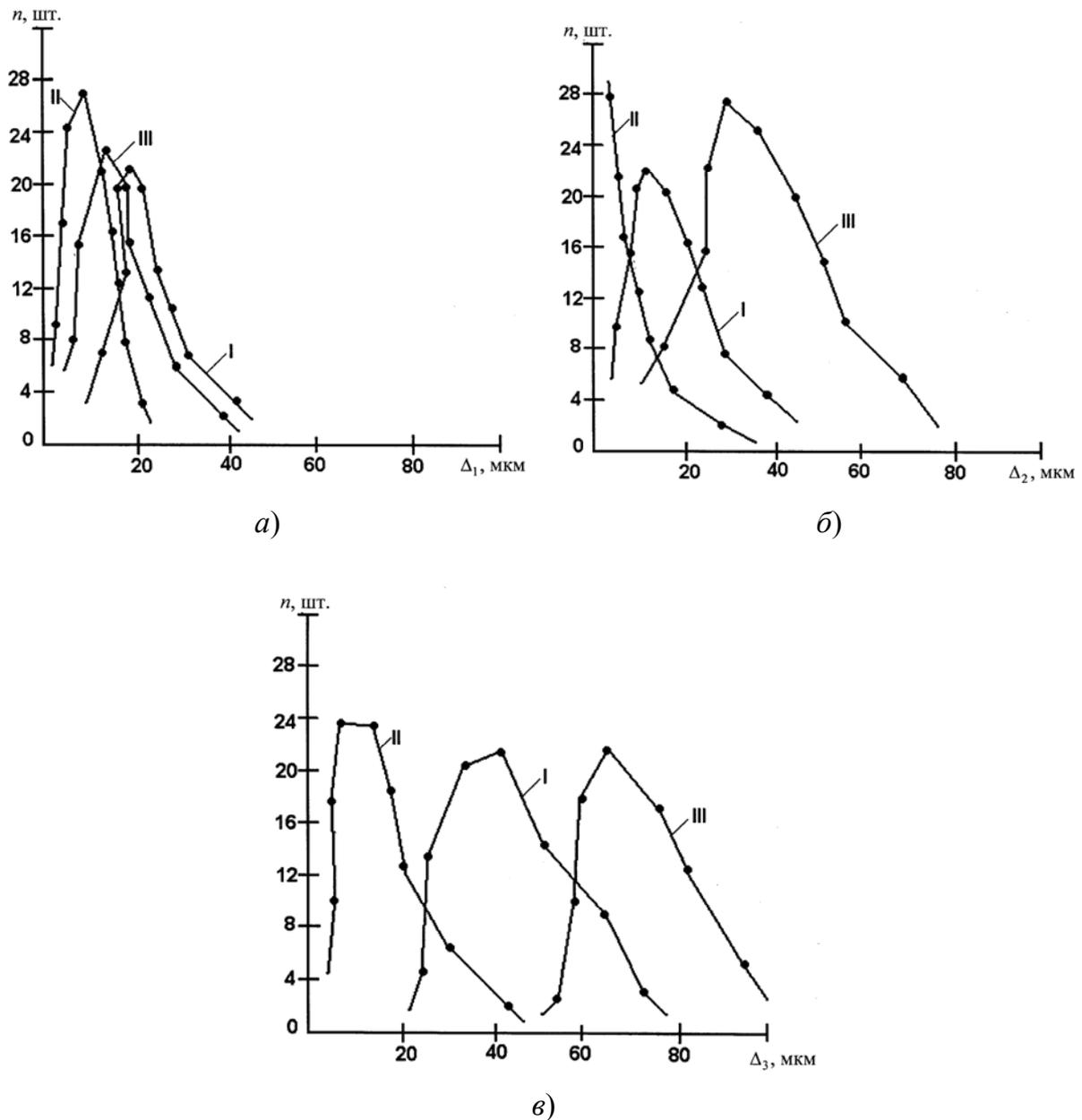


Рис. 2.11. Графики распределения отклонения от плоскостности опорной грани режущих пластин в зонах:  
 а – на расстоянии 1/3 длины пластины; б – от 1/3 до 2/3; в – свыше 2/3

На эталонную грань контрольной плиты устанавливали режущую пластину, которую прижимали металлическим цилиндром, что обеспечивало постоянство усилия в контакте и неизменность базирования.

Результаты измерений пластин форм 0139А приведены в таблице 2.5. Кроме того, по результатам измерений были построены графики распределения значений отклонений от прилегающей плоскости в трех рассматриваемых зонах: первая зона располагалась на расстоянии до  $1/3$  длины пластины от режущей кромки (рис. 2.11, а), вторая зона – от  $1/3$  до  $2/3$  длины пластины (рис. 2.11, б) и третья зона – от  $2/3$  до  $1,0$  длины пластины (рис. 2.11, в).

Анализ графиков позволил заключить, что экспериментальные распределения в основном согласуются с теоретическими кривыми нормального распределения (табл. 2.5), кроме пластин партии II. В зоне 2 пластин партии II (рис. 2.11, б) распределение отклонения от плоскостности подчиняется экспоненциальному закону.

Значения отклонений от прилегающей плоскости базовых граней трех-, четырех-, пятигранных пластин анализировали по схеме, представленной на рис. 2.12 в определенных зонах по точкам, координаты которых приведены в таблице 2.6. Первая зона располагалась на  $1/3$  расстояния от вершины пластины до отверстия, вторая ограничивалась

окружностями, диаметры которых составляли  $D_{\min} = \frac{D + D_0}{2}$ ,  $D_{\max} = D$ ,

третья – окружностями  $D_{\max} = \frac{D + D_0}{2}$ ,  $D_{\min} = D_0$ .

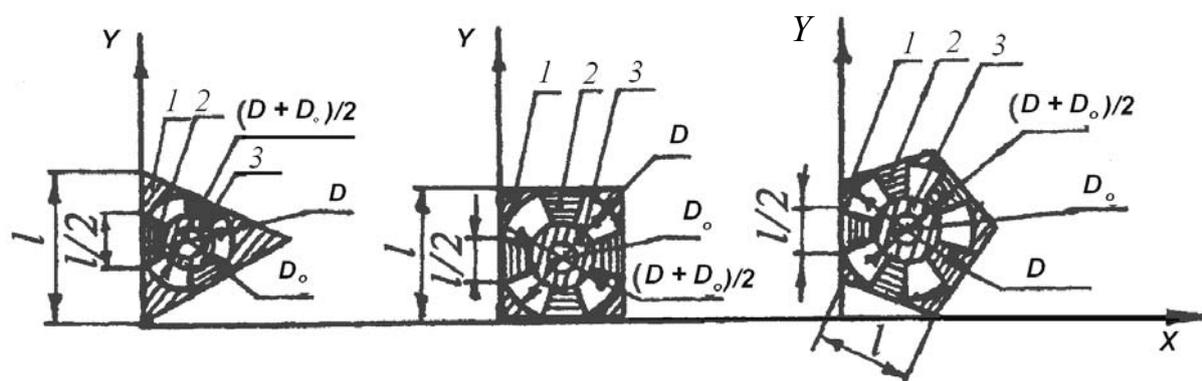


Рис. 2.12. Схемы расположения зон анализа отклонений от прилегающей плоскости базовых граней пластин:

1, 2, 3 – номера зон

Таблица 2.5

## Анализ результатов измерений контролируемого параметра

| Контролируемый параметр | Зона | Номер партии | $\bar{X}$ | $\sigma$ | $v$   | $\chi^2$ | $S$  |      |      | $\frac{ f }{v_i}$ | Закон распределения   |
|-------------------------|------|--------------|-----------|----------|-------|----------|------|------|------|-------------------|---|
|                         |      |              |           |          |       |          |      |      |      |                   |   |
| ПЛОСКОСТНОСТЬ           | 1    | I            | 30,78     | 11,86    | 0,385 | 5,22     | —    | 6,25 | —    | —                 | $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 11,86}} e^{-\frac{(x-30,78)^2}{281,096}}$ |
|                         |      | II           | 1,0792    | 0,2612   | 0,242 | 7,31     | 5,59 | —    | 3,65 | —                 | $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 0,2612}} e^{-\frac{(x-1,079)^2}{1,352}}$  |
|                         |      | III          | 1,306     | 0,1691   | 0,129 | 7,2      | —    | 6,25 | —    | 2,98              | $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 0,169}} e^{-\frac{(x-1,306)^2}{3,42}}$    |
|                         | 2    | I            | 23,79     | 17,07    | 0,718 | 17,14    | 6,45 | —    | 7,01 | —                 | $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 17,07}} e^{-\frac{(x-23,79)^2}{582,69}}$  |
|                         |      | II           | 9,41      | 0,106    | —     | 6,30     | —    | —    | —    | —                 | $\varphi(x) = 0,106 e^{-0,106(x-5)}$  |
|                         |      | III          | 44,25     | 11,98    | 0,271 | 2,86     | —    | 7,01 | —    | 6,96              | $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 11,98}} e^{-\frac{(x-44,25)^2}{286,91}}$  |
|                         | 3    | I            | 39,06     | 15,27    | 0,391 | 5,73     | 6,67 | —    | 7,2  | —                 | $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 15,27}} e^{-\frac{(x-39,06)^2}{466,286}}$ |
|                         |      | II           | 17,75     | 9,07     | 0,511 | 13,59    | —    | —    | —    | —                 | $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 9,07}} e^{-\frac{(x-17,75)^2}{164,376}}$  |
|                         |      | III          | 62,40     | 11,69    | 0,127 | 19,6     | —    | 7,2  | —    | 15,52             | $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 11,69}} e^{-\frac{(x-62,40)^2}{273,396}}$ |

Таблица 2.6

## Координаты контрольных точек

| Форма пластины | Координаты | Номера контрольных точек |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----------------|------------|--------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
|                |            | 1                        | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| Трехгранные    | X          | 3                        | 16 | 3  | 9  | 9  | 3  | 5  | 12 | 5  |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|                | Y          | 18                       | 10 | 4  | 14 | 6  | 10 | 14 | 10 | 6  |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| Четырехгранные | X          | 2                        | 14 | 14 | 2  | 8  | 14 | 8  | 2  | 4  | 12 | 12 | 4  | 8  | 12 | 8  | 8  |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|                | Y          | 14                       | 14 | 2  | 2  | 14 | 8  | 2  | 8  | 12 | 12 | 4  | 4  | 12 | 8  | 4  | 4  |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| Пятигранные    | X          | 2                        | 11 | 16 | 11 | 2  | 8  | 14 | 14 | 8  | 2  | 5  | 10 | 14 | 10 | 5  | 9  | 12 | 12 | 9  | 2  | 6  | 9  | 13 | 9  | 6  |
|                | Y          | 14                       | 17 | 10 | 2  | 6  | 16 | 14 | 16 | 4  | 10 | 13 | 15 | 10 | 5  | 6  | 14 | 12 | 8  | 6  | 10 | 12 | 13 | 10 | 6  | 8  |

Результаты исследований пластин с формами 01176404, 03171405, 10171405 приведены в таблице 2.7 и на рис. 2.13.

Анализ средних значений отклонений от плоскостности (табл. 2.7) позволяет заключить, что наименьшее значение отклонения наблюдается у пластин трехгранной формы во всех трех зонах измерения. Пластины пятигранной формы имеют наибольшие отклонения средних значений во всех трех зонах. Среднее квадратическое отклонение в зоне 1 пластин трехгранной формы имеет наименьшее значение, в четырехгранных пластинах оно больше в 4,6 раза, у пятигранных пластин  $\sigma$  больше в 4,1 раза чем у трехгранных пластин. Значения среднего квадратического отклонения у пластин трех форм в зоне 3 у четырехгранных и пятигранных пластин незначительно отличаются друг от друга, а у трехгранных пластин оно меньше в 1,9 раза. В зоне 2 наибольшее значение  $\sigma$  у пластин четырехгранных, наименьшее – у трехгранных.

Анализ значений коэффициента вариации позволяет заключить, что наименьшее рассеяние отклонений от плоскостности наблюдается в первой зоне измерения у пятигранных пластин ( $v = 0,39$ ) и большее – у трехгранных пластин ( $v = 0,925$ ). В зоне 2 значения коэффициента вариации: у трехгранных и четырехгранных пластин отличаются незначительно, а у пятигранных пластин оно меньше в 1,6 раза. Аналогично в зоне 3, где значения коэффициента вариации у трехгранных и четы-

рехгранных пластинах близки по величине, у пятигранных пластин оно имеет минимальное значение, которое меньше в 1,48 раза чем у пластин трех- и четырехгранных форм.

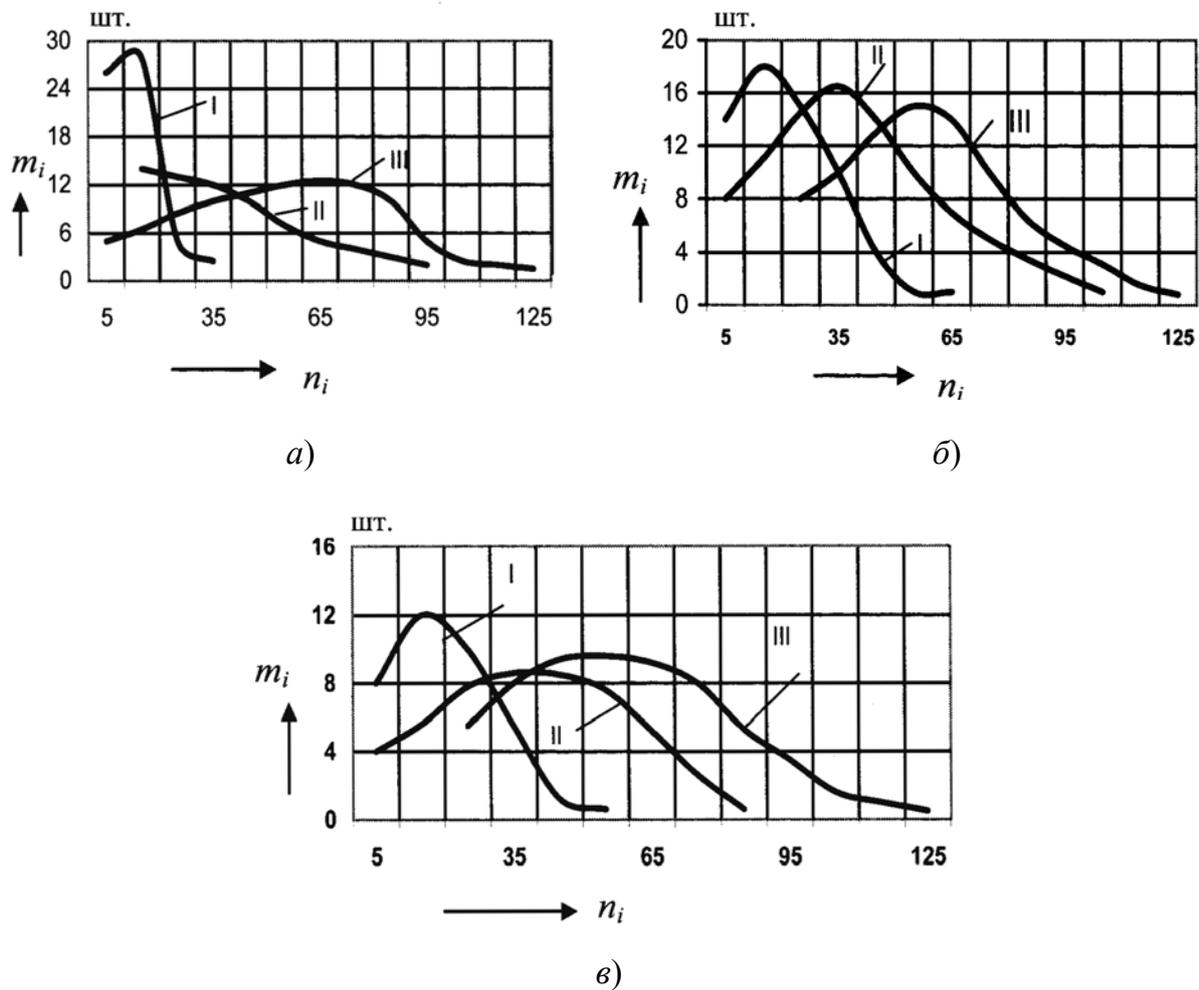


Рис. 2.13. Кривые плотности распределения значений отклонений от прилегающей плоскости опорной грани пластин партий I, II, III в зонах: 1 (а); 2 (б); 3 (в)

Анализ средних значений результатов измерений отклонения от плоскостности по критерию Стьюдента  $S$  позволяет заключить, что значимость средних у трехгранных и четырехгранных пластин в зоне измерения 1 ниже, чем у четырех- и пятигранных пластин. Сравнивая этот показатель у трех- и пятигранных пластин можно отметить, что он выше, чем у трех- и четырехгранных. Анализ значений критерия  $S$  в зоне измерения 2 показал, что у трех- и пятигранных пластин он выше чем у трех- и четырехгранных. В зоне измерения 3 наибольшее значение критерия  $S$  наблюдаются у четырех- и пятигранных пластин,

а промежуточное по значению  $S$  приходится на трех- и пятигранные пластины и низкие показатели  $S$  наблюдаются у трех- и четырехгранных пластин.

Сравнение средних значений по критерию Романовского показывает, что: четырех- и пятигранные пластины имеют наименьшее значение критерия  $t/\sigma$  в зоне измерения 1, чем трех- и пятигранные пластины. Анализируя значения критерия Романовского в зоне измерения 2 можно заключить, что наименьшее значение имеют пластины четырех- пятигранной формы, а у партий трех- и пятигранных пластин эти значения в 8,2–8,4 раза больше. В зоне 3 критерий Романовского имеет наименьшее значение у четырех- и пятигранных пластин и наибольшее – у трех- и пятигранных.

По известным методикам выбрали наиболее согласующиеся законы распределения исследуемого параметра. Кроме того установлено, что значения отклонений от прилегающей плоскости базовых граней пластин трех партий подчиняются закону Гаусса на 55,6 %, Пуассона – 33,3 %, Максвелла – 11,1 %.

Выявлено, что наибольшее значение отклонения (69 мкм) характерно для пластин пятигранной формы, наименьшее (до 23 мкм) – наблюдается у пластин трехгранной формы.

Сравнивая кривые плотности распределения значений отклонения от прилегающей плоскости можно сделать вывод, что наибольшей стабильностью по плоскостности обладают пластины всех партий в зоне 3. Лучшими по качеству являются пластины партии I, т. к. у них наблюдаются наименьшие значения отклонений от плоскостности с относительно небольшим варьированием этих параметров.

Кроме того, по полученным данным построили гистограммы распределения значений отклонений от прилегающей плоскости для каждой элементарной площадки.

По гистограммам с заданной вероятностью находили максимальное, минимальное и рассчитывали среднее значения отклонений от плоскостности.

Предварительно разбив диапазоны численных значений на интервалы получили топографии опорной грани с заданной вероятностью, которые представлены на рис. 2.14–2.16 для пятигранных пластин.

Таблица 2.7

## Анализ результатов измерений отклонений от плоскостности

| Номер партии | Зона | $\bar{x}$ | $\sigma$ | $\nu$ | $\chi^2$ | $S$   |       |       | $\frac{ t }{\sigma_t}$ |     |     | Закон распределения  |
|--------------|------|-----------|----------|-------|----------|-------|-------|-------|------------------------|-----|-----|--|
|              |      |           |          |       |          |       |       |       |                        |     |     |  |
| I            |      | 7,1       | 6,527    | 0,925 | 26,8     | 9,1   | —     | 12,57 | 4,84                   | —   | 5,8 | $P_{(m_i)} = \frac{7,1^{m_i} e^{-7,1}}{m_i!}$  |
| II           | I    | 42,75     | 30,39    | 0,71  | —        | 9,1   | 14,4  | —     | 4,84                   | 2,1 | —   | $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-42,75)^2}{2 \cdot 30,39^2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-42,75)^2}{2 \cdot 14,4^2}}$ |
| III          |      | 69,63     | 27,28    | 0,39  | 15,4     | —     | 14,4  | 12,57 | —                      | 2,1 | 5,8 | $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 27,28}} e^{-\frac{(x-69,63)^2}{2 \cdot 27,28^2}}$   |
| I            |      | 23,2      | 15,7     | 0,676 | 28,4     | 10,39 | —     | 8,9   | 4,09                   | —   | 4,2 | $P_{(m_i)} = \frac{23,2^{m_i} e^{-23,2}}{m_i!}$  |
| II           | 2    | 44,63     | 27,41    | 0,614 | —        | 10,39 | 10,26 | —     | 4,09                   | 0,5 | —   | $P_{(m_i)} = \frac{44,63^{m_i} e^{-44,63}}{m_i!}$  |
| III          |      | 56,75     | 22,46    | 0,395 | 1,5      | —     | 10,26 | 8,9   | —                      | 0,5 | 4,2 | $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 22,46}} e^{-\frac{(x-56,75)^2}{2 \cdot 22,46^2}}$   |
| I            |      | 22,45     | 12,83    | 0,57  | —        | 6,83  | —     | 6,9   | 4,44                   | —   | 7,3 | $F(t) = \int_0^t \frac{4,83}{\sqrt{2\pi \cdot 22,46}} e^{-\frac{(x-56,75)^2}{2 \cdot 22,46^2}} dt$   |
| II           | 3    | 48,37     | 25,46    | 0,526 | 11,6     | 6,83  | 7,23  | —     | 4,44                   | 2,9 | —   | $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 25,46}} e^{-\frac{(x-48,37)^2}{2 \cdot 25,46^2}}$   |
| III          |      | 69,33     | 24,76    | 0,357 | 10,6     | —     | 7,23  | 6,9   | —                      | 2,9 | 7,3 | $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 24,76}} e^{-\frac{(x-69,33)^2}{2 \cdot 24,76^2}}$   |

Топографии по максимальным значениям представлены в первом ряду, по минимальным значениям – в среднем ряду и по средним значениям – в нижнем.

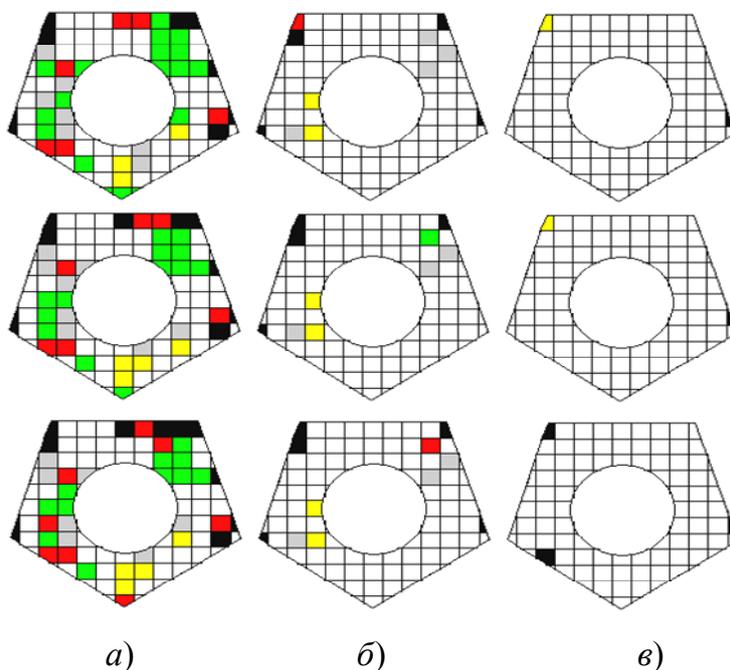


Рис. 2.14. Топографии опорной грани пятигранных пластин с вероятностью 27 % (а), 33 % (б), 50 % (в)

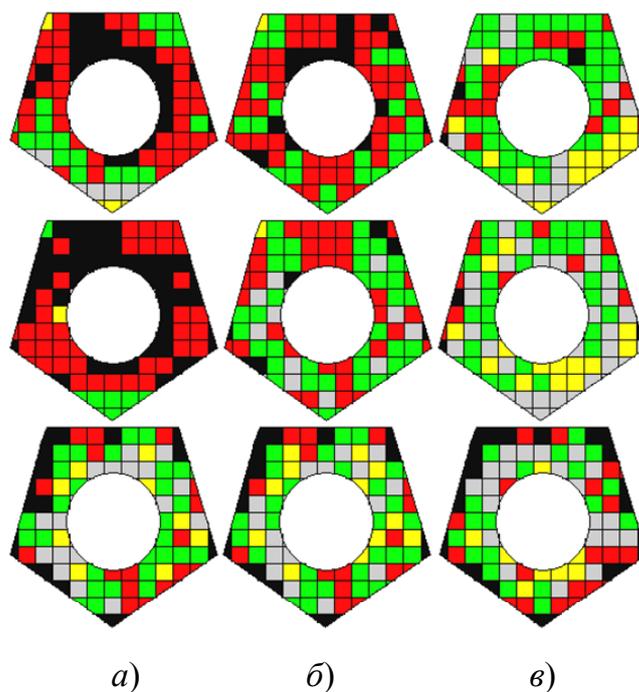


Рис. 2.15. Топографии опорной грани пятигранных пластин с вероятностью 3 % (а), 7 % (б), 10 % (в)

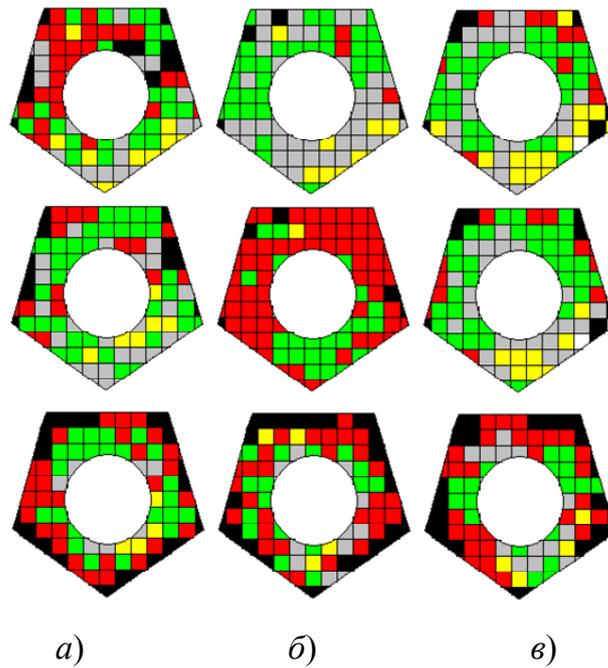


Рис. 2.16. Топографии опорной грани пятигранных пластин с вероятностью 13 % (а), 17 % (б), 26 % (в)

На рис. 2.17, 2.18 представлены топографии опорной грани четырехгранных пластин, причем в первом ряду представлены топографии по максимальным значениям, в среднем – по средним значениям, а в нижнем – по минимальным.

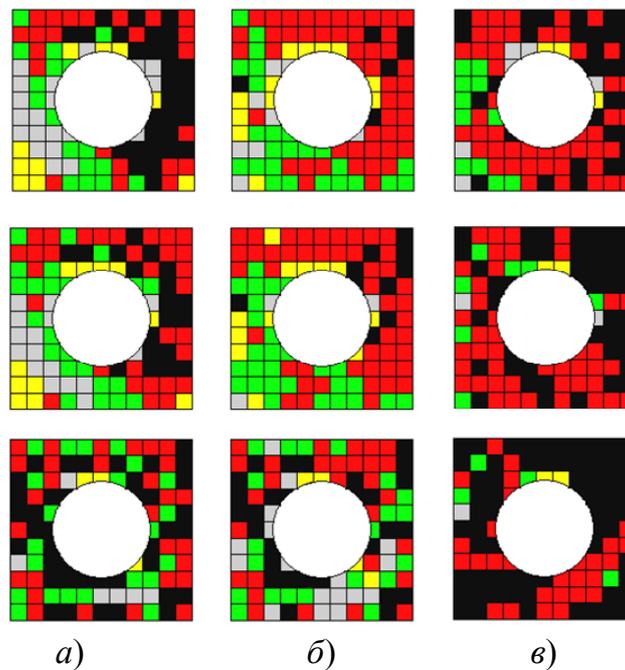


Рис. 2.17. Топографии опорной грани четырехгранных пластин с вероятностью 7,7 % (а), 15,4 % (б), 23,07 % (в)

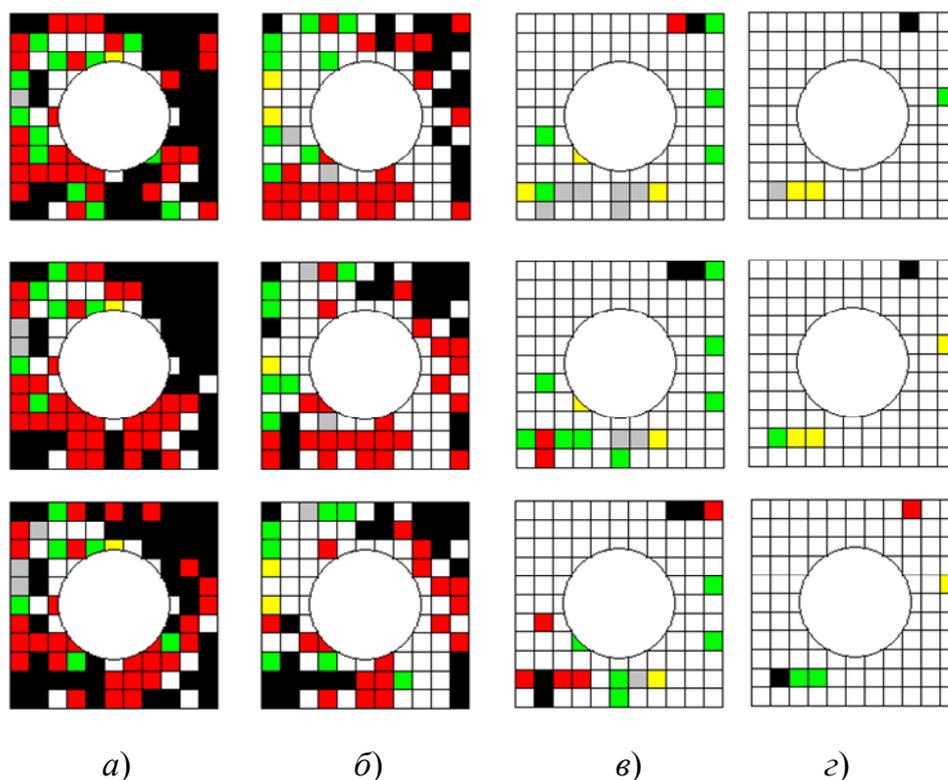


Рис. 2.18. Топографии опорной грани четырехгранных пластин с вероятностью 30,77 % (а), 38,46 % (б), 46,15 % (в), 53,85 % (з)

Таким образом, полученные топографии являются аппроксимированными реальными поверхностями, готовыми для применения их в расчетных схемах.

## 2.2. Разработка композиционного полимерного покрытия для базовых граней СМП сборного режущего инструмента

Одним из приемлемых способов повышения износостойкости режущего инструмента и улучшения условий контакта между режущей пластиной и державкой является применение композиционного покрытия, которое наносят на базовые поверхности пластин. С учетом этого к физико-механическим показателям композиционного материала должны предъявляться определенные требования, обеспечивающие возможность эксплуатации покрытия при высоких нагрузках и в широком интервале температур. Как показывают исследования, таким требованиям могут отвечать материалы, созданные на основе эпокси-полиэфирных смол. Анализ имеющихся литературных данных пока-

зал, что композиции на основе эпоксидных и полиэфирных смол обладают рядом положительных свойств, которые позволяют использовать их в машиностроении [105]–[113]. При введении в эпоксидные смолы добавок различных модификаторов, разбавителей, наполнителей, пластификаторов можно получить множество эпоксидных композиций с повышенными эксплуатационными показателями, а также создать новые материалы с заданным комплексом свойств. Эпоксидно-полиэфирные композиции имеют ряд преимуществ по сравнению с материалами, из которых они получены. От эпоксидных композиций эпоксидно-полиэфирные отличаются низкой вязкостью, обеспечивающей хорошую пропитку наполнителей с возможностью получения высоконаполненных композиций, а также реакционной способностью, повышенными прочностными показателями и более высокой теплоустойчивостью. Применение определенных отверждающих систем, позволяющих вести процесс отверждения при обычных температурах, дает реальные возможности применения полученных покрытий в широких производственных масштабах.

### **2.2.1. Анализ процесса формирования эпоксиполиэфирного материала покрытия**

Эпоксидную смолу использовали в качестве связующего, т. к. она обладает высокой адгезией к металлам, малой усадкой в процессе отверждения, достаточно высокой прочностью и жесткостью.

Условная вязкость полиэфирной смолы по вискозиметру ВЗ-4 при температуре  $293 \pm 0,5$  К составляет 32–40, что соответствует ГОСТ 8420-74.

Для отверждения и пластифицирования материала применяли полиамид Л-20, вязкость которого при температуре 293 К равнялась 7–10 Па·с. Данный отвердитель применяется для отверждения эпоксидных смол. Для отверждения полиэфирной смолы была использована гидроперекись изопропилбензола (гипериз) ГПК-1. Инициатор отверждения ГПК-1 содержал 7,43 % активного кислорода и представлял собой 94–96%-ную жидкость, плотность которой составляла  $1,06 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>.

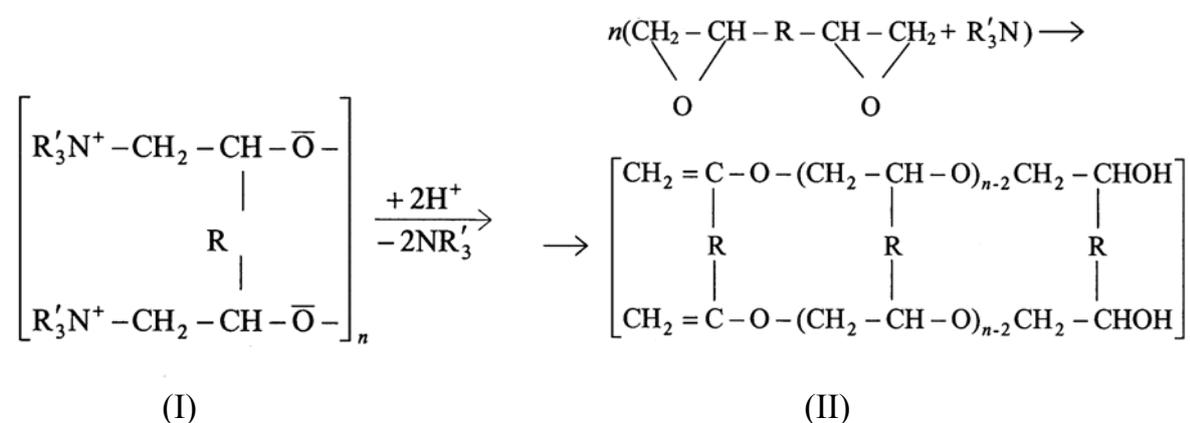
Процесс отверждения полиэфирных смол, содержащих стирол, занимает 10–15 суток. Поэтому для сокращения срока отверждения в состав покрытия вводили ускоритель нафтенат кобальта. В качестве

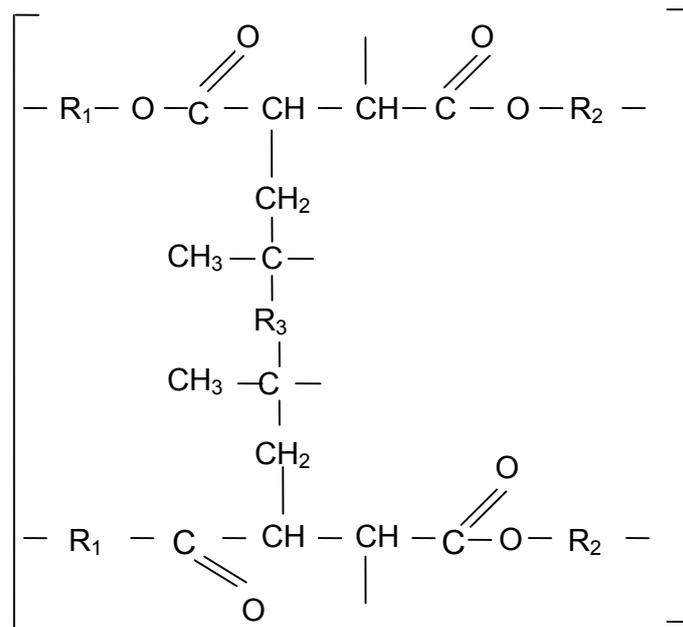
наполнителя использовали карбид кремния зеленый. Размер частиц порошка карбида кремния зеленого  $\delta$  выбирали равным  $(0,09-0,1)\Delta$ , где  $\Delta$  – отклонение от плоскостности покрываемой базовой грани СМП [112].

В полиэфирно-эпоксидных композициях на основе диановых смол модифицированные стирольные полиэфирные смолы выполняют роль пластификаторов. Химическое их взаимодействие в процессе отверждения с эпоксидными олигомерами может идти лишь за счет взаимодействия концевых гидроксильных и карбоксильных групп полиэфиров с эпоксидными группами. Однако при модификации эпоксидных смол малеинатакрилатными полиэфирными смолами получают композиции с улучшенными показателями [114], [115].

Эпоксидные смолы в процессе холодного отверждения способны взаимодействовать с аминосоединениями без выделения побочных продуктов по механизмам полиприсоединения или полимеризации. В результате этих реакций происходит разрыв трехчленного эпоксидного кольца, и эпоксидные олигомеры превращаются в отвержденные полимеры (с минимальной усадкой).

Отверждение эпоксидного олигомера на холоду по механизму ионной (анионной) полимеризации происходит в результате каталитического воздействия третичных аминов ( $R'_3N$ ) или третичных аминоспиртов и приводит к образованию полимера (I), звенья которого связаны атомами кислорода [116].





(III)

Полимер (I) за счет последующей реакции обрыва цепи с отщеплением аминного катализатора переходит в полимер (II), содержащий концевые двойные связи, образование которых при анионной полимеризации эпоксидных соединений подтверждено экспериментально многими авторами.

Для проведения реакции отверждения полиэфирной смолы на холоду использовался перекисный инициатор (перекиси бензола и метилэтилкетона, гидроперекись кумола – гипериз) в сочетании с ускорителем отверждения, способствующим распаду инициатора на свободные радикалы в отсутствие нагревания. В качестве ускорителей отверждения использовали соли металлов переменной зарядности ( $\text{Co}^{2+}$ ,  $\text{Mn}^{2+}$ ). Так как большинство солей металлов нерастворимы в полиэфирных смолах, то ускорители используются в виде растворов в мономерах (НК-2 – раствор нафтената кобальта в нетоксичном и нелетучем соединении – триметакрилате триэтаноламина). Мономеры-растворители солей кобальта, содержащие двойные связи, также вступают в реакцию сополимеризации с олигоэфирмалеинатом и олигоэфиркрилатом в процессе их совместного отверждения. Для отверждения полиэфирных смол при комнатной температуре использовался инициатор – гипериз в сочетании с ускорителем. Олигоэфирмалеинат и олигоэфиркрилат также вступают в реакцию сополимеризации с двойными связями эпоксидного полимера (II), образующегося под действием третичных аминов на эпоксидный олигомер. Такая реакция

тройной сополимеризации (терполимеризации) олигоэфирмалеината, олигоэфиркрилата и эпоксидного олигомера может осуществляться под действием той же иницирующей системы (гипериз + ускоритель), которая вызывает отверждение полиэфирной смолы в результате сополимеризации двух ее компонентов (олигоэфирмалеината и олигоэфиркрилата). Реакция отверждения полиэфирной смолы протекает по радикально-цепному механизму под воздействием иницирующих веществ перекисного типа. В процессе отверждения происходит сополимеризация ненасыщенного полиэфира – олигоэфирмалеината с ненасыщенным мономером (ТГМ-3), приводящая к образованию пространственно-сшитого полимера (III). Следовательно, реакция образования эпоксиполиэфирного сополимера на холоду требует использования трехкомпонентной иницирующей системы, состоящей из третичного амина, вызывающего раскрытие трехчленного эпоксидного цикла и полимеризацию эпоксидного олигомера с образованием двойных связей в эпоксиполимере (II), и перекисного инициатора с ускорителем, обеспечивающим терполимеризацию олигоэфирмалеината, олигоэфиркрилата и эпоксиполимера (II). Усложнение структуры полимера за счет химического связывания полимеров (II) и (III) в результате реакции сополимеризации положительно сказывается на многих эксплуатационных свойствах образующихся эпоксидно-полиэфирных сополимерах.

Анализ результатов инфракрасной спектроскопии позволил определить структурные изменения, происходящие в процессе структурирования материалов. ИК-спектры регистрировали при помощи двухлучевого спектрометра UR-20 в области частот от 4 до 40  $\text{м}^{-1}$  по прямому и дифференциальному методам [114], [115], [117].

Для снятия спектра на «просвет» оптимальную толщину полимерных материалов (пленок) выбрали по литературным данным и готовили по известным методикам. Идентификацию и анализ спектров осуществляли с использованием имеющихся данных по ИК-спектрам [115].

Качественный структурно-групповой анализ эпоксидной, полиэфирной смол и композиционного покрытия производился снятием ИК-спектров в интервале 2700–1700  $\text{см}^{-1}$  (рис. 2.19).

Наибольшие поглощения в полиэфирной, эпоксидной смолах и в материале композиционного покрытия наблюдаются в области 1700–1800  $\text{см}^{-1}$ . Причем в полиэфирной смоле наибольшее поглощение происходит в области 1800  $\text{см}^{-1}$ , в эпоксидной смоле – в области 1780  $\text{см}^{-1}$ , в композиционном материале покрытия максимальная полоса поглощения смещается в область 1730  $\text{см}^{-1}$ .

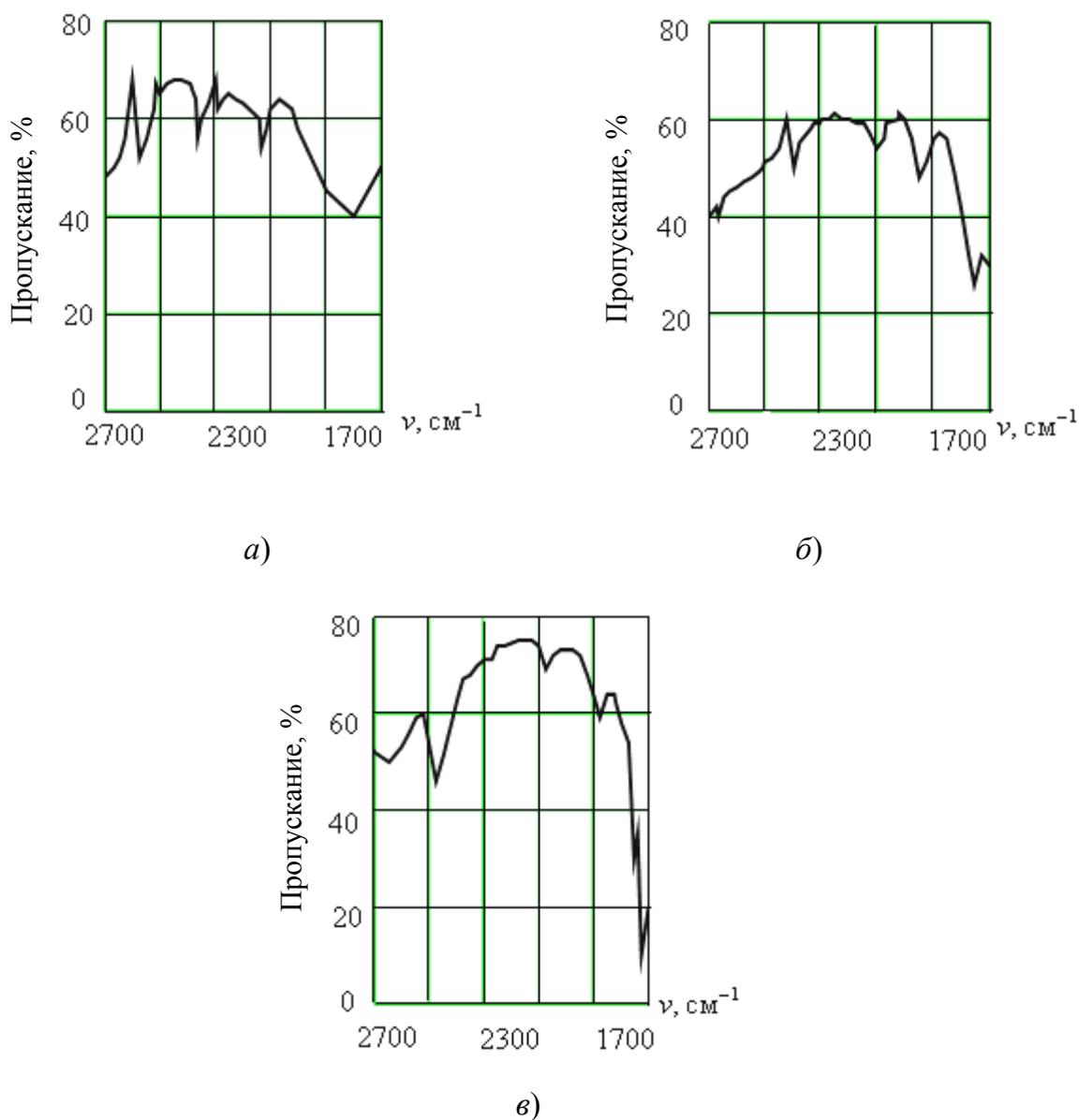


Рис. 2.19. Кривые ИК-спектров:  
 а – полиэфирной смолы; б – эпоксидной смолы;  
 в – композиционного материала

Смещение полосы поглощения позволяет заключить о прохождении реакции взаимодействия компонентов с образованием нового материала. Данные поглощения являются характерными валентным колебаниям карбонильной группы  $C=O$ , а смещение пика указывает на взаимодействие групп  $-C=C-$ . В области  $1900-2100\text{ см}^{-1}$  в эпоксидной смоле и в композиционном материале наблюдаются полосы поглощения меньшей интенсивности. В эпоксидной смоле поглощение происходит в областях  $1860\text{ см}^{-1}$  и  $2100\text{ см}^{-1}$ , в композиционном материале имеется один пик поглощения в области  $1890\text{ см}^{-1}$ . В области  $2120\text{ см}^{-1}$

и  $2300\text{ см}^{-1}$  у полиэфирной смолы наблюдаются две полосы поглощения, которые характерны для структуры гидроксильных групп, однако в композиционном покрытии они полностью исчезают, что также позволяет заключить о взаимодействии гидроксильных групп.

В области  $2300\text{--}2700\text{ см}^{-1}$  в исходных материалах и композиционном материале наблюдаются полосы поглощения разной интенсивности. В эпоксидной смоле в области  $2400\text{--}2690\text{ см}^{-1}$  наблюдаются полосы поглощения, характерные для аминогруппы. В композиционном покрытии данные полосы исчезают полностью, однако появляется полоса поглощения в области  $2480\text{ см}^{-1}$ . Смещение пика указывает на взаимодействие двух материалов с образованием нового.

### **2.2.2. Оптимизация состава покрытия спеченных многогранных пластин по критерию адгезионной прочности к ним**

Планирование эксперимента по составу покрытия осуществляли с применением ротатабельных планов второго порядка. В качестве варьируемых параметров были приняты: содержание (мас. ч.) полиэфирной смолы, наполнителя и отвердителя-пластификатора. В качестве функции оптимизации выбрана адгезионная прочность.

Оценку прочности адгезионного соединения полимер-металл производили по силе отрыва покрытия от металла. Исследуемые образцы имели цилиндрическую форму и соединялись полимером встык (торцами). Для закрепления на испытательной машине на образцах выполняли головки Т-образной формы. При нанесении покрытия толщину его регулировали изменяя сжимающее образцы усилие [107].

В качестве материала спеченных многогранных пластин использовали сплавы марок Т15К6 и ВК8.

Уровни факторов и интервалы варьирования выбрали по результатам предварительных поисковых экспериментов. В качестве математической модели было выбрано уравнение второго порядка.

Центральный ротатабельный план второго порядка составляли по известной методике полного факторного эксперимента типа  $k = 2^3$ , шести опытов в «звездных точках» и шести опытов в центре плана. Величину «звездного плеча» выбирали равной 1,682.

Согласно плану эксперимента, было проведено 20 опытов. Каждый опыт осуществляли трижды. Матрицы планирования экспериментов для двух материалов пластин с покрытиями представлены в таблицах 2.8 и 2.9.

Таблица 2.8

**Результаты измерения контролируемых параметров  
(для материала Т15К6)**

| Показатели            |        | Независимые переменные      |                        |                      | Адгезия, МПа |        |       |
|-----------------------|--------|-----------------------------|------------------------|----------------------|--------------|--------|-------|
|                       |        | Поли-эфирная смола, мас. ч. | Пластификатор, мас. ч. | Наполнитель, мас. ч. | 1            | 2      | 3     |
| Уровни варьирования   | +1,682 | 102                         | 41                     | 105                  |              |        |       |
|                       | +1,00  | 70                          | 35                     | 85                   |              |        |       |
|                       | 0      | 50                          | 25                     | 55                   |              |        |       |
|                       | -1,00  | 30                          | 15                     | 25                   |              |        |       |
|                       | -1,682 | 10                          | 9                      | 5                    |              |        |       |
| Интервал варьирования |        | 20                          | 10                     | 30                   |              |        |       |
| Номера опытов         | 1      | +                           | +                      | +                    | 17,41        | 17,317 | 17,10 |
|                       | 2      | -                           | +                      | +                    | 20,60        | 20,001 | 19,12 |
|                       | 3      | +                           | -                      | +                    | 1,30         | 1,277  | 1,601 |
|                       | 4      | -                           | -                      | +                    | 1,60         | 1,504  | 1,811 |
|                       | 5      | +                           | +                      | -                    | 18,15        | 18,401 | 18,20 |
|                       | 6      | -                           | +                      | -                    | 21,30        | 21,203 | 21,00 |
|                       | 7      | +                           | -                      | -                    | 1,30         | 1,39   | 1,58  |
|                       | 8      | -                           | -                      | -                    | 1,11         | 1,60   | 1,70  |
|                       | 9      | 1,682                       | 0                      | 0                    | 6,87         | 6,96   | 6,28  |
|                       | 10     | 0                           | 1,682                  | 0                    | 29,81        | 29,80  | 21,97 |
|                       | 11     | 0                           | 0                      | 1,682                | 6,48         | 6,38   | 6,60  |
|                       | 12     | -1,682                      | 0                      | 0                    | 7,99         | 7,93   | 7,84  |
|                       | 13     | 0                           | -1,682                 | 0                    | 6,81         | 2,92   | 4,12  |
|                       | 14     | 0                           | 0                      | -1,682               | 7,01         | 7,43   | 7,62  |
|                       | 15     | 0                           | 0                      | 0                    | 6,81         | 6,59   | 6,50  |
|                       | 16     | 0                           | 0                      | 0                    | 6,548        | 6,55   | 6,79  |
|                       | 17     | 0                           | 0                      | 0                    | 6,9013       | 6,58   | 6,68  |
|                       | 18     | 0                           | 0                      | 0                    | 6,72         | 6,53   | 6,50  |
|                       | 19     | 0                           | 0                      | 0                    | 6,895        | 6,59   | 6,60  |
|                       | 20     | 0                           | 0                      | 0                    | 6,589        | 6,56   | 6,82  |

Таблица 2.9

**Результаты измерения контролируемых параметров  
(для материала ВК8)**

| Показатели            |        | Независимые переменные     |                        |                      | Адгезия, МПа |       |        |
|-----------------------|--------|----------------------------|------------------------|----------------------|--------------|-------|--------|
|                       |        | Полиэфирная смола, мас. ч. | Пластификатор, мас. ч. | Наполнитель, мас. ч. | 1            | 2     | 3      |
| Уровни варьирования   | +1,682 | 102                        | 41                     | 105                  |              |       |        |
|                       | +1,00  | 70                         | 35                     | 85                   |              |       |        |
|                       | 0      | 50                         | 25                     | 55                   |              |       |        |
|                       | -1,00  | 30                         | 15                     | 25                   |              |       |        |
|                       | -1,682 | 10                         | 9                      | 5                    |              |       |        |
| Интервал варьирования |        | 20                         | 10                     | 30                   |              |       |        |
| Номера опытов         | 1      | +                          | +                      | +                    | 9,402        | 9,55  | 9,6101 |
|                       | 2      | -                          | +                      | +                    | 12,617       | 12,72 | 12,5   |
|                       | 3      | +                          | -                      | +                    | 1,007        | 0,91  | 1,12   |
|                       | 4      | -                          | -                      | +                    | 1,02         | 1,19  | 1,24   |
|                       | 5      | +                          | +                      | -                    | 9,661        | 9,67  | 9,84   |
|                       | 6      | -                          | +                      | -                    | 12,812       | 12,27 | 12,81  |
|                       | 7      | +                          | -                      | -                    | 0,986        | 0,91  | 0,89   |
|                       | 8      | -                          | -                      | -                    | 1,201        | 1,202 | 1,37   |
|                       | 9      | 1,682                      | 0                      | 0                    | 3,58         | 3,47  | 3,68   |
|                       | 10     | 0                          | 1,682                  | 0                    | 17,042       | 16,34 | 16,28  |
|                       | 11     | 0                          | 0                      | 1,682                | 4,1494       | 4,03  | 4,43   |
|                       | 12     | -1,682                     | 0                      | 0                    | 5,7621       | 5,77  | 5,49   |
|                       | 13     | 0                          | -1,682                 | 0                    | 0,3380       | 0,37  | 0,31   |
|                       | 14     | 0                          | 0                      | -1,682               | 4,450        | 4,155 | 3,90   |
|                       | 15     | 0                          | 0                      | 0                    | 4,521        | 4,65  | 4,40   |
|                       | 16     | 0                          | 0                      | 0                    | 4,401        | 4,31  | 4,62   |
|                       | 17     | 0                          | 0                      | 0                    | 4,406        | 4,43  | 4,32   |
|                       | 18     | 0                          | 0                      | 0                    | 4,106        | 4,03  | 4,04   |
|                       | 19     | 0                          | 0                      | 0                    | 4,707        | 4,05  | 4,18   |
|                       | 20     | 0                          | 0                      | 0                    | 4,37         | 4,02  | 4,11   |

В результате обработки экспериментальных данных были получены следующие уравнения регрессии:

– для сплава Т15К6:

$$Y = 1,69 + 2,55X_1 - 5,93X_2 - 1,99X_3 + 3,27X_1X_2 + 7,09X_1X_3 + 2,18X_2X_3 + 1,25X_1^2 + 6,98X_2^2 + 9,42X_3^2;$$

– для сплава ВК8:

$$Y = 3,0 - 4,55X_1 - 1,053X_2 - 3,54X_3 + 5,88X_1X_2 + 1,96X_1X_3 + 3,89X_2X_3 + 2,21X_1^2 + 1,23X_2^2 + 1,65X_3^2.$$

Рассмотрев в совокупности влияние всех составляющих и проанализировав результаты, были получены оптимальные по адгезии покрытия, составы которых приведены в таблице 2.10.

Таблица 2.10

#### Составы оптимальных покрытий

| Номер состава | Содержание компонентов (мас. ч.) |                   |               |             | Марка твердого сплава |
|---------------|----------------------------------|-------------------|---------------|-------------|-----------------------|
|               | Эпоксидная смола                 | Полиэфирная смола | Пластификатор | Наполнитель |                       |
| 1             | 100                              | 80                | 40            | 100         | Т15К6                 |
| 2             | 100                              | 50                | 40            | 55          | ВК8                   |

#### 2.2.3. Физико-механические свойства материала покрытия

Исследование физико-механических свойств полученных композиционных материалов осуществляли по следующим параметрам: пределу прочности при сжатии с определением модуля упругости, пределу прочности при растяжении, твердости материала по Виккерсу и плотности. Полученные данные сравнивали с данными основных материалов, входящих в состав композита, т. е. с физико-механическими свойствами эпоксидной и полиэфирной смол. При исследовании прочностных характеристик использовали типовые методики. Испытание материала на прочность при сжатии проводили на аппаратуре ConTex 94С. В процессе испытания производили запись нагрузки и деформации с построением графиков. По полученным данным определяли предел прочности и рассчитывали модуль упругости при сжатии. Образцы для испытания изготавливали по ГОСТ4651-78.

Размеры образцов были 6,7x7,8x10,8 мм, их получали методом свободной заливки в формы. Скорость испытания составляла

$V = 9,29$  мм/мин. Сравнительные кривые и диаграммы прочностных свойств исходных материалов (номера 1, 2, табл. 2.11) и исследуемых композиций (номера 3, 4, 5, табл. 2.11) с разным содержанием наполнителя и полиэфирной смолы представлены на рис. 2.20–2.24.

Таблица 2.11

Состав материала

| Номер образца | Содержание эпоксидной смолы (ЭД), мас. ч. | Содержание полиэфирной смолы (ПЭ), мас. ч. | Содержание наполнителя, мас. ч. |
|---------------|---|--|---------------------------------|
| 1             | 100                                       | –  | –                               |
| 2             | –   | 100  | –                               |
| 3             | 100                                       | 80   | 80                              |
| 4             | 100                                       | 50   | 55                              |
| 5             | 100                                       | 80   | 100                             |

При измерении получен (усредненный) предел прочности образцов материала (номера 3, 4, 5, табл. 2.11) при сжатии равный 465,6 МПа. Относительное изменение длины образца составило 18 %. Модуль упругости при сжатии равен 506,6 МПа.

Исходные материалы композиции имеют следующие значения предела прочности при сжатии: эпоксидная смола – 149 МПа, полиэфирная смола – 115 МПа, что значительно ниже значений предела прочности нового материала.

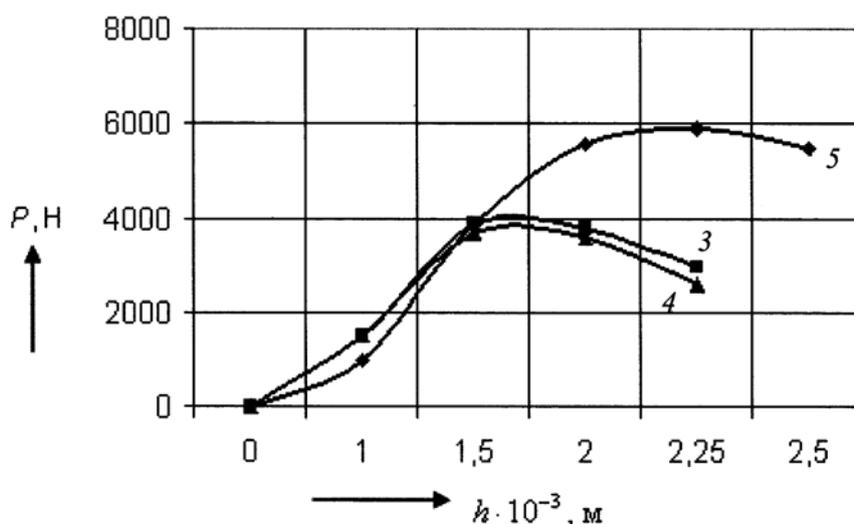


Рис. 2.20. Кривые испытаний материалов на сжатие

Анализируя данные исследования предела прочности материала на сжатие можно сделать вывод, что предел прочности на сжатие полученных материалов превышает в 2,3–3,7 раза предел прочности исходных материалов и зависит от содержания наполнителя и полиэфирной смолы.

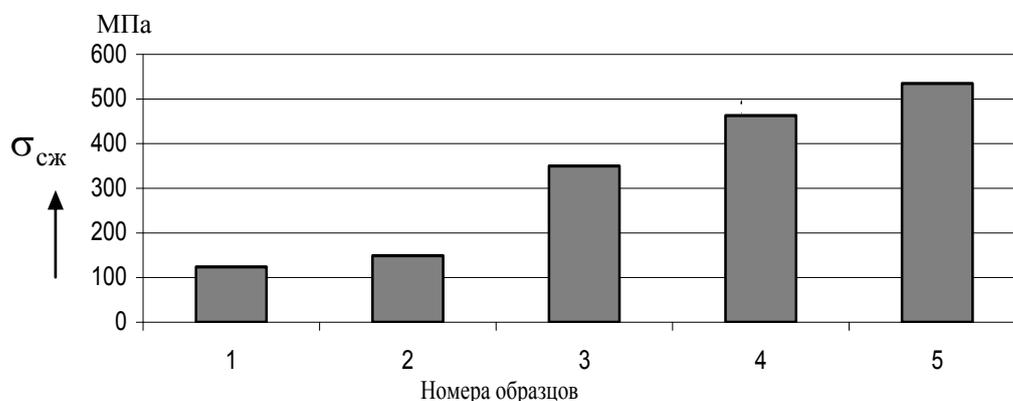


Рис. 2.21. Диаграмма предела прочности материалов на сжатие

Исследование материала на растяжение позволило определить усредненное значение предела прочности (23,1 МПа), показанного на рис 2.22.

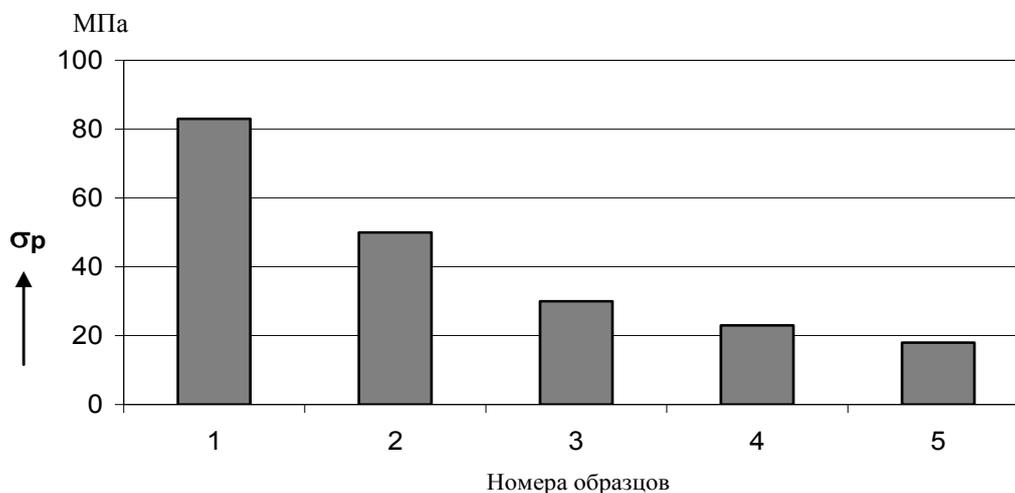


Рис. 2.22. Диаграмма прочности материалов на растяжение

Исследование твердости материалов по Виккерсу позволило определить ее среднее значение (29 МПа), которое в 1,2 раза больше твердости исходных материалов. Анализ результатов позволил заключить, что на твердость новых материалов в основном влияет содержание наполнителя и полиэфирной смолы (рис. 2.23).

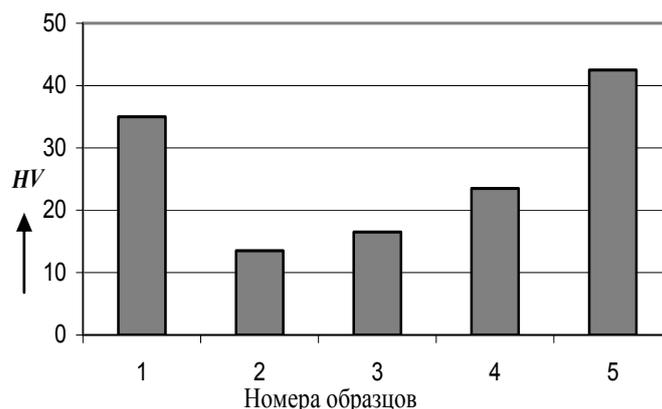


Рис. 2.23. Диаграмма твердости материалов

Образцы для определения плотности композиционного материала изготавливали свободной заливкой в формы.

Плотность материала (средняя) на основе эпоксиполиэфирных смол составила  $1,502 \text{ г/см}^3$ , что выше плотности эпоксидной ( $1,2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ ) и полиэфирной ( $1,12 \text{ г/см}^3$ ) смол (рис. 2.24).

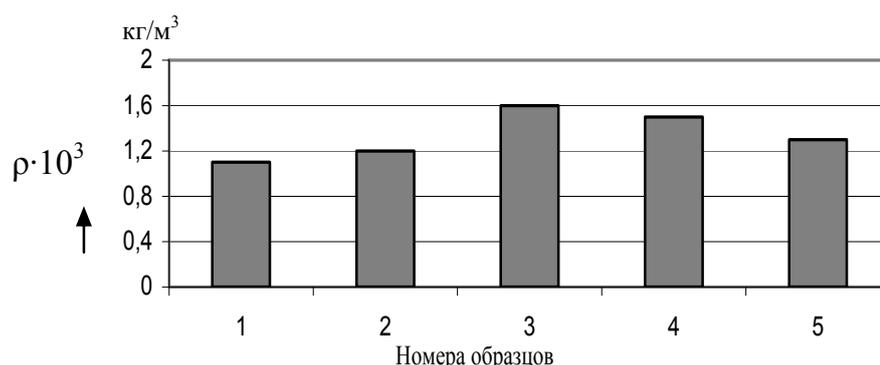


Рис. 2.24. Диаграмма плотности материалов

Анализируя полученные данные можно сделать вывод, что исследуемый материал покрытия на основе эпоксиполиэфирных смол по сравнению с исходными материалами обладает лучшими физико-механическими свойствами и может использоваться в элементах крепления сборных инструментов.

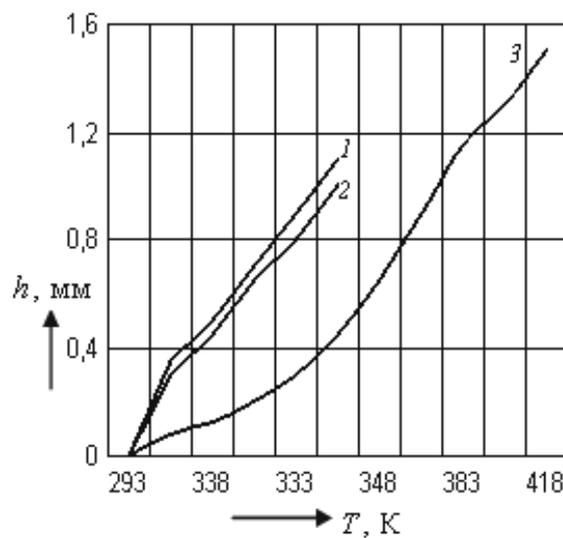
Исследование теплостойкости и коэффициента линейного теплового расширения проводили на приборе Вика по ГОСТ 15065-69. Цель испытания заключалась в определении температуры, при которой стандартный индентор диаметром 1,13 мм под действием нагрузки внедрялся на глубину 1 мм в образец, нагреваемый с постоянной скоростью в воздушной среде. При определении теплостойкости величина нагрузки составляла 10 Н, 40 Н, 50 Н, скорость нагрева в печи равнялась 323 К в час. Состав образцов приведен в таблице 2.12.

Таблица 2.12

**Состав образцов материала покрытия  
для определения теплостойкости**

| Номер<br>состава<br>образца | Содержание компонентов (мас. ч.) |                      |             |
|-----------------------------|----------------------------------|----------------------|-------------|
|                             | Эпоксидная смола                 | Полиэфирная<br>смола | Наполнитель |
| 1                           | 100                              | 50                   | 40          |
| 2                           | 100                              | 50                   | 55          |
| 3                           | 100                              | 50                   | 80          |

По полученным данным строили кривые зависимости перемещения индентора от температуры, и определяли теплостойкость композиционного материала покрытия (рис. 2.25).



*Рис. 2.25.* Графики влияния температуры на перемещение индентора в материалах трех составов (нагрузка на индентор – 10 Н)

Первые опыты проводили с нагрузкой на индентор в 10 Н, причем образцы отверждали при температуре 293 К. Анализируя полученные зависимости (рис. 2.25) можно сделать вывод, что материал покрытия под номером 3 (табл. 2.11) имеет более высокую теплостойкость, чем материалы под номерами 1 и 2. Следовательно, наполнитель оказывает положительное влияние на теплостойкость материала.

Для определения коэффициента линейного теплового расширения использовали материалы нескольких образцов (номера 3, 4, 5, табл. 2.11). При определении коэффициента линейного теплового

расширения нагрузка на индентор не прикладывалась, и он под собственным весом внедрялся в нагреваемый образец материала. В результате эксперимента были получены зависимости перемещения индентора от температуры (рис. 2.26).

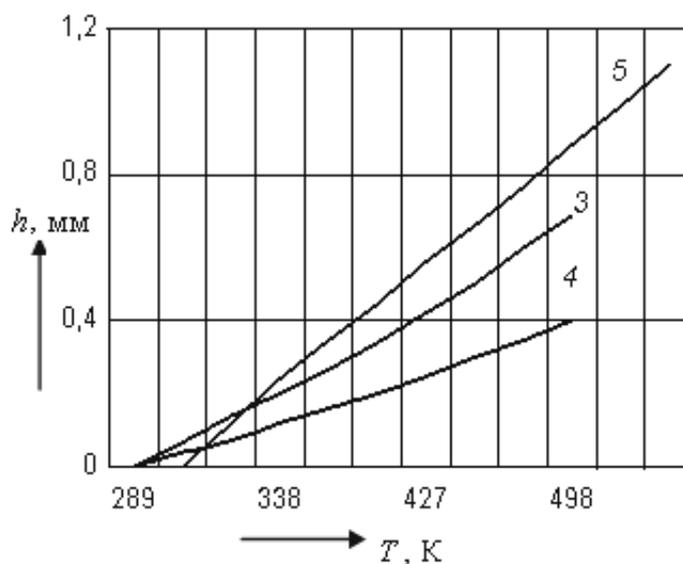


Рис. 2.26. Графики влияния температуры на перемещение индентора в материалах

Анализируя полученные данные можно сделать вывод, что с увеличением содержания наполнителя теплостойкость материала снижается.

Фрикционные параметры композита определяли на модифицированной машине трения МПТ-1, позволяющей в широких пределах варьировать нагрузочно-скоростные параметры.

Температуру в зоне трения измеряли с помощью хромель-капельной термопары, заделанной в образец на расстоянии 0,5 мм от поверхности трения с регистрацией милливольтметром типа ПМШПр. Эксперименты проводили при температуре, равной  $293 \pm 5$  К. Для проведения экспериментов, были изготовлены образцы в виде пластин с размерами 4x15x40 мм, методом свободной заливки в формы, а также ролик диаметром 3 мм из материала сталь 45 по ГОСТ 1050-74, с твердостью рабочей поверхности HRC 45-50 и шероховатостью  $Ra = 0,32$  мкм. Амплитуда пути трения составила 10 мм. Значения скорости и нагрузки были переменными. Образцы предварительно прирабатывали до площади контакта не менее 80 %.

В результате эксперимента были получены зависимости значений коэффициента трения, температуры, износа от нагрузки и скорости (рис. 2.27).

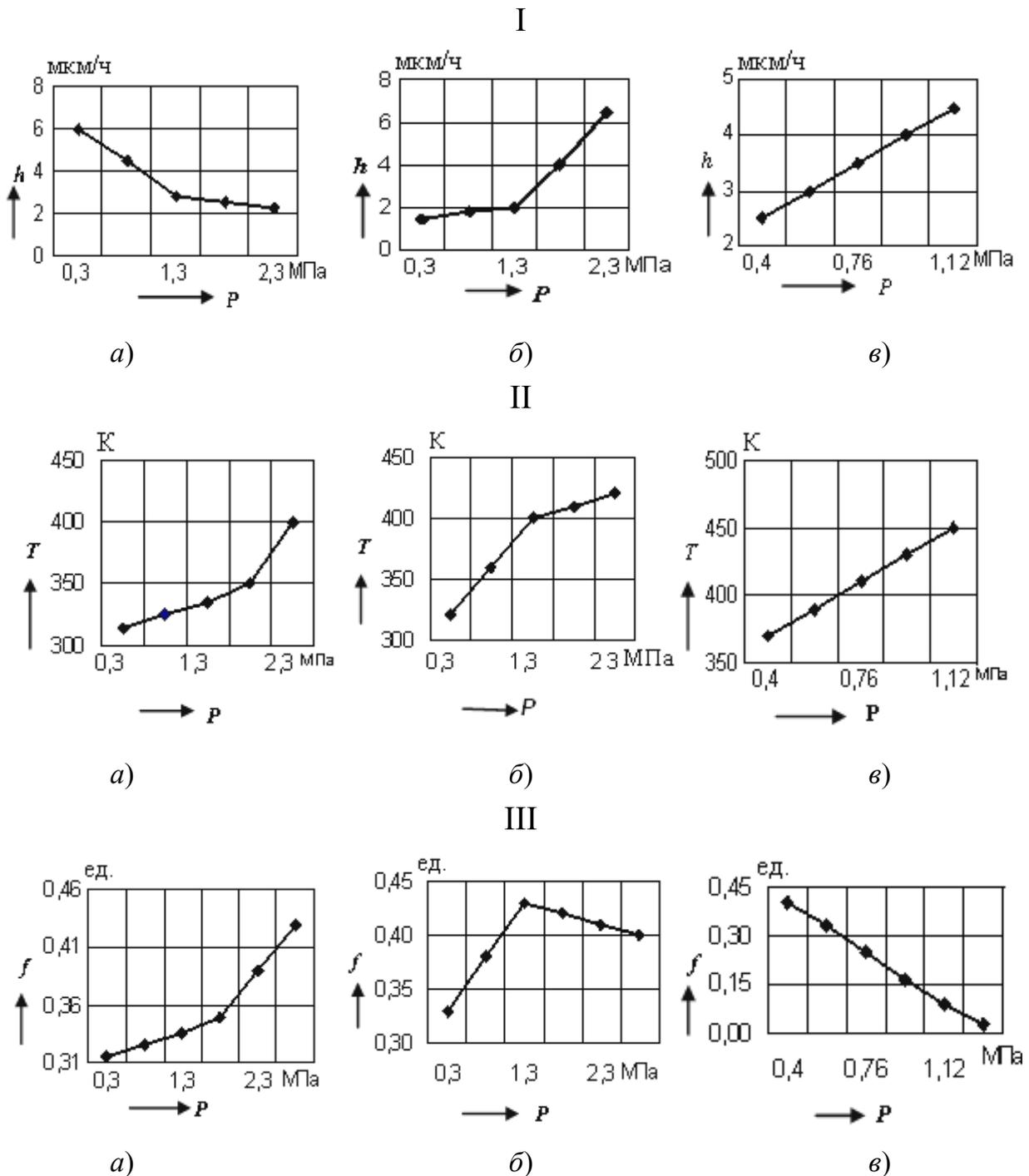


Рис. 2.27. Графики влияния нагрузки на:  
 I – интенсивность; II – температуру в зоне трения;  
 III – коэффициент трения при скоростях:  
 а –  $V = 0,25$  м/с; б –  $V = 0,5$  м/с; в –  $V = 1,0$  м/с

Исследование фрикционных параметров производили при следующих значениях скорости: 0,25 м/с, 0,5 м/с, 1 м/с. Анализ полученных результатов позволил установить, что при скорости трения 0,25 м/с коэффициент трения с изменением нагрузки от 0,3 до 1,3 МПа увеличился до 0,33 в зоне трения, температура в зоне трения возросла до 340 К. Это объясняется увеличением фактической площади касания и снижением действительных значений контактных напряжений. При возрастании нагрузки коэффициент трения увеличивался в 1,3 раза и достигал максимального значения 0,43 при силе давления 2,8 МПа, значение температуры в зоне трения составило 400 К, а износ материала уменьшался.

При скорости трения 0,5 м/с коэффициент трения вначале линейно увеличивался и при нагрузке 1,3 МПа был равен 0,43 ед. при дальнейшем увеличении нагрузки он уменьшался за счет увеличения в зоне трения температуры и размягчения материала. При нагрузке 2,3 МПа температура в зоне трения составляла 460 К, а коэффициент трения снизился до 0,4, что обусловлено деструкцией материала покрытия. Износ материала с увеличением нагрузки от 0,3 до 1,3 МПа увеличивался незначительно, а при нагрузке 2,3 МПа – резко возрастал до 6,5 мкм/ч. С увеличением нагрузки коэффициент трения при скорости 1 м/с уменьшается линейно, т. к. в зоне трения происходило повышение температуры и размягчение материала, износ при этом линейно увеличивался. Температура при данной скорости трения увеличивается линейно с увеличением нагрузки от 360 до 450 К.

#### **2.2.4. Термический и дифференциально-термический анализ эпоксиполиэфирного материала**

Дифференциально-термический анализ использовали для исследования термических показателей материалов. Исследованию подвергли покрытия двух составов, приведенных в таблице 2.10. Материал покрытия нагревался в дериватографе до 873 К, время нагрева составляло 500 минут. Кривые ДТА (рис. 2.28) для эпоксиполиэфирной композиции позволяют заключить, что тепловые процессы, протекающие в исследуемых образцах происходили с выделением тепла. При этом экзотермическая кривая ДТА свидетельствует о том, что процессы, приводящие к распаду композиционного состава, не полностью завершены, а их образование является результатом не только химических реакций.

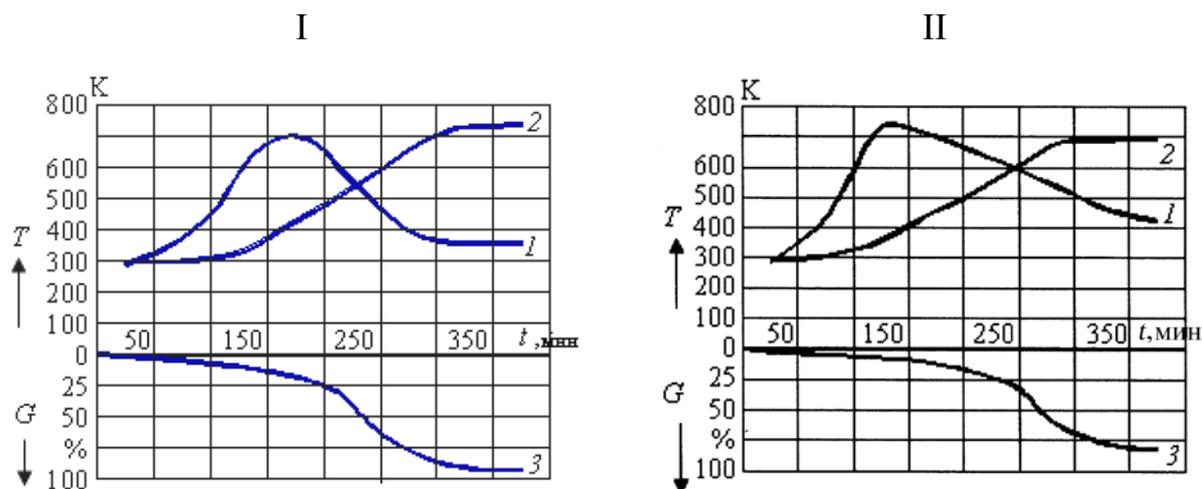


Рис. 2.28. Кривые дифференциально-термического анализа материала покрытия I (Т15К6) и II (BK8):  
1 – ДТА; 2 – изменения температуры; 3 – ТГА

Результаты анализа кривых ДТА показали, что превращения состава композиции происходят в несколько стадий. При температуре 333–473 К наблюдается незначительное снижение массы исходных составляющих, что свидетельствует о потере влаги и существовании низкомолекулярного пиролиза летучих продуктов. Этот процесс сопровождается некоторым снижением прочности поверхностных слоев материала покрытия и уменьшением количества летучих продуктов. При температуре 473–773 К происходит деструкция связующего, наблюдается увеличение потери массы. Деструкция связующего носит термоокислительный характер. Пик экзотермических кривых для двух составов покрытий смещен в область высоких температур, что является положительной характеристикой. При температурах выше 773 К наблюдается дальнейшая потеря массы и процесс распада соединения.

Сравнивая кривые I и II можно сделать вывод, что количество полиэфирной смолы и наполнителя значительно влияет на термические свойства материала покрытия. Чем выше содержание полиэфирной смолы и наполнителя, тем меньше усадка материала покрытия, а значит и ниже внутренние напряжения в нем, что соответствует требованиям, предъявляемым к сборному режущему инструменту, работающему не только при высоких температурах, но и в условиях силовых нагрузок. Содержание наполнителя в составе покрытия менее всего влияет на свойства покрытия. Анализируя структурные изменения, окисление, деструкцию и химические реакции эпоксидных

смола с ингредиентами, входящими в состав материала покрытия, можно сделать вывод, что состав материала не изменяет своей массы и не теряет своих свойств в течение длительного времени при нагреве до 673 К. Это позволяет использовать данное покрытие в сборных резцах при условиях больших нагрузок и температурных изменений, которые происходят в процессе резания.

Для определения влияния температуры на микроструктуру материала покрытия пластин их нагревали. Нагрев образцов производили в печах. Были выбраны четыре уровня температур. Первую партию пластин нагревали в течение  $3 \cdot 10^3$  с до температуры 338 К, вторую партию нагревали до температуры 423 К в течение  $6 \cdot 10^3$  с. Третью партию пластин нагревали до 523 К, время нагрева составило  $9 \cdot 10^3$  с. Четвертую партию нагревали до 673 К в течение  $10,8 \cdot 10^3$  с. Затем выполняли микрофотографии структуры с полученных образцов (с увеличением в 500 раз).

Анализируя полученные микрофотографии (рис. 2.29) можно сделать вывод, что при нагревании образцов до температуры 338 К структура материала не отличается от структуры покрытия до обработки. Пористость остается без изменения, зерна наполнителя просматриваются так же, как и на образце до нагрева. При повышении температуры до 423 К структура покрытия изменяется незначительно. При нагревании образцов до температуры 473 К картина структуры меняется более заметно по сравнению с первоначальными значениями. Увеличивается количество и размер пор. Среди связующего хорошо просматриваются включения зерен наполнителя, которые равномерно расположены по всей поверхности. При дальнейшем увеличении температуры происходит выгорание связующего, зерна наполнителя видны отчетливо и структура выражена, в основном, продуктами выгорания и зернами наполнителя. По полученным данным можно сделать вывод, что до температуры нагрева 473 К структура покрытия не изменяется.

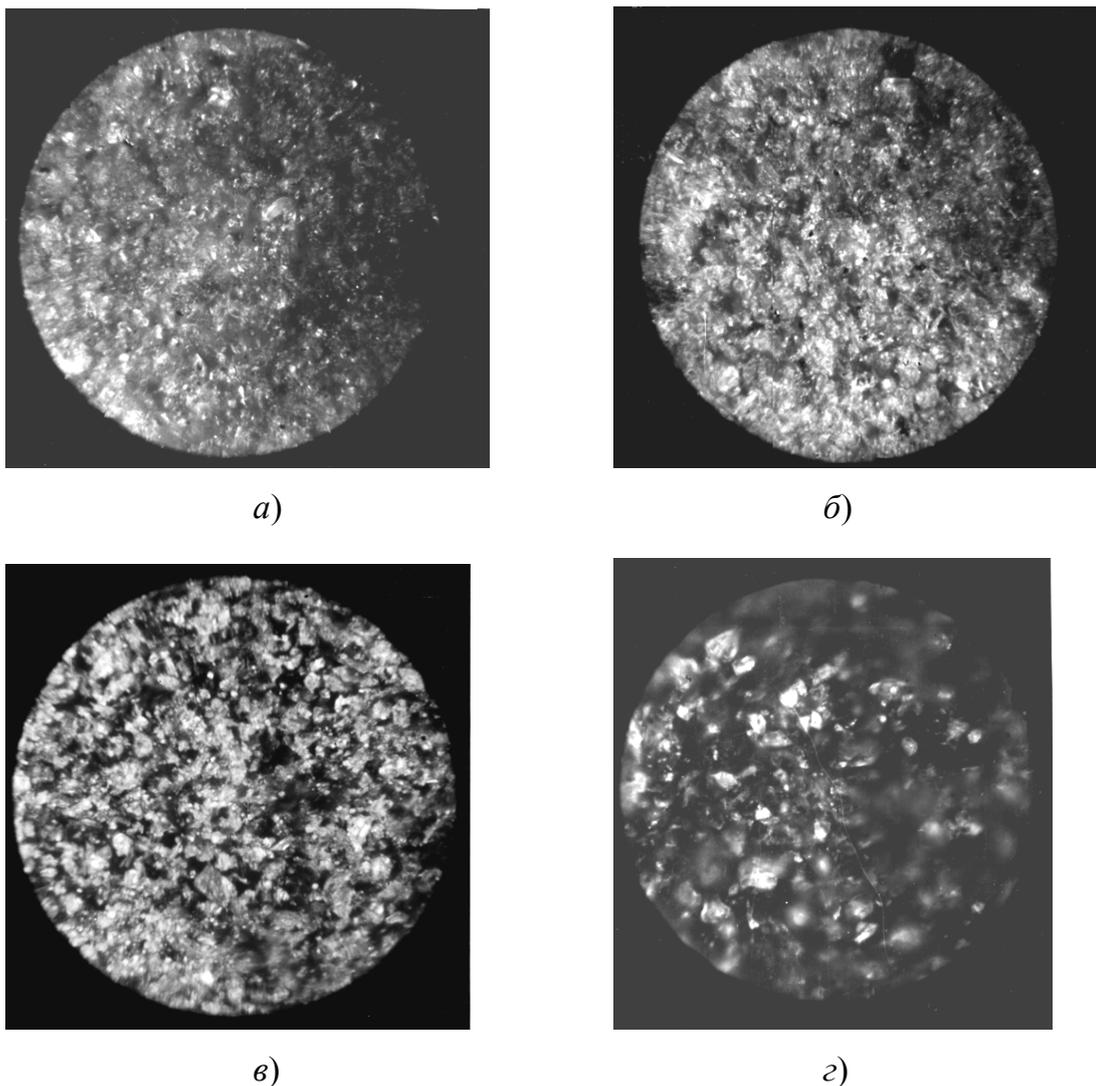


Рис. 2.29. Микроструктуры покрытия при нагреве различными по значению температурами  $\times 500$ :  
а – до 338 К; б – до 423 К; в – до 523 К; г – до 673 К

### 2.2.5. Контурные площади контакта пластин, имеющих композиционное покрытие

Исследование контурных площадей касания базовых граней СМП, имеющих покрытие, проводили по методике, которая приведена в п. 2.1.2. Толщина покрытия зависила от значений отклонения от плоскостности. Обработка результатов эксперимента производилась с использованием статистических методов с построением форм пятен касания опорных граней при заданной вероятности и кривых плотности распределения параметров (рис. 2.30 и 2.31). Пятна касания формировались с вероятностью 0,25; 0,4; 0,5, как и в п. 2.1.2. Анализируя полученные отпечатки контурных площадей касания пластин с покрытием базовых граней можно сделать вывод, что расчетные площади ка-

сания пластин с покрытием при вероятности 0,25 имеют максимальные значения площадей касания (рис. 2.30, *в*). Сравнивая полученные отпечатки площадей касания с отпечатками пластин без покрытия при той же вероятности (рис. 2.7, *в*) можно сделать вывод, что площади касания увеличились у трехгранных пластин в 2 раза, четырехгранных пластин в 1,8 раза, пятигранных пластин в 2,6 раза. Анализируя полученные значения площадей касания пластин с покрытием при вероятности 0,4 (рис. 2.30, *б*), и сравнивая их с площадями касания пластин без покрытия при той же вероятности (рис. 2.7, *б*), можно сделать вывод, что площади касания у пластин с покрытием увеличились: у трехгранных пластин в 1,6 раза, четырехгранных – 1,5 и пятигранных – 2,3 раза. Сравнивая площади касания пластин с покрытием и без него при вероятности 0,5 (рис. 2.30, *а* и рис. 2.7, *а*, соответственно) наблюдается увеличение площадей у пластин с покрытием трех форм в 1,3 раза.

Вид площадей контакта у пластин, имеющих покрытие, был равномерный по всей поверхности опорной грани, а у пластин без покрытия имеются в основном участки касания около отверстия опорной грани (зона 3) и частично в области режущих кромок (зона 1) (см. рис. 2.12). Равномерное распределение пятен контакта по всей поверхности опорной грани, улучшает условия контакта пластины с опорной поверхностью инструмента.

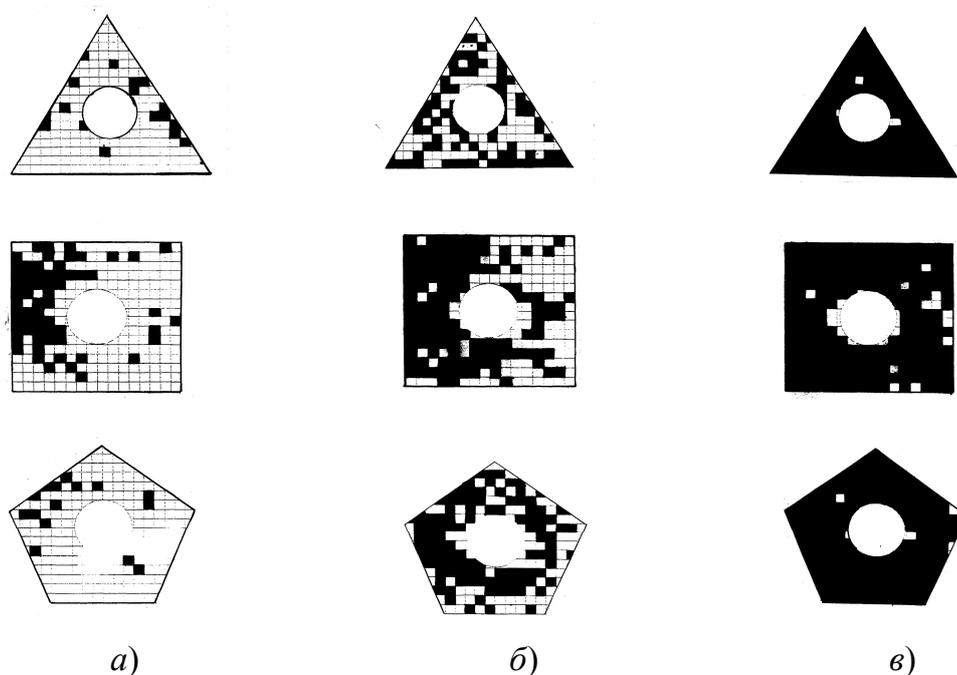


Рис. 2.30. Расчетные площади касания пластин с вероятностью:  
 $a - 0,5$ ;  $b - 0,4$ ;  $v - 0,25$

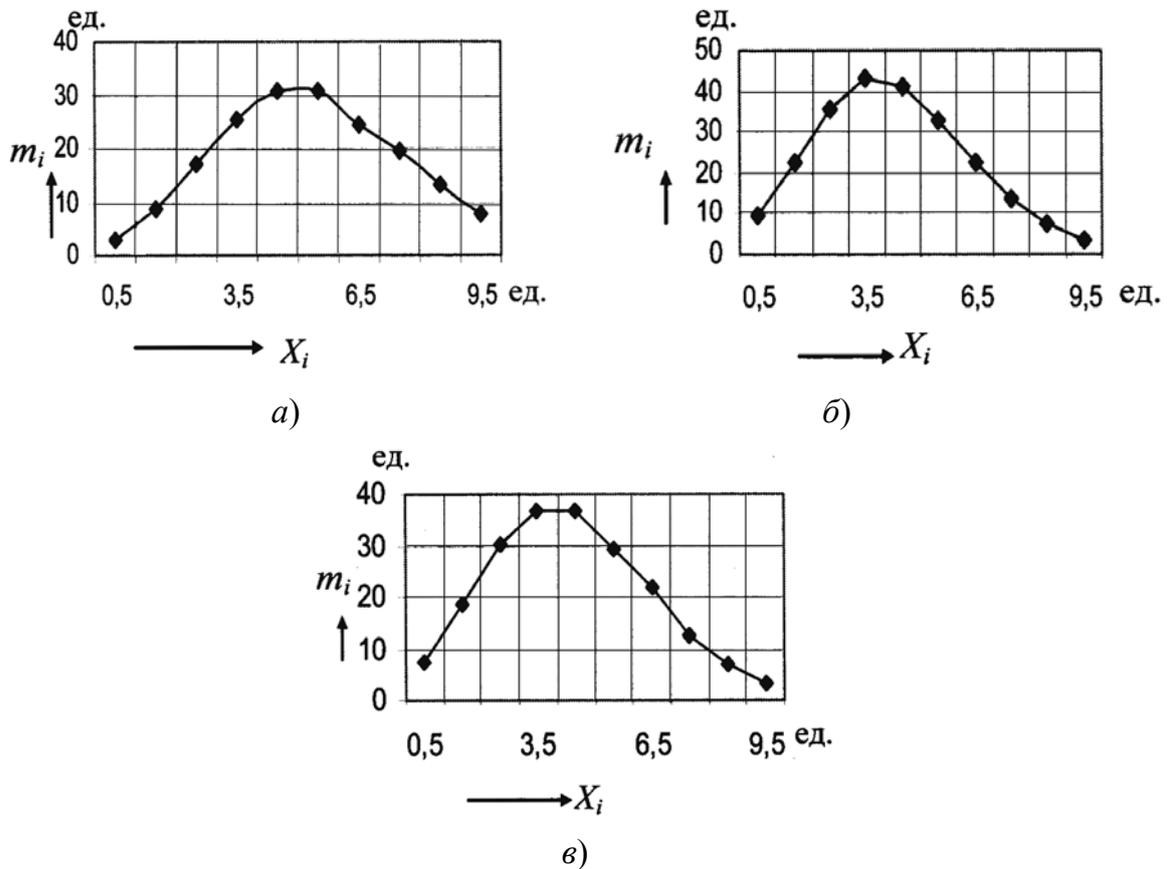


Рис. 2.31. Кривые распределения относительных контурных площадей касания опорных граней пластин с композиционным покрытием:  
 а – трехгранные; б – четырехгранные; в – пятигранные

Анализируя кривые распределения относительных площадей касания опорных граней с покрытием, и сравнивая их с кривыми на рис. 2.8 (относительные площади касания пластин без покрытия), можно сделать вывод, что кривые на рис. 2.31 построены по стабильным показателям и подчиняются закону нормального распределения, что позволяет сделать заключение о благоприятных условиях касания пластины с эталонной плоскостью.

### 2.3. Моделирование точек контакта режущего элемента с пазом корпуса инструмента

Геометрическому моделированию контакта твердых тел посвящено большое количество работ, которые обобщены и представлены в монографиях [70], [71], [93], [104] и др. Однако эти работы базируются либо на экспериментальных данных, либо на детерминированных теоретических. Произведем моделирование контакта с использованием

топографий граней сменных многогранных пластин, полученных с заданной вероятностью (см. п. 2.1.2 и п. 2.1.3). Для раскрытия характера контакта базовых поверхностей СМП с поверхностями паза корпуса инструмента были использованы топографии установочной, направляющей и опорой поверхностей пластины и паза державки. Предварительно была введена система координат  $X_1 Y_1 Z_1$ , связанная с установочной поверхностью пластины и системы координат  $X_2 Y_2 Z_2$ , связанная с установочной поверхностью паза державки. Топографии численно представляем в виде массивов

$$\begin{aligned} [Z_{1i,j}] &= \begin{pmatrix} Z_{11,1} & \dots & Z_{11,j} & \dots & Z_{11,n} \\ Z_{12,1} & \dots & Z_{12,j} & \dots & Z_{12,n} \\ Z_{1m,1} & \dots & Z_{1m,j} & \dots & Z_{1m,n} \end{pmatrix}, \\ [Z_{2i,j}] &= \begin{pmatrix} Z_{21,1} & \dots & Z_{21,j} & \dots & Z_{21,n} \\ Z_{22,1} & \dots & Z_{22,j} & \dots & Z_{22,n} \\ Z_{2m,1} & \dots & Z_{2m,j} & \dots & Z_{2m,n} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

с соответствующими координатами участков

$$\begin{aligned} [X_{1i,j}] &= \begin{pmatrix} X_{11,1} & \dots & X_{11,j} & \dots & X_{11,n} \\ X_{12,1} & \dots & X_{12,j} & \dots & X_{12,n} \\ X_{1m,1} & \dots & X_{1m,j} & \dots & X_{1m,n} \end{pmatrix}, \\ [Y_{2i,j}] &= \begin{pmatrix} Y_{21,1} & \dots & Y_{21,j} & \dots & Y_{21,n} \\ Y_{22,1} & \dots & Y_{22,j} & \dots & Y_{22,n} \\ Y_{2m,1} & \dots & Y_{2m,j} & \dots & Y_{2m,n} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Первую точку касания СМП и паза определяли путем параллельного перемещения СМП вместе с системой координат  $X_{1_1} Y_{1_1} Z_{1_1}$  вдоль оси  $Z_{1_1}$  до контакта с пазом державки. Контакт образовывали те точки, которые имели минимальное значение  $Z_{\min} = [Z_{1_{1,i,j}}] + [Z_{1_{2,i,j}}]$ .

Координаты первой точки контакта  $1k$  обозначили через  $X_{1,1}$  и  $Y_{1,1}$ . Поместили начало новой системы координат  $X_{2_S} Y_{2_S} Z_{2_S}$  в первую точку контакта, а оси  $X_{2_S}$  и  $Y_{2_S}$  направили соответственно вдоль осей  $X_{1_S}$  и  $Y_{1_S}$ , и пересчитали координаты топографии в новой системе координат.

$$\begin{aligned} [X_{2_{S,i,j}}] &= [X_{1_{S,i,j}}] - X_{1,1}, & [Y_{2_{S,i,j}}] &= [Y_{1_{S,i,j}}] - Y_{1,1}, \\ [Z_{2_{S,i,j}}] &= [Z_{1_{S,i,j}}] - [Z_{1,1}], \end{aligned}$$

где  $S$  – номер деталей контакта.

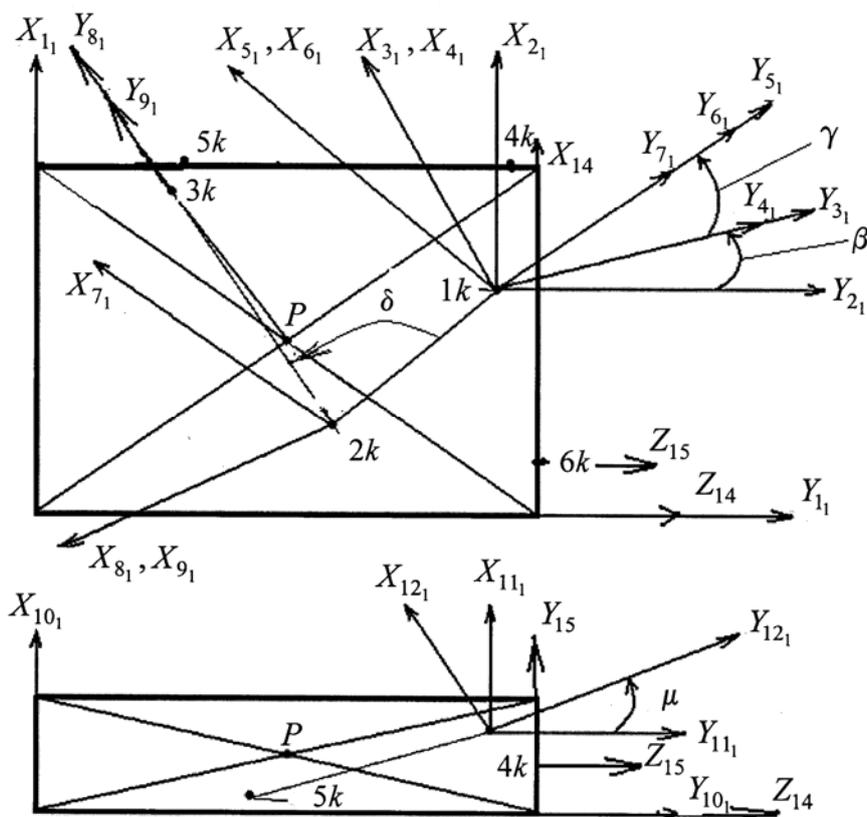


Рис. 2.32. Схема к расчету точек контакта СМП и паза корпуса инструмента

Поиск второй точки контакта производили в направлении действия силы тяжести. При повороте пластины и державки в направлении точки приложения силы тяжести  $P$  пару точек, образующих точку  $2k$ , следует искать лишь в зоне, ограниченной перпендикуляром векторов к линии, соединяющей проекции точек  $1k$  и  $P$  на плоскость  $X_2Y_2$ .

Для проверки, лежит ли рассматриваемая точка в требуемой зоне определяли:

1) уравнение линии, проходящей через точки контакта  $1k$  и точку  $P$

$$AX_{2_1} + BY_{2_1} + C = 0, \quad (2.1)$$

где  $A = Y_{2_{1P}} - Y_{2_{1k}}$ ,  $B = X_{2_{1P}} - X_{2_{1k}}$ ;  $C = X_{2_{1P}} \cdot Y_{2_{1k}} - X_{2_{1k}} \cdot Y_{2_{1P}}$ ;

2) уравнение перпендикулярных векторов к линии  $1kP$

$$BX_{2_1} - AY_{2_1} + (AY_{2_{1k}} - BX_{2_{1k}}) = 0,$$

или 
$$A_1X_{2_1} + B_1Y_{2_1} + C_1 = 0. \quad (2.2)$$

В уравнение (2.2) подставляли координаты точки  $P$  и координаты каждой проверяемой точки установочной базы пластины

$$A_1X_{2_{1P}} + B_1Y_{2_{1P}} + C_1 = K_1; \quad A_1X_{2_{i,j}} + B_1Y_{2_{i,j}} + C_1 = K_2;$$

3) если  $K_1 \cdot K_2 < 0$ , то рассматриваемая точка и точка приложения силы  $P$  лежат по разные стороны перпендикуляра векторов и значит эта точка не входит в нужную зону. При отыскании точки  $2k$  она исключается.

То есть для того, чтобы определить вторую точку контакта необходимо найти наименьший угол между радиус-векторами, проведенными из первой точки контакта в центры участков, принадлежащих пластине и державке и их проекциями на плоскость  $X_2Y_2$ . Для упрощения расчетов ввели новую систему координат, направление оси  $Y_3$  которой совпадает с направлением вектора, проходящего через точку  $1k$  и точку проекции приложения силы  $P$ . Произвели пересчет координат точек:

– пластины

$$X_{3_{1,i,j}} = X_{2_{1,i,j}} \cos \beta + Y_{2_{1,i,j}} \sin \beta;$$

$$Y_{3_{1,i,j}} = -X_{2_{1,i,j}} \sin \beta + Y_{2_{1,i,j}} \cos \beta;$$

$$Z_{3_{1,i,j}} = Z_{2_{1,i,j}},$$

где  $\beta = \operatorname{arctg} \left( \frac{X_{2_{1P}}}{Y_{2_{1P}}} \right)$ ;

– державки

$$X_{3_{2i,j}} = X_{2_{2i,j}} \cos \beta + Y_{2_{2i,j}} \sin \beta;$$

$$Y_{3_{2i,j}} = -X_{2_{2i,j}} \sin \beta + Y_{2_{2i,j}} \cos \beta;$$

$$Z_{3_{2i,j}} = Z_{2_{2i,j}}.$$

Определили модули радиус-векторов, направленных из первой точки контакта в центры участков, принадлежащих:

– пластине

$$R_{3_{1i,j}} = \sqrt{(Y_{3_{1i,j}})^2 + (Z_{3_{1i,j}})^2};$$

– державке

$$R_{3_{2i,j}} = \sqrt{(Y_{3_{2i,j}})^2 + (Z_{3_{2i,j}})^2}.$$

Углы между радиус-векторами и их проекциями на плоскости  $X_{3_1}, Y_{3_1}$  для пластины и  $X_{3_2}, Y_{3_2}$  для державки определяли:

– для пластины

$$\alpha_{3_{1i,j}} = \arccos \frac{|Y_{3_{1i,j}}|}{R_{3_{1i,j}}};$$

– для державки

$$\alpha_{3_{2i,j}} = \arccos \frac{|Y_{3_{2i,j}}|}{R_{3_{2i,j}}}.$$

Вторую точку контакта  $2k$  будут образовывать участки с минимальным значением угла  $\alpha = \alpha_{3_{1ij}} + \alpha_{3_{2ij}}$ .

Поместили начало новой системы координат  $X_{4_s} Y_{4_s} Z_{4_s}$  в первую точку контакта так, чтобы оси  $X_{4_s}$  и  $X_{3_s}$  совпадали, тогда оси  $Y_{4_s}$  и  $Z_{4_s}$  будут повернуты на соответствующие углы  $\alpha_{3_1}$  и  $\alpha_{3_2}$ .

Пересчитали координаты участков в новой системе координат соответственно:

– пластины

$$\begin{aligned} X_{4_{1i,j}} &= X_{3_{1i,j}} ; \\ Y_{4_{1i,j}} &= Y_{3_{1i,j}} \cdot \cos(\alpha_{3_{1i,j}}) + Z_{3_{1i,j}} \cdot \sin(\alpha_{3_{1i,j}}) ; \\ Z_{4_{1i,j}} &= -Y_{3_{1i,j}} \cdot \sin(\alpha_{3_{1i,j}}) + Z_{3_{1i,j}} \cdot \cos(\alpha_{3_{1i,j}}) \end{aligned}$$

– державки

$$\begin{aligned} X_{4_{2i,j}} &= X_{3_{2i,j}} ; \\ Y_{4_{2i,j}} &= -Y_{3_{2i,j}} \cdot \cos(\alpha_{3_{2i,j}}) - Z_{3_{2i,j}} \cdot \sin(\alpha_{3_{2i,j}}) ; \\ Z_{4_{2i,j}} &= Y_{3_{2i,j}} \cdot \sin(\alpha_{3_{2i,j}}) - Z_{3_{2i,j}} \cdot \cos(\alpha_{3_{2i,j}}) . \end{aligned}$$

Третья точка контакта возникает при повороте пластины и державки вокруг линии  $1k$  и  $2k$  в направлении проекции точки приложения силы  $P$ . Ее образуют две точки, которые войдут в контакт при минимальном угле поворота пластины и державки.

Проверка условия вероятного контакта производилась следующим образом:

1) записывали уравнение линии, соединяющей  $1k$  и  $2k$  в виде:

$$AX_{4_1} + BY_{4_1} + C = 0 ; \quad (2.3)$$

2) в уравнение (2.3) подставляли координаты точки приложения силы  $P$  и координаты точек локальных участков

$$\begin{aligned} AX_{4_{1P}} + BY_{4_{1P}} + C &= K_1 , \\ AX_{4_{1i,j}} + BY_{4_{1i,j}} + C &= K_2 ; \end{aligned}$$

3) если произведение  $K_1 \cdot K_2 < 0$ , то полученная точка не лежит в зоне контакта и исключалась из рассмотрения.

Для упрощения расчетов ввели новую систему координат, ось  $Y_{5s}$  которой проходит через точки  $1k$  и  $2k$ . Произвели пересчет координат точек:

– пластины

$$X_{5_{1i,j}} = X_{4_{1i,j}} \cos \gamma + Y_{4_{1i,j}} \sin \gamma;$$

$$Y_{5_{1i,j}} = -X_{4_{1i,j}} \sin \gamma + Y_{4_{1i,j}} \cos \gamma;$$

$$Z_{5_{1i,j}} = Z_{4_{1i,j}},$$

где  $\gamma = \operatorname{artg} \left( \frac{X_{4_{12k}}}{Y_{4_{12k}}} \right);$

– державки

$$X_{5_{2i,j}} = X_{4_{2i,j}} \cos \gamma + Y_{4_{2i,j}} \sin \gamma;$$

$$Y_{5_{2i,j}} = -X_{4_{2i,j}} \sin \gamma + Y_{4_{2i,j}} \cos \gamma;$$

$$Z_{5_{2i,j}} = Z_{4_{2i,j}}.$$

Определили модули радиус-векторов  $R_{5_1}$  и  $R_{5_2}$

– пластины

$$R_{5_{1i,j}} = \sqrt{(X_{5_{1i,j}})^2 + (Z_{5_{1i,j}})^2};$$

– державки

$$R_{5_{2i,j}} = \sqrt{(X_{5_{2i,j}})^2 + (Z_{5_{2i,j}})^2}.$$

Углы между радиус-векторами и их проекциями на плоскости  $X_{5_1} Y_{5_1}$  для пластины и  $X_{5_2} Y_{5_2}$  для державки:

– пластины

$$\xi_{5_{1i,j}} = \arccos \frac{|X_{5_{1i,j}}|}{R_{5_{1i,j}}};$$

– державки

$$\xi_{5_{2i,j}} = \arccos \frac{|X_{5_{2i,j}}|}{R_{5_{2i,j}}}.$$

Возможную третью точку контакта  $3k$  будут образовывать участки с минимальным значением угла  $\xi_{i,j} = \xi_{5_{1i,j}} + \xi_{5_{2i,j}}$ .

Поместили начало новой системы координат  $X_{6_s} Y_{6_s} Z_{6_s}$  в первую точку контакта так, чтобы оси  $X_{6_s}$  и  $X_{5_s}$  совпадали, тогда оси  $Y_{6_s}$  и  $Z_{6_s}$  будут повернуты на соответствующие углы  $\xi_{51}$  и  $\xi_{52}$ .

Пересчитали координаты участков в новой системе координат для:

– пластины

$$\begin{aligned} X_{6_{1,j}} &= X_{5_{1,j}} ; \\ Y_{6_{1,j}} &= Y_{5_{1,j}} \cos(\xi_{5_{1,j}}) + Z_{5_{1,j}} \sin(\xi_{5_{1,j}}) ; \\ Z_{6_{1,j}} &= -Y_{5_{1,j}} \sin(\xi_{5_{1,j}}) + Z_{5_{1,j}} \cos(\xi_{5_{1,j}}) ; \end{aligned}$$

– державки

$$\begin{aligned} X_{6_{2,i,j}} &= X_{5_{2,i,j}} ; \\ Y_{6_{2,i,j}} &= -Y_{5_{2,i,j}} \cos(\xi_{5_{2,i,j}}) - Z_{5_{2,i,j}} \sin(\xi_{5_{2,i,j}}) ; \\ Z_{6_{2,i,j}} &= Y_{5_{2,i,j}} \sin(\xi_{5_{2,i,j}}) - Z_{5_{2,i,j}} \cos(\xi_{5_{2,i,j}}) . \end{aligned}$$

Полученная точка будет точкой контакта в том случае, когда координаты точки приложения силы окажутся внутри треугольника образованного точками контакта  $1k$ ,  $2k$  и  $3k$ . Проверку этого условия производили с помощью барицентрических координат [99]. Для этого определили барицентрические координаты точки  $P$  на плоскость  $X_{6_1} Y_{6_1}$ .

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{(X_{6_{1P}} - X_{6_{13k}})(Y_{6_{12k}} - Y_{6_{13k}}) - (Y_{6_{1P}} - Y_{6_{13k}})(X_{6_{12k}} - X_{6_{13k}})}{(Y_{6_{12k}} - Y_{6_{13k}})(X_{6_{11k}} - X_{6_{13k}}) - (Y_{6_{11k}} - Y_{6_{13k}})(X_{6_{12k}} - X_{6_{13k}})} ; \\ \lambda_2 &= \frac{(Y_{6_{1P}} - Y_{6_{13k}})(X_{6_{11k}} - X_{6_{13k}}) - (Y_{6_{11k}} - Y_{6_{13k}}) \cdot (X_{6_{1P}} - X_{6_{13k}})}{(Y_{6_{12k}} - Y_{6_{13k}})(X_{6_{11k}} - X_{6_{13k}}) - (Y_{6_{11k}} - Y_{6_{13k}})(X_{6_{12k}} - X_{6_{13k}})} . \end{aligned}$$

Если

$$\lambda_1 > 0; \lambda_2 > 0, \lambda_1 + \lambda_2 < 1, \quad (2.4)$$

то точка  $P$  входит в треугольник, образованный точками  $1k2k3k$  и точки  $1k$ ,  $2k$ ,  $3k$  являются точками контакта. Если условие не выполняется, то необходимо найти новую третью точку контакта. Для

этого определяли уравнения линий, соединяющих попарно проекции точек  $1k, 2k, 3k$  на плоскость  $X_6Y_6$ . В уравнение подставляются координаты  $P$  и координаты точки контакта не лежащей на линии. Сравнение знаков у получившихся при этом результатов дает возможность установить какие именно точки отбросить. Вычислив

$$K_1 = (Y_{6_{13k}} - Y_{6_{12k}})X_{6_{1P}} + (X_{6_{12k}} - X_{6_{13k}})Y_{6_{1P}} + (Y_{6_{12k}}X_{6_{13k}} - X_{6_{12k}}Y_{6_{13k}});$$

$$K_2 = (Y_{6_{13k}} - Y_{6_{12k}})X_{6_{1P}} + (X_{6_{12k}} - X_{6_{13k}})Y_{6_{1P}} + (Y_{6_{12k}}X_{6_{13k}} - X_{6_{12k}}Y_{6_{13k}})$$

и, если  $K_1 \cdot K_2 < 0$ , точка  $1k$  отбрасывается. Аналогично подставляем координаты точки  $1k - 3k; 1k - 2k$ .

Отбросив например точку  $1k$ , необходимо найти новую третью точку контакта. Для этого вводится новая система координат  $X_{7_S}Y_{7_S}Z_{7_S}$ , у которой ось  $OY_{7_S}$  совпадает с осью  $OY_{6_S}$ . Затем производится пересчет координат точек

$$Y_{7_{1,j}} = Y_{6_{1,j}} + Y_{6_{12k}}, \quad Y_{7_{2,j}} = Y_{6_{2,j}} + Y_{6_{22k}}.$$

Для упрощения расчетов ввели новую систему координат, направление оси  $Y_{8_S}$  которой совпадает с направлением вектора, проходящего через точки  $2k$  и  $3k$ . Произвели пересчет координат точек:

– пластины

$$X_{8_{1,j}} = X_{7_{1,j}} \cos \delta + Y_{7_{1,j}} \sin \delta;$$

$$Y_{8_{1,j}} = -X_{7_{1,j}} \sin \delta + Y_{7_{1,j}} \cos \delta;$$

$$Z_{8_{1,j}} = Z_{7_{1,j}},$$

где  $\delta = \text{artg} \left( \frac{X_{7_{13k}}}{Y_{7_{13k}}} \right);$

– державки

$$X_{8_{2,j}} = X_{7_{2,j}} \cos \delta + Y_{7_{2,j}} \sin \delta;$$

$$Y_{8_{2,j}} = -X_{7_{2,j}} \sin \delta + Y_{7_{2,j}} \cos \delta;$$

$$Z_{8_{2,j}} = Z_{7_{2,j}}.$$

Определили модули радиус-векторов  $R_{8_1}$  и  $R_{8_2}$

– пластины

$$R_{8_{1,j}} = \sqrt{(X_{8_{1,j}})^2 + (Z_{8_{1,j}})^2};$$

– державки

$$R_{8_{2,j}} = \sqrt{(X_{8_{2,j}})^2 + (Z_{8_{2,j}})^2}.$$

Углы между радиус-векторами и их проекциями на плоскости  $X_{8_1} Y_{8_1}$  для пластины и  $X_{8_2} Y_{8_2}$  для державки:

– пластины

$$\eta_{8_{1,j}} = \arccos \frac{|X_{8_{1,j}}|}{R_{8_{1,j}}};$$

– державки

$$\eta_{8_{2,j}} = \arccos \frac{|X_{8_{2,j}}|}{R_{8_{2,j}}}.$$

Возможную новую третью точку контакта  $3k_1$  будут образовывать участки с минимальным значением угла  $\eta_{i,j} = \eta_{8_{1,j}} + \eta_{8_{2,j}}$ .

Поместили начало новой системы координат  $X_{9_s} Y_{9_s} Z_{9_s}$  во вторую точку контакта так, чтобы оси  $X_{9_s}$  и  $X_{8_s}$  совпадали, тогда оси  $Y_{9_s}$  и  $Z_{9_s}$  будут повернуты на соответствующие углы  $\eta_{8_{S1}}$  и  $\eta_{8_{S2}}$ .

Пересчитали координаты участков в новой системе координат:

– пластины

$$X_{9_{1,j}} = X_{8_{1,j}};$$

$$Y_{9_{1,j}} = Y_{8_{1,j}} \cos(\eta_{8_{1,j}}) + Z_{8_{1,j}} \sin(\eta_{8_{1,j}});$$

$$Z_{9_{1,j}} = -Y_{8_{1,j}} \sin(\eta_{8_{1,j}}) + Z_{8_{1,j}} \cos(\eta_{8_{1,j}});$$

– державки

$$\begin{aligned} X_{9_{2i,j}} &= X_{8_{2i,j}} j; \\ Y_{9_{2i,j}} &= -Y_{8_{2i,j}} \cos(\eta_{8_{2i,j}}) - Z_{8_{2i,j}} \sin(\eta_{8_{2i,j}}); \\ Z_{9_{2i,j}} &= Y_{8_{2i,j}} \sin(\eta_{8_{2i,j}}) - Z_{8_{2i,j}} \cos(\eta_{8_{2i,j}}). \end{aligned}$$

Затем для точек контакта  $2k$ ,  $3k$  и  $3k_1$  проверяем соблюдение условия (2.4) и цикл расчетов повторяется до тех пор, пока условия (2.4) будут соблюдаться.

Зазоры между пластиной и державкой по установочной поверхности определяли из выражения

$$\Delta_{1i,j} = Z_{9_{1i,j}} + Z_{9_{2i,j}}.$$

Для определения 4-й и 5-й точек контакта вводили системы координат  $X_{10_1} Y_{10_1} Z_{10_1}$  и  $X_{10_2} Y_{10_2} Z_{10_2}$ .

Исходными данными для расчета являются топографии направляющей поверхности пластины.

Определяли координаты топографии поверхности пластины и державки

$$\left[ Z_{10_{1i,j}} \right], \left[ Z_{10_{2i,j}} \right], \left[ X_{10_{1i,j}} \right], \dots, \left[ Y_{10_{2i,j}} \right].$$

Четвертую точку контакта направляющей поверхности СМП и паза определяли путем параллельного перемещения СМП вместе с системой координат  $X_{10_1} Y_{10_1} Z_{10_1}$  вдоль оси  $Z_{10_1}$  до контакта с пазом державки. Контакт образовывали те точки, которые имели минимальное значение  $Z_{\min} = \left[ Z_{10_{1i,j}} \right] + \left[ Z_{10_{2i,j}} \right]$ .

Координаты четвертой точки контакта  $4k$  обозначили через  $X_{10,4}$  и  $Y_{10,4}$ . Поместили начало новой системы координат  $X_{11_s} Y_{11_s} Z_{11_s}$  в четвертую точку контакта, а оси  $X_{11_s}$  и  $Y_{11_s}$  направляли соответственно вдоль осей  $X_{10_s}$  и  $Y_{10_s}$ , и пересчитывали координаты участков в новой системе координат:

$$\begin{aligned} \left[ X_{11_{1i,j}} \right] &= \left[ X_{10_{1i,j}} \right] - X_{10,4}, \quad \left[ Y_{11_{1i,j}} \right] = \left[ Y_{10_{1i,j}} \right] - Y_{10,4}, \\ \left[ Z_{11_{1i,j}} \right] &= \left[ Z_{10_{1i,j}} \right] - \left[ Z_{10,4} \right]. \end{aligned}$$

Пятая точка контакта возникает при повороте пластины относительно четвертой точки контакта под действием силы тяжести, приложенной в точке центра масс пластины. То есть для того, чтобы определить пятую точку контакта необходимо найти наименьший угол между радиус-векторами, проведенными из четвертой точки контакта в центры участков, принадлежащих пластине и державке.

При повороте пластины и державки в направлении точки приложения  $P$  пара точек, образующих точку  $5k$ , следует искать лишь в зоне, ограниченной перпендикуляром векторов к линии, соединяющей проекции точек  $4k$  и  $P$  на плоскость  $X_{11s} Y_{11s}$ .

Для проверки, лежит ли рассматриваемая точка в требуемой зоне определим:

1) уравнение линии, проходящей через точки контакта  $4k$  и точку  $P$

$$AX_{11_1} + BY_{11_1} + C = 0; \quad (2.5)$$

2) уравнение перпендикуляра векторов к линии  $4k P$

$$A_1 X_{11_1} + B_1 Y_{11_1} + C_1 = 0. \quad (2.6)$$

В уравнение (2.6) подставим координаты точки  $P$  и координаты каждой проверяемой точки установочной базы пластины

$$A_1 X_{11_{1P}} + B_1 Y_{11_{1P}} + C_1 = K_1; \quad A_1 X_{11_{1i,j}} + B_1 Y_{11_{1i,j}} + C_1 = K_2;$$

3) если  $K_1 \cdot K_2 < 0$ , то рассматриваемая точка и точка приложения силы  $P$  лежат по разные стороны перпендикуляра векторов и значит эта точка не входит в нужную зону. При отыскании точки  $5k$  она исключается.

Для упрощения расчетов ввели новую систему координат, направление оси  $Y_{12s}$  которой совпадает с вектором, проходящим через точки  $4k$  и точку проекции приложения силы  $P$ . Произвели пересчет координат точек:

– пластины

$$X_{12_{1i,j}} = X_{11_{1i,j}} \cos \mu + Y_{11_{1i,j}} \sin \mu;$$

$$Y_{12_{1i,j}} = -X_{11_{1i,j}} \sin \mu + Y_{11_{1i,j}} \cos \mu;$$

$$Z_{12_{1i,j}} = Z_{11_{1i,j}},$$

где  $\mu = \operatorname{arctg} \left( \frac{X_{12_{1P}}}{Y_{12_{1P}}} \right)$ ;

– державки

$$X_{12_{2i,j}} = X_{11_{2i,j}} \cos \mu + Y_{11_{2i,j}} \sin \mu;$$

$$Y_{12_{2i,j}} = -X_{11_{2i,j}} \sin \mu + Y_{11_{2i,j}} \cos \mu;$$

$$Z_{12_{2i,j}} = Z_{11_{2i,j}}.$$

Определили модули радиус-векторов, направленных из четвертой точки контакта в центры участков, принадлежащих:

– пластине

$$R_{12_{1i,j}} = \sqrt{(Y_{12_{1i,j}})^2 + (Z_{12_{1i,j}})^2};$$

– державке

$$R_{12_{2i,j}} = \sqrt{(Y_{12_{2i,j}})^2 + (Z_{12_{2i,j}})^2};$$

Углы между радиус-векторами и их проекциями на плоскости  $X_{12_1} Y_{12_1}$  для пластины и  $X_{12_2} Y_{12_2}$  для державки.

Таким образом,

– для пластины

$$\alpha_{12_{1i,j}} = \arccos \frac{|Y_{12_{1i,j}}|}{R_{12_{1i,j}}};$$

– для державки

$$\alpha_{12_{2i,j}} = \arccos \frac{|Y_{12_{2i,j}}|}{R_{12_{2i,j}}}.$$

Пятую точку контакта  $5k$  будут образовывать участки с минимальным значением угла  $\alpha = \alpha_{12_{1i,j}} + \alpha_{12_{2i,j}}$ .

Поместили начало новой системы координат  $X_{13_S} Y_{13_S} Z_{13_S}$  в четвертую точку контакта так, чтобы оси  $X_{13_S}$  и  $X_{12_S}$  совпадали, тогда оси  $Y_{13}$  и  $Z_{13}$  будут повернуты на соответствующие углы  $\alpha_{12_1}$  и  $\alpha_{12_2}$ .

Пересчитали координаты участков в новой системе координат:  
– пластины

$$\begin{aligned} X_{13_{1i,j}} &= X_{12_{1i,j}}; \\ Y_{13_{1i,j}} &= Y_{12_{1i,j}} \cos(\alpha_{12_{1i,j}}) + Z_{12_{1i,j}} \sin(\alpha_{12_{1i,j}}); \\ Z_{13_{1i,j}} &= -Y_{12_{1i,j}} \sin(\alpha_{12_{1i,j}}) + Z_{12_{1i,j}} \cos(\alpha_{12_{1i,j}}); \end{aligned}$$

– державки

$$\begin{aligned} X_{13_{2i,j}} &= X_{12_{2i,j}}; \\ Y_{13_{2i,j}} &= -Y_{12_{2i,j}} \cos(\alpha_{12_{2i,j}}) - Z_{12_{2i,j}} \sin(\alpha_{12_{2i,j}}); \\ Z_{13_{2i,j}} &= Y_{12_{2i,j}} \sin(\alpha_{12_{2i,j}}) - Z_{12_{2i,j}} \cos(\alpha_{12_{2i,j}}); \end{aligned}$$

Зазоры между пластиной и державкой по направляющей поверхности рассчитывали по выражению

$$\Delta_{2i,j} = Z_{13_{1i,j}} + Z_{13_{2i,j}}.$$

Для определения шестой точки контакта вводили системы координат  $X_{14_1} Y_{14_1} Z_{14_1}$  и  $X_{14_2} Y_{14_2} Z_{14_2}$ .

Исходными данными для расчета являются топографии опорной поверхности пластины и паза державки

$$\left[ Z_{14_{1i,j}} \right], \left[ Z_{14_{2i,j}} \right], \left[ X_{14_{1i,j}} \right], \dots, \left[ Y_{14_{2i,j}} \right].$$

Шестую точку контакта СМП и паза определяли путем параллельного перемещения СМП вместе с системой координат  $X_{14_1} Y_{14_1} Z_{14_1}$  вдоль оси  $Z_{14_1}$ . Контакт образовывали те точки, которые

имели минимальное значение  $Z_{\min} = \left[ Z_{14_{1i,j}} \right] + \left[ Z_{14_{2i,j}} \right]$ .

Координаты шестой точки контакта  $6k$  обозначили через  $X_{14,6}$  и  $Y_{14,6}$ . Поместили начало новой системы координат  $X_{15_S} Y_{15_S} Z_{15_S}$  в шестую точку контакта, а оси  $X_{15_S}$  и  $Y_{15_S}$  направили соответственно вдоль осей  $X_{14_S}$  и  $Y_{14_S}$ , и пересчитали координаты участков в новой системе координат

$$\left[ Z_{15_{1i,j}} \right] = \left[ Z_{14_{1i,j}} \right] - \left[ Z_{14,6} \right]; \quad \left[ Z_{15_{2i,j}} \right] = \left[ Z_{14_{2i,j}} \right] - \left[ Z_{14,6} \right].$$

Зазоры между пластиной и державкой по опорной поверхности определяли по выражению

$$\Delta_{3_{i,j}} = Z_{15_{1_{i,j}}} + Z_{15_{2_{i,j}}} .$$

## 2.4. Моделирование точности позиционирования СМП в корпусе инструмента

Как известно [89], [139] в качестве основных базовых поверхностей СМП в конструкциях сборных инструментов используют боковые поверхности или поверхности центрального отверстия. При базировании на боковые поверхности удобнее всего математическую модель точности позиционирования СМП в корпусе инструмента получить, используя плоскостной и кинематический методы [140].

### 2.4.1. Анализ плоскостным методом точности позиционирования СМП в корпусе инструмента

Фактическое положение вершины инструмента зависит от положения базовых точек.

Для анализа точности вводится система координат  $XYZ$ , в которой заданы координаты номинальных точек контакта базовых граней СМП с пазом корпуса инструмента (рис. 2.33).

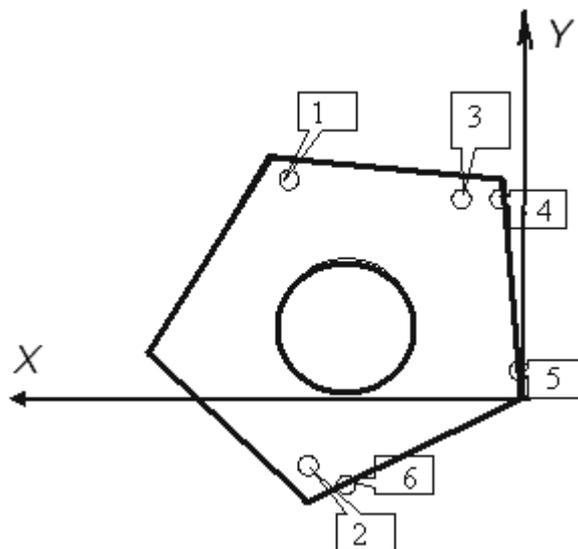


Рис. 2.33. Схема к расчету точности позиционирования СМП в пазу корпуса инструмента

Определяли коэффициенты уравнения установочной плоскости в номинальных координатах, используя следующие зависимости:

$$A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1 = 0, \quad (2.7)$$

где  $A_1 = \begin{bmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{bmatrix}$ ,  $B_1 = \begin{bmatrix} z_2 - z_1 & x_2 - x_1 \\ z_3 - z_1 & x_3 - x_1 \end{bmatrix}$ ,

$$C_1 = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix}, \quad D_1 = -(|A_1| \cdot x_1 + |B_1| \cdot y_1 + |C_1| \cdot z_1), \quad (2.8)$$

здесь  $x_1 \dots x_i$ ,  $y_1 \dots y_i$ ,  $z_1 \dots z_i$  – координаты точек контакта СМП с пазом корпуса инструмента.

Затем рассчитывали коэффициенты уравнения направляющей плоскости в номинальных координатах, используя зависимости:

$$A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2 = 0, \quad (2.9)$$

где  $A_2 = \begin{bmatrix} y_5 - y_4 & z_5 - z_4 \\ |B_1| & |C_1| \end{bmatrix}$ ,  $B_2 = \begin{bmatrix} z_5 - z_4 & x_5 - x_4 \\ |C_1| & |A_1| \end{bmatrix}$ ,

$$C_2 = \begin{bmatrix} x_5 - x_4 & y_5 - y_4 \\ |A_1| & |B_1| \end{bmatrix}, \quad D_2 = -(|A_2| \cdot x_4 + |B_2| \cdot y_4 + |C_2| \cdot z_4). \quad (2.10)$$

Так как в опорной плоскости расположена одна точка контакта, то, воспользовавшись свойством взаимной перпендикулярности с плоскостью касательной установочной грани, можно найти угол между направляющей и опорной гранями:

$$\cos(\beta) = \frac{A_2 \cdot A_3 + B_2 \cdot B_3 + C_2 \cdot C_3}{\sqrt{(A_2^2 + B_2^2 + C_2^2)} \sqrt{A_3^2 + B_3^2 + C_3^2}}, \quad (2.11)$$

где  $B_3 = \frac{A_3 \cdot |B_2| + |C_1|}{|A_2|}$ ;  $C_3 = \frac{\frac{|C_2|}{|A_2|} \cdot (A_3 \cdot |B_2| + |C_1|) + |A_1|}{|B_2|}$ ;

$$D_3 = -(|A_3| \cdot x_6 + |B_3| \cdot y_6 + |C_3| \cdot z_6). \quad (2.12)$$

Подставив в формулу (2.11) выражения (2.12), получили:

$$\cos(\beta) = \frac{(|A_2| \cdot A_3 + |B_2| \cdot \frac{A_3 \cdot |B_2| + |C_1|}{|A_2|}) + |C_2| \cdot (\frac{|C_2|}{|A_2|} \cdot (A_3 \cdot |B_2| + |C_1|) + |A_1|)}{\sqrt{((|A_2|)^2 + (|B_2|)^2 + (|C_2|)^2) \cdot \sqrt{(A_3)^2 + (\frac{A_3 \cdot |B_2| + |C_1|}{|A_2|})^2 + (\frac{|C_2| \cdot (A_3 \cdot |B_2| + |C_1|) + |A_1|}{|B_2|})^2}}}. \quad (2.13)$$

Из формулы (2.13), выразив  $A_3$ , получили:

$$A_3^2 \cdot \alpha + A_3 \cdot \varepsilon + \delta = 0, \quad (2.14)$$

где

$$\alpha = 1 + \left(\frac{|B_2|}{|A_2|}\right)^2 + \left(\frac{|C_2|}{|A_2|} \cdot |B_2|\right)^2 - \frac{(|A_2| + \frac{|B_2| \cdot |B_2|}{|A_2|} + \frac{|C_2| \cdot |C_2|}{|A_2|} \cdot |B_2|)^2}{\cos^2(\beta) \cdot (\sqrt{|A_2|^2 + |B_2|^2 + |C_2|^2})^2}; \quad (2.15)$$

$$\varepsilon = 2 \cdot \frac{|B_2| \cdot |C_1|}{|A_2| \cdot |A_2|} + 2 \cdot \frac{|C_2| \cdot |B_2|}{|A_2|} \cdot \left(\frac{|C_2|}{|A_2|} \cdot |C_1| + |A_1|\right) - \frac{2 \cdot (|A_2| + \frac{|B_2| \cdot |B_2|}{|A_2|} + \frac{|C_2| \cdot |C_2|}{|A_2|}) \cdot (\frac{|B_2| \cdot |C_1|}{|A_2|} + \frac{|C_2| \cdot |C_2|}{|A_2|} \cdot |C_1| + |C_2| \cdot |A_1|)}{\cos^2(\beta) \cdot (\sqrt{|A_2|^2 + |B_2|^2 + |C_2|^2})^2}; \quad (2.16)$$

$$\delta = \left(\frac{|C_1|}{|A_2|}\right)^2 + \left(\frac{|C_2|}{|A_2|} \cdot |C_1| + |A_1|\right)^2 - \frac{(\frac{|B_2| \cdot |C_1|}{|A_2|} + \frac{|C_2| \cdot |C_2|}{|A_2|} \cdot |C_1| + |C_2| \cdot |A_1|)^2}{\cos^2(\beta) \cdot (\sqrt{|A_2|^2 + |B_2|^2 + |C_2|^2})^2}. \quad (2.17)$$

Решая уравнение (2.14), находили два значения  $A_3$ . За верное число  $A_3$  принимали то, которое дает при подстановке его в уравнение (2.13) значение угла  $\beta$  соответствует заданному углу. После определения  $A_3$  подставляли его значение в формулы (2.12) и определяли остальные коэффициенты опорной грани

$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0. \quad (2.18)$$

Решая совместно уравнения (2.7), (2.9) и (2.18), находили координаты  $x_E, y_E, z_E$  точки пересечения этих плоскостей.

Далее производили расчет коэффициентов плоскостей в действительных координатах (см. п. 2.3) по методике, изложенной выше. Точность позиционирования находили как геометрическую сумму разности между действительными и номинальными координатами точек пересечения трех плоскостей

$$\delta = \sqrt{(x_E - x_{E1})^2 + (y_E - y_{E1})^2 + (z_E - z_{E1})^2}. \quad (2.19)$$

На точность позиционирования оказывают влияние различные параметры СМП (см. п. 2.1). Результаты расчетов представлены на рис. 2.34–2.38.

Анализ рис. 2.34 позволяет заключить, что погрешность позиционирования увеличивается до 2 раз при увеличении погрешности изготовления пластины  $\sigma$  на каждые 0,1 мм.

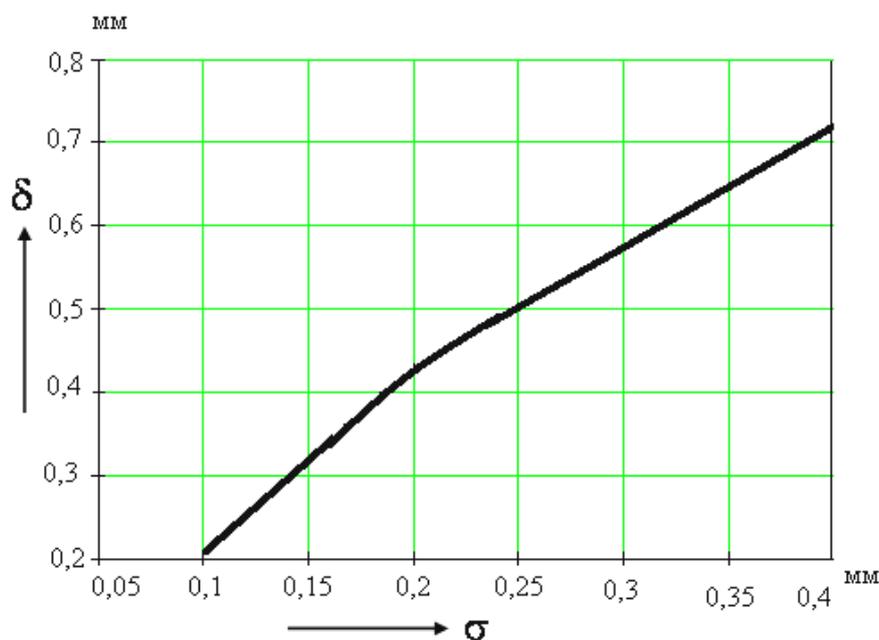


Рис. 2.34. График влияния погрешности изготовления СМП на точность ее позиционирования

Затем определяли влияние формы СМП на точность ее позиционирования в пазу корпуса инструмента. Применение трех-, четырех- и пятигранной форм пластин, со значениями углов при вершине  $\beta$  соответственно равными  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $108^\circ$  приводит к уменьшению погрешности позиционирования соответственно в 1:1,15:1,125 (рис. 2.35).

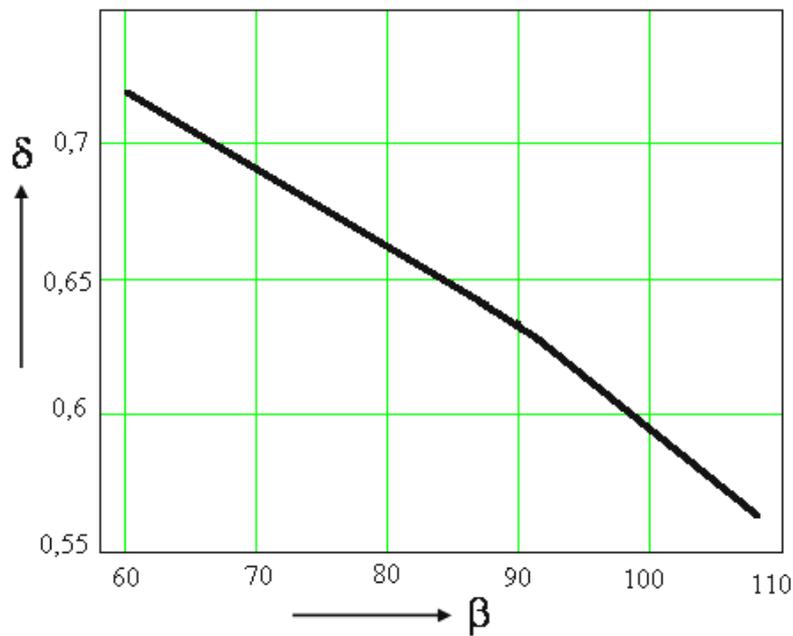


Рис. 2.35. График влияния формы СМП на точность ее позиционирования в пазу корпуса инструмента

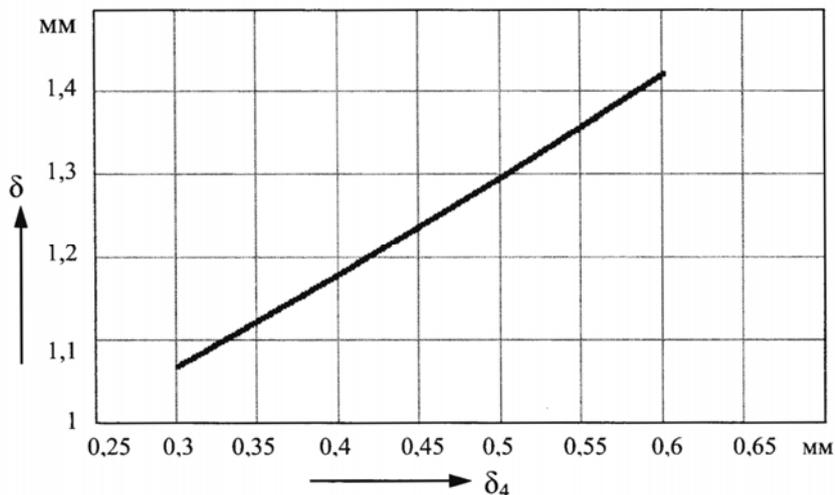


Рис. 2.36. График влияния погрешности изготовления СМП в четвертой базовой точке на ее точность позиционирования

Кроме того, на точность позиционирования будет оказывать погрешность расположения четвертой базовой точки по нормали к грани СМП (рис. 2.36).

Так, при увеличении погрешности изготовления СМП в четвертой базовой точке трехгранной пластины на 0,1 мм приводит к увеличению погрешности ее позиционирования в корпусе инструмента соответственно в 1,08 раза.

При одинаковой погрешности изготовления СМП точки контакта могут располагаться на различном расстоянии друг от друга. Поэтому было изучено влияние расположения 4-й точки контакта трехгранной пластины на точность ее позиционирования в корпусе инструмента. Так, при увеличении расстояния между точками 4 и 5 на 3 мм погрешность позиционирования увеличивается в 1,2 раза (рис. 2.37).

Кроме того, на примере трехгранной пластины определено влияние погрешности угла при вершине на точность позиционирования ее в корпусе инструмента. Так, при уменьшении угла при вершине на 1,5 градуса точность позиционирования уменьшается в 1,8 раза (рис. 2.38).

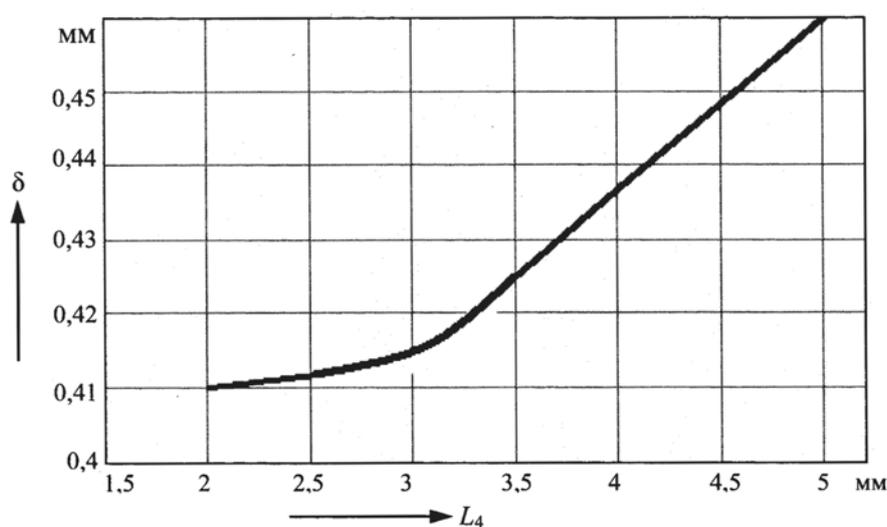


Рис. 2.37. График влияния расположения 4-й базовой точки на точность позиционирования СМП

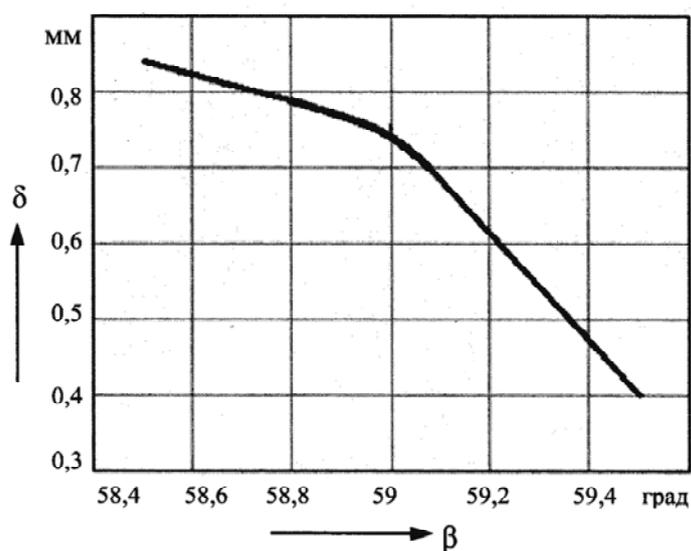


Рис. 2.38. График влияния погрешности угла при вершине трехгранной пластины на точность ее позиционирования

Моделирование погрешности позиционирования СМП, имеющих положительные значения задних углов, производили, воспользовавшись методом преобразования систем координат (рис. 2.39). Исходную систему координат выбрали так, чтобы установочная грань располагалась в плоскости  $XU$ . В этом случае вектор нормали к установочной грани стал равным единичному вектору  $\bar{k}$ . Таким образом, уравнение установочной плоскости приняло частный вид:  $Z = 0$ . Для определения уравнения направляющей грани произвели поворот исходной системы координат вокруг оси  $X$  на угол  $(90 - \alpha)$ . Полученную в результате этого поворота систему координат обозначили  $X_2Y_2Z_2$  и она заняла такое положение, что плоскость  $X_2Y_2$  совпала с направляющей гранью.

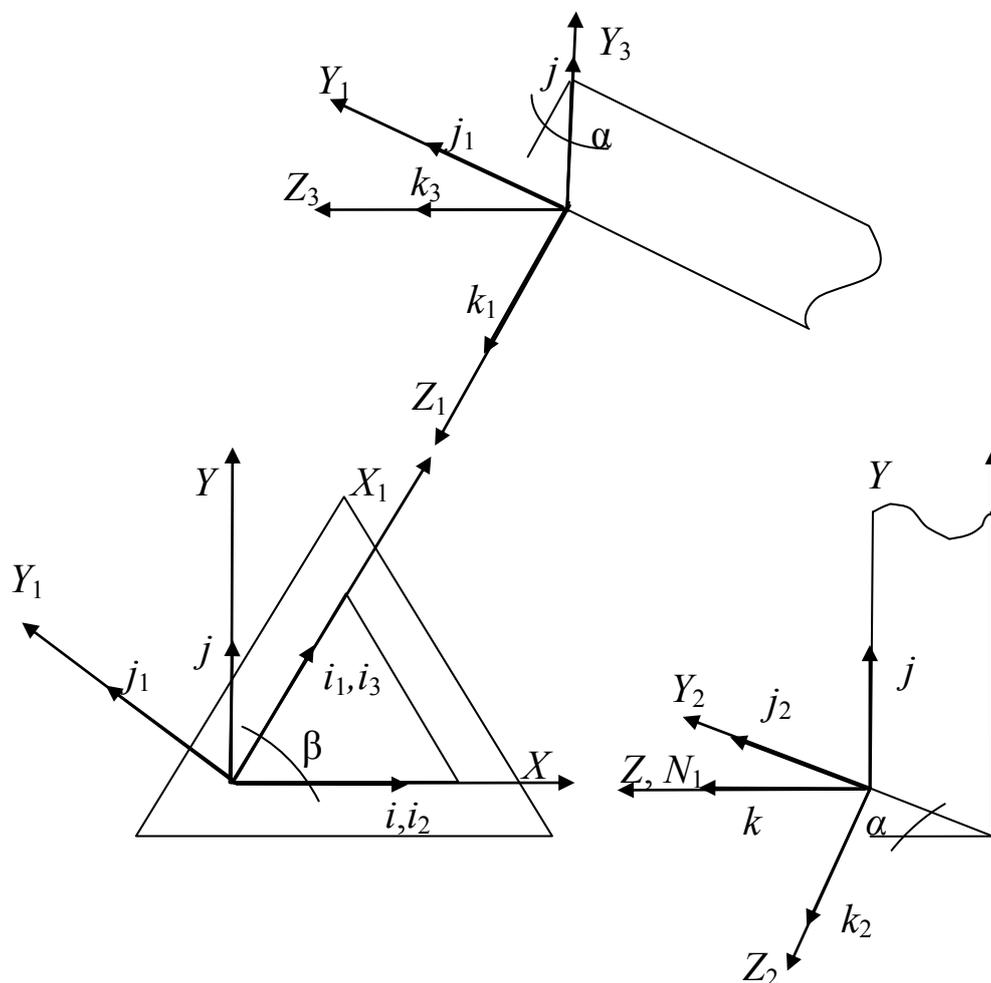


Рис. 2.39. Расчетная схема

В этом случае вектор нормали к ней совпадает с направляющим вектором  $\bar{k}_2$  оси  $Z_2$ . Для определения положения вектора  $\bar{N}_2$

в системе координат  $XYZ$  определили связь между системами координат. Выразив ее через единичные вектора

$$\begin{aligned} \vec{i}_2 &= \vec{i}; \\ \vec{j}_2 &= \vec{j} \cdot \sin(\alpha) + \vec{k} \cdot \cos(\alpha); \\ \vec{k}_2 &= -\vec{j} \cdot \cos(\alpha) + \vec{k} \cdot \sin(\alpha). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Таким образом, уравнение направляющей грани в исходной системе координат имеет вид:

$$-Y \cdot \cos(\alpha) + Z \cdot \sin(\alpha) = 0. \quad (2.21)$$

Для определения уравнения опорной грани необходимо произвести вначале поворот исходной системы координат  $XYZ$  вокруг оси  $Z$  на угол  $\beta$ , а затем вокруг оси  $X_1$  на угол  $(90 - \alpha)$ . Полученная в результате первого преобразования система координат  $X_1Y_1Z_1$  имеет следующую связь с исходной:

$$\begin{aligned} \vec{i}_1 &= \vec{i} \cdot \cos(\beta) + \vec{j} \cdot \sin(\beta); \\ \vec{j}_1 &= -\vec{i} \cdot \sin(\beta) + \vec{j} \cdot \cos(\beta); \\ \vec{k}_1 &= \vec{k}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

После второго поворота исходную систему заменили на  $X_3Y_3Z_3$ . Связь между полученной системой координат  $X_3Y_3Z_3$  и предыдущей имеет вид:

$$\begin{aligned} \vec{i}_3 &= \vec{i}_1; \\ \vec{j}_3 &= \vec{j}_1 \cdot \sin(\alpha) - \vec{k}_1 \cdot \cos(\alpha); \\ \vec{k}_3 &= \vec{j}_1 \cdot \cos(\alpha) + \vec{k}_1 \cdot \sin(\alpha). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Если учесть связь системы координат  $X_1Y_1Z_1$  с исходной системой координат, то связь между системами координат  $X_3Y_3Z_3$  и  $XYZ$  примет вид:

$$\begin{aligned} \vec{i}_3 &= \vec{i} \cdot \cos(\beta) + \vec{j} \cdot \sin(\beta); \\ \vec{j}_3 &= -\vec{i} \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\alpha) + \vec{j} \cdot \cos(\beta) \cdot \sin(\alpha) + \vec{k} \cdot \cos(\alpha); \\ \vec{k}_3 &= -\vec{i} \cdot \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha) + \vec{j} \cdot \cos(\beta) \cdot \cos(\alpha) + \vec{k} \cdot \sin(\alpha). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Система координат  $X_3Y_3Z_3$ , полученная в результате преобразования исходной системы, занимает такое положение, что плоскость  $X_3Y_3$  совпадает с опорной гранью СМП. Таким образом, вектор нормали к опорной грани совпадает с направляющим вектором  $\bar{k}_3$  координатной оси  $Z_3$ . Поэтому уравнение опорной грани в системе координат  $XYZ$  примет вид:

$$-X \cdot \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha) + Y \cdot \cos(\beta) \cdot \cos(\alpha) + Z \cdot \sin(\alpha) = 0. \quad (2.25)$$

Определяем точку пересечения базовых граней СМП, решив для этого следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} Z = 0, \\ -Y \cdot \cos(\alpha) + Z \cdot \sin(\alpha) = 0, \\ -X \cdot \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha) + Y \cdot \cos(\beta) \cdot \cos(\alpha) + Z \cdot \sin(\alpha) = 0. \end{cases} \quad (2.26)$$

В результате, получаем точку  $O$  с номинальными координатами  $X_o = 0, Y_o = 0, Z_o = 0$ .

Действительные координаты точек контакта получили при изменении углов при вершине ( $\beta$  и заднего  $\alpha$ ) в пределах допуска ( $\pm 30'$ ). Погрешность позиционирования соответствовала расстоянию между номинальной точкой пересечения плоскостей и действительной. Результаты расчета точности позиционирования СМП в пазу корпуса инструмента при изменении углов представлены на рис. 2.40.

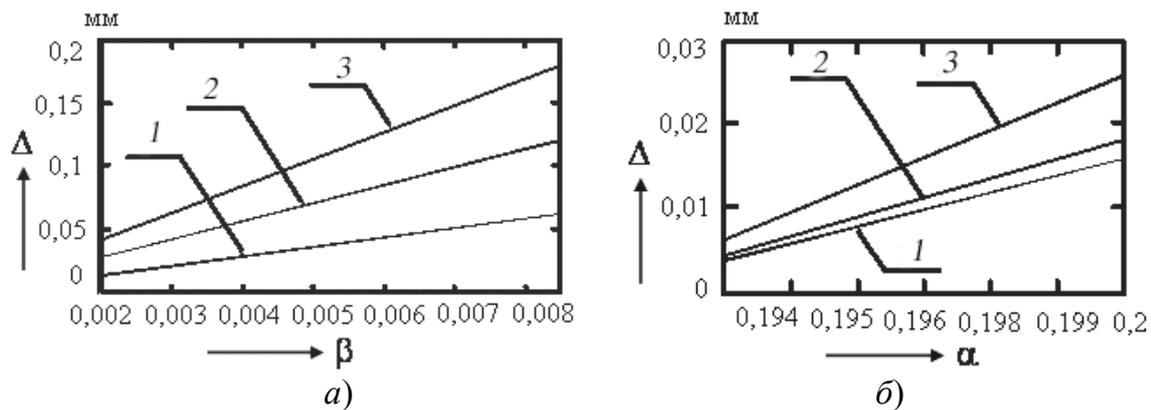


Рис. 2.40. Графики влияния изменения углов при вершине (а) и заднего угла (б) на точность позиционирования СМП в пазу корпуса инструмента для: пятигранной (1), квадратной (2) и трехгранной (3) пластин

Графики, приведенные на рис. 2.40 позволяют заключить, что точность позиционирования обладает наибольшей чувствительностью к изменению углов  $\beta$  и  $\alpha$  у пластины трехгранной формы.

### 2.4.2. Анализ погрешностей при базировании СМП на штифт

По характеру относительного расположения СМП в поле зазора можно выделить следующие основные случаи [118]:

- зазоры полностью выбираются в одном направлении;
- зазоры полностью выбираются так, что детали соприкасаются равновероятно в любой точке окружности;
- зазоры, в пределах которых сопряженные детали могут занимать любое относительное положение.

Рассмотрим каждый из этих случаев.

*Зазоры полностью выбираются в одном направлении*

Зазоры могут быть полностью выбраны при относительном смещении СМП в одну сторону под действием клина или винта.

На рис. 2.41 приведена схема сопряжения СМП с отверстием, где зазор выбран в одну сторону.

Смещение осей сопряженных поверхностей

$$Z = 0,5 (X_a - X_{ш}),$$

где  $X_a$  и  $X_{ш}$  – случайные величины диаметра соответственно отверстия и штифта;  $Z$  – случайная величина – смещение осей сопряженных поверхностей.

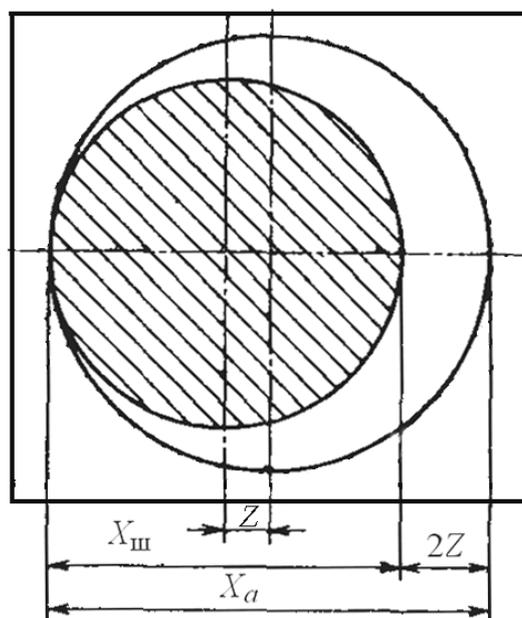


Рис. 2.41. Схема к расчету соединения с односторонним зазором

Математическое ожидание смещения осей

$$M(Z) = 0,5 (M(X_a) - M(X_{ш})).$$

Тогда после введения коэффициентов приведения получили:

$$M_{\Sigma z} = \frac{1}{2} \sum_z |\xi_z| \cos \theta_z \left[ (d_a - d_{ш}) + (em_a - em_{ш}) + \left( \alpha_a \frac{T_a}{2} - \alpha_{ш} \frac{T_{ш}}{2} \right) \right]; \quad (2.27)$$

$$K_{\Sigma z}^2 T_{\Sigma z}^2 = \frac{1}{4} \sum_z \xi_z^2 \cos^2 \theta_z (K_a^2 T_a^2 + K_{ш}^2 T_{ш}^2). \quad (2.28)$$

В этих формулах  $em_a$  и  $em_{ш}$  – средние отклонения размеров отверстия и штифта;  $T_a$  и  $T_{ш}$  – допуски этих размеров;  $K_a$ ,  $K_{ш}$ ,  $\alpha_a$  и  $\alpha_{ш}$  – коэффициенты рассеивания;  $d_a$  и  $d_{ш}$  – номинальные значения диаметров отверстия и штифта.

*Зазоры полностью выбираются так, что точки штифта соприкасаются равновероятно в любой точке окружности при изменении угла в плане.*

На рис. 2.42 показано одно из возможных положений СМП. Смещение, совпадающее с направлением исходного размера (осью  $Oy$ ),  $Y = Z \cos \theta$ . Считаем, что угол  $\theta$  распределен равновероятно в пределах от 0 до  $2\pi$ . Для этих условий  $M(\cos \theta) = 0$  и  $D(\cos \theta) = 0,5$ .

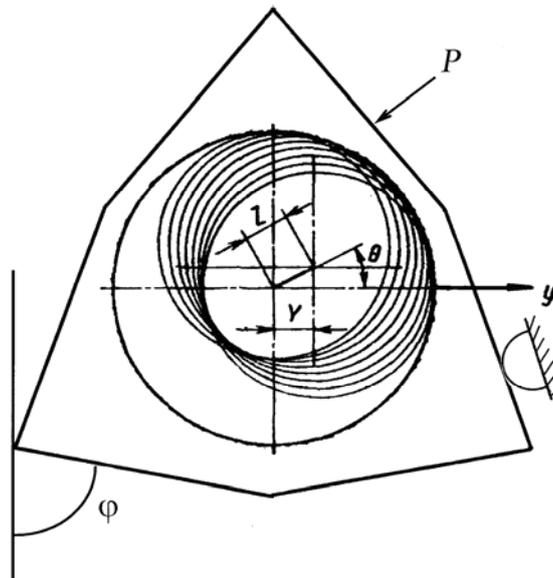


Рис. 2.42. Схема к расчету соединения с равновероятным зазором

Тогда математическое ожидание и дисперсия величины  $Y$ :  $M(Y) = 0$ ;  $D(Y) = 0,5 (D(Z) + M(Z)^2)$ .

В расчетной схеме может быть несколько таких сопряжений. Введя коэффициент приведения окончательно получили:

$$M_{\Sigma z} = 0; K_{\Sigma z}^2 T_{\Sigma z}^2 = \sum_z \xi_z^2 K_{xz}^2 T_z^2, \quad (2.29)$$

где  $K_{xz}$  – приведенный коэффициент относительного рассеивания,

$$K_{xz}^2 = 0,5 \left[ K_z^2 + 36 \left( \frac{em_z}{T_z} + \frac{\alpha_z}{2} \right)^2 \right]. \quad (2.30)$$

Значения  $em_z$  и  $T_z$  вычисляются по формулам

$$em_z = \frac{1}{2} \left[ (d_a - d_{\text{ш}}) + (em_a - em_{\text{ш}}) + \frac{1}{2} (\alpha_a T_a + \alpha_{\text{ш}} T_{\text{ш}}) \right] - \frac{\alpha_z T_z}{2}; \quad (2.31)$$

$$T_z = \frac{1}{2K_z} \sqrt{K_a^2 T_a^2 + K_{\text{ш}}^2 T_{\text{ш}}^2}. \quad (2.32)$$

*Зазоры, в пределах которых СМП могут занимать любое относительное положение*

Возможны два варианта:

*Вариант 1.* СМП занимает относительное положение в поле зазора на линии, совпадающей с направлением размера обрабатываемой детали или расположенной по отношению к нему под некоторым постоянным углом.

Пусть имеем функцию  $\varphi_1(z)$  плотности вероятности радиального зазора и функцию  $\varphi_2(y)$  плотности вероятности положения штифта в отверстии СМП по оси  $y$  (рис. 2.43). Требуется определить функции  $\varphi_3(x)$  и  $\varphi_4(x)$  плотности условных вероятностей положения СМП в отверстии по оси  $x = y$ . Для схемы на рис. 2.43  $\varphi_3(x) = \varphi_2(y)$  при

$$x = \overline{0a} \text{ и } \varphi_4(x) = \varphi_2(y) \int_{x=a}^b \varphi_1(z) dz \text{ при } x = \overline{ab}.$$

Как показывает анализ, выполненный для наружных деталей П. Ф. Дунаевым и О. П. Леликовым, наиболее часто встречаются законы распределения параметров СМП – равновероятный и Гаусса.

Пусть функции  $\varphi_1(z) = \frac{1}{\sigma_z \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{(z - M_z)^2}{2\sigma_z^2} \right]$ , а функция

$\varphi_2(y) = 1/b$  – равновероятная. Тогда  $\varphi_3(x) = \varphi_2(y) = 1/b$ ;

$$\varphi_4(x) = \frac{1}{b\sigma_z\sqrt{2\pi}} \int_{x=z}^b \exp\left[-\frac{(Z-M_z)^2}{2\sigma_z^2}\right] dz.$$

При симметричном смещении штифта в обе стороны  $M_x = 0$  и дисперсия величины  $x$

$$D_x = 2 \int_0^a x^2 \varphi_3(x) dx + 2 \int_a^b x^2 \varphi_4(x) dx.$$

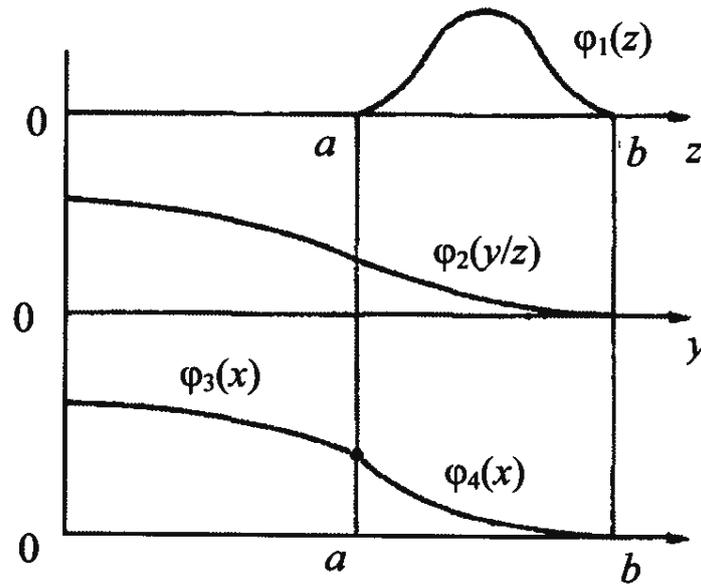


Рис. 2.43. Схема к расчету позиционирования СМП с различными законами распределения зазора и положения штифта

Приведенный коэффициент относительного рассеивания

$$K_{xz} = 3 \frac{1}{b} \sqrt{\frac{a^3}{3} + \frac{1}{\sigma_z \sqrt{2\pi}} \int_a^b x^2 \left( \int_a^b e^{-\frac{(z-M_z)^2}{2\sigma_z^2}} dz \right) dx}. \quad (2.33)$$

По результатам вычислений на ЭВМ для приведенных сочетаний функций построен график (рис. 2.44) для определения коэффициента  $K_{xz}$ .

Если зазор выбирается под углом  $\theta$  к направлению исходного размера, то коэффициент приведения  $\xi_z$  умножают на  $\cos\theta$ .

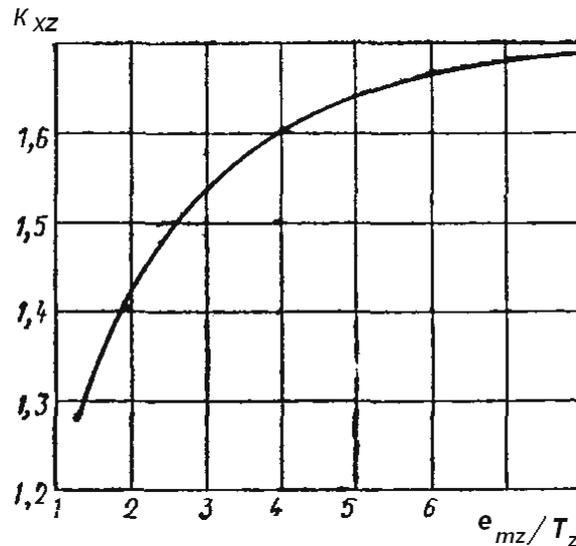


Рис. 2.44. Графическая зависимость  $K_{kz} = f(e_{mz}/T_z)$

*Вариант 2.* СМП занимает любое относительное положение в пределах зазора. Положим, что зазор выбирается по направлению оси  $x$ , которая относительно интересующего нас направления и может занимать равновероятное положение по углу  $\theta$  от 0 до  $2\pi$ . В этом случае  $u = x \cos \theta$ . Так как величины  $x$  и  $\cos \theta$  независимы, то  $M(u) = M(x)M(\cos \theta)$ . Но  $M(\cos \theta) = 0$ ; тогда  $M_u = 0$ .

Дисперсия произведения двух независимых величин

$$D_u = D_x D(\cos \theta) + D_x [M(\cos \theta)]^2 + D(\cos \theta) M_x^2,$$

но  $M(\cos \theta) = 0$ , а  $D(\cos \theta) = 0,5$ ; тогда  $D_u = 0,5D_x + 0,5 M_x^2$ .

Таким образом, если смещение СМП происходит по линии, совпадающей с направлением размера детали или расположенной по отношению к нему под некоторым постоянным углом, то расчет производили по формулам

$$M_{\Sigma z} = 0; \quad K_{\Sigma z}^2 T_{\Sigma z}^2 = \sum_z \xi_z^2 K_{xz}^2 T_{xz}^2,$$

здесь коэффициент  $K_{xz}$  вычисляют по (2.30)

$$T_{xz} = 2em_z + T_z, \tag{2.34}$$

где  $em_z$  и  $T_z$  вычисляют по формулам (2.31) и (2.32).

*Относительное смещение штифта и СМП в поле зазора с учетом погрешностей размеров и формы*

Сопряженные штифт и отверстие могут иметь погрешности не только размеров, но и формы. Относительное смещение штифта и от-

верстия определяют по формулам (2.31) и (2.32), в которые входят коэффициенты  $\alpha_a, K_a$ , относящиеся к отверстию, и  $\alpha_{ш}, K_{ш}$ , относящиеся к штифту.

Допускали, что поперечные сечения отверстия и штифта представляют собой эллипс или близкую к нему фигуру. Эллипс имеет большую и малую оси, размеры которых можно условно назвать большим и малым диаметром отверстия или штифта. Поля рассеивания большого и малого диаметров – погрешностями размеров.

Принимали в качестве размеров штифта и отверстия длину малой оси эллипса.

Вводили обозначения величин, относящихся к отверстию (рис. 2.45), приняв номинальное значение отверстия  $d_a$  за начало координат:  $X_a$  – случайная величина погрешности размера;  $\overline{X_a}$  – математическое ожидание этой величины;  $em_a, T_a, \alpha_a, K_a$  – характеристики рассеивания случайной величины  $X_a$ ;  $Y_{\phi a}$  – случайная величина погрешностей формы;  $\overline{X_{\phi a}}, em_{\phi a}, T_{\phi a}, \alpha_{\phi a}, K_{\phi a}$  – характеристики рассеивания этой случайной величины;  $d_a$  – случайная величина погрешности текущего размера эллипса, т. е. разность между номиналом и любым диаметром эллипса;  $\overline{d_a}, em_{0a}, T_{0a}, \alpha_{0a}, K_{0a}$  – характеристики рассеивания этой случайной величины;  $r_a$  – коэффициент корреляции между погрешностями размера и формы отверстия.

Для штифта принимали такие же обозначения, но с индексом «ш».

Смещение осей штифта и отверстия в направлении оси  $x$  (рис. 2.46)

$$Z = \frac{1}{2} [(X_a + Y_{\phi a} \cos \theta_a) - (X_{ш} + Y_{\phi ш} \cos \theta_{ш})].$$

Среднее значение  $Z$

$$M_z = \frac{1}{2} [M(X_a) + M(Y_{\phi a} \cos \theta_a) - M(X_{ш}) - M(Y_{\phi ш} \cos \theta_{ш})].$$

Так как  $M(Y \cos \theta) = M_y M(\cos \theta)$ , то

$$M_z = \frac{1}{2} [M(X_a) + M(Y_{\phi a})M(\cos \theta_a) - M(X_{ш}) - M(Y_{\phi ш})M(\cos \theta_{ш})].$$

С учетом, что  $M = em + \frac{\alpha T}{2}$ , получим

$$M_z = \frac{1}{2} \left\{ (em_{0a} - em_{0ш}) + \left[ \alpha_a \frac{T_a}{2} + M(\cos \theta) \left( em_{\phi a} + \alpha_{\phi a} \frac{T_{\phi a}}{2} \right) \right] - \left[ \alpha_{ш} \frac{T_{ш}}{2} + M(\cos \theta) \left( em_{\phi ш} + \alpha_{\phi ш} \frac{T_{\phi ш}}{2} \right) \right] \right\}. \quad (2.35)$$

Дисперсию случайной величины  $Z$  определяли, полагая, что случайные величины размера и формы коррелированы:

$$D_z = \frac{1}{4} \left[ D(X_a) + D(Y_{\phi a} \cos \theta_a) + D(X_{ш}) + D(Y_{\phi ш} \cos \theta_{ш}) + 2r_a \sigma_a \sigma_{\phi a} + 2r_{ш} \sigma_{ш} \sigma_{\phi ш} \right].$$

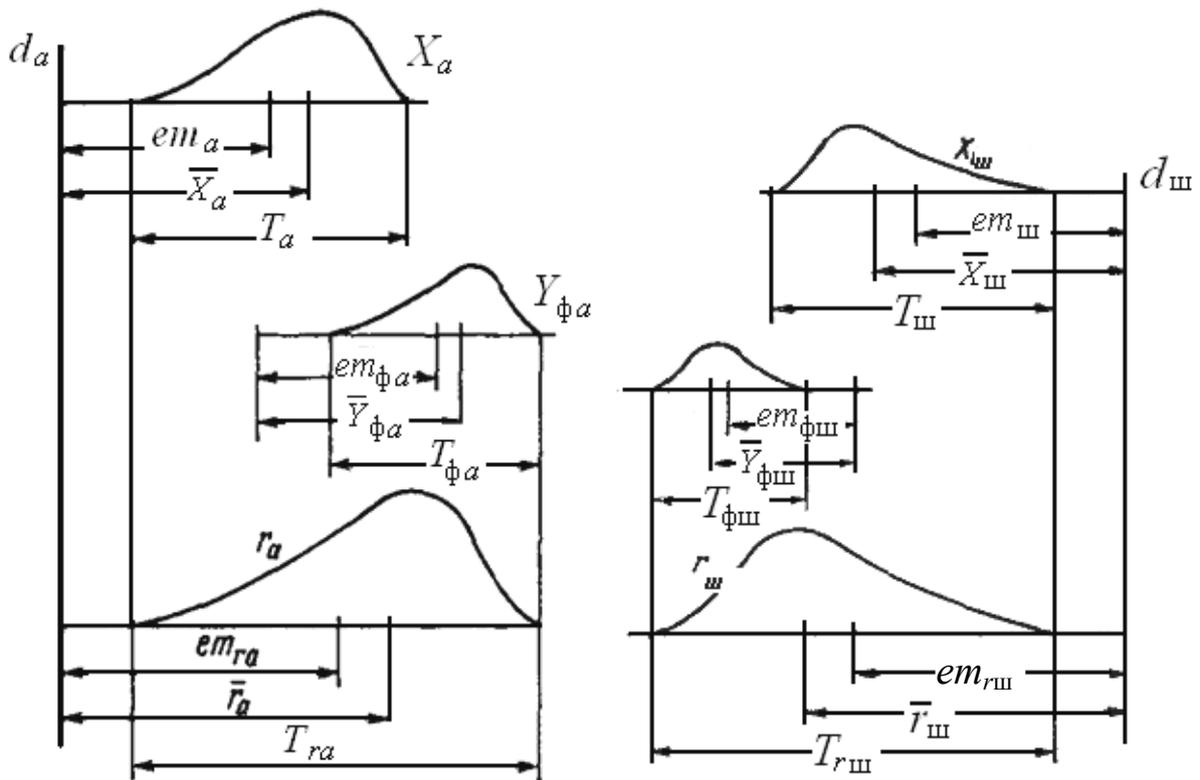


Рис. 2.45. Схема к расчету соединения с зазором с учетом погрешностей формы

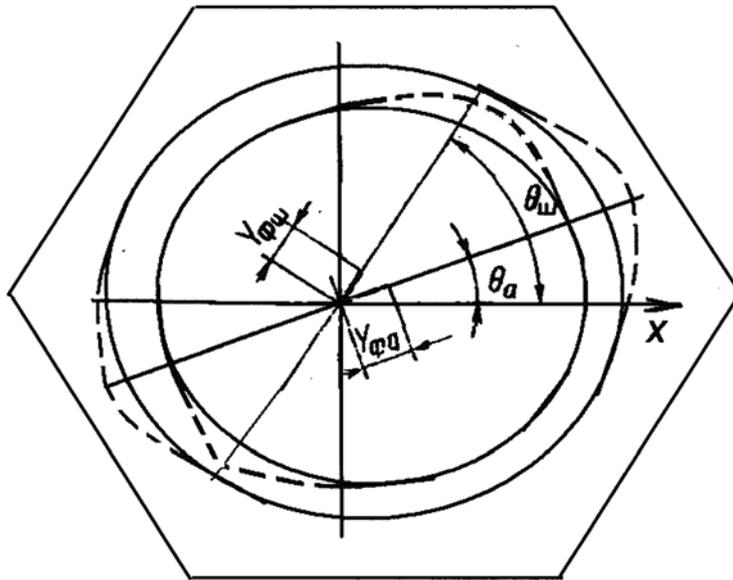


Рис. 2.46. Схема к расчету соединения с однонаправленным зазором с учетом погрешностей формы

После подстановки и преобразований получили:

$$K_z^2 T_z^2 = \frac{1}{4} \left[ (K'_a)^2 T_a^2 + (K'_{\text{ш}})^2 T_{\text{ш}}^2 \right],$$

где  $K'_a$  и  $K'_{\text{ш}}$  – приведенные коэффициенты относительного рассеивания, определяемые по формулам

$$\begin{aligned} (K'_a)^2 = & K_a^2 + \left( \frac{T_{\phi a}}{T_a} \right)^2 \left[ 0,5 K_{\phi a}^2 + 3,6 \left( \frac{em_{\phi a}}{T_{\phi a}} + \frac{\alpha_{\phi a}}{2} \right)^2 \right] + \\ & + 2r_a K_a K_{\phi a} \left( \frac{T_{\phi a}}{T_a} \right); \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} (K'_{\text{ш}})^2 = & K_{\text{ш}}^2 + \left( \frac{T_{\text{тмш}}}{T_{\text{ш}}} \right)^2 \left[ 0,5 K_{\text{тмш}}^2 + 3,6 \left( \frac{em_{\text{тмш}}}{T_{\text{тмш}}} + \frac{\alpha_{\text{тмш}}}{2} \right)^2 \right] + \\ & + 2r_{\text{ш}} K_{\text{ш}} K_{\text{тмш}} \left( \frac{T_{\text{тмш}}}{T_{\text{ш}}} \right). \end{aligned}$$

### Пример 2.1

Определить параметры смещения осей штифта и отверстия в поле зазора с учетом погрешностей размера и формы со следующими параметрами:  $d_a = 6^{0,19}$  мм;  $d_{\text{ш}} = 6_{-0,29}^{-0,1}$  мм;  $em_a = 0,095$  мм;  $T_a = 0,19$  мм;

$\alpha_a = -0,1$ ;  $K_a = 1,2$ ;  $em_{\phi a} = 0,05$  мм;  $T_{\phi a} = 0,1$  мм;  $\alpha_{\phi a} = -0,05$ ;  $K_{\phi a} = 1,2$ ;  $r_a = 0,4$ ;  $em_{\text{ш}} = -0,195$  мм;  $T_{\text{ш}} = 0,19$  мм;  $\alpha_{\text{ш}} = 0,05$ ;  $K_{\text{ш}} = 1,2$ ;  $em_{\phi \text{ш}} = 0,05$  мм;  $T_{\phi \text{ш}} = 0,1$  мм;  $\alpha_{\phi \text{ш}} = 0,05$ ;  $K_{\phi \text{ш}} = 1,2$ ;  $r_{\text{ш}} = 0,4$ .

Приведенные коэффициенты относительной асимметрии и относительного рассеивания из (2.35)

$$\alpha'_a = -0,1 + 0,64 \left( \frac{0,1}{0,19} \right) \left( \frac{0,05}{0,1} - \frac{0,05}{2} \right) = 0,05;$$

$$\alpha'_{\text{ш}} = -0,05 + 0,64 \left( \frac{0,1}{0,19} \right) \left( \frac{0,05}{0,1} + \frac{0,05}{2} \right) = 0,235.$$

$$(K'_a)^2 = 1,2^2 + \left( \frac{0,1}{0,19} \right)^2 \left[ 0,5 \cdot 1,2^2 + 3,6 \left( \frac{0,05}{0,1} - \frac{0,05}{2} \right)^2 \right] + 2 \cdot 0,4 \cdot 1,2 \cdot 1,2 \cdot \frac{0,1}{0,19} = 2,47;$$

$$(K'_{\text{ш}})^2 = 1,2^2 + \left( \frac{0,1}{0,19} \right)^2 \left[ 0,5 \cdot 1,2^2 + 3,6 \left( \frac{0,05}{0,1} + \frac{0,05}{2} \right)^2 \right] + 2 \cdot 0,4 \cdot 1,2 \cdot 1,2 \cdot \frac{0,1}{0,19} = 2,52.$$

По формулам (2.31) и (2.32) можно найти среднее смещение осей и показатели рассеивания

$$em_{\Sigma z} = \frac{1}{2} [(0,095 + 0,195) + (0,05 \cdot 0,19 - 0,235 \cdot 0,19)] = 0,127 \text{ мм};$$

$$K_{\Sigma z}^2 T_{\Sigma z}^2 = \frac{1}{4} (2,44 \cdot 0,19^2 + 2,55 \cdot 0,19^2) = 0,045 \text{ мм}^2.$$

*Относительное смещение штифта и отверстия в поле зазора с учетом погрешностей размеров и перекоса осей*

Принимали, что положение СМП 1 и корпуса 2 (рис. 2.47) определяется плоскостью, по которой они соприкасаются, и штифтом, входящим в отверстие. Оси отверстия и штифта неперпендикулярны плоскости соприкосновения СМП.

На рис. 2.47  $OO_a$  – ось отверстия в СМП 1;  $OO_{\text{ш}}$  – ось штифта;  $OO'$  – ось перпендикулярная опорной поверхности;  $\beta_a$  – угол между осью  $OO'$  и осью отверстия;  $\beta_{\text{ш}}$  – угол между осью  $OO'$  и осью штифта.

При выводе расчетных формул принимали, что все оси пересекаются в точке 0.

Относительное смещение СМП и державки определяется наименьшими зазорами в сопряжении штифта с отверстием в плоскостях  $a - a$  и  $a' - a'$ . В плоскости  $a' - a'$  зазор уменьшается за счет отклонения от перпендикулярности осей  $OO_a$  и  $OO_{\text{ш}}$  к базовой поверхности.

Сечения штифта и отверстия в плоскости  $a' - a'$  представляют собой эллипсы. Отклонения осей отверстия и штифта в сечении  $a' - a'$  обозначили через  $Y_a$  и  $Y_{ш}$ , направление перекосов осей в плане относительно заданного направления по оси  $x$  – через  $\theta_a$  и  $\theta_{ш}$ .

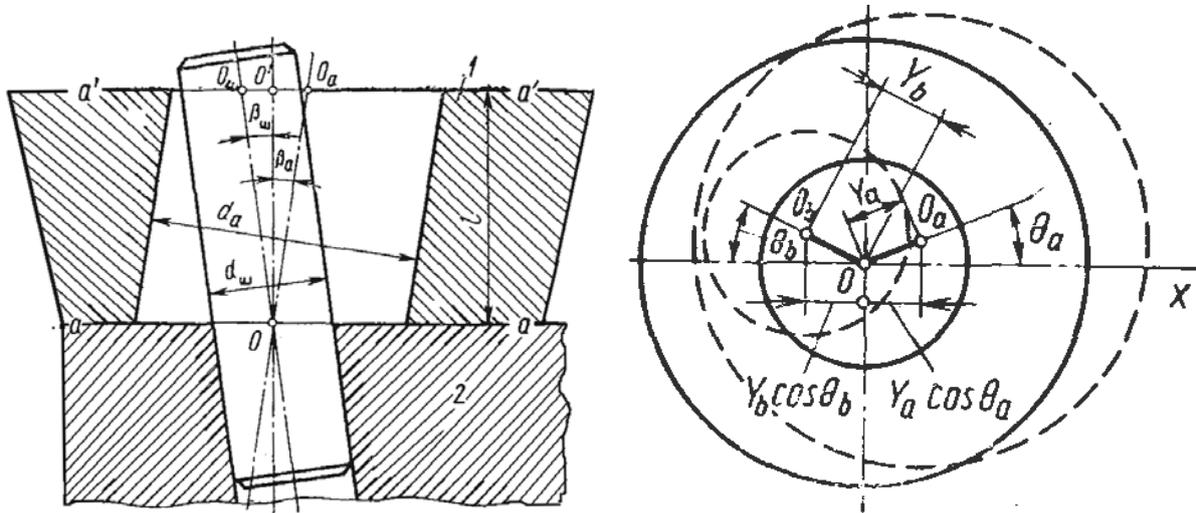


Рис. 2.47. Схема к расчету соединения с зазором с учетом перекоса осей

Относительное смещение СМП в заданном направлении  $x$  в обе стороны от номинального расположения

$$Z = d_a - d_{ш} - Y_a \cos \theta_a - Y_{ш} \cos \theta_{ш},$$

где  $d_a$  и  $d_{ш}$  – случайные величины (соответственно диаметр отверстия и диаметр штифта). Математическое ожидание случайной величины  $Z$

$$M_z = M(d_a) - M(d_{ш}) - M(Y_a \cos \theta_a) - M(Y_{ш} \cos \theta_{ш}).$$

Выше определены значения для  $M(\cos \theta)$  и  $D(\cos \theta)$  при изменении угла  $\theta$  по закону равной вероятности от 0 до  $\pi/2$ :

$$M(\cos \theta) \approx 0,64; D(\cos \theta) \approx 0,1.$$

$$\text{Тогда } M_z = M(d_a) - M(d_{ш}) - 0,64 (M(Y_a) + M(Y_{ш})). \quad (2.37)$$

$$\text{Заменяли } X_a = l \frac{S_a}{r_a} \text{ и } Y_{ш} = l \frac{S_{ш}}{r_{ш}},$$

где  $S_a$  и  $S_{ш}$  – задаваемые на чертежах отклонения от перпендикулярности осей в виде отношения  $S/r$ ;  $l$  – длина отверстия.

Известно, что

$$M_z = (N_a - N_{III}) + (em_{0a} - em_{0III}) + \frac{1}{2}(\alpha_a T_a - \alpha_{III} T_{III}) - \\ - 0,64 \frac{l}{r_a} \left( em_{sa} + \alpha_{sa} \frac{T_{sa}}{2} \right) - 0,64 \frac{l}{r_{III}} (em_{sIII} + \alpha_{sIII} T_{sIII}).$$

Обозначали

$$K_{xa}^2 = K_a^2 + \left( \frac{l}{r_a} \right)^2 \left( \frac{T_{sa}}{T_a} \right)^2 \left[ 0,5K_{sa}^2 + 3,6 \left( \frac{em_{sa}}{T_{sa}} + \frac{\alpha_{sa}}{2} \right)^2 \right]; \\ K_{xIII}^2 = K_{III}^2 + \left( \frac{l}{r_{III}} \right)^2 \left( \frac{T_{sIII}}{T_{III}} \right)^2 \left[ 0,5K_{sIII}^2 + 3,6 \left( \frac{em_{sIII}}{T_{sIII}} + \frac{\alpha_{sIII}}{2} \right)^2 \right], \quad (2.38)$$

где  $K_{xa}$  и  $K_{xIII}$  – приведенные коэффициенты относительного рассеивания случайной величины  $X$ . После подстановки получили:

$$K_z^2 T_z^2 = K_{xa}^2 T_a^2 + K_{xIII}^2 T_{III}^2. \quad (2.39)$$

В частном случае возможен перекосяк оси отверстия и штифта только в одной плоскости. В этом случае  $\theta_a = 0$ ;  $\theta_{III} = 0$ ;  $\cos \theta_a = 1,0$ ;  $\cos \theta_{III} = 1,0$ . Среднее значение  $M_z = M(d_a) - M(d_{III}) - M(Y_a) - M(Y_{III})$ .

По сравнению с общим случаем (2.39) в записанном выражении отсутствует числовой коэффициент 0,64. Следовательно, для данного частного случая приведенные коэффициенты

$$K_z^2 T_z^2 = K_a^2 T_a^2 + K_{III}^2 T_{III}^2 + \left( \frac{l}{r_a} \right)^2 K_{sa}^2 T_{sa}^2 + \left( \frac{l}{r_{III}} \right)^2 K_{sIII}^2 T_{sIII}^2. \quad (2.40)$$

Тогда для рассматриваемого частного случая приведенные коэффициенты

$$K_{xa}^2 = K_a^2 \left( \frac{l}{r_a} \right)^2 \left( \frac{T_{sa}}{T_a} \right)^2 K_{sa}^2; \\ K_{xIII}^2 = K_{III}^2 + \left( \frac{l}{r_{III}} \right)^2 \left( \frac{T_{sIII}}{T_{III}} \right)^2 K_{sIII}^2. \quad (2.41)$$

Иногда необходимо одновременно учитывать погрешности диаметра отверстия и штифта, овальность отверстия и штифта, перекос их осей. В этих случаях в формулы (2.38) вместо коэффициентов  $\alpha_a$ ,  $\alpha_{ш}$ ,  $K_a$ ,  $K_{ш}$  подставляют приведенные коэффициенты  $\alpha'_a$ ,  $\alpha'_{ш}$ ,  $K'_a$  и  $K'_{ш}$ .

## 2.5. Моделирование точности сборного механизированного инструмента

Динамическая точность сборного инструмента является интегральной величиной геометрических погрешностей, входящих в него элементов, и статической, обусловленной силами трения, силами дисбаланса, массами, инерционностью элементов и т. д.

Для моделирования точности зафиксируем точку кромки СМП в выбранной системе координат и дополним контуром инструмента приняв, что все элементы инструмента выполнены по номинальным размерам. Полученное номинальное положение ее в направлении осей запишем в виде:

$$Y_n = f_0(\delta_0). \quad (2.42)$$

Изменение базовых поверхностей или порядка расположения элементов системы крепления режущих пластин, с учетом погрешности изготовления СМП, приводит к новому предельному базовому их положению

$$Y_{пр.б} = f(\delta, \mu_{i0}), \quad (2.43)$$

где  $\mu_{i0}$  – параметры системы крепления СМП.

Как известно, поверхности, на которые устанавливается режущая пластина изготавливаются с погрешностью. Если учесть максимальные значения этих погрешностей, то СМП займет предельное позиционное положение

$$Y_{пр.п} = f(\delta, \mu_i). \quad (2.44)$$

При проектировании сборного инструмента выбирают такую схему базирования режущих, направляющих и крепежных элементов, которая упрощает функциональную зависимость.

Разность между предельными позиционным и номинальным положениями будет образовывать геометрическую погрешность позиционирования СМП в корпусе сборного инструмента

$$\Delta Y_{г.п} = Y_{пр.п} - Y_{н} = f(\delta, \mu_i) - f_0(\delta_0, \mu_{i0}). \quad (2.45)$$

Действие максимальных сил закрепления на СМП приведет к тому, что она займет предельное статическое положение

$$Y_{пр.с} = f(\delta, \mu_{ci}). \quad (2.46)$$

Тогда разность между предельными статическим и позиционным положениями будет образовывать относительную статическую погрешность позиционирования СМП в корпусе инструмента

$$\Delta Y_{с.п} = Y_{пр.с} - Y_{пр.п} = f(\delta, \mu_{ci}) - f(\delta, \mu_i). \quad (2.47)$$

В результате отличия предельного статического положения от номинального образуется абсолютная статическая погрешность позиционирования СМП в корпусе инструмента:

$$\Delta Y_{н.п} = Y_{пр.с} - Y_{н} = f(\delta, \mu_{ci}) - f_0(\delta_0) = f(\mu). \quad (2.48)$$

Действие максимальных сил резания и температуры на СМП приведет к тому, что она займет предельное динамическое положение

$$Y_{пр.д} = f(\delta, \mu_{di}).$$

Разность между предельными динамическим и номинальным положениями образует динамическую погрешность позиционирования СМП в корпусе инструмента

$$\Delta Y_{д.п} = Y_{пр.д} - Y_{н} = f(\delta, \mu_{di}) - f_0(\delta_0). \quad (2.49)$$

Динамическую погрешность позиционирования разложим в ряд Тейлора для того, чтобы получить удобные для вычисления функции

$$\Delta Y_{д.п} = f(M_{\mu_1}, M_{\mu_2}, \dots, M_{\mu_n}) + \sum_{i=1}^n (\partial f(\mu) / \partial \mu_i)_0 \Delta \mu_i, \quad (2.50)$$

здесь первое слагаемое правой части и частные производные во втором слагаемом – постоянные величины, а нулевой индекс означает, что частная производная вычисляется для номинального значения параметров.

Аргументами функции (2.50) являются центрированные случайные величины

$$\Delta\mu_i = \mu_i - M_{\mu_i}.$$

Определим основные числовые характеристики функции (2.50):  
– математическое ожидание функции

$$M[\Delta Y_{\text{д.п}}] = f(M_{\mu_1}, M_{\mu_2}, \dots, M_{\mu_n}) + \sum_{i=1}^n (\partial f(\mu) / \partial \mu_i)_0 M[\Delta \mu_i];$$

– дисперсию

$$D[\Delta Y_{\text{д.п}}] = \sum_{i=1}^n (\partial f(\mu) / \partial \mu_i)_0^2 D[\Delta \mu_i] + 2 \sum_{i \geq j} (\partial f(\mu) / \partial \mu_i)_0 (\partial f(\mu) / \partial \mu_j)_0 K_{ij},$$

здесь  $K_{ij}$  – корреляционный момент.

Второе приближение получается, если при разложении сохранить вторые и смешанные производные [119]

$$\Delta Y_{\text{д.п}} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f(\mu)}{\partial \mu_i} \right)_0 \Delta \mu_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial^2 f(\mu)}{\partial \mu_i^2} \right)_0 \Delta \mu_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left( \frac{\partial^2 f(\mu)}{\partial \mu_i^2} \right)_0 \Delta \mu_{ij}^2. \quad (2.51)$$

При разложении часть членов  $j(m+1, \dots, n)$  образует степенной ряд Маклорена. Выбор допустимых степеней приближения и оценка погрешностей, связанных с отбрасыванием остаточных членов ряда Тейлора, производится по известным правилам. На инструмент большое влияние оказывают внешние возмущения ( $z_1, \dots, z_k$ ), характеризующие условия его эксплуатации (усилия резания, силы зажима, точки приложения этих сил и создаваемых ими моментов, удары при зажиме, непостоянство сил зажима, температура среды и станка и т. д.). Поэтому в общем случае первичная погрешность состоит из двух слагаемых

$$\Delta \mu_i = \Delta \mu_{1i} + \Delta \mu_{2i}, \quad (2.52)$$

где  $\Delta \mu_{1i}$  – основная первичная погрешность, зависящая от внутренних параметров СМРИ;  $\Delta \mu_{2i}$  – дополнительная первичная погрешность, вызванная влиянием внешних факторов и изменением условий эксплуатации.

Для определения зависимости  $\Delta \mu_{2i}$  от внешних факторов необходимо выразить параметры  $\mu_i$  в виде функции

$$\mu_i = \varphi(z_1, \dots, z_k). \quad (2.53)$$

За номинальные значения внешних факторов принимаем  $z_{10}, z_{20}, \dots, z_{k0}$ , отвечающие расчетным условиям работы инструмента, тогда

$$\Delta\mu_{2i} = \varphi(z_1, \dots, z_k) - \varphi(z_{10}, \dots, z_{k0}). \quad (2.54)$$

Разложив в ряд Тейлора, и взяв линейное приближение, получим:

$$\Delta\mu_{2i} = \sum_{j=1}^k \left( \frac{\partial\mu_i}{\partial z_j} \right)_0 \Delta z_j, \quad (2.55)$$

где  $\Delta z_j$  – отклонение  $j$ -го внешнего фактора от номинального значения (частная производная берется для значений  $z_j = z_{j0}$ , отвечающим нормальным условиям). Во втором приближении

$$\Delta\mu_{2i} = \sum_{j=1}^k \left( \frac{\partial\mu_i}{\partial z_j} \right)_0 \Delta z_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \left( \frac{\partial^2\mu_i}{\partial z_j^2} \right)_0 \Delta z_j^2 + \sum_{j=1}^k \sum_{r=1}^k \left( \frac{\partial^2\mu_i}{\partial z_j \partial z_r} \right)_0 \Delta z_j \Delta z_r. \quad (2.56)$$

Суммируя все погрешности, получим полное линейризованное уравнение статической погрешности позиционирования СМП в корпусе инструмента

$$\Delta Y = [f(\delta, \mu_i) - f(\delta, \mu_{i0})] + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial Y}{\partial \mu_{1i}} \right)_0 \Delta \mu_i + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial Y}{\partial \mu_1} \right)_0 \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial Y}{\partial z_j} \right)_0 \Delta z_j, \quad (2.57)$$

где 1-е слагаемое – геометрическая погрешность позиционирования режущей пластины; 2-е слагаемое – номинальная погрешность инструмента; 3-е слагаемое – погрешность закрепления пластины.

Общую погрешность  $\Delta Y$  можно представить в виде суммы основной и дополнительной:

$$\Delta Y = \Delta Y_{\text{осн}} + \Delta Y_{\text{доп}}, \quad (2.58)$$

т. е. разбив общую погрешность на две составляющие по их функциональной роли в инструменте. Основная погрешность есть функция внутренних факторов при нормированных условиях эксплуатации, дополнительная погрешность добавляется при влиянии внешних факторов, связанных с измененными условиями эксплуатации. Тогда основная погрешность выразится

$$\Delta Y_{\text{осн}} = f(x, \mu_{1_{10}}, \dots, \mu_{1_{m0}}) - f_0(x) + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial Y}{\partial \mu_i} \right)_0 \Delta \mu_i. \quad (2.59)$$

Дополнительная погрешность

$$\Delta Y_{\text{доп}} = \sum_{i=1}^n \left\{ (\partial Y / \partial \mu_i)_0 \sum_{j=1}^k [(\partial \mu_i / \partial z_j)_0 \Delta z_j] \right\}. \quad (2.60)$$

Для составления уравнения погрешности инструмента необходимо подвергнуть анализу всю структуру инструмента. При этом предполагается, что предварительно для каждого узла, входящего в структурную схему инструмента, составляется и приводится к виду (2.57) нормированные уравнения погрешности. Если бы погрешность от каждого узла через внутренние связи передавалась следующему узлу, то

$$Y = f(X, Y_1, \dots, Y_N). \quad (2.61)$$

При постоянных значениях  $X$  выходная погрешность  $Y$  получает приращение за счет приращения промежуточных значений  $Y_i$ . Это приращение сигнала  $Y$ , являющегося общей погрешностью инструмента, в линейном приближении можно представить в виде полного дифференциала функции (2.61):

$$\Delta Y = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial Y}{\partial Y_i} \right)_0 \Delta Y_i. \quad (2.62)$$

Выражение (2.62) представляет собой уравнение погрешности инструмента в размерной форме, а входящая частная производная является коэффициентом влияния  $i$ -го звена на общую погрешность инструмента. Для перехода к безразмерной форме преобразуем (2.62)

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial Y}{\partial Y_i} \right)_0 \frac{Y_i}{Y} \frac{\Delta Y_i}{Y_i}, \quad (2.63)$$

где  $\Delta Y_i / Y_i$  – относительная погрешность  $i$ -го звена;  $\Delta Y / Y$  – относительная погрешность всего инструмента, или

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \sum_{i=1}^N \Psi_i \frac{\Delta Y_i}{Y_i}, \quad (2.64)$$

где  $\Psi_i = (\partial Y / \partial Y_i)_0 Y_i / Y$  – безразмерный коэффициент влияния  $i$ -го элемента или части инструмента.

Коэффициенты влияния элементов могут быть вычислены путем анализа структурной схемы. Общая чувствительность структурной цепи является функцией чувствительности  $S_1, S_2, \dots, S_N$  элементов.

$$S = \varphi(S_1, \dots, S_N). \quad (2.65)$$

Вид функции (2.65) определяется типом структурной цепи инструмента. Если чувствительности звеньев получают независимые приращения  $\Delta S_1 \dots \Delta S_N$ , то приращение общей чувствительности в линейном приближении

$$\Delta S = \sum_{i=1}^N \partial S / \partial S_i \Delta S_i. \quad (2.66)$$

В безразмерном виде

$$\Delta S / S = \sum_{i=1}^N \partial S / \partial S_i (S_i / S) (\Delta S_i / S_i). \quad (2.67)$$

Пусть требуемая характеристика  $i$ -го узла  $\varphi_i = S_i Y_{i-1}$ . Если при некотором фиксировании значений входной величины  $X$  выходная величина отличается от требуемой, то возникает погрешность  $\Delta Y_i$ , которую можно трактовать как результат изменения чувствительности звена

$$Y_i + \Delta Y_i = (S_i + \Delta S_i) Y_{i-1}. \quad (2.68)$$

Из уравнений (2.63) и (2.67) можно получить соотношение

$$\Delta S / S_i = \Delta Y_i / Y_i. \quad (2.69)$$

Рассуждая таким образом можно получить аналогичное соотношение для всего инструмента

$$\Delta S / S = \Delta Y / Y. \quad (2.70)$$

Подставляя (2.69) и (2.70) в (2.63), получим:

$$\Delta Y / Y = \sum_{i=1}^N \partial S / \partial S_i S_i / S \Delta Y_i / Y_i. \quad (2.71)$$

Сравнивая выражения получим формулу для определения безразмерных коэффициентов влияния  $i$ -го узла структурной схемы, состоящей из элементов с пропорциональными характеристиками

$$\varphi_i = \partial S / \partial S_i S_i / S. \quad (2.72)$$

Если вместо  $Y$  и  $Y_i$  подставить абсолютные значения допусков изменения этих параметров  $Y$  и  $Y_i$ , то получим:

$$\xi = \sum_{i=1}^N \psi_i \xi_i, \quad (2.73)$$

где  $\xi = \frac{\Delta Y}{\bar{Y}}$  – приведенная относительная погрешность инструмента;

$\xi_i = \frac{\Delta Y_i}{\bar{Y}_i}$  – приведенная относительная погрешность  $i$ -го элемента.

В случае если элементы инструмента с пропорциональными характеристиками соединены между собой одним из трех типовых способов, то коэффициенты влияния вычисляются по стандартным формулам, которые следуют из (2.72). Например, при последовательном соединении узлов, чувствительность механической цепи

$$S = S_1 \cdot S_2 \cdot \dots \cdot S_N = \prod_{i=1}^N S_i, \quad (2.74)$$

откуда,

$$\partial S / \partial S_i = 1 / S \prod_{i=1}^N S_i. \quad (2.75)$$

При параллельном соединении узлов чувствительность цепи имеет вид:

$$S = S_1 + S_2 + \dots + S_N = \sum_{i=1}^N S_i, \quad (2.76)$$

откуда,

$$\psi_i = \frac{S_i}{S_1 + S_2 + \dots + S_N}.$$

С другой стороны представим относительную погрешность в виде многочлена  $\xi = \alpha_i + \beta_i \chi + \gamma_i \chi^2 + \dots$ , подставляя это выражение в (2.73), получим:

$$\xi = \sum_{i=1}^N \psi_i (\alpha_i + \beta_i \chi + \gamma_i \chi^2 + \dots) \quad (2.77)$$

или

$$\xi = \alpha + \beta \chi + \gamma \chi^2 + \dots,$$

где  $\alpha = \sum_{i=1}^N \psi_i \alpha_i$  – постоянная составляющая погрешности;

$\beta\chi = \sum_{i=1}^N \psi_i \beta_i \chi$  – линейная составляющая погрешности;

$\gamma\chi^2 = \sum_{i=1}^N \psi_i \gamma_i \chi^2$  – квадратичная составляющая погрешности.

Кроме того, составляющие погрешности можно выразить через размерные их эквиваленты

$$\alpha = F_0(0) / \bar{Y} + \sum_{i=1}^n f_i(0) \Delta\mu_i / \bar{Y} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k f_i(0) f_{ij}(0) \Delta Z_j / \bar{Y};$$

$$\beta = F'_0(0) \bar{X} / \bar{Y} + \sum_{i=1}^n f'_i(0) \Delta\mu_i X / \bar{Y} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k (f_i(0) f_{ij}(0) + f'_i(0) f_{ij}(0)) X \Delta Z_j / \bar{Y};$$

$$\gamma = \left( \frac{F''_0(0)}{\bar{Y} 2!} + \sum_{i=1}^n \frac{f''_i(0) \Delta\mu_i}{\bar{Y} 2!} \right) X^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \left[ \left( \frac{f_i(0) f''_{ij}(0) \Delta Z_j}{\bar{Y} 2!} + f'_i(0) f'_{ij}(0) \Delta Z_i \right) X^2 + \frac{f''_i(0) f_{ij}(0)}{\bar{Y} 2!} X^2 \right],$$

здесь функции  $F_0(X)$ ,  $f_i(X)$ ,  $f_{ij}(X)$  разложены в ряд Маклорена по степени  $X$ :

$$\left. \begin{aligned} F_0(x) &= a_0 + b_0 x + c_0 x^2 + \dots; \\ f_i(x) &= a_i + b_i x + c_i x^2 + \dots; \\ f_{ij}(x) &= a_{ij} + b_{ij} x + c_{ij} x^2 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.78)$$

При вероятностной оценке погрешности можно решить следующие задачи: а) определить законы распределения функций случайных величин  $\xi_{\text{осн}}$  и  $\xi_{\text{доп}}$ ; б) определить вероятностные показатели основной и дополнительной погрешностей; в) рассчитать вероятности попадания погрешности в заданную область; г) рассчитать доверительные границы поля допуска на погрешность инструмента.

В большинстве случаев погрешности инструмента распределяются по нормальному или близкому к нему закону, поэтому нет необходимости определять плотность и функцию распределения погреш-

ности. Достаточно вычислить математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение и получим функцию распределения

$$f(\xi) = \frac{1}{\sigma_\xi \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\xi - m_\xi)^2}{2\sigma_\xi^2}}. \quad (2.79)$$

Так как  $\xi$  – функция многих случайных величин, то  $m_\xi$  и  $\sigma_\xi$  можно определить:

а)  $\xi$  – непрерывная случайная величина с плотностью  $f(x)$ , а  $y = \varphi(x)$ , то математическое ожидание величины  $\xi(y)$

$$m_y = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx, \quad (2.80)$$

а дисперсия

$$D_y = \int_{-\infty}^{+\infty} [\varphi(x) - m_y]^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} [\varphi(x)]^2 f(x)dx - m_y^2; \quad (2.81)$$

б) если  $x, y$  – система непрерывных случайных величин с плотностью  $f(x, y)$ , а  $z = \varphi(x, y)$ , то математическое ожидание  $z$ :

$$m_z = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\varphi(x, y)dxdy, \quad (2.82)$$

а дисперсия

$$D_z = \iint_{-\infty}^{+\infty} [\varphi(x, y) - m_z]^2 f(x, y)dxdy = \iint_{-\infty}^{+\infty} [\varphi(x, y)]^2 f(x, y)dxdy - m_z^2. \quad (2.83)$$

Применяя к уравнению (2.77) свойства математического ожидания и дисперсии для сложных функций, можно определить:

1. Математическое ожидание погрешности

$$M[\xi] = \sum_{i=1}^n M(\alpha_i) + \sum_{i=1}^N M(\beta_i)\chi + \sum_{i=1}^N M(\gamma_i)\chi^2. \quad (2.84)$$

2. Дисперсию погрешности

$$D(\xi) = \sum_{i=1}^n (D(\alpha_i) + D(\beta_i)\chi^2 + D(\gamma_i)\chi^4). \quad (2.85)$$

Следовательно, математическое ожидание и дисперсия, вычисленные по приведенным формулам, являются условными числовыми характеристиками случайных величин  $\xi$  при данном значении  $\chi$ . Для определения условной вероятности попадания приведенной относительной погрешности в заданное поле допусков при фиксированном значении входной величины  $X$ , примем в качестве исходных данных:

а) условную плотность распределения погрешности

$$\frac{dP}{dC} = f(\xi / \chi); \quad (2.86)$$

б) нижнюю и верхнюю границу поля допуска на величину погрешности  $\xi$ , заданные в функции  $\chi$ :

$$\xi_{\text{H}} = h_1(\chi) \text{ и } \xi_{\text{B}} = h_2(\chi). \quad (2.87)$$

Условная вероятность того события, что при некотором значении  $\chi$ , величина погрешности  $\xi$  будет лежать в интервале с границами  $\xi_{\text{H}}$  и  $\xi_{\text{B}}$  определяется интегралом

$$P(\xi_{\text{H}} < \xi < \xi_{\text{B}}) = \int_{\xi_{\text{H}}}^{\xi_{\text{B}}} f(\xi / \chi) d\xi. \quad (2.88)$$

Как показывает практика, погрешности многих инструментов согласуются с законом нормального распределения. Условная вероятность попадания  $\xi$  в поле допусков при нормальном законе распределения

$$P(\xi_{\text{H}} < \xi < \xi_{\text{B}}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\xi_{\text{H}}}^{\xi_{\text{B}}} e^{-\frac{(\xi-m)^2}{2\sigma^2}} d\xi. \quad (2.89)$$

Этот интеграл приводится к нормированному виду путем замены переменной:

$$P(\xi_{\text{H}} < \xi < \xi_{\text{B}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{t_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{t_1} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad (2.90)$$

где

$$t_1 = \frac{\xi_{\text{H}} - m}{\sigma}, \quad t_2 = \frac{\xi_{\text{B}} - m}{\sigma}.$$

При определении вероятности с помощью (2.90) следует помнить, что пределы  $t_1$  и  $t_2$  должны определяться для фиксированного значения  $\chi$ . При  $t_2 = t_1 = 3$ ;  $F(3) = -F(-3) = 0,49865$ , а искомая вероятность  $P(\xi) = 2F(3) = 0,9973$  или 99,7 %.

На практике часто известны только допуски на погрешности элементов. Предположим, что допустимая погрешность  $i$ -го элемента линейно зависят от  $\chi$

$$\xi_i^B = \xi_{i0}^B + k_{i2}\chi \text{ и } \xi_i^H = \xi_{i0}^H - k_{i1}\chi,$$

где  $\xi_i^H$  и  $\xi_i^B$  – нижняя и верхняя границы полей допусков на погрешности  $i$ -го элемента;  $\xi_{i0}^H$  и  $\xi_{i0}^B$  – значения  $\xi_i^H$  и  $\xi_i^B$  при  $\chi = 0$ ;  $k_{i1}$  и  $k_{i2}$  – постоянные коэффициенты.

Приближенное значение математического ожидания и среднее квадратическое отклонение погрешности  $i$ -го элемента можно определить в предположении, что эта погрешность распределения согласуется с нормальным законом. Тогда нетрудно найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение  $i$ -го элемента

$$\begin{aligned} m_i &= \frac{\xi_i^H + \xi_i^B}{2} = \frac{\xi_{i0}^H + \xi_{i0}^B}{2} + \frac{(k_{i2} - k_{i1})\chi}{2}, \\ \sigma_i &= \frac{\xi_i^B - \xi_i^H}{6} = \frac{\xi_{i0}^B - \xi_{i0}^H}{6} + \frac{(k_{i2} + k_{i1})\chi}{6}. \end{aligned} \quad (2.91)$$

При расчетах точности инструмента приходится решать обратную задачу, т. е. описывать доверительные границы полей допусков, в которые погрешность инструмента или отдельного элемента попадает с заданной условной вероятностью. При этом в качестве исходных данных должна быть представлена условная плотность вероятности распределения погрешности  $f(\xi/x)$  и задана условная вероятность попадания погрешности  $\xi$  в поле допусков. Решение задачи заключается в отыскании уравнений верхней и нижней границ поля допусков  $\xi_H = h_1(\chi)$  и  $\xi_B = h_2(\chi)$ , обеспечивающих получение заданной вероятности.

При этом возможны два случая:

1. Задана постоянная условная вероятность  $\hat{P}$ , независимая от  $\chi$ . Эта задача может иметь бесконечное множество решений. Дополнительным условием, приводящим к однозначному решению, яв-

ляется требование минимизации ширины интервала  $\xi_H - \xi_B$  при заданной вероятности  $\hat{P}$  попадания в этот интервал. Для нормального закона распределения выполнение этого требования достигается путем симметричной расстановкой верхней и нижней границ полей допусков относительного математического ожидания.

При этом

$$\xi_B - m_\xi = m_\xi - \xi_H. \quad (2.92)$$

Тогда, согласно (2.90), заданная вероятность будет получена, если

$$F(t_2) - F(t_1) = 2F(t) = \hat{P}, \quad (2.93)$$

тогда  $F(t) = 0,5\hat{P}$ . Определяя по стандартным таблицам величину  $t$  нетрудно найти нижнюю и верхнюю границы полей допусков

$$\xi_H = m_\xi - t\sigma_\xi \text{ и } \xi_B = m_\xi + t\sigma_\xi. \quad (2.94)$$

Поскольку  $m_\xi$  и  $\sigma_\xi$  в общем случае зависят от  $\chi$ , то даже при постоянной величине заданной вероятности  $\hat{P}$ , доверительные границы полей допусков будут функциями  $\chi$ .

2. Во втором случае условная вероятность задана в функции  $\chi$ :  $\hat{P} = \hat{P}(\chi)$ . Такой способ задания вероятности имеет определенный смысл, т. к. он позволяет учесть различную точность выполнения функции в диапазоне, например, изменения приложенных сил зажима. В интервале расчетных сил может быть задана повышенная вероятность, а на остальных участках требования могут быть ослаблены. Порядок расчета доверительных границ остается таким же, как и в первом случае, различие будет лишь в том, что при определении  $\xi_H$  и  $\xi_B$  по формулам (2.94) параметр  $t$  будет зависеть от  $\chi$ . Рассмотрим пример определения доверительных границ для случая нормальной плотности распределения  $f(\xi/x)$  с параметрами  $m = m_0 + m_1\chi$ ;  $\sigma = \sigma_0 + \sigma_1\chi$ ;  $m_0 = 0,5$ ;  $m_1 = 1$ ;  $\sigma_0 = 0,4$ ;  $\sigma_1 = 1$ , если условная вероятность должна удовлетворять уравнению

$$\hat{P} = P_0 + A\chi + B\chi^2, \quad (2.95)$$

где

$$P_0 = 0,9; A = 0,36; B = -0,36.$$

Максимальное значение вероятности  $\hat{P}_{\max} = 0,999$  имеет место при  $\chi = 0,5$  (рис. 2.48)

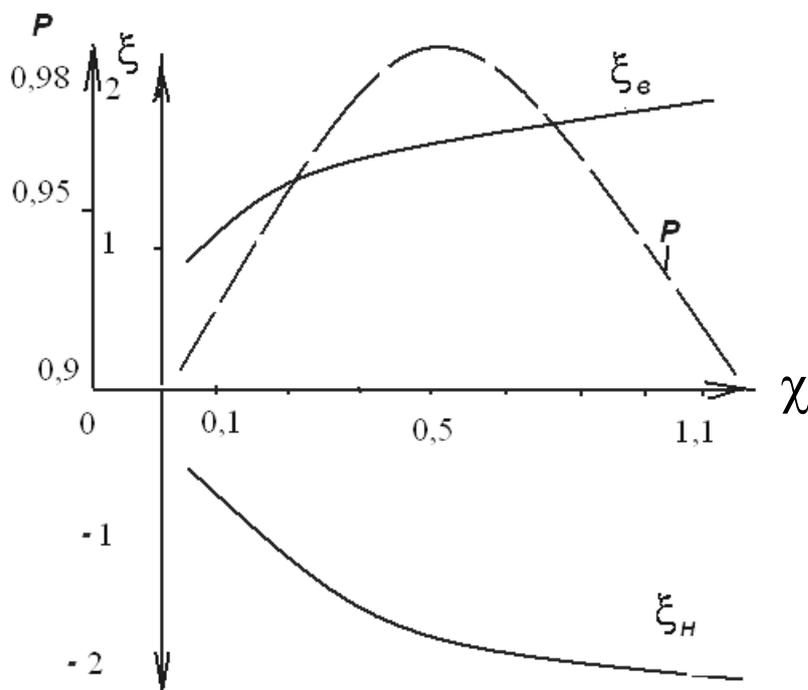


Рис. 2.48. Графики вероятности верхней и нижней границ допуска

Как видно на рис. 2.48 наибольшей чувствительностью обладают доверительные границы параметра  $\chi$ , так изменение параметра в 1,5 раза приводит к изменению вероятности в 1,05 раза, доверительные границы – в 1,2 раза.

# Глава    **СТАТИЧЕСКАЯ ПРОЧНОСТЬ**

## **3**        **И ТОЧНОСТЬ РАБОЧЕЙ ЧАСТИ**

### **ИНСТРУМЕНТА**

#### **3.1. Анализ исследований статической прочности и точности**

Изучению прочности инструмента по предельным режимам резания посвящен ряд работ, в которых широкое распространение получил метод предельной подачи (А. В. Акимов, П. П. Грудов, С. И. Волков, М. С. Харламов, Н. Н. Зорев, И. Я. Адам, Н. И. Ташлицкий, Г. Л. Хае и др.). Результатами исследований явились рекомендации по рациональному конструированию режущего инструмента и оптимизации режима резания [120]–[122]. Однако для определения прочности режущего инструмента по этой методике необходимо проводить трудоемкие эксперименты, требующие дополнительных затрат. Кроме того, она не позволяет оптимизировать параметры создаваемой (проектируемой) конструкции инструмента по прочности.

Важным этапом в исследованиях прочности режущей части инструмента являлись, созданные И. П. Третьяковым [123], специальные испытательные машины, моделирующие характер нагрузки на режущую часть инструмента. В фундаментальных работах по определению показателей прочности твердых сплавов [124], [125] приведены исследования различных авторов, работающих в этой области, и сделан их сравнительный анализ. Большой разброс данных по показателям прочности материалов у различных авторов объясняется несовершенством исследовательской аппаратуры. Экспериментально

установлено [126], [127], что разрушение наступает под действием максимальных растягивающих напряжений.

Изучение распределения напряжений в режущей части резцов, в зоне непосредственного контакта стружки с передней и заготовки с задней поверхностями или за их пределами усложняется малыми размерами зоны контакта. Поэтому для определения напряжений в указанных областях исследователи применяли поляризационно-оптический метод [126], [128]–[132], с помощью которого было найдено напряженное состояние в области контакта стружки с передней поверхностью (Г. С. Андреев, В. Котвинкель, Е. Усуи, Х. Такеяма, Х. Чандрашекаран и Д. Капур, И. Ф. Примус и др.) [133]–[141].

В качестве обрабатываемого материала использовали свинец, а модель резца изготавливали из оптически активного материала. На основании проведенных исследований были уточнены эпюры нормальных и касательных напряжений в контактной зоне и оценено влияние на них различных факторов, а также выведены математические зависимости распределения контактных напряжений по передней поверхности лезвия.

Изучению распределения напряжений в режущей части инструмента посвящены работы Э. Кокера, Л. Файлона, А. И. Бетанели, М. Х. Утешева, В. А. Сенюкова, И. Ф. Примуса, Г. Л. Хаета, Т. Н. Лоладзе и др. [138], [142]–[150].

Еще в 30-х годах Э. Кокер и Л. Файлон положили начало исследованиям напряженного состояния режущего клина. Бетанели А. И. продолжил и развил метод Э. Кокера и Л. Файлона. В отличие от них А. И. Бетанели рассматривал напряженное состояние клина за пределами зоны контакта стружки с передней поверхностью инструмента.

Исследования напряженного состояния моделей позволили определить качественный характер распределения напряжений в режущей части резцов. Однако большая трудоемкость изготовления моделей и обработки полученных результатов не позволяет более широко использовать этот метод.

Освещенные в литературе данные по аналитическому исследованию прочности резцов можно разделить на работы по расчету державок и режущей части резцов. Расчеты державок инструментов были выполнены Г. Н. Титовым, Г. Г. Иноземцевым, К. С. Колевым [151]–[154]. В основу их был положен способ расчета бруса, находящегося в сложном напряженном состоянии, что позволило рационально подобрать сечение державки резца для различных режимов

резания. Однако, как показал анализ промышленных испытаний резцов, в основном происходит поломка режущей пластины.

Из первых работ, посвященных аналитическому изучению прочности лезвия инструмента, можно отметить работу Ф. Р. Арчибальда [155], в которой автор определил значения и характер распределения напряжений в режущем клине (рис. 3.1, *a*), используя для этой цели общий метод определения напряжений, предложенный С. Н. Тимошенко [156]. При разработке математической модели, описывающей напряженное состояние режущего клина, были приняты следующие допущения:

а) распределение нормальных напряжений по длине контакта стружки с передней поверхностью осуществляется по закону треугольника;

б) коэффициент трения в различных точках передней поверхности постоянный.

В качестве теории предельного напряженного состояния Ф. Р. Арчибальд принял теорию Губера–Мизеса–Генки.

Показано, что наиболее опасной точкой резца является его вершина (точка с координатами  $r = 0$  и  $\theta = 0$ ). Кроме того, Ф. Р. Арчибальд рассмотрел также напряженное состояние лезвия при нагружении его распределенной нагрузкой с трапецеидальным характером ее изменения по передней поверхности.

В расчетах были приняты следующие допущения.

1. Рассматривается действие треугольной и трапецеидальной эпюр контактных нормальных и касательных напряжений. В работах [144], [147] было показано, что в действительности эпюра контактных напряжений является параболической, а коэффициент трения стружки с передней поверхностью переменный.

2. Использована энергетическая теория формоизменения Губера–Мизеса–Генки в качестве теории предельных напряженных состояний, что возможно только для расчета напряженного состояния пластичных материалов.

3. Местоположением опасной точки в этих работах считается режущая кромка, тогда как в [144] показано, что опасные точки расположены на передней поверхности за пределами эпюры контакта стружки с передней поверхностью.

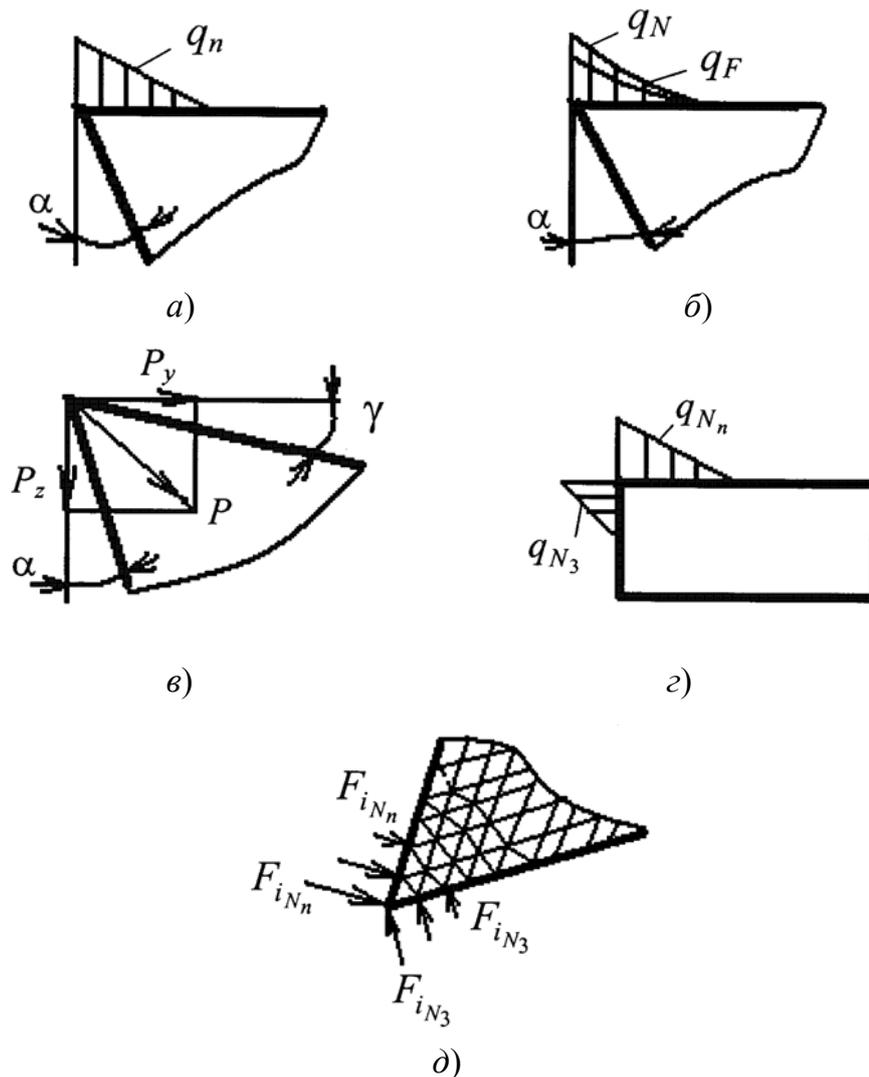


Рис. 3.1. Расчетные схемы для определения напряжений в режущей части резцов, предложенные Ф. Р. Арчибальдом (а), В. Ф. Бобровым (б), А. И. Бетанели (в), Л. Г. Куклиным и др. (г), В. А. Остафьевым (д)

Метод Ф. А. Арчибальда позднее использовал М. И. Клушин [157]–[160], рассматривавший бесконечный клин при следующих допущениях:

а) длина режущей кромки инструмента равна ширине обрабатываемого диска;

б) эпюра нагружения передней поверхности инструмента имеет форму треугольника.

Автор получил формулу для определения напряжений  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ ,  $\tau_{r\theta}$  в лезвии инструмента, а для определения закона изменения нормальных напряжений на площади контакта стружки с инструментом использовал зависимость  $\sigma_{n\max} = \tau_{\text{сдв}} / \text{tg}(\rho + \beta_1 - \gamma)$ , где  $\rho$  – угол трения.

Для нахождения предельных упругих напряжений также была принята энергетическая теория Губера–Мизеса–Генки.

В своих работах И. В. Даутов и др. [161], [162] использовали метод конформных отображений и определили общее выражение для напряжений в плоском клине при треугольной эпюре силовой нагрузки. В отличие от ранее выполненных работ В. Ф. Бобров [163] рассматривал удельные нормальные силы  $q_N$  и удельные силы трения  $q_F$ , действующие вдоль передней поверхности инструмента, функционально связанными с расстоянием от режущей кромки (рис. 3.1, б). Распределение удельных нормальных сил и сил трения на передней поверхности инструмента описано полученными выражениями. Постоянные в приведенных уравнениях найдены путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях аргументов. Чем выше степень аргументов полинома, выбранного для описания экспериментального закона, тем точнее аппроксимация этого закона, но тем сложнее будут условия для определения постоянных в указанных уравнениях. Распределение удельных сил вдоль режущей кромки было принято равномерным. Наличие большого количества неизвестных и необходимость проведения дополнительных опытов для определения закона нагружения передней поверхности делают расчеты весьма громоздкими.

Наиболее полно расчетные методы были обобщены и развиты А. И. Бетанели [132], [144], [164]. Используя основную расчетную схему режущего клина (рис. 3.1, в), он вывел формулу для определения его напряженного состояния с учетом параболической эпюры нагружения передней поверхности инструмента и переменного характера коэффициента трения. К достоинствам работ А. И. Бетанели следует отнести и то, что путем известных упрощений автор добился вывода наиболее простых формул для расчета напряженного состояния клина:

$$\sigma_r = \frac{2P_0}{r} \left[ \frac{\cos[\nu_0 - (\beta/2 + \gamma)] \cos[\theta - (\beta/2 + \gamma)]}{\beta + \sin \beta} \right] + \\ + \frac{\sin[\nu_0 - (\beta/2 + \gamma)] \sin[\theta - (\beta/2 + \gamma)]}{\beta - \sin \beta},$$

где  $\beta$  – угол заострения;  $\gamma$  – передний угол;  $P_0 = P/C$  – удельная сила на единицу длины режущей кромки;  $\nu_0 = \arctg P_z/P_y$  – угол, определяющий направление результирующей силы резания. Предельное состояние было принято согласно теории хрупкой прочности. Бетанели А. И. первый показал связь между наибольшим растягивающим

напряжением в опасной точке и толщиной срезаемого слоя, причем она аппроксимируется линейной зависимостью, а наклон кривой определяется формой режущего инструмента и условиями резания. Это дало возможность предложить ускоренный метод определения предельных толщин срезаемого слоя по пределу прочности инструментального материала. Однако выведенные формулы не могут учесть влияния размеров составных элементов твердосплавных резцов на распределение напряжений в режущей части инструмента. Расчету клина (лезвия) посвящены также исследования [139], [165]–[168], в которых аналитически определены зависимости напряжений от геометрических параметров клина и методов приложения нагрузки.

Несколько иной подход к проблеме исследования напряженного состояния режущей части резцов использовали Л. Г. Куклин, В. И. Сагалов, В. В. Серебровский, С. П. Шабашов [169]. Авторы отдельно рассматривали прочность спая и прочность пластины твердого сплава (рис. 3.1, з). Слой спая испытывает сложную деформацию сдвига, кручения и изгиба, в основу же расчета твердосплавной пластины (рис. 3.1, з) положено условие неравномерного теплораспределения в головке резца. Передний и задний углы были приняты равными нулю, а законы нагружения передней и задней поверхностей – треугольными.

К достоинствам работы [169] можно отнести то, что авторы подошли к расчету на прочность головки резца дифференцированно. Ими предложены рекомендации по проектированию нового инструмента, т. к. расчет по данному методу позволяет определить наиболее слабое звено в твердосплавном резце. Однако авторы не учитывали влияния геометрических размеров державки и физико-механических характеристик ее материала на напряжения в пластине.

Оригинальный метод для решения проблемы прочности режущей части инструмента предложили М. Ф. Полетика и М. Х. Утешев [139], [168]. При постановке задачи ими введены следующие допущения:

- а) рассматривается свободное прямоугольное резание;
- б) резец представляется тонкой пластиной;
- в) сила резания приложена только к вершине резца;
- г) на задней поверхности резца силы отсутствуют.

В принципе здесь рассмотрен случай защемленного клина, нагруженного сосредоточенной силой.

Авторы представляют режущую часть резца как полубесконечную угловую область, а стружку – как абсолютно твердое тело, т. е. они проводят аналогию между своей задачей и задачей о воздействии

на упругое основание жесткого штампа, прижимаемого внецентренно расположенной силой. При решении поставленной задачи была установлена закономерность распределения нормальных напряжений, действующих на передней поверхности, которая выражается следующей формулой:

$$\sigma(X) = \frac{N}{\pi CB} \ln \frac{C + \sqrt{C^2 - X^2}}{C - \sqrt{C^2 - X^2}},$$

где  $N$  – нормальная сила, действующая на передней поверхности резца;  $X$  – расстояние от вершины резца до точки, в которой исследуется напряженное состояние;  $C$ ,  $B$  – соответственно длина и ширина контакта стружки с резцом вдоль передней поверхности.

Для определения нормальных напряжений на передней поверхности инструмента в зависимости от нагрузки, закон распределения которой описывается параболической кривой, авторы получили следующую формулу:

$$\sigma_x = \frac{B_1 N e^{(-BX/C)}}{BC(e^{-B_1} - 1)},$$

где  $B_1$  и  $B$  – эмпирические коэффициенты.

В последние годы для определения напряжений в режущем клине исследователи все шире применяют математические методы, требующие применения вычислительной техники [170]–[188]. К таким работам относятся исследования В. А. Остафьева [170]–[173], в которых разработана методика расчета прочности режущей части инструмента, позволяющая учитывать не только контактные нагрузки на передней поверхности инструмента, но и неравномерность температурного поля на ней.

Для расчета сложного напряженного состояния автор применил метод конечных элементов, согласно которому любой по форме инструмент можно разбить на элементы и рассчитать напряженное состояние каждого из них (рис. 3.1, д). Остафьев В. А. исследовал напряженно-деформированное состояние цельного инструмента и мало уделил внимания определению влияния отдельных конструктивных элементов напайных и сборных инструментов на их прочность.

В работе [177] рассматривается возможность использования метода конечных элементов (МКЭ) для прогнозирования разрушения сменных многогранных пластин (СМП) при различных условиях работы.

При моделировании СМП разбивали на ряды восьмиузловых изопараметрических элементов, размеры которых уменьшались по мере приближения к вершине резца. Кроме силы резания на СМП действуют сила зажима, возникающая в узле крепления, а также высокая температура зоны резания, которая учитывалась в узлах конечно-элементной сетки для различных условий резания. По нормальным и касательным напряжениям, полученным в результате расчетов в узлах конечно-элементной сетки, можно определить главные напряжения, а затем – эквивалентные напряжения, т. е. одноосные растягивающие напряжения, соответствующие рассматриваемому сложному напряженному состоянию.

В указанной работе приведены результаты анализа моделирования напряженного состояния СМП из твердого сплава Т15К6 при черновом точении стали 45.

Положительное направление смещения пластины соответствует раскрытию стыка между СМП и державкой инструмента. Для упрощения расчетов были приняты следующие допущения: абсолютно жесткие СМП (если можно принять жесткость режущей пластины как минимум на порядок больше жесткости стыка); все деформации происходят в результате смещения в стыке; незначительные углы поворота СМП; постоянный коэффициент жесткости стыка.

Перечисленные допущения, естественно, уменьшают точность расчетов, но позволяют на основе прочностных расчетных зависимостей оценить различные конструкции сборных режущих инструментов уже на стадии проектирования.

Преимуществом численных методов расчета, в частности метода конечных элементов (МКЭ) как наиболее популярного в настоящее время, является то, что они позволяют учесть все факторы, влияющие на НДС сборного режущего инструмента, с необходимой точностью. Существенным недостатком, свойственным всем численным расчетным методам, является то, что они не дают зависимостей, связывающих НДС режущего инструмента с его параметрами, которые могли бы быть использованы для оптимизации инструмента на стадии проектирования. В рамках поставленной задачи вообще нельзя говорить об одной, например, конечно-элементной (КЭ) модели, а следует говорить о наборе таких моделей, которых будет столько, сколько наборов фиксированных значений параметров модели привлекаемых к рассмотрению. Действительно, изменяя хотя бы один параметр мо-

дели (даже не геометрический), получаем новую КЭ модель, НДС которой должен быть определен новым расчетом.

Анализируя этот подход можно отметить, что крайне маловероятно построение математической модели, в достаточной степени учитывающей все параметры, дающей результаты приемлемой точности и в то же время поддающейся анализу на многофакторную оптимизацию. Действительно, таких моделей в настоящее время не существует, даже задача о НДС режущего бесконечного клина при произвольном нагружении в общем виде не решена.

Наиболее значительные успехи и современные объяснения механизмов разрушения и изнашивания инструментов получены с применением структурно-энергетического подхода к прочности, позволяющего с фундаментальных позиций термодинамики и за счет привлечения дислокационных представлений описать механизмы разрушения инструментального материала и выявить рациональные пути повышения работоспособности за счет улучшения свойств инструментального материала. Развитие подхода основано на том, что инструмент является составной частью технологической системы резания и, следовательно, его работоспособность можно определять не только свойствами инструментального материала, но и процессами в других объектах технологической системы резания. Для упрощения задачи рассмотрен лишь процесс стружкообразования и изменение состояния (устойчивости) упругой системы станка [178].

Для определения НДС в работе [184] был использован хорошо известный в классической теории упругости метод наложения решений. Сначала определяли НДС в режущем элементе как в ограниченной области бесконечного клина под действием нагрузки, моделирующей силы резания и силы закрепления. Это решение (и определяемое им НДС) названо основным. Понятно, что такое же НДС будет возникать в режущем элементе, если по его контактными опорной и упорной поверхностям будут реализованы силовые граничные условия, распределение которых задается самим решением для бесконечного клина. Эти граничные условия есть не что иное, как нормальные и касательные напряжения в бесконечном клине, действующие на линиях, ограничивающих вырезанный режущий элемент. Эти напряжения были названы теоретическими граничными условиями. В общем случае такие граничные условия не совпадают с теми реальными, которые имеет режущий элемент в сборном инструменте.

Следовательно, для получения общего решения на основное решение следует наложить поправочное, которое бы учитывало реальные граничные условия закрепления.

В целом можно сделать следующие выводы: выбранное упрощенное решение дает достаточно верное НДС в режущем клине за пределами зоны контакта и позволяет достаточно точно определить максимальное растягивающее напряжение на передней поверхности, являющееся одним из опасных с точки зрения прочности.

На рис. 3.2 видно, что нормальные напряжения по передней  $\sigma_{\Pi}$  и задней  $\sigma_3$  поверхностям создают момент относительно вершины клина

$$M = N_{\Pi}L_c - N_3h_{c3},$$

где  $N_{\Pi}$ ,  $N_3$  – равнодействующие нормальных напряжений по граням клина;  $L_c$ ,  $h_{c3}$  – расстояния от вершины до точек приложения  $N_{\Pi}$  и  $N_3$ , соответственно.

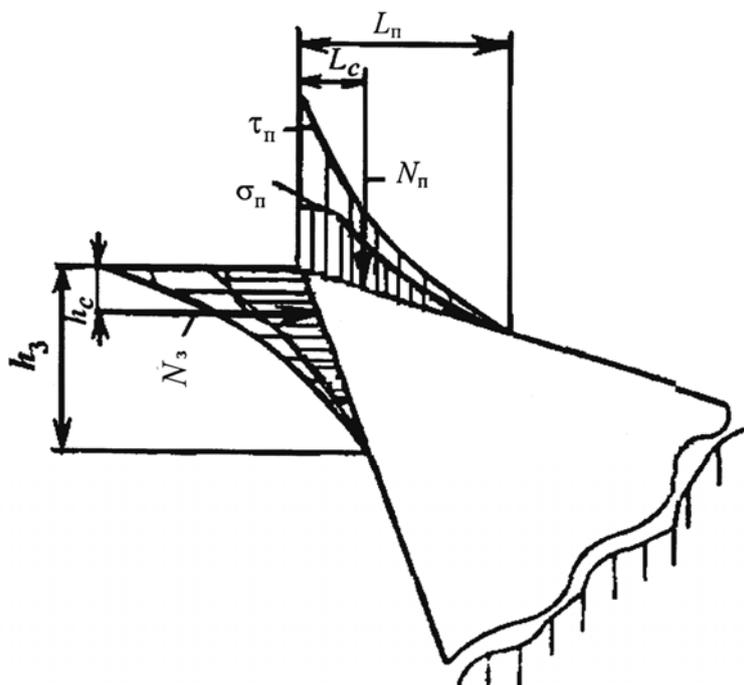


Рис. 3.2. Схема нагружения бесконечного клина, распределенной по граням нагрузкой

Решение задачи о распределении напряжений в клине, нагруженном в вершине сосредоточенной силой и моментом, хорошо известно в теории упругости. Распределение напряжений уже не является простым радиальным и в полярных координатах  $(r, \theta)$  (рис. 3.3) оно имеет вид:

$$\sigma_r(r, \theta) = \frac{2}{b} \left[ P \left( \frac{\sin \psi \sin \theta}{r(\delta - \sin \delta)} - \frac{\cos \psi \cos \theta}{r(\delta + \sin \delta)} \right) - \frac{M \sin(2\theta)}{r^2(\sin \delta - \delta \cos \delta)} \right],$$

$$\tau_{r\theta}(r, \theta) = -\frac{M[\cos(2\theta) - \cos \delta]}{br^2(\sin \delta - \delta \cos \delta)},$$

$$\sigma_\theta(r, \theta) = 0; 0 < r < \infty; -\frac{\delta}{2} \leq \theta \leq \frac{\delta}{2},$$

где  $b$  – толщина клина;  $r$  – радиус, измеряемый от вершины;  $\theta$  – угол, отсчитываемый от биссектрисы угла клина;  $\psi$  – угол, определяющий направление силы  $P$  относительно биссектрисы. Положительные направления  $P$ ,  $M$  и углов  $\psi$ ,  $\theta$  показаны на рис. 3.3.

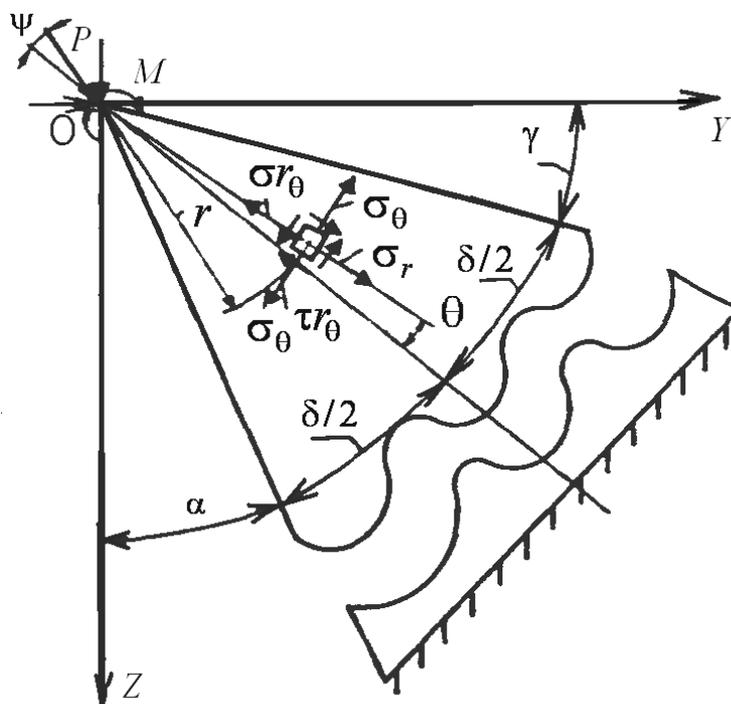


Рис. 3.3. Схема нагружения бесконечного клина эквивалентной сосредоточенной нагрузкой в вершине

Такое распределение напряжений дает экстремумы нормальных напряжений на передней и задней поверхностях клина.

Следовательно, данное решение позволяет качественно оценить НДС за пределами зоны контакта в режущем клине.

Это означает, что по любому радиусу напряжения  $\tau_{r\theta}(r, \theta)$  убывают пропорционально  $1/r^2$ , а на дуге окружности любого радиуса

максимальные значения имеют место при  $\theta = 0$ . На гранях клина  $\tau_{r\theta}(r, \pm \frac{\delta}{2}) = 0$  и  $\sigma_r(r, \theta)$  являются главными. Таким образом, сделан вывод, что все локальные экстремумы напряжений  $\sigma_r$  имеют место на передней и задней поверхностях клина. Положение этих экстремумов на передней и задней поверхностях определяется выражениями:

$$r_{\text{экс}}^n = \frac{2 \frac{M}{P} \sin \delta}{(\sin \delta - \delta \cos \delta) \left( \frac{\sin \psi \sin \frac{\delta}{2}}{\delta - \sin \delta} - \frac{\cos \psi \cos \frac{\delta}{2}}{\delta + \sin \delta} \right)};$$

$$r_{\text{экс}}^3 = \frac{2 \frac{M}{P} \sin \delta}{(\sin \delta - \delta \cos \delta) \left( \frac{\sin \psi \sin \frac{\delta}{2}}{\delta - \sin \delta} - \frac{\cos \psi \cos \frac{\delta}{2}}{\delta + \sin \delta} \right)}.$$

Это позволяет заключить, что положение экстремумов линейно зависит от  $l_c = M/P$  и не линейно от  $\delta$  и  $\psi$ .

Однако предлагаемая методика не позволяет учесть статистические условия контакта режущего элемента, а значит, оптимизировать конструктивные и технологические параметры опорных поверхностей.

Анализ литературы выявил, что большой вклад в изучение жесткости режущего инструмента сделан исследователями УДН им. П. Лумумбы [189]–[194]. Многими авторами жесткость сборного инструмента изучалась на специально разработанных стендах, на которых определялась доля смещения режущей кромки инструмента в результате смещения отдельных элементов или в процессе резания, а также численным моделированием [189]–[215]. По измерениям перемещений оценивалось влияние жесткости отдельных элементов на суммарную жесткость инструмента. Сила, с которой нагружался инструмент, соответствовала результирующей силе резания. Перед испытаниями на жесткость производился контроль прямолинейности и шероховатости опорной поверхности державки резца и гнезда в державке под пластину. Это позволяло оценивать как конструктивный вариант исполнения инструмента, так и качество его изготовления. Интересными пред-

ставляются исследования жесткости сборных торцовых фрез с механическим креплением режущих пластин [189], [190], [192]. Испытаниям подверглись фрезы с радиальным и тангенциальным расположением режущих пластин, а также фрезы с инструментальными блоками.

В результате статических нагружений фрез было выявлено, что наибольшей жесткостью по оси  $Z$  обладает экспериментальная фреза конструкции РНИИ с тангенциальным расположением режущих пластин. При больших нагрузках жесткость системы режущая пластина – корпус у этой фрезы снижается, а у остальных типов фрез повышается. Для всех типов исследованных фрез, за исключением экспериментальной фрезы РНИИ, доля перемещения режущей пластины по координате  $Z$  за счет перемещения кассеты составляет 50 %. Как показывают исследования динамики сборного режущего инструмента, наибольший уровень колебаний совершает режущая пластина относительно державки [190]. Поэтому для оценки жесткости сборного инструмента необходимо измерение контактных перемещений между элементами крепления режущей пластины.

Применяя известную методику [191], [196], [197], в лабораторных условиях изучали жесткость сборных резцов в направлении действия предполагаемой равнодействующей силы резания.

### **3.2. Графовая модель напряженно-деформированного состояния (НДС) зуба инструмента**

Дискретные модели деформируемого тела в виде ориентированного графа разрабатывались под влиянием работ Г. Корна [216]–[218] и Г. Трента [219]. Эта модель описана в работах Е. Г. Кузовкова [220]–[223], где приведены: матрицы, порождаемые графом с выводом разрешающих уравнений для плоского напряженного состояния.

При этом вывод разрешающих уравнений представляет собой процесс преобразования обобщенных координат, связанных с различными структурными элементами графа. Традиционно для этой цели используются дифференциальные уравнения, вариационные принципы, граничные интегральные уравнения, минимизация невязок и т. д.

Для получения разрешающих уравнений использовалась графовая модель (рис. 3.4).

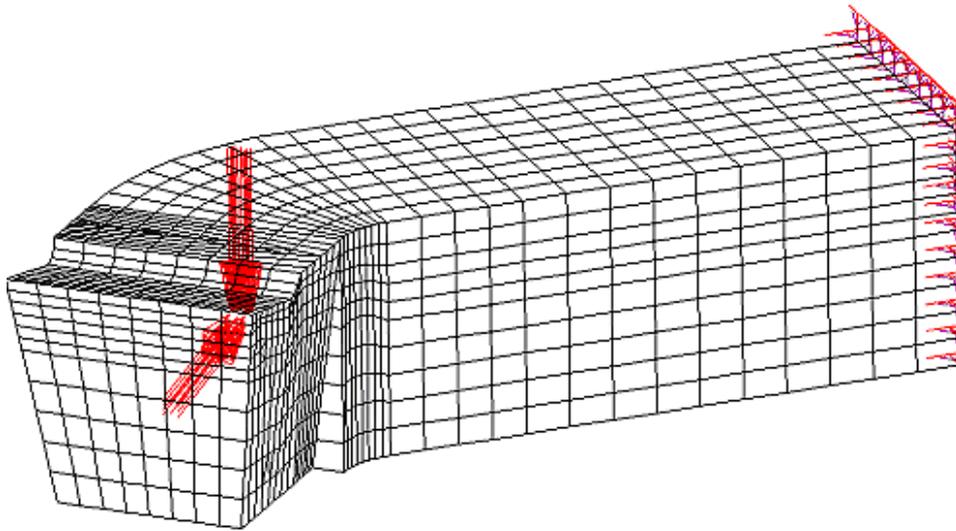


Рис. 3.4. Графовая модель резца

Элементарная ячейка – граф элемента, полученного в результате членения инструмента представлена на рис. 3.5.

В случае объемного элемента используется ячейка из дуг и вершин. Она отображает два вектора:

$$\left\{ f \right\}_c^t = \left\{ \begin{array}{l} f_x^u f_x^d f_{1x}^u f_{1x}^d f_{xy}^l f_{xy}^r f_{1xy}^l f_{1xy}^r f_{yx}^u f_{yx}^d f_{1yx}^u f_{1yx}^d f_y^l f_y^r f_{1y}^l f_{1y}^r f_z^v f_z^m f_z^l f_z^m \\ f_z^m f_{xz}^v f_{1xz}^v f_{1xz}^m f_{xz}^m f_{xz}^u f_{1xz}^u f_{xz}^d f_{1xz}^d f_{1yz}^r f_{1yz}^l f_{1yz}^l f_{1yz}^m f_{yz}^v f_{1yz}^v f_{1yz}^m \end{array} \right\}, \quad (3.1)$$

$$\left\{ \delta \right\}_c^t = \left\{ \begin{array}{l} \delta_x^u \delta_x^d \delta_{1x}^u \delta_{1x}^d \delta_{xy}^l \delta_{xy}^r \delta_{1xy}^l \delta_{1xy}^r \delta_{yx}^u \delta_{yx}^d \delta_{1yx}^u \delta_{1yx}^d \delta_y^l \delta_y^r \delta_{1y}^l \delta_{1y}^r \delta_z^v \delta_z^m \delta_z^l \delta_z^m \\ \delta_z^m \delta_{xz}^v \delta_{1xz}^v \delta_{1xz}^m \delta_{xz}^m \delta_{xz}^u \delta_{1xz}^u \delta_{xz}^d \delta_{1xz}^d \delta_{1yz}^r \delta_{1yz}^l \delta_{1yz}^l \delta_{1yz}^m \delta_{yz}^v \delta_{1yz}^v \delta_{1yz}^m \end{array} \right\}, \quad (3.2)$$

где  $\delta_x$ ,  $\delta_y$  и  $\delta_z$  – абсолютные нормальные деформации;  $\delta_{yx} \dots \delta_{xz}$  – линейные перемещения, обусловленные сдвигом;  $f_x$ ,  $f_y$ ,  $f_z$  и  $f_{yx} \dots f_{xz}$  – нормальные и тангенциальные внутренние силы (обобщенные напряжения). Каждая дуга графа отображает одну из следующих пар переменных:  $\delta_x - f_x$ ,  $\delta_y - f_y$ ,  $\delta_{yx} - f_{yx}$ , и т. д.

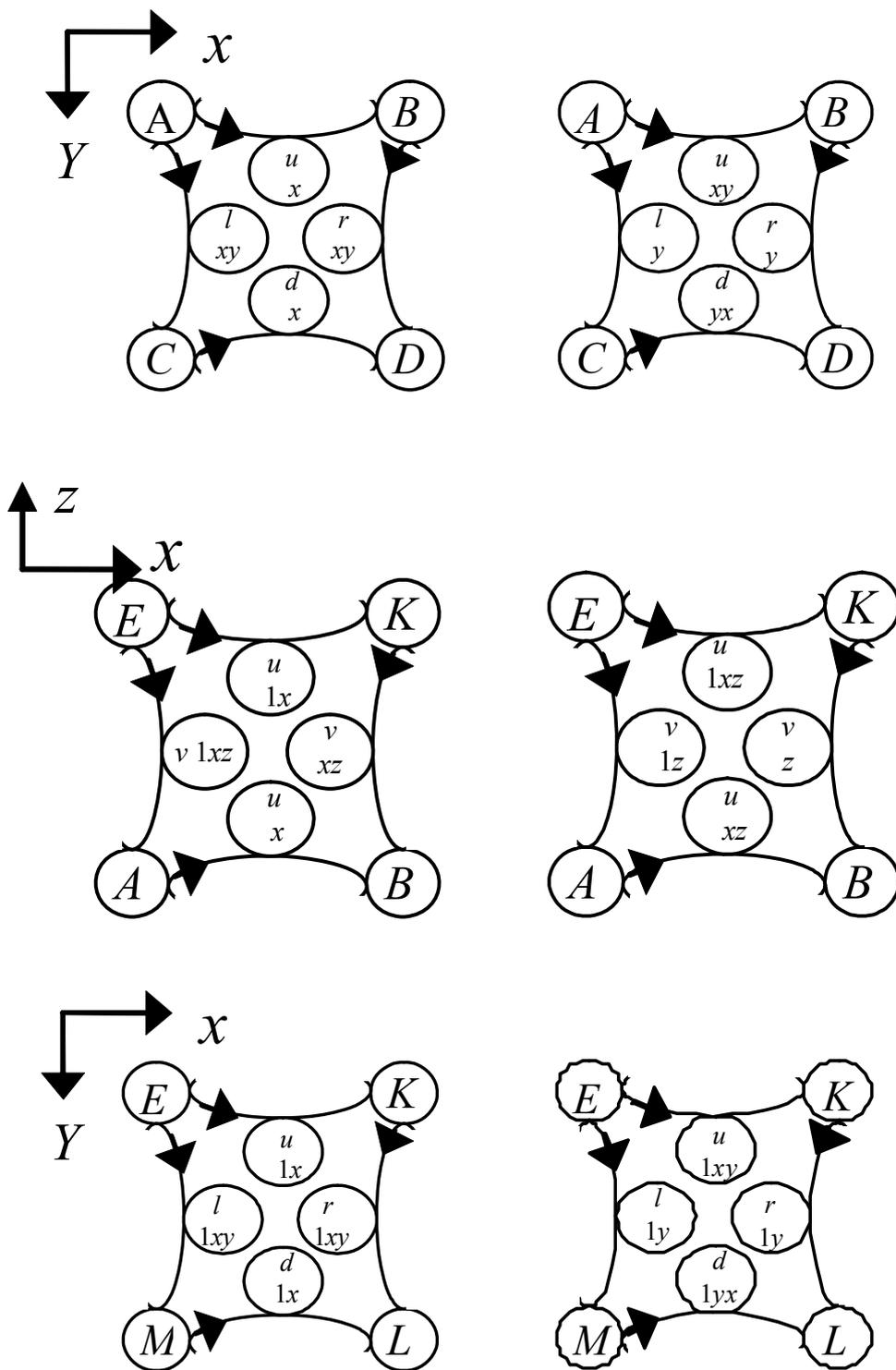


Рис. 3.5. Граф прямоугольного элемента – U-компонента

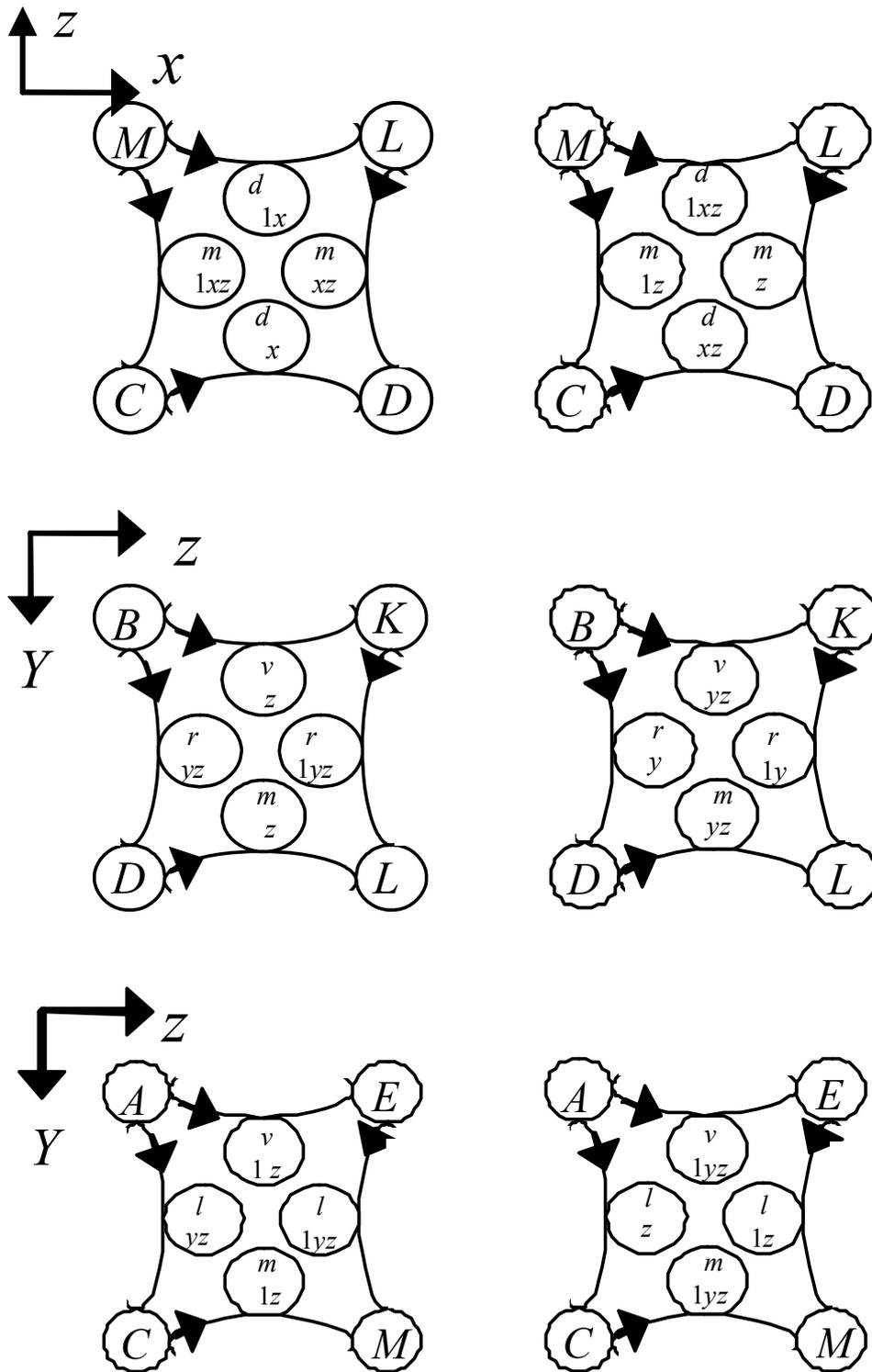


Рис. 3.6. Граф прямоугольного элемента –  $V$ -компонента ячейки

Связь векторов  $\{f\}$  и  $\{\delta\}$  элементарной ячейки, а также зависимость их от переменных, характеризующих исходное тело, т. е. от  $\{\sigma\}$  и  $\{\varepsilon\}$ , устанавливали, принимая, в качестве инварианта перехода к модели энергию деформации элемента среды:

$$\{f\}^t \{\delta\} = \int_v \{\sigma\}^t \{\varepsilon\} dv. \quad (3.3)$$

Здесь  $\{f\}^t \{\delta\}$  – энергия дискретной модели в виде элементарной ячейки,

$$\begin{aligned} \{f\}^t \{\delta\} = & \{f_x^u \delta_x^u + f_x^d \delta_x^d + f_{1x}^u \delta_{1x}^u + f_{1x}^d \delta_{1x}^d + f_{xy}^\ell \delta_{xy}^\ell + f_{xy}^r \delta_{xy}^r + \\ & + f_{1xy}^\ell \delta_{1xy}^\ell + f_{1xy}^r \delta_{1xy}^r + f_{xy}^u \delta_{xy}^u + f_{yx}^d \delta_{yx}^d + f_{1xy}^u \delta_{1xy}^u + f_{1yx}^d \delta_{1yx}^d + \\ & + f_y^l \delta_y^l + f_y^r \delta_y^r + f_{1y}^l \delta_{1y}^l + f_{1y}^r \delta_{1y}^r + f_{1z}^v \delta_{1z}^v + f_z^v \delta_z^v + f_z^l \delta_z^l + \\ & + f_{1z}^l \delta_{1z}^l + f_{1z}^m \delta_{1z}^m + f_z^m \delta_z^m + f_{xz}^v \delta_{xz}^v + f_{1xz}^v \delta_{1xz}^v + f_{1xz}^m \delta_{1xz}^m + \\ & + f_{xz}^m \delta_{xz}^m + f_{xz}^u \delta_{xz}^u + f_{1xz}^u \delta_{1xz}^u + f_{xz}^d \delta_{xz}^d + f_{1xz}^d \delta_{1xz}^d + f_{1yz}^r \delta_{1yz}^r + \\ & + f_{yz}^r \delta_{yz}^r + f_{1yz}^l \delta_{1yz}^l + f_{yz}^l \delta_{yz}^l + f_{yz}^m \delta_{yz}^m + f_{yz}^v \delta_{yz}^v + f_{1yz}^v \delta_{1yz}^v + f_{1yz}^m \delta_{1yz}^m \}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

$\int_v \{\sigma\}^t \{\varepsilon\} dv$  – энергия деформации элемента,

$$\int_v \{\sigma\}^t \{\varepsilon\} dv = \int_v (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) dv. \quad (3.5)$$

Используя дифференциальные зависимости Коши, выражали компоненты тензора деформации через перемещения:

$$\varepsilon_x = du/dx; \quad \varepsilon_y = dv/dy; \quad \varepsilon_z = dw/dz; \quad (3.6)$$

$$\gamma_{xy} = du/dy + dv/dx; \quad \gamma_{yz} = dv/dz + dw/dy; \quad \gamma_{xz} = du/dz + dw/dx.$$

Напряжения определяются законом Гука:

$$[\sigma_e] = [A][B_e]\{U_e\}. \quad (3.7)$$

Так как такое умножение никогда не выполняется в явном виде, запишем матрицу  $[A]$  для выбранного материала. При использовании обычных упругих постоянных (модуля упругости  $E$  и коэффициента Пуассона  $\mu$ ) матрица  $[A]$  имеет вид

$$[A] = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \times \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix}; (3.8)$$

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix}; \quad \{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix}.$$

Обозначив  $\lambda = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}$  и  $\beta = \frac{E}{2(1+\mu)}$ , получим:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= (\lambda + 2\beta)\varepsilon_x + \lambda\varepsilon_y + \lambda\varepsilon_z; \quad \sigma_y = \lambda\varepsilon_x + (\lambda + 2\beta)\varepsilon_y + \lambda\varepsilon_z; \\ \sigma_z &= \lambda\varepsilon_x + (\lambda + 2\beta)\varepsilon_z + \lambda\varepsilon_y; \quad \tau_{xy} = \beta \cdot \gamma_{xy}; \\ \tau_{xz} &= \beta \cdot \gamma_{xz}; \quad \tau_{yz} = \beta \cdot \gamma_{yz}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Для интегрирования (3.5) аппроксимируем относительные деформации линейными полиномами:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = a_0 + a_1x + a_2y + a_3z; \quad \varepsilon_y = b_0 + b_1x + b_2y + b_3z; \\ \varepsilon_z = m_0 + m_1x + m_2y + m_3z; \\ \gamma_{xy} = c'_0 + c'_1x + c'_2y + c'_3z + d'_0 + d'_1x + d'_2y + d'_3z; \\ \gamma_{yz} = c''_0 + c''_1x + c''_2y + c''_3z + d''_0 + d''_1x + d''_2y + d''_3z; \\ \gamma_{xz} = c'''_0 + c'''_1x + c'''_2y + c'''_3z + d'''_0 + d'''_1x + d'''_2y + d'''_3z. \end{cases} \quad (3.10)$$

Закон Гука с учетом аппроксимации (3.10) принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \sigma_x = \lambda(b_0 + b_1x + b_2y + b_3z) + \lambda(m_0 + m_1x + m_2y + m_3z) + \\ + (\lambda + 2\beta)(a_0 + a_1x + a_2y + a_3z), \\ \sigma_y = \lambda(a_0 + a_1x + a_2y + a_3z) + \lambda(m_0 + m_1x + m_2y + m_3z) + \\ + (\lambda + 2\beta)(b_0 + b_1x + b_2y + b_3z), \\ \sigma_z = \lambda(b_0 + b_1x + b_2y + b_3z) + \lambda(a_0 + a_1x + a_2y + a_3z) + \\ + (\lambda + 2\beta)(m_0 + m_1x + m_2y + m_3z), \\ \tau_{xy} = \beta(c'_0 + d'_0 + (c'_1 + d'_1)x + (c'_2 + d'_2)y + (c'_3 + d'_3)z), \\ \tau_{xz} = \beta(c''_0 + d''_0 + (c''_1 + d''_1)x + (c''_2 + d''_2)y + (c''_3 + d''_3)z), \\ \tau_{yz} = \beta(c'''_0 + d'''_0 + (c'''_1 + d'''_1)x + (c'''_2 + d'''_2)y + (c'''_3 + d'''_3)z). \end{cases} \quad (3.11)$$

Неизвестные коэффициенты (3.10) выражаем через деформации сторон элемента, соответствующего элементарной ячейки (рис. 3.7).

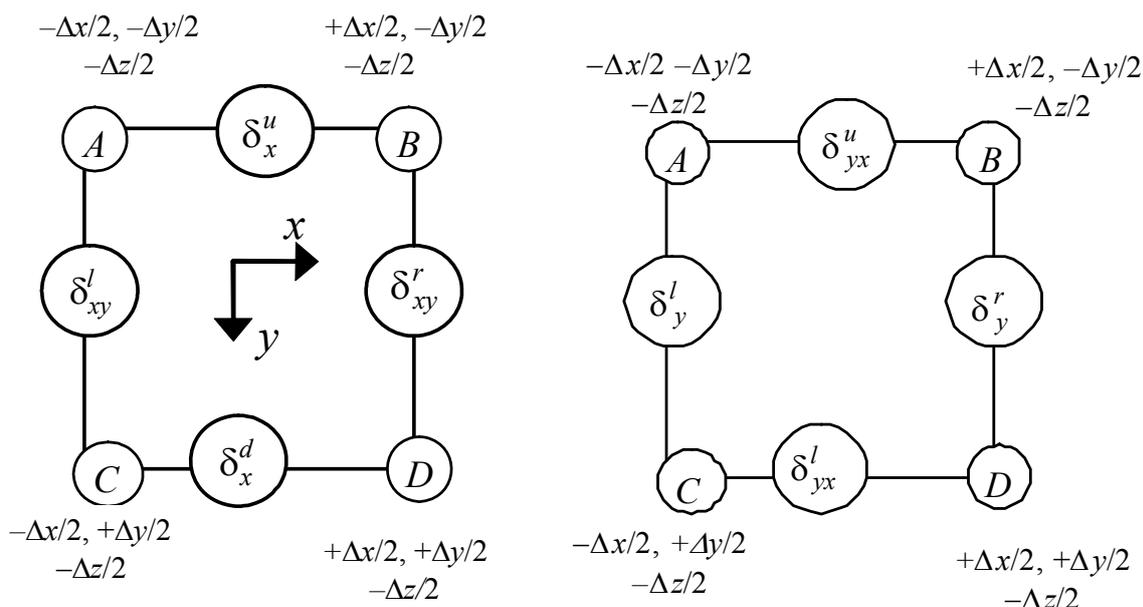


Рис. 3.7. Схема изменения деформаций элемента

Начало координат устанавливаем в центре элемента, т. е.  $-\Delta x/2 \leq x \leq \Delta x/2, -\Delta y/2 \leq y \leq \Delta y/2, -\Delta z/2 \leq z \leq \Delta z/2$ . В результате, после интегрирования получаем:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\delta_x^u = a_0 \Delta x - a_2 \Delta x \Delta y / 2 - a_3 \Delta x \Delta z / 2; \delta_x^d = a_0 \Delta x + a_2 \Delta x \Delta y / 2 - a_3 \Delta x \Delta z / 2; \\
\delta_{1x}^u = a_0 \Delta x - a_2 \Delta x \Delta y / 2 + a_3 \Delta x \Delta z / 2; \delta_{1x}^d = a_0 \Delta x + a_2 \Delta x \Delta y / 2 + a_3 \Delta x \Delta z / 2; \\
\delta_{xy}^\ell = c_0' \Delta y - c_1' \Delta x \Delta y / 2 - c_3' \Delta y \Delta z / 2; \delta_{xy}^r = c_0' \Delta y + c_1' \Delta x \Delta y / 2 - c_3' \Delta y \Delta z / 2; \\
\delta_{1xy}^\ell = c_0' \Delta y - c_1' \Delta x \Delta y / 2 + c_3' \Delta y \Delta z / 2; \delta_{1xy}^r = c_0' \Delta y + c_1' \Delta x \Delta y / 2 + c_3' \Delta y \Delta z / 2; \\
\delta_{xy}^u = d_0' \Delta x - d_2' \Delta x \Delta y / 2 - d_3' \Delta x \Delta z / 2; \delta_{yx}^d = d_0' \Delta x + d_2' \Delta x \Delta y / 2 - d_3' \Delta x \Delta z / 2; \\
\delta_{1xy}^u = d_0' \Delta x - d_2' \Delta x \Delta y / 2 + d_3' \Delta x \Delta z / 2; \delta_{1yx}^d = d_0' \Delta x + d_2' \Delta x \Delta y / 2 + d_3' \Delta x \Delta z / 2; \\
\delta_y^l = b_0 \Delta y - b_1 \Delta x \Delta y / 2 - b_3 \Delta y \Delta z / 2; \delta_y^r = b_0 \Delta y + b_1 \Delta x \Delta y / 2 - b_3 \Delta y \Delta z / 2; \\
\delta_{1y}^l = b_0 \Delta y - b_1 \Delta x \Delta y / 2 + b_3 \Delta y \Delta z / 2; \delta_{1y}^r = b_0 \Delta y + b_1 \Delta x \Delta y / 2 + b_3 \Delta y \Delta z / 2; \\
\delta_{1z}^v = m_0 \Delta z - m_1 \Delta x \Delta z / 2 - m_2 \Delta y \Delta z / 2; \delta_z^v = m_0 \Delta z + m_1 \Delta x \Delta z / 2 - m_2 \Delta y \Delta z / 2; \\
\delta_z^l = m_0 \Delta y - m_1 \Delta x \Delta y / 2 - m_3 \Delta y \Delta z / 2; \delta_{1z}^l = m_0 \Delta y - m_1 \Delta x \Delta y / 2 + m_3 \Delta y \Delta z / 2; \quad (3.12) \\
\delta_{1z}^m = m_0 \Delta z - m_1 \Delta x \Delta z / 2 + m_2 \Delta y \Delta z / 2; \delta_z^m = m_0 \Delta z + m_1 \Delta x \Delta z / 2 + m_2 \Delta y \Delta z / 2; \\
\delta_{xz}^v = c_0''' \Delta z + c_1''' \Delta x \Delta z / 2 - c_2''' \Delta y \Delta z / 2; \delta_{1xz}^v = c_0''' \Delta z - c_1''' \Delta x \Delta z / 2 - c_2''' \Delta y \Delta z / 2; \\
\delta_{1xz}^m = c_0''' \Delta z - c_1''' \Delta x \Delta z / 2 + c_2''' \Delta y \Delta z / 2; \delta_{xz}^m = c_0''' \Delta z + c_1''' \Delta x \Delta z / 2 + c_2''' \Delta y \Delta z / 2; \\
\delta_{xz}^u = d_0''' \Delta x - d_2''' \Delta x \Delta y / 2 - d_3''' \Delta x \Delta z / 2; \delta_{1xz}^u = d_0''' \Delta x - d_2''' \Delta x \Delta y / 2 + d_3''' \Delta x \Delta z / 2; \\
\delta_{xz}^d = d_0''' \Delta x + d_2''' \Delta x \Delta y / 2 - d_3''' \Delta x \Delta z / 2; \delta_{1xz}^d = d_0''' \Delta x + d_2''' \Delta x \Delta y / 2 + d_3''' \Delta x \Delta z / 2; \\
\delta_{1yz}^r = d_0'' \Delta y + d_1'' \Delta x \Delta y / 2 + d_3'' \Delta y \Delta z / 2; \delta_{yz}^r = d_0'' \Delta y + d_1'' \Delta x \Delta y / 2 - d_3'' \Delta y \Delta z / 2; \\
\delta_{1yz}^l = d_0'' \Delta y - d_1'' \Delta x \Delta y / 2 + d_3'' \Delta y \Delta z / 2; \delta_{yz}^l = d_0'' \Delta y - d_1'' \Delta x \Delta y / 2 - d_3'' \Delta y \Delta z / 2; \\
\delta_{yz}^m = c_0'' \Delta z + c_1'' \Delta x \Delta z / 2 + c_2'' \Delta y \Delta z / 2; \delta_{yz}^v = c_0'' \Delta z + c_1'' \Delta x \Delta z / 2 - c_2'' \Delta y \Delta z / 2; \\
\delta_{1yz}^v = c_0'' \Delta z - c_1'' \Delta x \Delta z / 2 - c_2'' \Delta y \Delta z / 2; \delta_{1yz}^m = c_0'' \Delta z - c_1'' \Delta x \Delta z / 2 + c_2'' \Delta y \Delta z / 2.
\end{array} \right.$$

Уравнения (3.12) позволяют выразить 28 из 36 неизвестных коэффициентов через деформации сторон элемента:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = 0,5(\delta_{1x}^u + \delta_x^d) / \Delta x; c'_0 = 0,5(\delta_{xy}^l + \delta_{xy}^r) / \Delta y; \\ a_3 = (\delta_{1x}^u + \delta_x^u) / \Delta x \Delta z; c'_3 = (\delta_{1xy}^l - \delta_{xy}^l) / \Delta y \Delta z; \\ a_2 = (-\delta_x^u + \delta_x^d) / \Delta x \Delta y; c'_1 = (-\delta_{xy}^l + \delta_{xy}^r) / \Delta x \Delta y; \\ d'_0 = 0,5(\delta_{yx}^u + \delta_{yx}^d) / \Delta x; b_0 = 0,5(\delta_y^l + \delta_y^r) / \Delta y; \\ d'_2 = (-\delta_{yx}^r + \delta_{yx}^d) / \Delta x \Delta y; b_1 = (-\delta_y^l + \delta_y^r) / \Delta x \Delta y; \\ d'_3 = (-\delta_{yx}^u + \delta_{1yx}^u) / \Delta x \Delta z; b_3 = (-\delta_{1y}^l - \delta_y^l) / \Delta z \Delta y; \\ m_0 = 0,5(\delta_{1z}^v + \delta_z^m) / \Delta z; m_1 = (\delta_{1z}^v - \delta_z^v) / \Delta x \Delta z; \\ m_2 = (\delta_z^m - \delta_z^v) / \Delta y \Delta z; c''_0 = 0,5(\delta_{xz}^m + \delta_{1xz}^v) / \Delta z; \\ c''_1 = (\delta_{xz}^v - \delta_{1xz}^v) / \Delta x \Delta z; c''_2 = (\delta_{xz}^m - \delta_{xz}^v) / \Delta y \Delta z; \\ d''_0 = 0,5(\delta_{xz}^u + \delta_{xz}^d) / \Delta x; d''_2 = (\delta_{xz}^d - \delta_{xz}^u) / \Delta x \Delta y; \\ d''_3 = (-\delta_{xz}^u + \delta_{1xz}^u) / \Delta x \Delta z; d''_0 = 0,5(\delta_{yz}^r + \delta_{1yz}^l) / \Delta y; \\ d''_1 = (\delta_{yz}^r - \delta_{yz}^l) / \Delta x \Delta y; d''_3 = (-\delta_{yz}^l + \delta_{1yz}^l) / \Delta y \Delta z; \\ c''_0 = 0,5(\delta_{yz}^m + \delta_{1yz}^v) / \Delta z; c''_1 = (\delta_{yz}^v - \delta_{1yz}^v) / \Delta x \Delta z; \\ c''_2 = (\delta_{yz}^m - \delta_{yz}^v) / \Delta y \Delta z. \end{array} \right. \quad (3.13)$$

С целью определения оставшихся неизвестных удовлетворим в пределах элемента уравнения равновесия:

$$\left. \begin{array}{l} \partial \sigma_x / \partial x + \partial \tau_{xy} / \partial y + \partial \tau_{xz} / \partial z = 0; \\ \partial \sigma_y / \partial y + \partial \tau_{xy} / \partial x + \partial \tau_{yz} / \partial z = 0; \\ \partial \sigma_z / \partial z + \partial \tau_{xz} / \partial x + \partial \tau_{yz} / \partial y = 0. \end{array} \right\} \quad (3.14)$$

Подставив в них значения напряжений из (3.11), получаем:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda(b_1 + m_1) + (\lambda + 2\beta)a_1 + \beta(c'_2 + d'_2) + \beta(c''_3 + d''_3) = 0; \\ \lambda(a_2 + m_2) + (\lambda + 2\beta)b_2 + \beta(c'_2 + d'_1) + \beta(c''_3 + d''_3) = 0; \\ \lambda(a_3 + b_3) + (\lambda + 2\beta)m_3 + \beta(c''_1 + d''_1) + \beta(c''_2 + d''_2) = 0. \end{array} \right\} \quad (3.15)$$

На основании контурного закона для контуров на рис. 3.5 и 3.6 соответственно имеем:

$$\left. \begin{aligned} \delta_x^u + \delta_{xy}^r - \delta_x^d - \delta_{xy}^l &= 0; \delta_{yx}^u + \delta_y^r - \delta_{yx}^d - \delta_y^l = 0; \\ \delta_{1x}^u + \delta_{1xy}^r - \delta_{1x}^d - \delta_{1xy}^l &= 0; \delta_{1yx}^u + \delta_{1y}^r - \delta_{1yx}^d - \delta_{1y}^l = 0; \\ \delta_{1x}^u - \delta_{xz}^v - \delta_x^u + \delta_{1xz}^v &= 0; \delta_{1xz}^u - \delta_z^v - \delta_{xz}^u + \delta_{1z}^v = 0; \\ \delta_{1x}^d - \delta_{xz}^m - \delta_x^d + \delta_{1xz}^m &= 0; \delta_{1xz}^d - \delta_z^m - \delta_{xz}^d + \delta_{1z}^m = 0; \\ \delta_z^v + \delta_{1yz}^r - \delta_z^m - \delta_{yz}^r &= 0; \delta_{yz}^v + \delta_{1y}^r - \delta_{yz}^m - \delta_y^r = 0; \\ \delta_{1z}^v + \delta_{1yz}^l - \delta_{1z}^m - \delta_{yz}^l &= 0; \delta_{1yz}^v + \delta_{1z}^l - \delta_{1yz}^m - \delta_z^l = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

Отсюда, учитывая значения деформаций из (3.12), запишем:

$$a_2 = c_1^1; \quad d_2' = b_1; \quad a_3 = c_1''', \quad d_3''' = m_1; \quad m_2 = d_3''; \quad c_2'' = b_3. \quad (3.17)$$

Из выражения (3.16) с учетом (3.17), следует

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + 2\beta)a_1 + (\lambda + \beta)(d_2' + d_3''') + \beta c_2' + \beta c_3''' &= 0, \\ (\lambda + 2\beta)a_1 + (\lambda + \beta)(b_1 + m_1) + \beta c_2' + \beta c_3''' &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + 2\beta)b_2 + (\lambda + \beta)(c_1' + d_3'') + \beta d_1' + \beta c_3'' &= 0, \\ (\lambda + 2\beta)b_2 + (\lambda + \beta)(a_2 + m_2) + \beta d_1' + \beta c_3'' &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

$$\left. \begin{aligned} (\beta + \lambda)(c_2'' + c_1''') + (\lambda + 2\beta)c_2'' + \beta d_1''' + \beta d_2'' &= 0, \\ (\beta + \lambda)(a_3 + b_3) + (\lambda + 2\beta)m_3 + \beta d_1''' + \beta d_2'' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

Сложив попарно (3.18), (3.19) и (3.20), имеем:

$$\left. \begin{aligned} 2(\lambda + 2\beta)a_1 + (\lambda + \beta)(d_2' + d_3''') + (\lambda + \beta)(b_1 + m_1) + 2\beta c_2' + 2\beta c_3''' &= 0, \\ 2(\lambda + 2\beta)b_2 + (\lambda + \beta)(c_1' + d_3'') + (\lambda + \beta)(a_2 + m_2) + 2\beta d_1' + 2\beta c_3'' &= 0, \\ (\lambda + 2\beta)m_3 + (\lambda + 2\beta)c_2'' + (\lambda + \beta)(c_2'' + c_1''') + (\lambda + \beta)(a_3 + b_3) + & \\ + 2\beta d_1''' + 2\beta d_2'' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

В уравнениях (3.21) группируем коэффициенты, связанные с нормальными и тангенциальными составляющими, после чего приравниваем каждую группу к нулю.

Получаем оставшиеся неизвестные коэффициенты:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= k_a(b_1 + m_1); \quad b_2 = k_a(a_2 + m_2); \\ c'_2 &= k_c d'_2; \quad c'''_3 = k_c d'''_3; \quad d'_1 = k_c c'_1; \\ c''_3 &= k_c d''_3; \quad d'''_1 = k_c c'''_1; \quad d''_2 = k_d c''_2; \quad m_3 = k_b(a_3 + b_3), \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

$$\text{где } k_a = -\frac{(\lambda + \beta)}{2(\lambda + 2\beta)}, \quad k_c = -\frac{(\lambda + \beta)}{2\beta}, \quad k_d = \frac{2\lambda + 3\beta}{2\beta}, \quad k_b = -\frac{\lambda + \beta}{\lambda + 2\beta}.$$

Подставив (3.10) в (3.5) с учетом (3.13), (3.22), запишем:

$$\begin{aligned} & \int_v \left\{ \sigma_x \left[ 0,5(\delta'_{1x} + \delta^d_x) / \Delta x + (-\delta^u_x + \delta^d_x) \Delta y / \Delta x \Delta y + k_a(b_1 + m_1)x + (\delta'_{1x} + \delta^u_x) \frac{z}{\Delta x \Delta z} \right] + \right. \\ & + \sigma_y \left[ 0,5(\delta^l_y + \delta^r_y) \frac{1}{\Delta y} + (-\delta^l_y + \delta^r_y) \frac{x}{\Delta x \Delta y} + k_a(a_2 + m_2)y - (\delta^l_{1y} + \delta^l_y) \frac{z}{\Delta y \Delta z} \right] + \\ & + \sigma_z \left\{ (\delta^v_{1z} + \delta^m_z) \frac{1}{2\Delta z} + (-\delta^v_z + \delta^v_{1z}) \frac{x}{\Delta x \Delta z} + (\delta^m_z - \delta^v_z) \frac{y}{\Delta y \Delta z} + \frac{k_a z}{\Delta x \Delta z} (\delta^u_x - \delta^u_{1x}) \right\} - \\ & - \frac{k_a z}{\Delta y \Delta z} (\delta^l_y + \delta^l_{1y}) \sigma_z + \\ & + \tau_{xy} \left[ 0,5(\delta^l_{xy} + \delta^r_{xy}) / \Delta y + 0,5(\delta^u_{xy} + \delta^d_{xy}) / \Delta x + (-\delta^l_{xy} + \delta^r_{xy}) x / \Delta x \Delta y + \right. \\ & + k_c d'_2 y + (\delta^l_{1xy} - \delta^l_{xy}) \frac{z}{\Delta y \Delta z} + k_c c'_1 x + (-\delta^r_{xy} + \delta^d_{xy}) y / \Delta x \Delta y + (\delta^u_{1xy} - \delta^u_{yx}) \frac{z}{\Delta x \Delta z} \left. \right] + \\ & + \tau_{xz} \left\{ 0,5(\delta^m_{xz} + \delta^v_{1xz}) / \Delta z + 0,5(\delta^u_{xz} + \delta^d_{xz}) / \Delta x + (-\delta^v_{1xz} + \delta^v_{xz}) x / \Delta x \Delta z + \right. \\ & + k_c d'''_3 z + (\delta^m_{xz} - \delta^v_{xz}) \frac{y}{\Delta y \Delta z} + k_c c'''_1 x + (-\delta^u_{xz} + \delta^d_{xz}) y / \Delta x \Delta y + (\delta^u_{1xz} - \delta^u_{xz}) \frac{z}{\Delta x \Delta z} \left. \right\} + \\ & + \tau_{yz} \left\{ 0,5(\delta^m_{yz} + \delta^v_{1yz}) / \Delta z + 0,5(\delta^r_{yz} + \delta^l_{1yz}) / \Delta y + (-\delta^v_{1yz} + \delta^v_{yz}) x / \Delta x \Delta z + \right. \\ & + k_c d''_3 z + (\delta^m_{yz} - \delta^v_{yz}) \frac{y}{\Delta y \Delta z} + k_d c''_2 y + (-\delta^l_{yz} + \delta^r_{yz}) x / \Delta x \Delta y + (\delta^l_{1yz} - \delta^l_{yz}) \frac{z}{\Delta x \Delta z} \left. \right\} \Bigg\} dv. \quad (3.23) \end{aligned}$$

Сгруппировав в подынтегральном выражении (3.23) члены по деформациям, сравниваем их с правой частью (3.4). После сокращения на соответствующие деформации находим последовательные переменные графа, которые интерпретировались как внутренние силы модели:

$$\sigma_x \left( -\frac{z}{\Delta x \Delta z} - \frac{y}{\Delta x \Delta y} \right) - \frac{K_a y}{\Delta x \Delta y} \sigma_y + \frac{2K_a z}{\Delta x \Delta z} \sigma_z = f_x^u;$$

$$\begin{aligned}
\sigma_x \left( \frac{1}{2\Delta x} + \frac{z}{\Delta x \Delta z} \right) + \frac{2K_a z}{\Delta x \Delta z} \sigma_z &= f_{1x}^u; \\
\sigma_x \left( \frac{Y}{\Delta x \Delta y} + \frac{1}{2\Delta x} \right) + \frac{K_a y}{\Delta x \Delta y} \sigma_y &= f_x^d; \\
\sigma_x \left( \frac{K_a x}{\Delta x \Delta y} \right) + \sigma_y \left( \frac{1}{2\Delta y} + \frac{x}{\Delta x \Delta y} \right) &= f_y^r; \\
\sigma_x \left( -\frac{K_a x}{\Delta x \Delta y} \right) + \sigma_y \left( -\frac{x}{\Delta x \Delta y} - \frac{z}{\Delta y \Delta z} \right) - \frac{2K_a z}{\Delta y \Delta z} \sigma_z &= f_y^l; \\
\sigma_x \left( \frac{K_a x}{\Delta x \Delta z} \right) + \sigma_z \left( \frac{1}{2\Delta z} - \frac{x}{\Delta x \Delta z} \right) &= f_{1z}^v; \\
\sigma_x \left( \frac{K_a x}{\Delta x \Delta z} \right) + \sigma_y \left( -\frac{K_a y}{\Delta y \Delta z} \right) + \sigma_z \left( -\frac{y}{\Delta y \Delta z} + \frac{x}{\Delta x \Delta z} \right) &= f_z^v; \\
\sigma_y \left( K_a \frac{y}{\Delta y \Delta z} \right) + \sigma_z \left( \frac{1}{2\Delta z} + \frac{y}{\Delta y \Delta z} \right) &= f_z^m; \\
\sigma_y \left( \frac{1}{2\Delta y} + \frac{z}{\Delta y \Delta z} \right) + \frac{2K_a z}{\Delta y \Delta z} \sigma_z &= f_{1y}^l; \\
\tau_{xy} \left( -\frac{x}{\Delta x \Delta y} - \frac{z}{\Delta x \Delta z} - \frac{K_C x}{\Delta x \Delta y} \right) &= f_{xy}^l; \\
\tau_{xy} \left( \frac{1}{2\Delta y} + \frac{x}{\Delta x \Delta y} + \frac{K_C x}{\Delta x \Delta y} \right) &= f_{xy}^r; \\
\tau_{xy} \left( \frac{K_C y}{\Delta x \Delta y} + \frac{1}{2\Delta x} + \frac{y}{\Delta x \Delta y} \right) &= f_{xy}^d; \quad \tau_{xy} \left( \frac{1}{2\Delta y} + \frac{z}{\Delta y \Delta z} \right) = f_{1xy}^l; \\
\tau_{xy} \left( \frac{1}{2\Delta x} + \frac{z}{\Delta x \Delta y} \right) &= f_{1xy}^u; \quad \tau_{xy} \left( -\frac{K_c y}{\Delta x \Delta y} - \frac{y}{\Delta x \Delta y} - \frac{z}{\Delta x \Delta z} \right) = f_{xy}^u; \\
\tau_{xz} \left( \frac{1}{2\Delta z} + \frac{y}{\Delta y \Delta z} \right) &= f_{xz}^m; \quad \tau_{xz} \left( \frac{1}{2\Delta z} - \frac{x}{\Delta x \Delta z} - \frac{K_C x}{\Delta x \Delta z} \right) = f_{1xz}^v;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tau_{xz} \left( \frac{x}{\Delta x \Delta z} - \frac{y}{\Delta y \Delta z} + \frac{K_C x}{\Delta x \Delta z} \right) &= f_{xz}^v; & \tau_{xz} \left( \frac{K_C z}{\Delta x \Delta z} + \frac{z}{\Delta x \Delta z} \right) &= f_{1xz}^u; \\
 \tau_{xz} \left( \frac{1}{2\Delta x} - \frac{K_C z}{\Delta x \Delta z} - \frac{y}{\Delta x \Delta y} - \frac{z}{\Delta x \Delta z} \right) &= f_{xz}^u; & \tau_{xz} \left( \frac{1}{2\Delta x} + \frac{y}{\Delta x \Delta y} \right) &= f_{xz}^d; \\
 \tau_{yz} \left( \frac{1}{2\Delta z} + \frac{y}{\Delta y \Delta z} + \frac{K_d y}{\Delta y \Delta z} \right) &= f_{yz}^m; & \tau_{yz} \left( \frac{1}{2\Delta z} - \frac{x}{\Delta x \Delta z} \right) &= f_{1yz}^v; \\
 \tau_{yz} \left( \frac{x}{\Delta x \Delta z} - \frac{y}{\Delta y \Delta z} - \frac{K_d y}{\Delta y \Delta z} \right) &= f_{yz}^v; & \tau_{yz} \left( \frac{K_C z}{\Delta y \Delta z} + \frac{1}{2\Delta y} + \frac{z}{\Delta y \Delta z} \right) &= f_{1yz}^l; \\
 \tau_{yz} \left( -\frac{K_C z}{\Delta y \Delta z} - \frac{x}{\Delta x \Delta y} - \frac{z}{\Delta y \Delta z} \right) &= f_{yz}^l; & \tau_{yz} \left( \frac{1}{2\Delta y} + \frac{x}{\Delta x \Delta y} \right) &= f_{yz}^r. \quad (3.24)
 \end{aligned}$$

Интегрируя выражения, полученные после подстановки в (3.24) значений напряжений (3.11) с учетом коэффициентов аппроксимации, можно найти уравнения элементарной ячейки, которые для плоской задачи будут иметь вид [223]:

$$(f)_c = (k)_c(\delta)_c \quad (3.25)$$

или

$$\begin{Bmatrix} f_n \\ f_t \end{Bmatrix}_c = \begin{bmatrix} k_n & 0 \\ 0 & k_t \end{bmatrix}_c \begin{Bmatrix} \delta_n \\ \delta_t \end{Bmatrix}, \quad (3.26)$$

где  $(f)_n$ ,  $(\delta)_n$  и  $(k)_n$  – соответственно матрицы нормальных нагрузок, перемещений и жесткости:

$$\begin{Bmatrix} f_x^d \\ f_y^l \\ f_x^u \\ f_y^r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (a+a_1)ab(a-a_1)ab \\ ab(b+b_1)ab(b-b_1) \\ (a-a_1)ab(a+a_1)ab \\ ab(b-b_1)ab(b+b_1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_x^d \\ \delta_y^l \\ \delta_x^u \\ \delta_y^r \end{Bmatrix}, \quad (3.27)$$

а  $\{f\}_t$ ,  $\{\delta\}_t$  и  $\{k\}_t$  – аналогичные матрицы для касательных составляющих:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{yx}^d \\ f_{xy}^l \\ f_{yx}^u \\ f_{xy}^r \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{cc} (c + c_1)cd(c - c_1)cd & \\ cd(d + d_1)cd(d - d_1) & \\ (c - c_1)cd(c + c_1)cd & \\ cd(d - d_1)cd(d + d_1) & \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \delta_{yx}^d \\ \delta_{xy}^l \\ \delta_{yx}^u \\ \delta_{xy}^r \end{array} \right\}, \quad (3.28)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{где } a = 0,25(\lambda + 2\mu)\Delta y/\Delta x; \quad a_1 = [(\lambda + 2\mu)(k_a^2 + 1) + 2k_a\lambda]\Delta y/(12\Delta x); \\ b = 0,25(\lambda + 2\mu)\Delta x/\Delta y; \quad b_1 = [(\lambda + 2\mu)(k_a^2 + 1) + 2k_a\lambda]\Delta x/(12\Delta y); \\ ab = 0,25\lambda; \quad c = 0,25\mu\Delta y/\Delta x; \quad c_1 = \mu(1 + k_c)^2\Delta y/(12\Delta x); \\ d = 0,25\mu\Delta x/\Delta y; \quad d_1 = \mu(1 + k_c)^2\Delta x/(12\Delta y); \quad cd = 0,25\mu. \end{array} \right\} \quad (3.29)$$

Следует отметить, что ячейка, полученная аппроксимацией деформаций постоянными величинами, отличается от приведенной тем, что  $a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = 0$ .

Тело, расчлененное на отдельные элементы, и соответствующая ему совокупность элементарных ячеек описываются уравнением

$$(f) = [k]\{\delta\}, \quad (3.30)$$

где  $(f)$  и  $\{\delta\}$  – векторы внутренних сил и деформаций, представленные дугами графа;  $[k]$  – глобальная несвязная матрица жесткостей тела, расчлененного на отдельные элементы. В развернутом виде это уравнение можно представить так:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{1c} \\ f_{2c} \\ \dots \\ f_{nc} \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{ccc} k_{1c} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_{2c} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & k_{nc} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \delta_{1c} \\ \delta_{2c} \\ \dots \\ \delta_{nc} \end{array} \right\}, \quad (3.31)$$

где  $f_{ic}$ ,  $\delta_{ic}$ ,  $k_{ic}$ , ( $i = 1, n$ ) определяются по уравнениям (3.25);  $n$  – число ячеек, образующих граф тела.

Уравнения для анализируемого тела получаем путем преобразования обобщенных координат, описывающих разрезанное на элементы и цельное тело. Теория графов описывает возможность искусственного конструирования квадратных матриц преобразования, являющихся по отношению друг к другу взаимно-обратными.

### 3.3. Влияние конструктивных параметров на напряженно-деформированное состояние режущего элемента инструмента

#### 3.3.1. Расчет граничных условий контакта сменных многогранных пластин

Моделирование граничных условий режущих элементов производили с учетом базирования сменных многогранных пластин.

Используя методику п. 2.3 определяли точки контакта между СМП и пазом корпуса инструмента. В каждой точке под действием сил закрепления и сил резания возникают силы реакции. Затем из базовой системы координат путем последовательных переходов находили такую систему координат, в которой хотя бы одна ось была сонаправлена с силой реакции в базовой точке. В качестве примера рассмотрим расчет пятигранной пластины.

Выбранную систему координат поворачивали вокруг осей  $Z$  на угол  $\varphi$  и  $X_1$  на угол  $\gamma$  так, чтобы оси  $X_2Y_2$  новой системы координат располагались в плоскости, параллельной опорной грани (рис. 3.8).

Подставив уравнения связи между системами координат в исходную систему, получили:

$$\begin{cases} x = x_2 \cdot \cos(\varphi) + y_2 \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\gamma) - z_2 \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(\gamma), \\ y = -x_2 \cdot \sin(\varphi) + y_2 \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\gamma) - z_2 \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\gamma), \\ z = y_2 \cdot \sin(\gamma) + z_2 \cdot \cos(\gamma). \end{cases} \quad (3.32)$$

Используя уравнения (3.32), получили выражения для проекций сил реакции  $R_1R_2R_3$  на оси  $XYZ$ :

$$\begin{cases} R_{1x} = -R_1 \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(\gamma), \\ R_{1y} = -R_1 \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\gamma), \\ R_{1z} = R_1 \cdot \cos(\gamma). \end{cases} \quad (3.33)$$

Далее систему координат  $X_2Y_2Z_2$  поворачивали вокруг оси  $Z_2$  на угол  $\alpha$  и получили систему координат  $X_3Y_3Z_3$ , ось  $Y_3$  которой располагалась перпендикулярно грани, где находились точки 4 и 5 (рис. 3.8). Затем систему координат  $X_3Y_3Z_3$  поворачивали вокруг оси  $X_3$  так, чтобы оси новой системы координат располагались в плоскости параллельно опорным точкам.

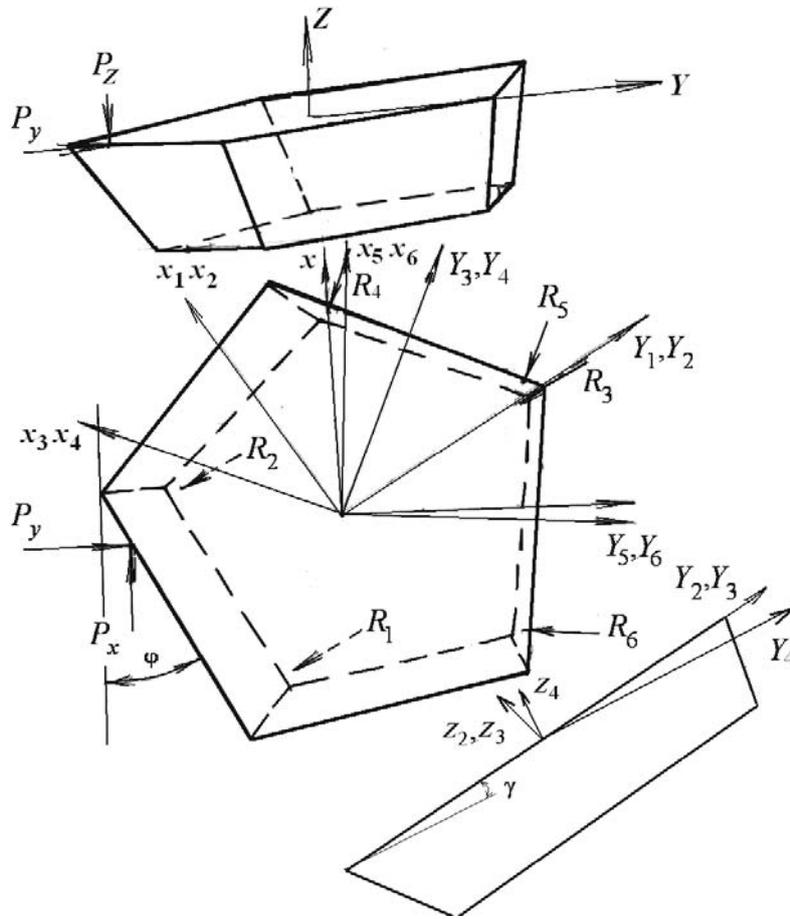


Рис. 3.8. Расчетная схема

Учитывая связи между системами координат, получили расчетные выражения для проекций сил реакции в точках 4 и 5:

$$\begin{cases} R_{4x} = R_{5x} = -R_4 \cdot [\cos(\alpha) \cdot (\cos(\varphi) \cdot \cos(\varepsilon/2) + \\ \quad + \sin(\varphi) \cdot \cos(\gamma) \cdot \sin(\varepsilon/2)) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(\gamma)], \\ R_{4y} = R_{5y} = -R_4 \cdot [\cos(\alpha) \cdot (-\sin(\varphi) \cdot \cos(\varepsilon/2) + \\ \quad + \cos(\varphi) \cdot \cos(\gamma) \cdot \sin(\varepsilon/2)) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\gamma) \cdot \cos(\varphi)], \\ R_{4z} = R_{5z} = -R_4 \cdot [\cos(\alpha) \cdot \sin(\gamma) \cdot \sin(\varepsilon/2) - \sin(\alpha) \cdot \cos(\gamma)]. \end{cases} \quad (3.34)$$

Систему координат  $X_3Y_3Z_3$  поворачивали вокруг оси  $Z_3$  так, чтобы ось  $Y_5$  новой системы координат проходила перпендикулярно грани, на которой располагалась точка 6.

Затем поворачивали систему координат  $X_5Y_5Z_5$  вокруг оси  $X_5$  так, чтобы ось  $Y_6$  новой системы координат располагались параллельно силе реакции  $R_6$  опорной грани. Учитывая связи между системами ко-

ординат, получили расчетные выражения для проекций силы реакции в точке б:

$$\begin{cases} R_{6x} = -R_6 \cdot [\cos(\alpha) \cdot (A + B) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(\gamma)], \\ R_{6y} = -R_6 \cdot [\cos(\alpha) \cdot (A_1 + B_1) + \sin(\alpha) \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\gamma)], \\ R_{6z} = -R_6 \cdot [\sin(\alpha) \cdot (\sin(\varepsilon) \times \sin(\gamma) \cdot \cos(\varepsilon/2) - \cos(\varepsilon) \cdot \sin(\gamma) \cdot \sin(\varepsilon/2)) - \\ \quad - \sin(\alpha) \cdot \cos(\gamma)], \end{cases} \quad (3.35)$$

где  $A = -\sin(\varepsilon) \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\varepsilon/2) - \sin(\varphi) \cdot \cos(\gamma) \cdot \cos(\varepsilon/2)$ ,  
 $B = -\cos(\varepsilon) \cdot (\cos(\varphi) \cdot \cos(\varepsilon/2) + \sin(\varphi) \times \cos(\gamma) \cdot \sin(\varepsilon/2))$ ,  
 $A_1 = -\sin(\varepsilon) \cdot (-\sin(\varphi) \cdot \sin(\varepsilon/2) - \cos(\varphi) \cdot \cos(\gamma) \cdot \cos(\varepsilon/2))$ ,  
 $B_1 = -\cos(\varepsilon) \cdot (-\sin(\varphi) \cdot \cos(\varepsilon/2) + \cos(\varphi) \cdot \cos(\gamma) \cdot \sin(\varepsilon/2))$ .

Координаты точек 1, 2, 3, ..., 6 приложения сил реакции (рис. 3.9, 3.10) определяли, используя методику систем координат.

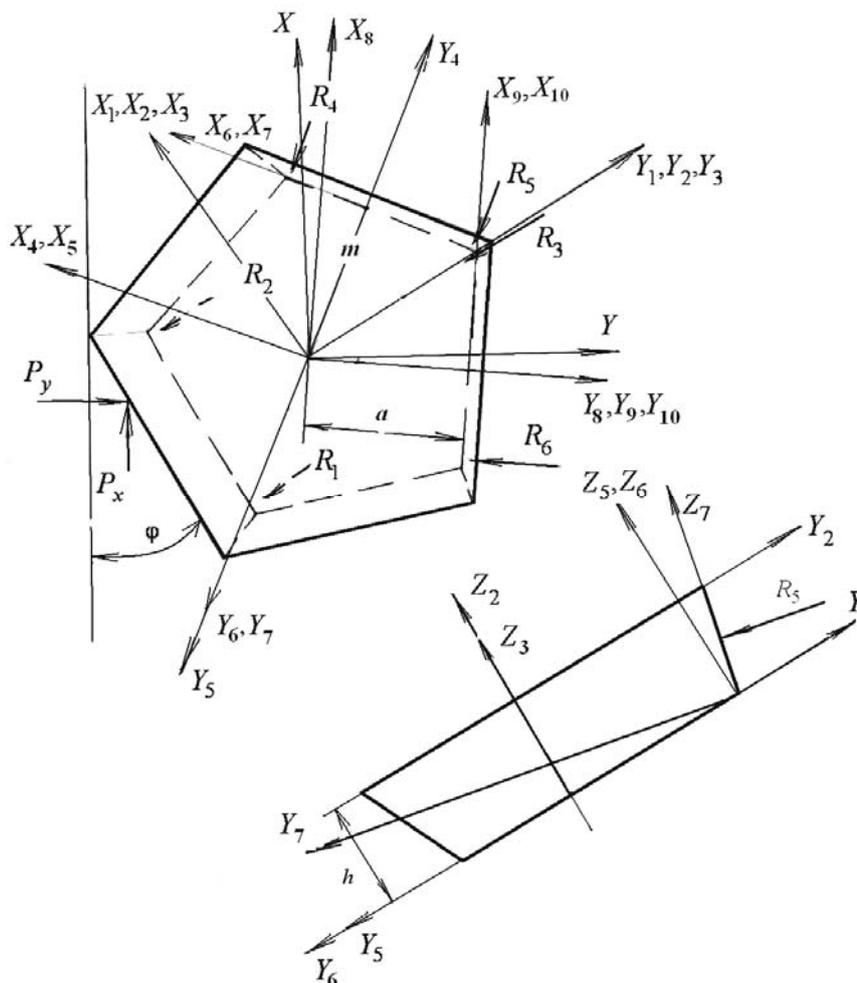


Рис. 3.9. Схема к определению координат точек контакта опорной грани

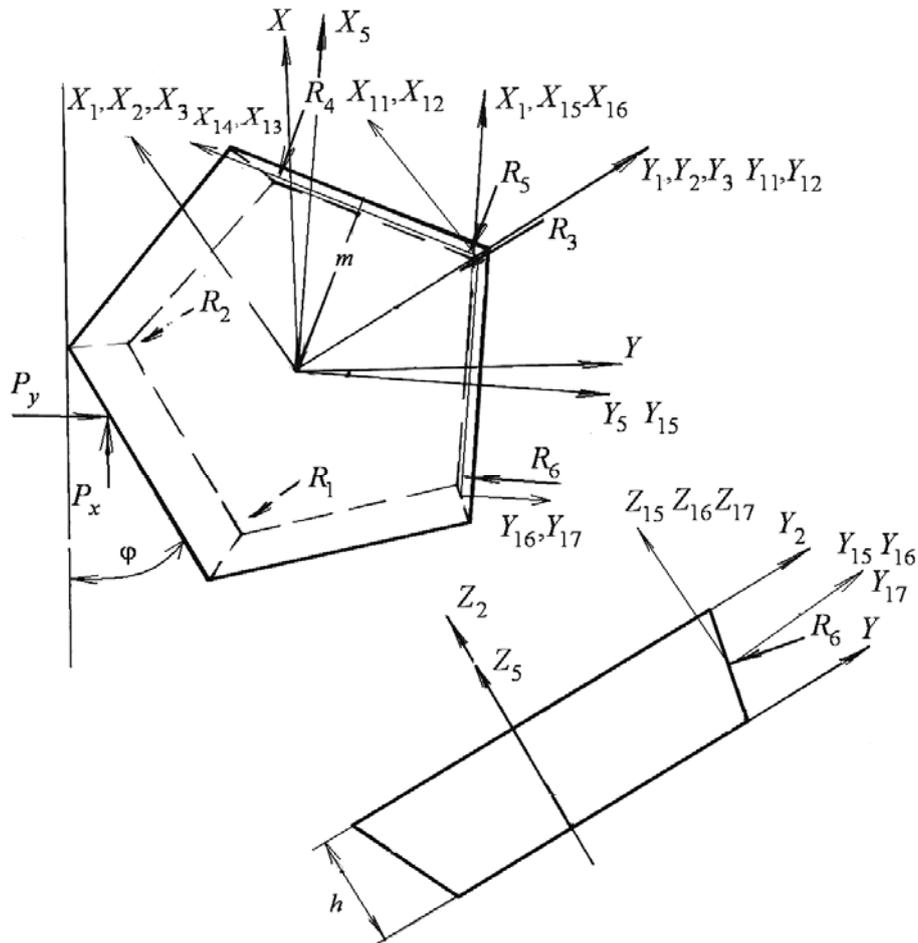


Рис. 3.10. Схема к определению координат точек контакта боковых граней

Систему координат  $XYZ$  перемещали по оси  $Y$  на нижнюю грань пластины на величину « $a$ », где располагались точки 1, 2 и 3. Новую систему координат обозначили через  $X_6Y_6Z_6$ .

После несложных преобразований окончательно получили уравнения пересчета координат из системы  $X_6Y_6Z_6$  в систему  $XYZ$ :

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_{6.1} \cdot A + y_{6.1} \cdot B + z_{6.1} \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(\gamma) - a \cdot C + \\ &+ h \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(\gamma), \\ y_1 &= x_{6.1} \cdot A_1 + y_{6.1} \cdot B_1 + z_{6.1} \cdot \sin(\gamma) \cdot \cos(\varphi) - a \cdot C_1 + \\ &+ h \cdot \sin(\gamma) \cdot \cos(\varphi), \\ z_1 &= x_{6.1} \cdot (-\sin(\gamma) \cdot \cos(\varepsilon/2)) - y_{6.1} \cdot \sin(\gamma) \cdot \sin(\varepsilon/2) - \\ &- z_{6.1} \cdot \cos(\gamma) + a \cdot \sin(\gamma) \cdot \sin(\varepsilon/2) - h \cdot \cos(\gamma), \end{aligned} \right\} \quad (3.36)$$

где  $A = \cos(\varphi) \cdot \sin(\varepsilon/2) - \sin(\varphi) \cdot \cos(\gamma) \cdot \cos(\varepsilon/2)$ ,  
 $B = -\cos(\varphi) \cdot \cos(\varepsilon/2) - \sin(\varphi) \cdot \cos(\gamma) \cdot \sin(\varepsilon/2)$ ,  
 $C = -\cos(\varphi) \cdot \cos(\varepsilon/2) - \sin(\varphi) \cdot \cos(\gamma) \cdot \sin(\varepsilon/2)$ ,  
 $A_1 = -\sin(\varphi) \cdot \sin(\varepsilon/2) - \cos(\varphi) \cdot \cos(\gamma) \cdot \cos(\varepsilon/2)$ ,  
 $B_1 = \sin(\varphi) \cdot \cos(\varepsilon/2) - \cos(\varphi) \cdot \cos(\gamma) \cdot \sin(\varepsilon/2)$ ,  
 $C_1 = \sin(\varphi) \cdot \cos(\varepsilon/2) - \cos(\varphi) \cdot \cos(\gamma) \cdot \sin(\varepsilon/2)$ .

Уравнения (3.36) позволяют рассчитать координаты точек 2 и 3. Если базовые точки 4 и 5 определены в системе  $X_7Y_7Z_7$ , то уравнения пересчета их координат примут вид:

$$\left. \begin{aligned}
 X_4 &= X_{7,4}(\cos \varphi \sin \varepsilon/2 - \sin \varphi \cos \gamma \cos \varepsilon/2) + \\
 &\quad + Z_{7,4}(-\sin \alpha_n(-\cos \varphi \cos \varepsilon/2 - \sin \varphi \cos \gamma \sin \varepsilon/2) - \\
 &\quad - \cos \alpha_n \sin \varphi \sin \gamma) - \cos \varphi m \cos \varepsilon/2 + \\
 &\quad + \sin \varphi(-\cos \gamma m \sin \varepsilon/2 + \sin \gamma h), \\
 Y_4 &= X_{7,4}(-\sin \varphi \sin \varepsilon/2 - \cos \varphi \cos \gamma \cos \varepsilon/2) + \\
 &\quad + Z_{7,4}(-\sin \alpha_n(\sin \varphi \cos \varepsilon/2 - \cos \varphi \cos \gamma \sin \varepsilon/2) - \\
 &\quad - \cos \alpha_n \cos \varphi \sin \gamma) + \sin \varphi m \cos \varepsilon/2 + \\
 &\quad + \cos \varphi(-\cos \gamma m \sin \varepsilon/2 + \sin \gamma h), \\
 Z_4 &= -X_{7,4} \sin \gamma \cos \varepsilon/2 + \\
 &\quad + Z_{7,4}(-\sin \alpha_n(\sin \varphi \cos \varepsilon/2 - \cos \varphi \cos \gamma \sin \varepsilon/2) - \\
 &\quad - \cos \alpha_n \cos \varphi \sin \lambda) + \sin \varphi m \cos \varepsilon/2 + \\
 &\quad + \cos \varphi(-\cos \gamma m \sin \varepsilon/2 + \sin \gamma h).
 \end{aligned} \right\} (3.37)$$

Для базовой точки 6, определенной в системе  $X_{10}Y_{10}Z_{10}$ , уравнения пересчета их координат примут вид:

$$\left\{ \begin{aligned}
 X_6 &= X_{10.6}(\cos \varphi(-\sin \varepsilon / 2 \cos \varepsilon + \cos \varepsilon / 2 \sin \varepsilon) + \\
 &\quad + \sin \varphi \cos \gamma(-\cos \varepsilon / 2 \cos \varepsilon + \sin \varepsilon / 2 \sin \varepsilon)) + \\
 &\quad + Z_{10.6}(\cos \varphi(-\sin \varepsilon / 2 \sin \varepsilon \sin \alpha_n - \cos \varepsilon / 2 \cos \varepsilon \sin \alpha_n) + \\
 &\quad + \sin \varphi(\cos \gamma(\cos \varepsilon / 2 \sin \varepsilon \sin \alpha_n - \sin \varepsilon / 2 \cos \varepsilon \sin \alpha_n) - \\
 &\quad - \sin \gamma \cos \alpha_n + \cos \varphi(-\sin \varepsilon / 2 \sin \varepsilon a + \cos \varepsilon / 2 \cos \varepsilon a) + \\
 &\quad + \sin \varphi(\cos \gamma(\cos \varepsilon / 2 \sin \varepsilon a + \sin \varepsilon / 2 \cos \varepsilon a) + \sin \gamma h, \\
 Y_6 &= X_{10.6}(-\sin \varphi(-\sin \varepsilon / 2 \cos \varepsilon + \cos \varepsilon / 2 \sin \varepsilon) + \\
 &\quad + \cos \varphi \cos \gamma(-\cos \varepsilon / 2 \cos \varepsilon + \sin \varepsilon / 2 \sin \varepsilon)) + \\
 &\quad + Z_{10.6}(-\sin \varphi(-\sin \varepsilon / 2 \sin \varepsilon \sin \alpha_n - \cos \varepsilon / 2 \cos \varepsilon \sin \alpha_n) + \\
 &\quad + \cos \varphi(\cos \gamma(\cos \varepsilon / 2 \sin \varepsilon \sin \alpha_n - \sin \varepsilon / 2 \cos \varepsilon \sin \alpha_n) - \\
 &\quad - \sin \gamma \cos \alpha_n - \sin \varphi(-\sin \varepsilon / 2 \sin \varepsilon a + \cos \varepsilon / 2 \cos \varepsilon a) + \\
 &\quad + \cos \varphi(\cos \gamma(\cos \varepsilon / 2 \sin \varepsilon a + \sin \varepsilon / 2 \cos \varepsilon a) + \sin \gamma h, \\
 Z_6 &= X_{10.6}(\sin \gamma(-\cos \varepsilon / 2 \cos \varepsilon + \sin \varepsilon / 2 \sin \varepsilon)) + \\
 &\quad + Z_{10.6}(\sin \gamma(\cos \varepsilon / 2 \sin \varepsilon \sin \alpha_n - \sin \varepsilon / 2 \cos \varepsilon \sin \alpha_n) + \\
 &\quad + \cos \gamma \cos \alpha_n) + \sin \gamma(\cos \varepsilon / 2 \sin \varepsilon a + \sin \varepsilon / 2 \cos \varepsilon a) - h \sin \gamma.
 \end{aligned} \right. \quad (3.38)$$

Найденные значения проекций сил реакций и координат опорных точек подставляли в систему уравнений равновесия СМП:

$$\left\{ \begin{aligned}
 \sum_{i=1}^6 R_{ix} + \sum_{j=1}^m R_{jx} &= 0, \\
 \sum_{i=1}^6 R_{iy} + \sum_{j=1}^m R_{jy} &= 0, \\
 \sum_{i=1}^6 R_{iz} + \sum_{j=1}^m R_{jz} &= 0,
 \end{aligned} \right. \quad (3.39)$$

$$\left\{ \begin{aligned}
 \sum_{i=1}^6 (R_{iz} y_i - R_{iy} z_i) + \sum_{j=1}^m (P_{jz} y_j - P_{jy} z_j) &= 0, \\
 \sum_{i=1}^6 (R_{ix} z_i - R_{iz} x_i) + \sum_{j=1}^m (P_{jx} z_j - P_{jz} x_j) &= 0, \\
 \sum_{i=1}^6 (R_{iy} x_i - R_{ix} y_i) + \sum_{j=1}^m (P_{jy} x_j - P_{jx} y_j) &= 0.
 \end{aligned} \right. \quad (3.40)$$

С помощью метода Гаусса решали матрицу и находили значения  $R_1, R_2, \dots, R_6$ .

Для определения упругих перемещений ( $\Delta x$ ) опорных точек СМП под действием силовых факторов использовали зависимость:

$$R_{ik} = C_{ij} \Delta x_{ik}; \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.41)$$

где  $C_{ij}$  – коэффициент жесткости  $k$ -й опорной точки.

Прикладывая начальное значение сил резания определяли перемещения в зонах контакта режущих элементов и рассчитывали точки контакта. Путем последовательного увеличения нагрузки находили новые точки контакта. Решения заканчивались при условии, что действующая нагрузка последовательно увеличиваясь, достигала требуемых значений.

### 3.3.2. Влияние размеров и передних углов на НДС закрепленного зуба

Как известно, зубья механизированных инструментов могут обрабатывать открытые, полужакрытые и закрытые поверхности [61]. Наибольшие нагрузки будут испытывать зубья инструмента, обрабатывающие торцовые канавки [176]. Для расчетов рабочую часть осесимметричного инструмента разделяли на ячейки в соответствии с графовой моделью (рис. 3.11).

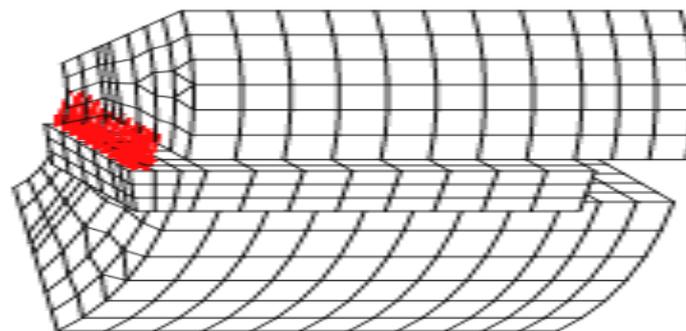


Рис. 3.11. Расчетная схема

В качестве материала корпуса инструмента выбрана сталь 40Х, а режущая пластина выполнена из твердого сплава Т15К6. Нагрузка на зубья по длине режущей кромки прикладывалась равномерно-распределенной.

В качестве переменных параметров приняли толщину пластины ( $b$ , мм), вылет зуба из корпуса ( $h$ , мм), передний  $\gamma$  и задний  $\alpha$  углы.

В результате расчетов были построены графики распределения внутренних эквивалентных напряжений по передней и задней поверхностям. При построении графиков, отражающих напряжения на передней поверхности, начало координат помещали в вершине режущей кромки, ось  $x$  направляли от центра вдоль режущей кромки, а ось  $y$  – в направлении оси инструмента. При построении графиков, отражающих распределение напряжений по задней поверхности, ось  $y$  направляли вдоль задней поверхности.

Как видно на рис. 3.12, *а* и 3.12, *б*, при увеличении толщины зуба  $b$  в 1,5 раза значения максимальных напряжений уменьшаются в 1,2 раза. При толщине зуба  $b = 8$  мм в точках, расположенных вдоль режущей кромки, на расстоянии 1,4 мм в направлении оси инструмента, график напряжений имеет выпуклую форму с вершиной в точке, находящейся на расстоянии 0,7 мм по оси  $x$  (рис. 3.12, *а*). При толщине  $b = 12$  мм в аналогичных точках напряжения уменьшаются в 1,45 раза и график имеет зону уплощения, а в точках, расположенных на расстоянии 2,8 мм в направлении оси инструмента, вид графика изменяется на криволинейный (рис. 3.12, *б*). В точках, расположенных на расстоянии 6,8 мм в направлении оси инструмента и вдоль режущей кромки уровень напряжений падает в 1,17 раза, и вид графика не изменяется (рис. 3.12, *а*, *б*).

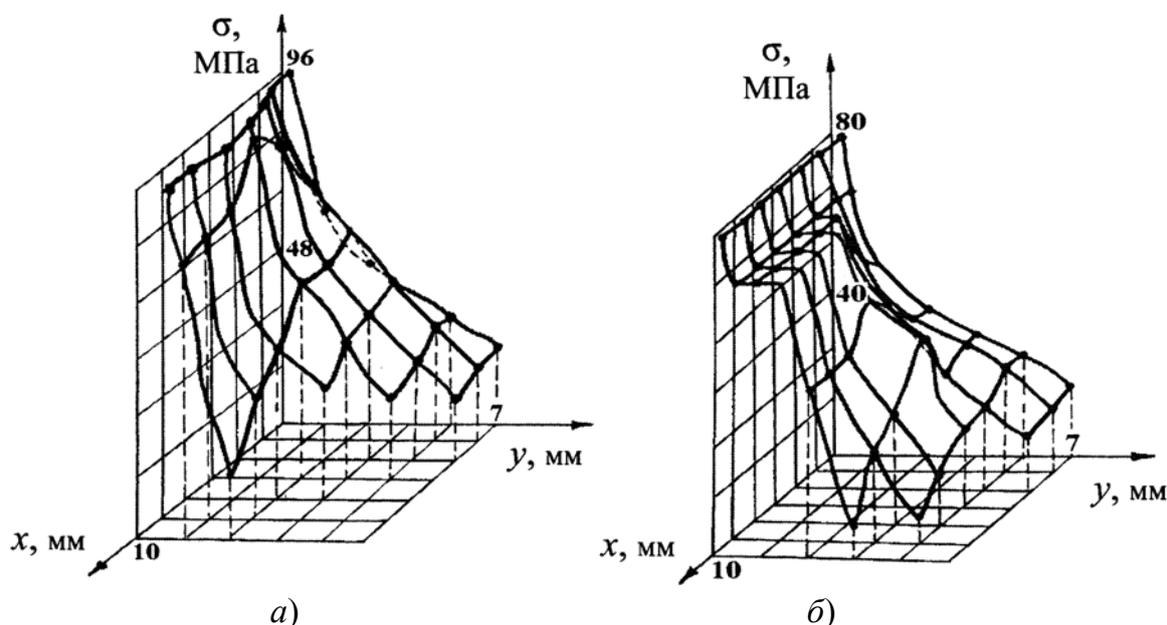


Рис. 3.12. Распределение эквивалентных напряжений по передней поверхности при толщине зуба:  $b = 8$  мм (*а*),  $b = 12$  мм (*б*)

Увеличение толщины зуба в 1,5 раза приводит к уменьшению значений максимальных напряжений по задней поверхности в 1,2 раза, а в точках, расположенных на расстоянии 4,5 мм вдоль задней поверхности и вдоль режущей кромки, уровень напряжений падает в 1,17 раза, но вид графиков не изменяется (рис. 3.13, а, б).

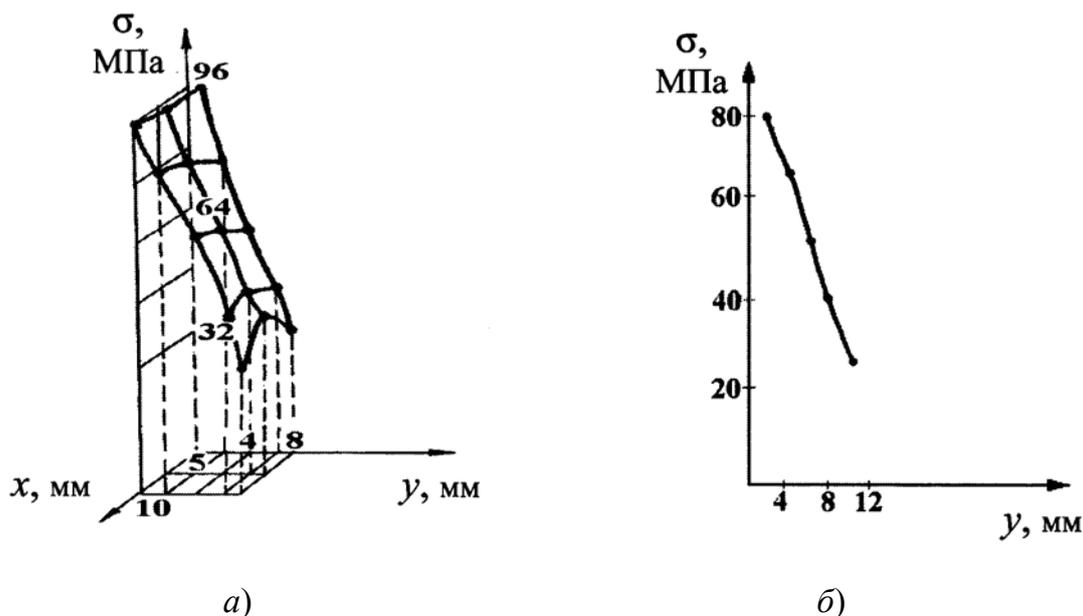


Рис. 3.13. Распределение эквивалентных напряжений по задней поверхности при толщине зуба:  $b = 12$  мм (а),  $b = 8$  мм (б)

С увеличением вылета зуба из корпуса  $h$  в 1,2 раза при удельной нагрузке  $P = 60,7$  МПа значения максимальных напряжений увеличиваются в 1,35 раза (рис. 3.12, б и 3.14, а). При величине вылета зуба из корпуса  $h = 6$  мм, в точках расположенных на расстоянии 3 мм от вершины в направлении оси инструмента и вдоль режущей кромки, кривая распределения эквивалентных напряжений изменяется плавно (рис. 3.14, а), а при значении вылета зуба из корпуса  $h = 7$  мм уровень напряжений в точках с аналогичными координатами увеличивается в 1,3 раза, и кривая имеет выпуклую форму (рис. 3.12, б). В точках, расположенных вдоль режущей кромки, на расстоянии 6 мм по оси  $y$ , форма графиков не изменяется, а уровень напряжений увеличивается в 1,9 раза (рис. 3.12, б и 3.14, а). Значения максимальных напряжений по задней поверхности увеличиваются в 1,35 раза. В точках, расположенных на расстоянии 6 мм от вершины вдоль задней поверхности и вдоль режущей кромки, значения напряжения возрастают в 1,3 раза, а форма кривых не изменяется (рис. 3.13, б и рис. 3.14, б).

Как видно на рис. 3.15, *a*, *б*, при увеличении переднего угла  $\gamma$  в 1,5 раза, максимальные напряжения увеличиваются в 1,04 раза. В точках, расположенных на расстоянии 1,6 мм от вершины в направлении оси инструмента и вдоль режущей кромки, уровень напряжений увеличивается в 1,03 раза, а вид графиков не изменяется.

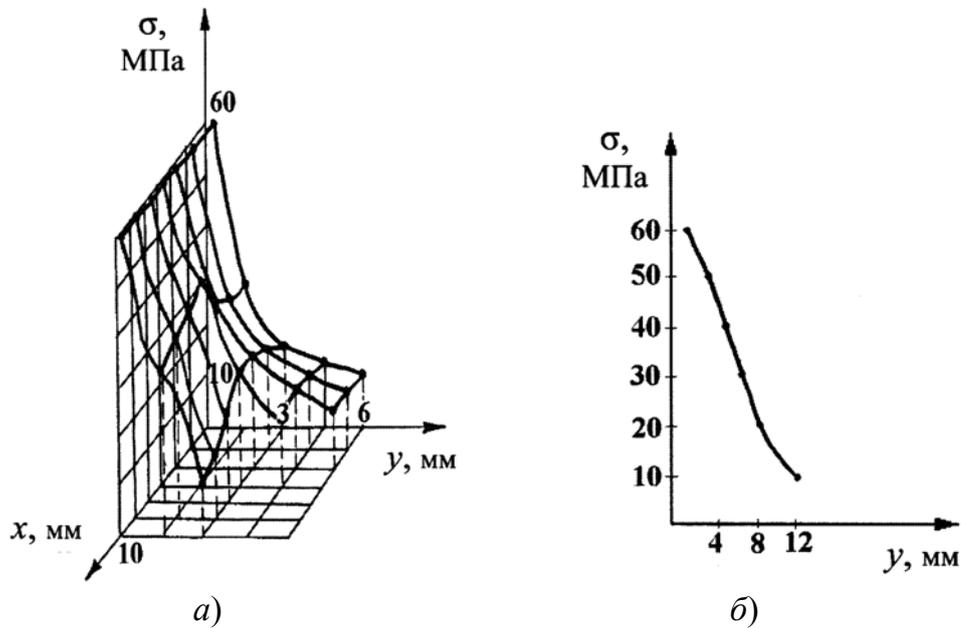


Рис. 3.14. Распределение эквивалентных напряжений по передней поверхности (*a*); по задней поверхности (*б*) при вылете зуба из корпуса  $h = 6$  мм

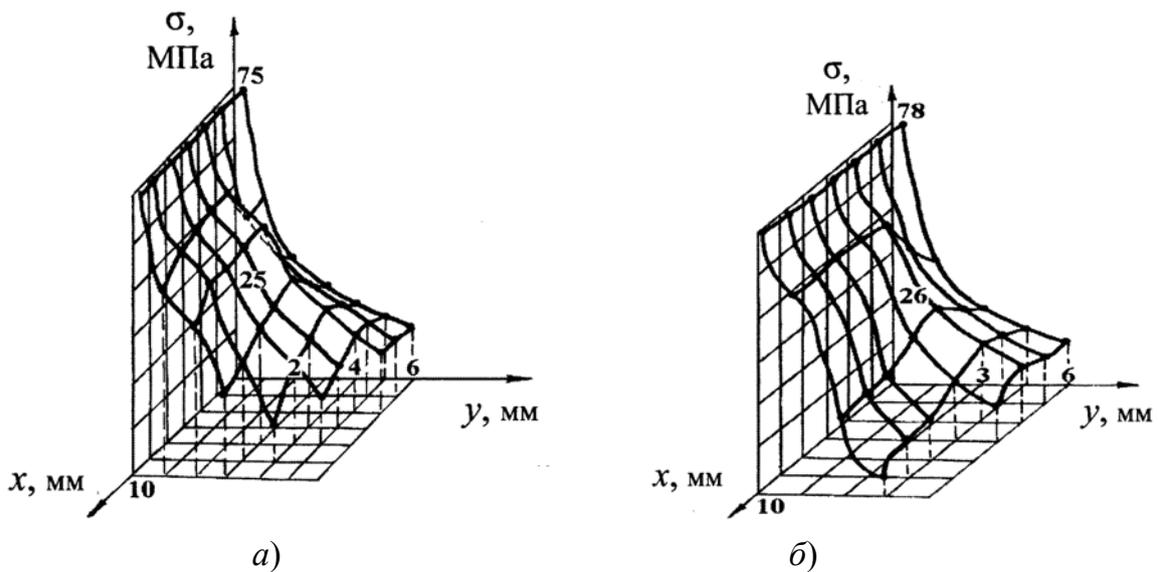


Рис. 3.15. Распределение эквивалентных напряжений по передней поверхности при значении переднего угла:  $\gamma = 10^\circ$  (*a*);  $\gamma = 15^\circ$  (*б*)

Уровень же максимальных напряжений по задней поверхности увеличивается в 1,04 раза, а вид кривых не изменяется по всей длине режущей кромки (рис. 3.16, *a*, *б*).

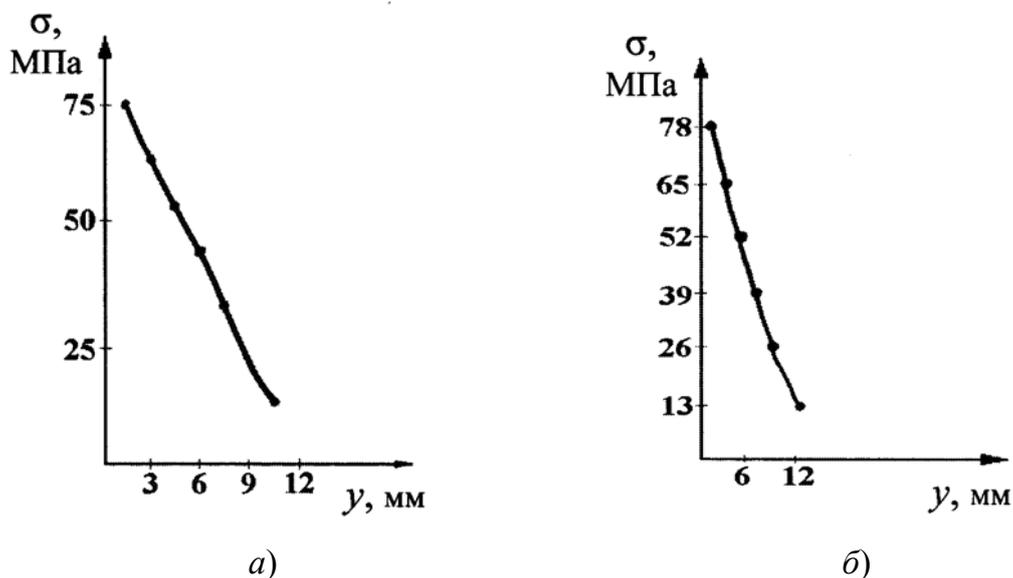


Рис 3.16. Распределение эквивалентных напряжений по задней поверхности при значении переднего угла:  $\gamma = 10^\circ$  (*a*);  $\gamma = 15^\circ$  (*б*)

Как видно на рис. 3.14, *a* и рис. 3.15, *б*, при увеличении заднего угла  $\alpha$  в 1,4 раза уровень максимальных напряжений увеличивается в 1,3 раза. В точках, расположенных на расстоянии 2 мм от вершины в направлении оси инструмента и вдоль режущей кромки уровень напряжений растет в 1,2 раза, а вид графиков не изменяется.

При этом напряжения в каждой точке вдоль режущей кромки по задней поверхности увеличиваются в 1,4 раза (рис. 3.12, *a* ( $\alpha = 15^\circ$ ) и рис. 3.15, *б* ( $\alpha = 11^\circ$ )).

При увеличении нагрузки в 1,7 раза значения максимальных напряжений возрастают в 1,25 раза (рис. 3.17, *a*, *б*). Как видно на рис. 3.17, *б* в точках, расположенных вдоль режущей кромки, на расстоянии 2 мм вдоль оси инструмента, кривая распределения эквивалентных напряжений имеет выпуклую форму. При величине нагрузки 60,7 МПа в точках с аналогичными координатами график имеет плавную выпукло-вогнутую форму. В точках, расположенных на расстоянии 6 мм в направлении оси инструмента и вдоль режущей кромки, уровень напряжений увеличивается в 1,9 раза, и вид графиков их не изменяется (рис. 3.17, *a*, *б*).

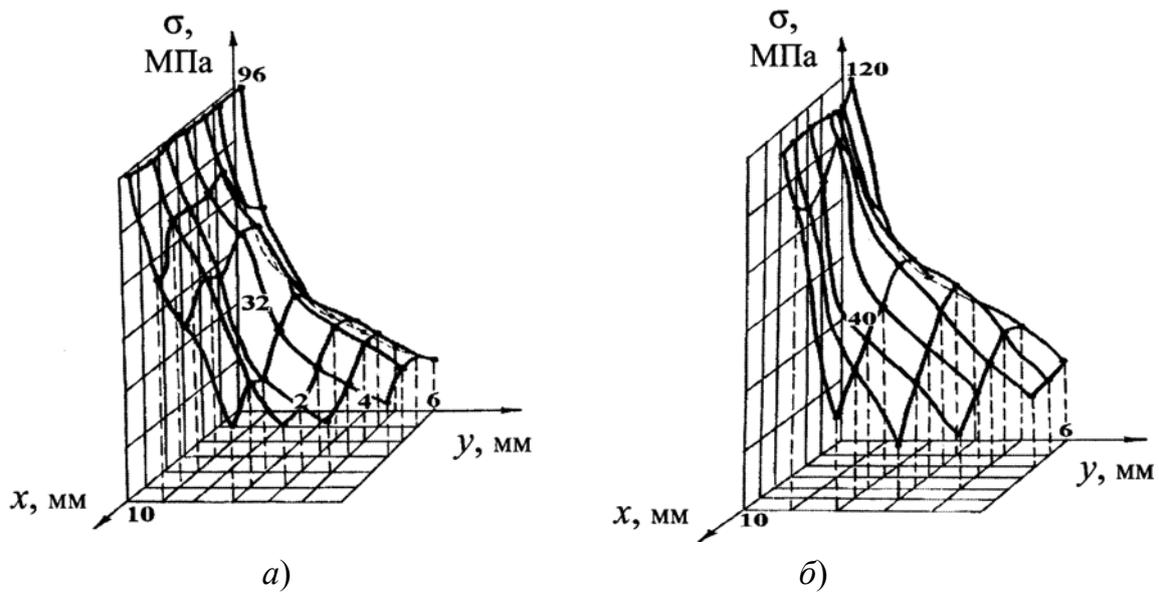


Рис. 3.17. Распределение эквивалентных напряжений по передней поверхности при удельной нагрузке:  $P = 60,7$  МПа (а);  $P = 101,3$  МПа (б)

С увеличением нагрузки в 1,7 раза уровень максимальных напряжений по задней поверхности возрастает в 1,25 раза. В точках, находящихся на расстоянии 4 мм от вершины вдоль задней поверхности и вдоль режущей кромки, значения напряжений возрастают в 1,3 раза, и их характер не изменяется (рис. 3.18, а, б).

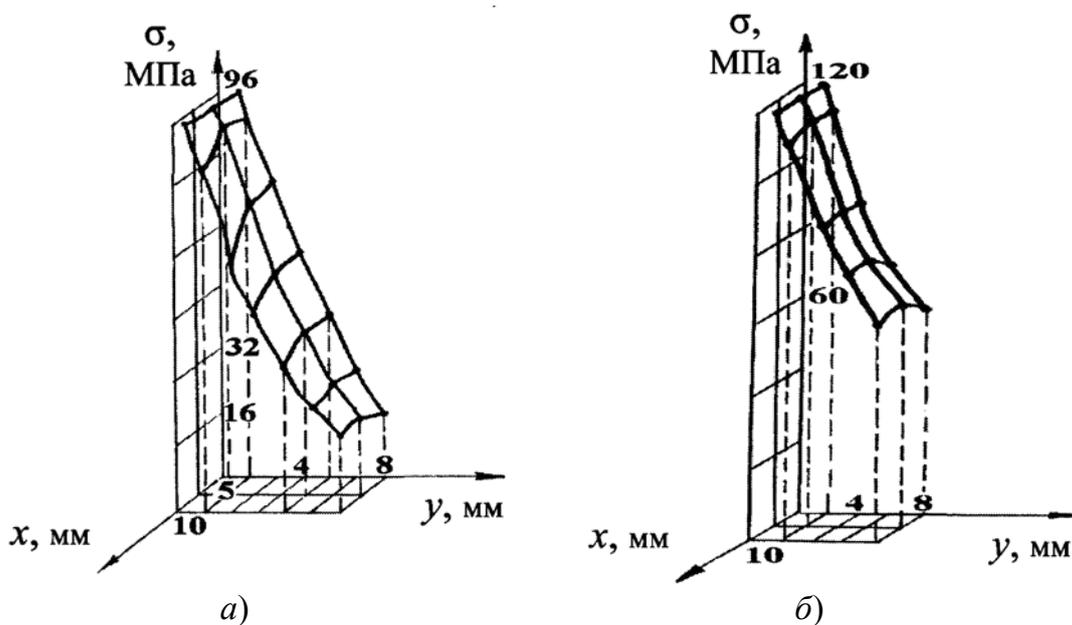


Рис. 3.18. Распределение эквивалентных напряжений по задней поверхности при нагрузке:  $P = 60,7$  МПа (а);  $P = 101,3$  МПа (б)

При увеличении вылета зуба из корпуса  $h$  в 1,2 раза с нагрузкой  $P = 101,3$  МПа уровень максимальных напряжений увеличивается в 1,2 раза (рис. 3.19, *a*, *б*). При величине вылета зуба из корпуса  $h = 6$  мм в точках, расположенных на расстоянии 1,5 мм от вершины в направлении оси инструмента и вдоль режущей кромки, график распределения эквивалентных напряжений имеет выпукло-вогнутую форму (рис. 3.19, *a*), а при значении вылета зуба  $h = 7$  мм кривая в аналогичных точках имеет более плавный вид, что связано с перераспределением напряжений, а значения напряжений увеличиваются в 1,18 раза (рис. 3.19, *б*).

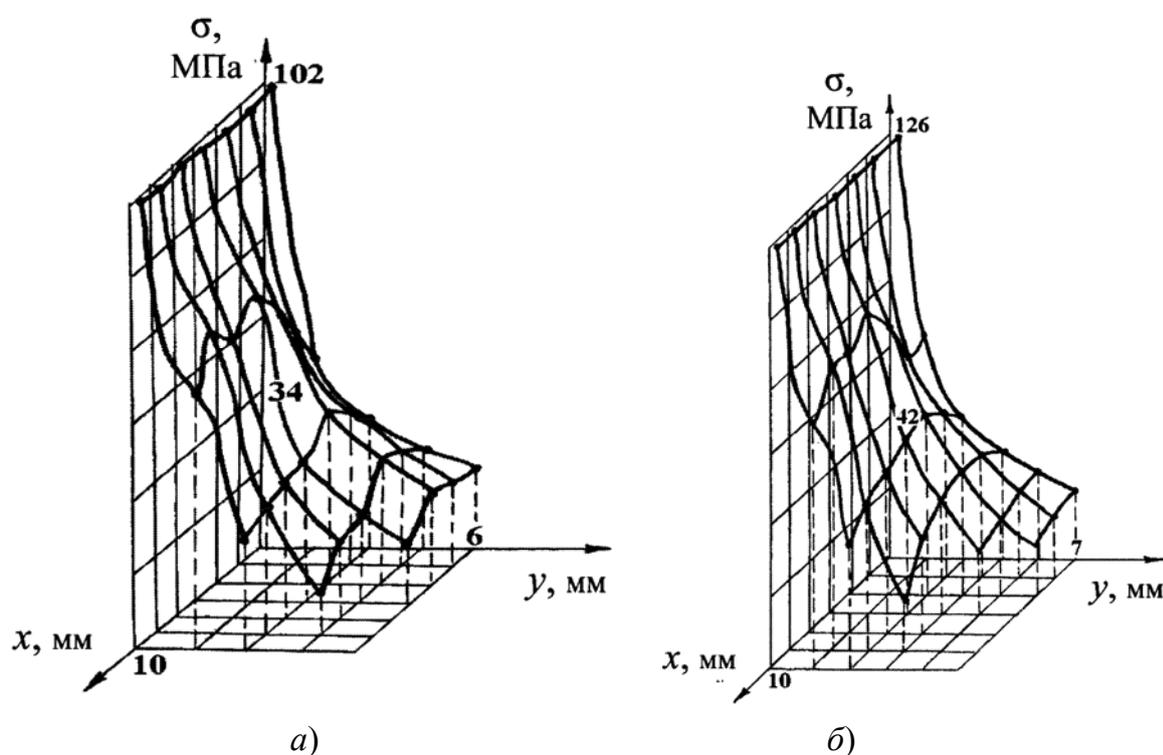


Рис. 3.19. Распределение эквивалентных напряжений по передней поверхности при вылете зуба:  $h = 6$  мм (*a*);  $h = 7$  мм (*б*)

При этом по задней поверхности уровень максимальных напряжений увеличивается в 1,2 раза и вид кривых не изменяется по всей длине режущей кромки (рис. 3.20, *a*, *б*).

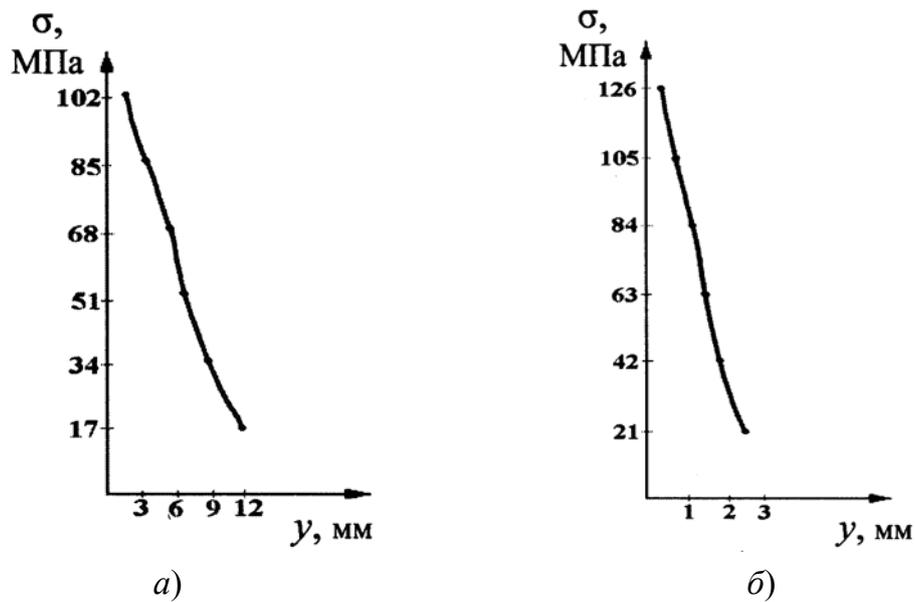


Рис. 3.20. Распределение эквивалентных напряжений по задней поверхности при вылете зуба:  
 $h = 6$  мм (а);  $h = 7$  мм (б)

### 3.3.3. Влияние формы и размеров на НДС свободной части зуба

Как известно, наиболее распространенными формами зубьев являются прямоугольные и круглые в сечении, обладающие достаточной технологичностью.

На рис. 3.21 изображены расчетные схемы зубьев. Нагрузка на зубья, в пределах зоны контакта передней поверхности со стружкой и задней поверхности с заготовкой, прикладывалась равномерно-распределенной  $p_z = 240$  МПа и  $p_{xy} = 270$  МПа, т. к. исследовались распределения напряжений за зоной контакта и можно было воспользоваться принципом Сен-Венана. Такая нагрузка возникает при обработке черных металлов.

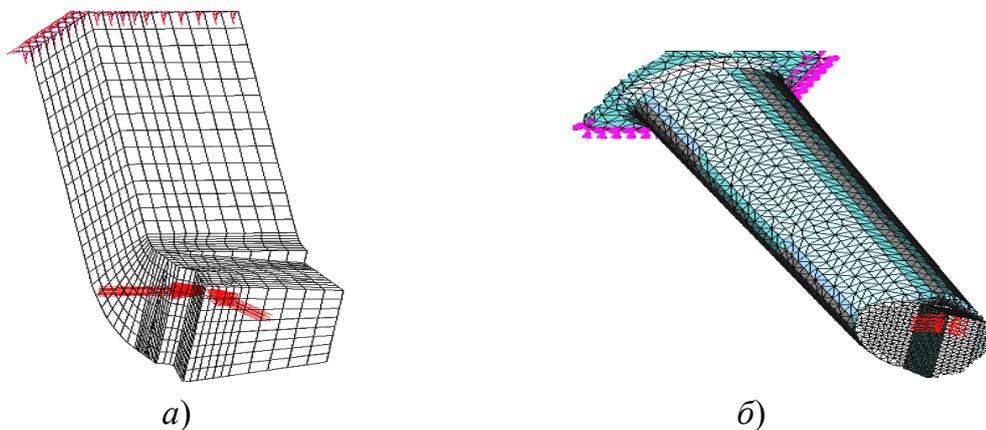


Рис. 3.21. Расчетные схемы зуба инструмента

На рис. 3.22 изображены поля эквивалентных напряжений в опасной зоне режущих пластин. Максимальные напряжения возникли в вершине пластины и составляли  $\sigma_{\max} = 471$  МПа [224].

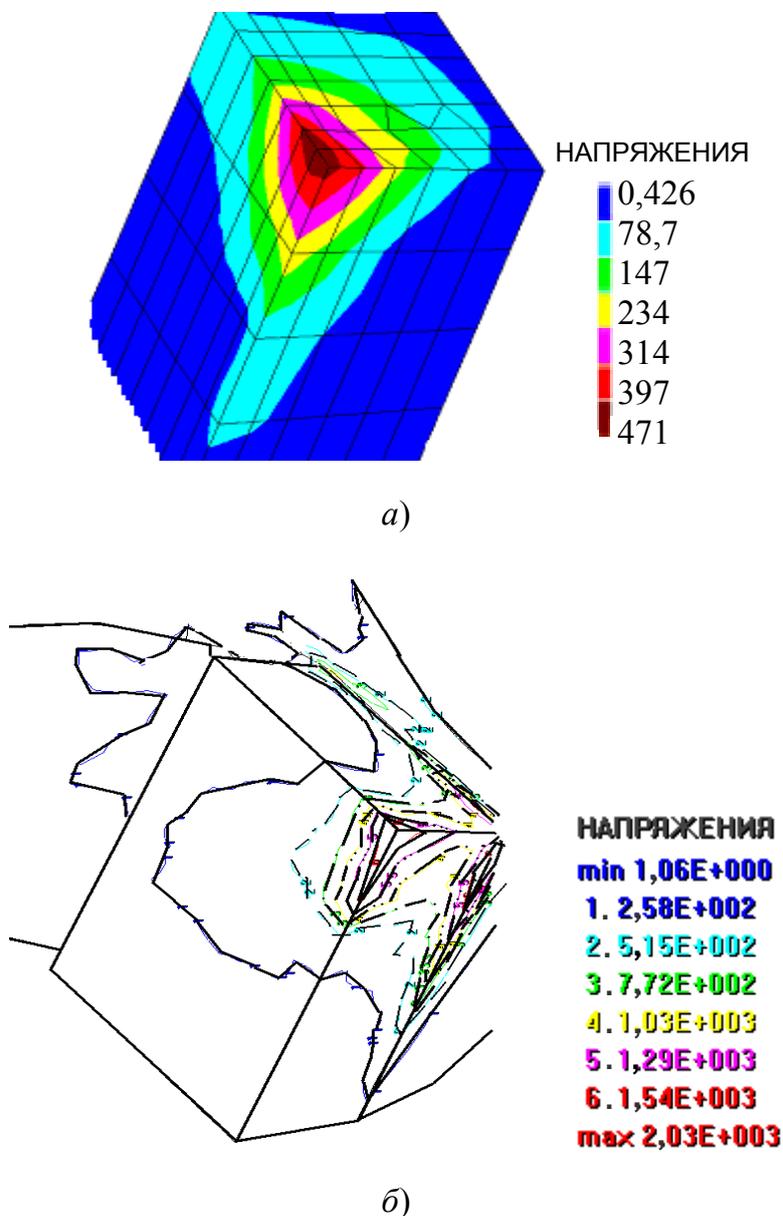


Рис. 3.22. Схемы распределения эквивалентных напряжений в режущей пластине

Максимальные напряжения в зубе в зоне заделки составили  $\sigma_{\max} = 73,8$  МПа (рис. 3.23).

Увеличение вылета зуба в 1,71 раза приводит к росту эквивалентных напряжений в 1,88 раза.

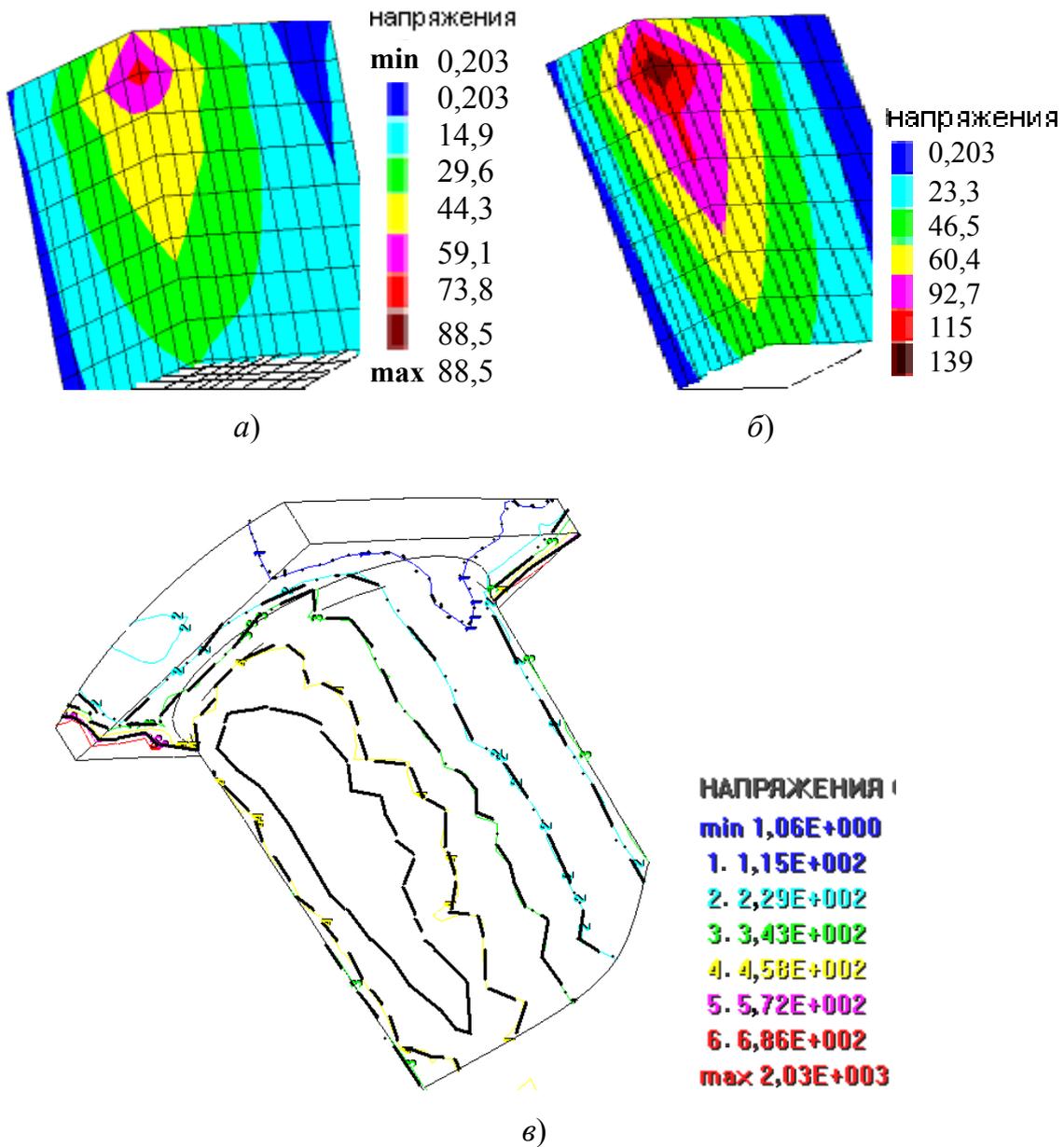


Рис. 3.23. Схема распределения напряжений в зубе инструмента

### 3.3.4. Влияние композиционного покрытия на прочность режущего элемента

Одним из распространенных методов оценки прочности инструмента, предложенной РНИИ и использованной Г. Л. Хаеом [121], является его испытание с возрастающей подачей. Подача  $S_p$ , при которой происходит разрушение инструмента, называется разрушающей, ломающей или предельной и служит показателем прочности.

Прочность инструмента рекомендуется также оценивать путем определения стойкости при увеличенной подаче; подача должна быть такой, чтобы разрушение инструмента наступило раньше, чем износ достигнет принятой величины.

Разрушающую подачу определяли по формуле

$$S_p = C_p T_p^{-m_p}, \quad (3.42)$$

где  $C_p$  – коэффициент, характеризующий среднюю прочность инструмента и зависящий от обрабатываемого материала и условий работы;

$m_p$  – величина, характеризующая степень влияния  $T_p$  на  $S_p$ .

При лабораторных форсированных испытаниях роль случайных факторов резко уменьшается как в связи с более жесткими требованиями к оборудованию, обрабатываемому материалу и другим условиям испытаний, так и с меньшим временем работы инструмента. Перегрузка задается заранее, причем степень ее зависит от метода и режима испытаний.

Форсирование подачи увеличивает не только механическую, но и тепловую нагрузку на инструмент. Температура в опасном сечении и в опорной зоне при случайных пиковых механических нагрузках не успевает значительно повыситься и влиять на прочность инструмента в эксперименте. Однако при длительных испытаниях такое влияние оказывается значительным. Для снижения влияния температуры на прочность инструмента применяли регулировку длительности циклов по времени.

При испытании инструмента в процессе резания на прочность использовали способы учета повреждений при циклическом нагружении. Условие суммирования относительных повреждений имеет вид:

$$\sum_{j=1}^{Z_{ст}} \frac{N_j}{N_{pj}} = a_n, \quad (3.43)$$

где  $N_j$  – число циклов, воспринятых на  $j$ -й ступени нагружения;

$N_{pj}$  – число циклов, необходимых для разрушения на этой ступени нагружения;

$Z_{ст}$  – число ступеней нагружений;

$a_n$  – мера накопленных повреждений.

Если считать, что частота колебаний силы резания с течением времени постоянна, то число циклов в уравнении (3.43) можно заменить временем работы. При этих допущениях исходное уравнение в случае испытаний с возрастающей подачей будет иметь вид:

$$\sum_{j=1}^{z_{\text{ст}}} \frac{t_j}{T_{pj}} = a_n, \quad (3.44)$$

где  $t_j$  – время работы на каждой ступени.

Если подачи выбирают из геометрического ряда с коэффициентом  $\varphi_{\text{ст}}$ , то

$$S_{\text{ст}}^* = \frac{S_p}{a_n^{m_p} T_p^{m_p}} \left[ \left( \frac{1}{\varphi_{\text{ст}}^{m_p}} + \frac{1}{\varphi_{\text{ст}}^{m_p}} + \dots + \frac{1}{\varphi_{\text{ст}}^{m_p}} \right) t_{\text{ст}} + t_p \right]^{m_p}. \quad (3.45)$$

Уравнение (3.45) можно записать:

$$S_p^* = C_p C_p^* T_p^{-m_p},$$

где  $C_p^*$  – значение  $C_p$  при  $S_p = 1$ :

$$C_p^* = \left[ \frac{\left( \frac{1}{\varphi_{\text{ст}}^{m_p}} + \frac{1}{\varphi_{\text{ст}}^{m_p}} + \dots + \frac{1}{\varphi_{\text{ст}}^{m_p}} \right) t_{\text{ст}} + t_p}{a_n} \right]. \quad (3.46)$$

В зависимости от принятого режима и условий испытаний, а также свойств инструмента, будет меняться коэффициент  $C_p^*$  и, соответственно, подача  $S_p$ . Чем в большей степени будут накапливаться повреждения при испытаниях, тем коэффициент  $C_p^*$  будет больше и подача меньше. С ростом числа ступеней подач до разрушения коэффициент  $C_p^*$  увеличи-

вается, т. е. накапливается больше повреждений. Интенсивность накопления повреждений тем больше, чем быстрее растет сумма отношений времени работы на каждой ступени к стойкости до разрушения на этой ступени.

Для условий, соответствующих данным исследованиям,  $a_n$  является наибольшим при  $z_{ст} = 4$ , причем с увеличением  $z_{ст}$  от 2 до 5  $a_n$  меняется существенно, а при дальнейшем увеличении – незначительно.

Режимы испытаний выбирались такими, чтобы разница в степени упрочнения и разупрочнения испытываемых инструментов была, возможно меньшей и легче учитываемой. Для правильного выбора режима испытаний рассматривался вопрос о рассеянии разрушающей подачи и точности результатов испытаний. Рассеяния оценивалось коэффициентом  $V_s$  вариации разрушающей подачи, а точность – относительной предельной ошибкой  $\delta$  (отношение предельной абсолютной ошибки к среднему значению). Для принятых значений  $\delta$ , доверительной вероятности  $\alpha_d$ , а также определенного закона распределения закона подачи коэффициента  $V_s$  определялся необходимый объем выборки или число испытаний  $n$ . Во многих случаях распределение подач  $S_p$  удовлетворительно аппроксимируется нормальным законом. Тогда

$$n = \left( \frac{t_\alpha V_s}{\delta} \right)^2, \quad (3.47)$$

где  $t_\alpha$  – критерий Стьюдента. Число испытаний  $n$  находится методом подбора, т. к.  $t_\alpha$  зависит от числа степеней свободы, равного  $n - 1$ .

Величина  $V_s$  может увеличиваться в результате различного протекания процессов упрочнения и разупрочнения различных партий в связи с тем, что некоторые параметры режима испытаний не могут быть заранее выбраны. Так, число ступеней до разрушения можно выбрать лишь ориентировочно, располагая предварительными данными о величине разрушающей подачи. При этом принимается определенное значение начальной подачи  $S_{z_{ст}}$ . Если значение  $S_p$  для отдельного инструмента окажется выше среднего значения, то  $z_{ст}$  увеличится, и в зоне роста подачи это значение станет еще большим в связи с упрочнением инструмента. Если какой-то инструмент окажется менее прочным, число ступеней до разрушения  $z_{ст}$  уменьшится, что

дополнительно снизит его прочность и увеличит рассеяние результатов испытаний. В зоне уменьшения подачи рассеяние сократится. Для проведения эксперимента выбраны следующие ступени нагружения:  $t_{ст} = 0,5$  мин,  $\varphi_{ст} = 1,26$  и  $z_{ст} = 4 \dots 6$ .

Испытание резцов на прочность проводили на токарно-винторезном станке модели 16К20 [225]. Испытанию подвергали резцы со СМП без покрытия и с композиционным покрытием базовых граней. Фактором износостойкости служил размер износа пластины по задней поверхности, который измеряли при помощи микроскопа МИР-2. Сначала исследовали резцы с СМП без покрытия, затем на тех же режимах – с композиционным покрытием. При исследовании обрабатывали стальную заготовку диаметром 40 мм. Станок предварительно проверяли на жесткость. Исследование проводили в четыре этапа. Каждый этап длился 300 с. Режимы резания на всех этапах испытания были одинаковыми.

Величину подачи выбирали, учитывая расчетные значения, а также значения в диапазоне ступеней станка. Величины подач были равны 0,8; 1,0; 1,2; 1,6; 2 и 2,6 мм/об. Глубина резания на всех ступенях была одинаковой и равнялась 3,5 мм. Учитывая, что при увеличении подачи возрастают тепловые нагрузки, влияние которых на прочность инструмента желательнее исключить, время работы на каждой ступени уменьшали с увеличением значения подачи. Работа инструмента с подачей 0,8–1,2 мм/об длились 30 секунд, время с подачей 1,6 мм/об составило 25 секунд, а время работы с подачами 2 и 2,6 мм/об было 20 секунд. Испытанию подвергали резцы с тремя видами пластин: трех-, четырех- и пятигранными. Пластины ранее исследовали на отклонение от плоскостности и определяли площадь касания опорной грани. Для исследования были отобраны пластины, имеющие максимальное, минимальное и среднее значения отклонений от плоскостности.

По результатам испытаний были построены графики (рис. 3.24). Подача разрушения  $S_p$  и время разрушения  $t_p$  указывались на соответствующем цикле, где пластина разрушалась. Например,  $S_{p2б}/n$  (рис. 3.24, а) означает, что пластина без покрытия разрушилась на втором цикле  $t_2$  и соответствует значению  $t_p$ . Общее время работы пластины до разрушения составляет  $T = t_1 + t_p$ . Подача разрушения пластин с покрытием обозначали  $S_{pc}/n$ .

Выявлено, что пластины без покрытия, имеющие максимальное отклонение от плоскостности обладали стойкостью до разрушения ( $T_p$ ) меньшей, чем резцы с покрытиями, имеющие минимальное и среднее значения отклонений от плоскостности. Например, трехгранные пластины, имеющие максимальное отклонение от плоскостности и минимальную контурную площадь касания разрушились на первой ступени при подаче  $S = 0,8$  мм/об; имеющие средние значения площадей касания и отклонений от плоскостности – на 45 секунде (при подаче  $S = 1,2$  мм/об), а пластины, имеющие минимальное отклонение от плоскостности и максимальную контурную площадь касания разрушились на 59 секунде на второй ступени при подаче  $S = 1,2$  мм/об.

Резцы, оснащенные четырехгранными пластинами с минимальными отклонениями от плоскостности и максимальной площадью касания опорной грани, имели стойкость, равную  $T_p = 102$  с и сломались на четвертой ступени при подаче 1,6 мм/об, пластины со средними значениями отклонений от плоскостности и контурной площадью касания имели стойкость до разрушения  $T_p = 78$  с при подаче  $S = 1,2$  мм/об; пластины с максимальными отклонениями от плоскостности и минимальной контурной площадью касания сломались на 45 секунде при подаче  $S = 1,2$  мм/об. Такая же картина наблюдалась при испытаниях резцов с пятигранными пластинами, однако, из трех видов пластин резцы с пятигранными пластинами имели наиболее высокую прочность.

Пластины с максимальным и минимальным отклонениями от плоскостности и различными значениями площадей касания после нанесения на них композиционного покрытия имели средние значения стойкости:  $T_p = 102$  с у трехгранных пластин, при подаче разрушения  $S = 1,6$  мм/об;  $T_p = 119$  с у четырехгранных пластин при подаче  $S = 2$  мм/об;  $T_p = 230$  с у пятигранных пластин при подаче  $S = 2,8$  мм/об. Сравнивая среднее значение стойкости резцов с СМП без покрытия и с композиционным покрытием можно заключить, что трехгранные пластины без покрытия имеют  $T_p = 45$  с, а с покрытием  $T_p = 102$  с; четырехгранные пластины без покрытия  $T_p = 75$  с, с покрытием 119 с, пятигранные пластины без покрытия  $T_p = 178$  с, с покрытием  $T_p = 230$  с.

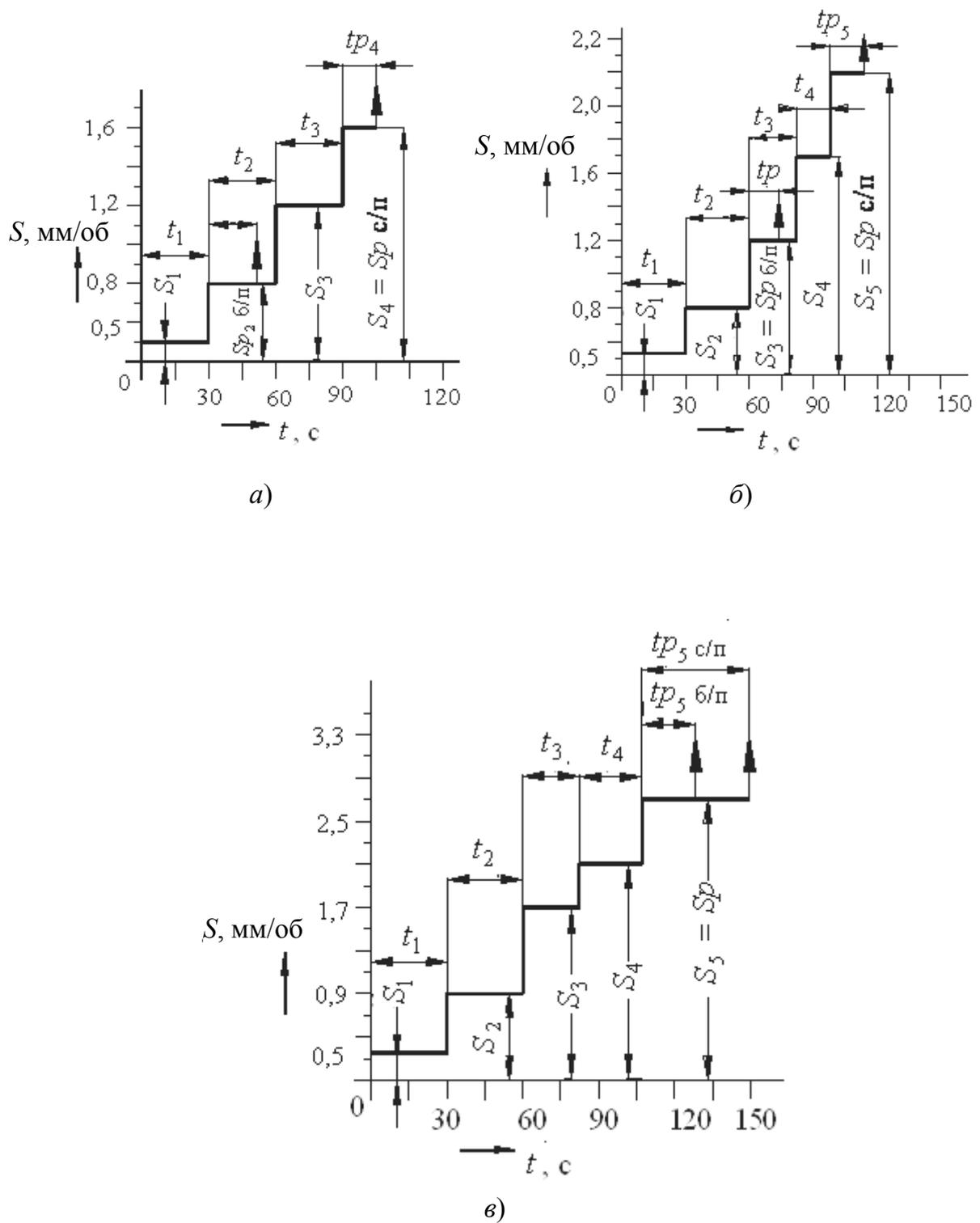


Рис. 3.24. Графики исследования резцов на прочность методом ступенчато-возрастающих подач: а – трехгранные пластины; б – четырехгранные пластины; в – пятигранные пластины

Оценку прочности производили по относительному коэффициенту прочности

$$K_S = \frac{S_{c/п}}{S_{б/п}},$$

где  $S_{c/п}$  и  $S_{б/п}$  – соответственно подача резцов с покрытием и без него.

Полученные результаты приведены в таблице 3.1.

Таблица 3.1

Коэффициент прочности сборных резцов

| Площадь касания | Вид пластины |                |             |
|-----------------|--------------|----------------|-------------|
|                 | трехгранная  | четырёхгранная | пятигранная |
| 0,25            | 1,45         | 1,37           | 1,31        |
| 0,4             | 1,4          | 1,25           | 1,21        |
| 0,5             | 1,27         | 1,17           | 1,09        |

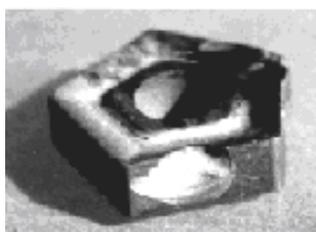
Типовые виды разрушений пластин трех форм представлены на рис. 3.25.



а)



б)



в)

Рис. 3.25. Пластины, прошедшие испытание на прочность

Анализируя полученные результаты испытаний установили, что в среднем сборные резцы с композиционным покрытием обладают в 1,3 раза большей прочностью по сравнению с резцами без покрытия.

### 3.4. Экспериментальные исследования статической точности рабочей части сборного инструмента

#### 3.4.1. Статическая точность рабочей части сборного инструмента с СМП без покрытия

Исследованию подвергались сборные резцы с различными типами крепления режущих пластин, широко используемые в промышленности.

Тип крепления принимался по известной классификации (рис. 3.26а–3.26е) [142]. Перед проведением опытов пластины были разделены по площадям пятна контакта базовой грани с эталонной поверхностью на группы (табл. 3.2). Для лучшей сопоставимости результатов использовалось понятие относительной контурной площади касания (см. гл. 2). Исследования проводились на специальном стенде [226]. Стенд (рис. 3.27) представляет собой гидрофицированную установку, состоящую из нагружающей и измерительной систем. Сила, с которой нагружался инструмент, совпадала по направлению с результирующей силой резания (рис. 3.28).

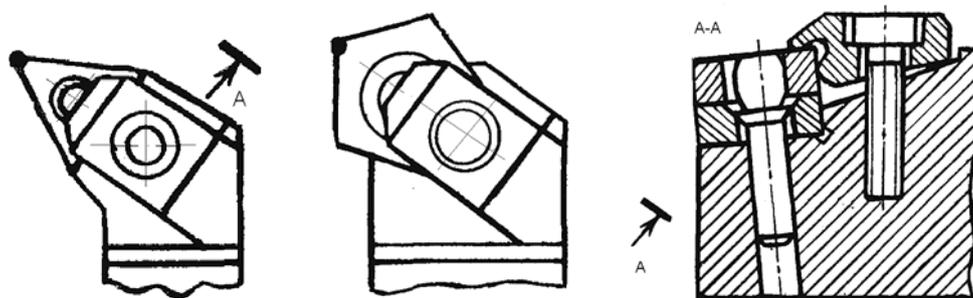


Рис. 3.26а. Эскизы рабочей части сборных инструментов:  
тип крепления *PW*

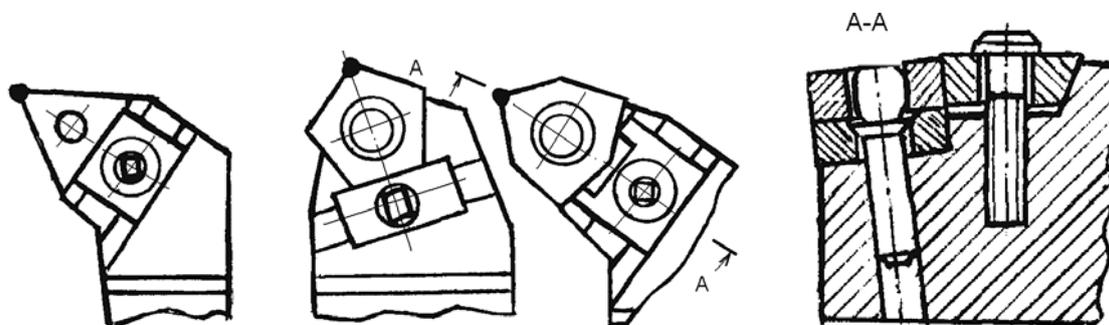


Рис. 3.26б. Эскизы рабочей части сборных инструментов:  
тип крепления *PT*

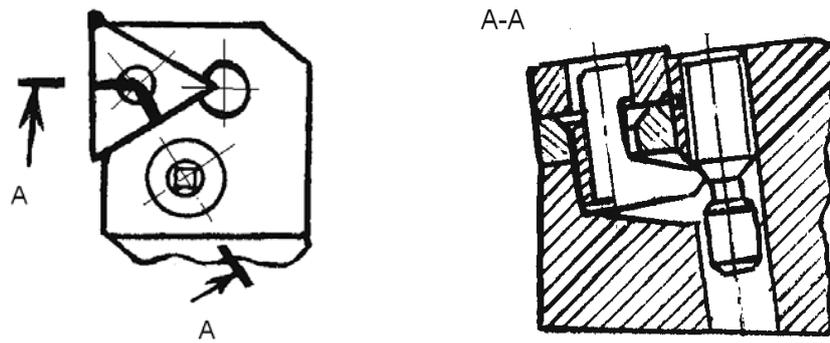


Рис. 3.26в. Эскизы рабочей части сборных инструментов:  
тип крепления *PP*

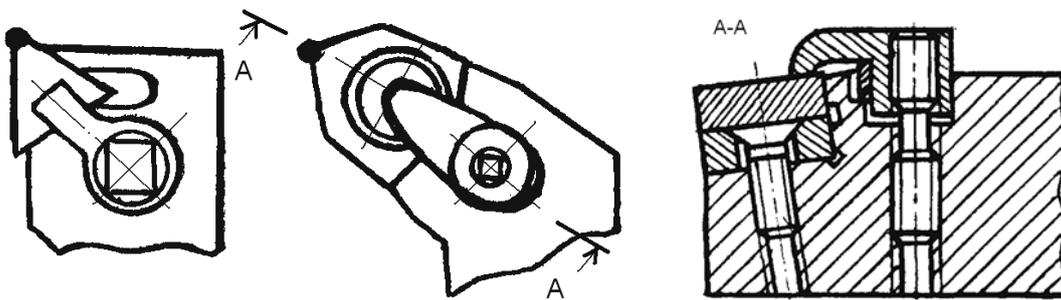


Рис. 3.26г. Эскизы рабочей части сборных инструментов:  
тип крепления *CC*

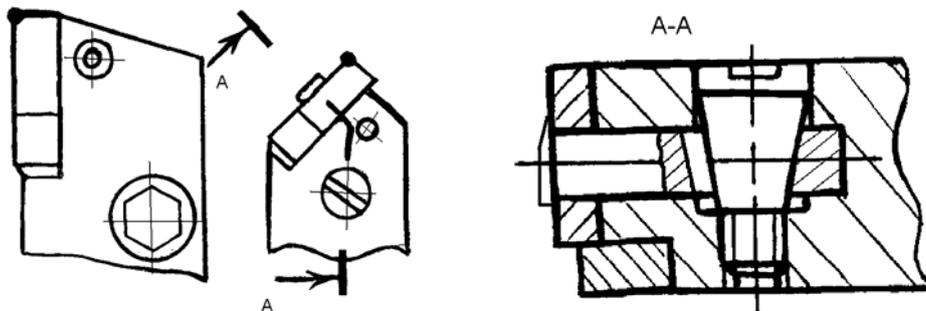


Рис. 3.26д. Эскизы рабочей части сборных инструментов:  
тип крепления *KL*

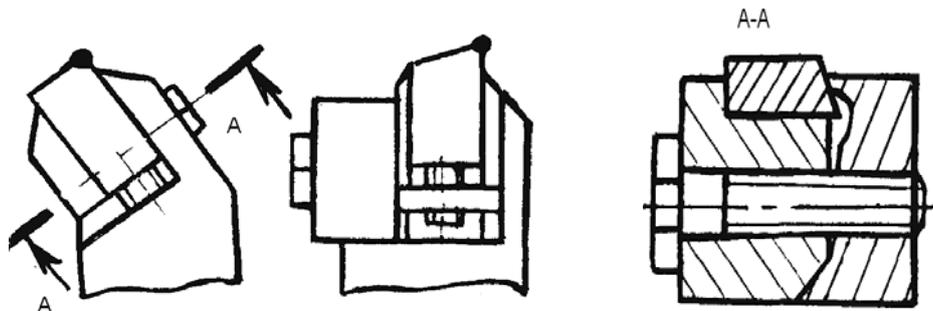


Рис. 3.26е. Эскизы рабочей части сборных инструментов:  
тип крепления *WP*



Рис. 3.27. Рабочая зона станда для испытания резцов на жесткость

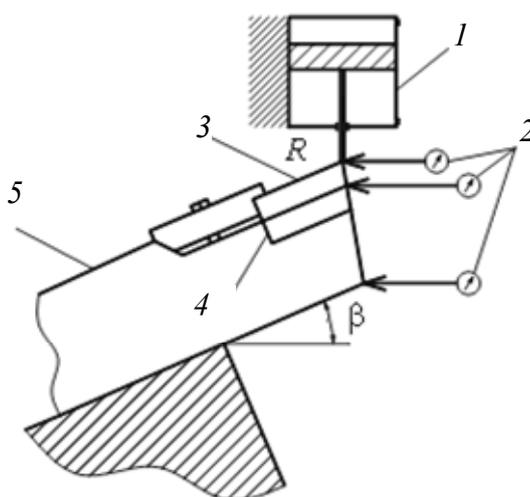


Рис. 3.28. Схема установки резца при исследовании его на жесткость:  
 1 – нагружающее устройство; 2 – точки измерения перемещений;  
 3 – режущая пластина; 4 – подкладка; 5 – державка

Принцип работы измерительной системы станда следующий: световой поток, выходящий из источника, падает на грань режущей пластины и частично отсекается, остальная часть светового потока попадает на приемник. В качестве источника использовался полупроводниковый лазер с длиной волны 600 нм. В качестве приемника был выбран фотодиод ФД-3. Кроме того, был разработан усилитель с коэффициентом усиления, равным 500. Показания с усилителя снимались вольтметром Digital multimer DT-830B.

Установив в державку твердосплавную пластину, воздействовали на нее силами в 300, 700, 1100, 1500 Н (имитирующими силы реза-

ния) в два этапа: на первом этапе производили нагружение пластины с плавным переходом от одного значения силы к другому, на втором этапе производили разгрузку и определяли перемещения пластины.

Для того, чтобы учесть погрешность от вариации сил зажима, режущие пластины закреплялись при помощи динамометрического ключа.

Тарирование измерительной системы производилось с использованием микрометрической скобы. Датчики тарировались в следующей последовательности: сначала измерительная пятка скобы перемещалась перпендикулярно лучу лазера и показания прибора записывались через каждые 1 мкм, затем определялось среднее значение перемещений в микрометрах на 1 единицу показания прибора. В результате вычислений средних значений получили чувствительность схемы (0,16 мкм на одно деление прибора).

Схема установки датчиков приведена на рис. 3.29.

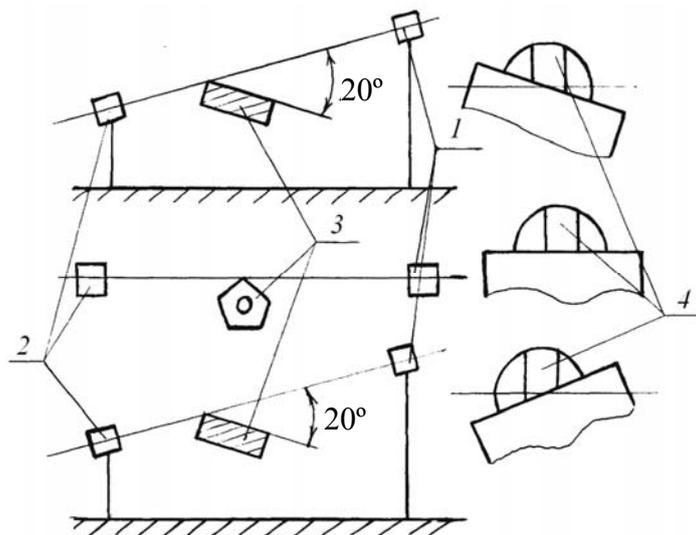


Рис. 3.29. Схемы установки датчиков:  
1 – приемник; 2 – источник; 3 – пластина; 4 – щель

Для уменьшения влияния формы светового потока на точность измерений, на выходном окуляре источника закреплялась пластина со щелью шириной 0,1 мм.

Таблица 3.2

Значения относительных контурных площадей касания

| Номер пластины | Относительная площадь |
|----------------|-----------------------|
| Четырехгранная |                       |
| 1              | 0,474                 |
| 2              | 0,432                 |
| 3              | 0,316                 |

Окончание табл. 3.2

| Номер пластины | Относительная площадь |
|----------------|-----------------------|
| Трехгранная    |                       |
| 1              | 0,496                 |
| 2              | 0,472                 |
| 3              | 0,28                  |
| Пятигранная    |                       |
| 1              | 0,431                 |
| 2              | 0,287                 |
| 3              | 0,271                 |
| Шестигранная   |                       |
| 1              | 0,498                 |
| 2              | 0,348                 |
| 3              | 0,211                 |
| Перетачиваемая |                       |
| 1              | 0,307                 |

Анализ рис. 3.30, 3.31 позволяет заключить, что с увеличением относительной площади касания базовой грани в соотношении 1:1,37:1,41 соответственно уменьшаются максимальные перемещения пластины в 1:1,37:1,5 раза, при этом средний коэффициент жесткости увеличивается в 1:2,26:2,9 раза. При переходе от типа крепления *PW* к *PT*, *CS* и *PP* позволяет соответственно повысить статическую точность в 1,45, 1,78 и 2,46 раза, при изменении среднего коэффициента жесткости в 0,78; 0,82; 1,51 раза.

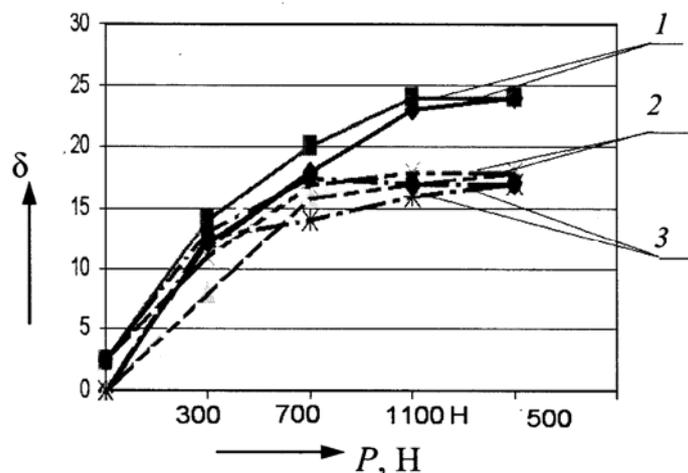


Рис. 3.30. Графики статической точности резцов типа крепления *PW* с четырехгранными пластинами: минимальной (1); средней (2) и максимальной контурными площадями касания базовых граней (3)

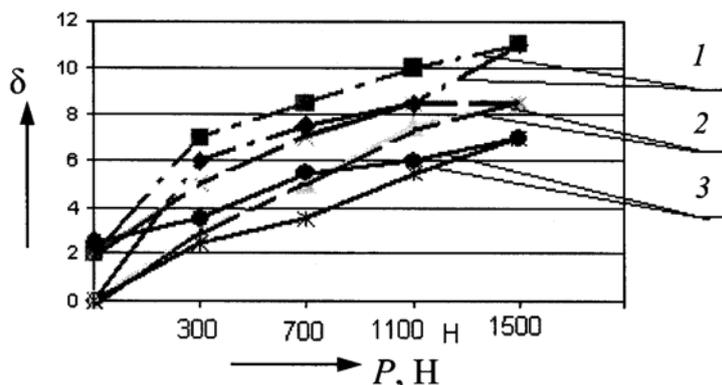


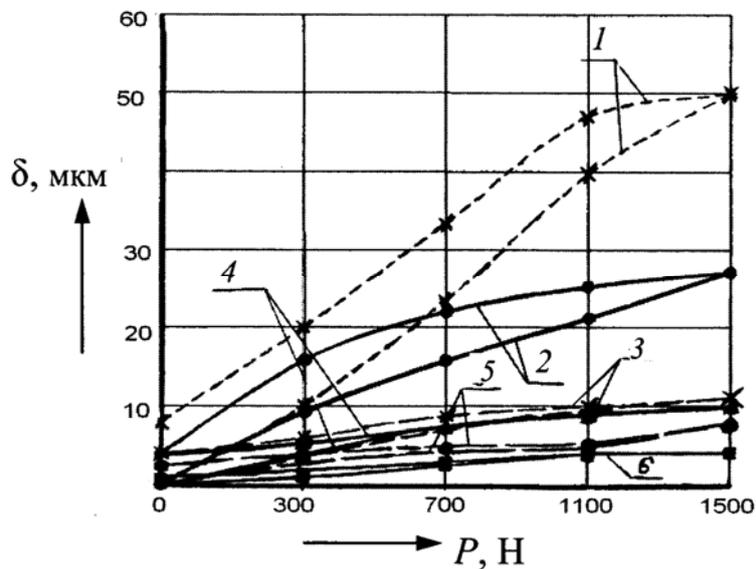
Рис. 3.31. Графики статической точности резцов с четырехгранными пластинами типов крепления  $PT$  (1);  $PP$  (2) и  $CC$  (3) с максимальными контурными площадями касания базовых граней

На рис. 3.32, *а* изображены графики перемещений: 1, 2, 3 – соответственно трехгранных пластин 3, 2, 1 (табл. 3.2) и державки типа крепления  $PW$ ; 4, 5, 6 – соответственно пластины 1 (табл. 3.2) и державок типа крепления  $PT$ ,  $PP$  и  $CC$ . Анализ рис. 3.32, *а* позволяет заключить, что с увеличением относительной площади касания базовой грани в соотношении 1:1,69:1,77 соответственно уменьшаются максимальные перемещения пластины в 1: 1,78 : 4,16 раза, при этом средний коэффициент жесткости увеличивается в 1:1,6:5,8 раза. Применение типов крепления  $PW$ ,  $PT$ ,  $PP$  и  $CC$  позволяет соответственно повысить статическую точность в 1:1,1:1,38:2,75 раза, при изменении среднего коэффициента жесткости в 0,81; 3,71; 2,39 раза. Применение крепления пластин в закрытый паз (тип  $CC$ ) незначительно снижает статическую точность по сравнению с типом крепления  $PW$ , что объясняется более высокой технологичностью державки типа крепления  $PW$ . Конструкция резца с типом крепления  $PT$  также обладает высокой технологичностью и невысокой сложностью, но установка режущей пластины на штифт с прижимом ее со стороны боковой грани часто нарушает исходное базирование, что в итоге снижает жесткость резца.

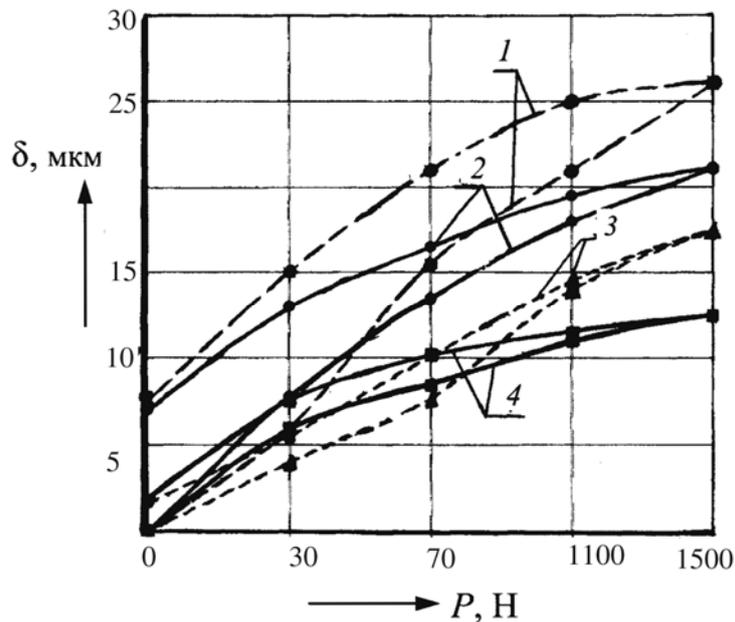
На рис. 3.32, *б* изображены графики перемещений: 1 – пятигранной пластины 2 (табл. 3.2) и державки типа  $PT$ ; 2, 3, 4 – соответственно пластин 3, 2, 1 (табл. 3.2) и державки типа  $PW$ .

Анализ рис. 3.32, *б* позволяет заключить, что с увеличением относительной площади касания базовой грани в соотношении 1:1,1:1,59 соответственно уменьшаются максимальные перемещения пластины в 1:1,22:1,72 раза, при этом средний коэффициент жесткости увеличивается в 1:1,7:1,87 раза. Применение типов крепления  $PW$  и  $PT$  позволяет

соответственно повысить статическую точность в 1,53:1 раза при увеличении среднего коэффициента жесткости 1,75 раза, что обеспечивается дополнительной составляющей силы крепления в конструкции типа *PW*.



а)

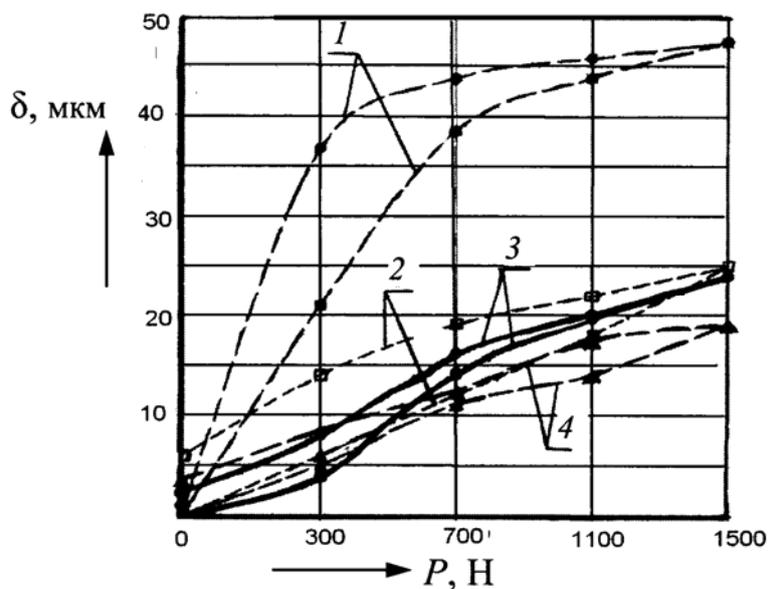


б)

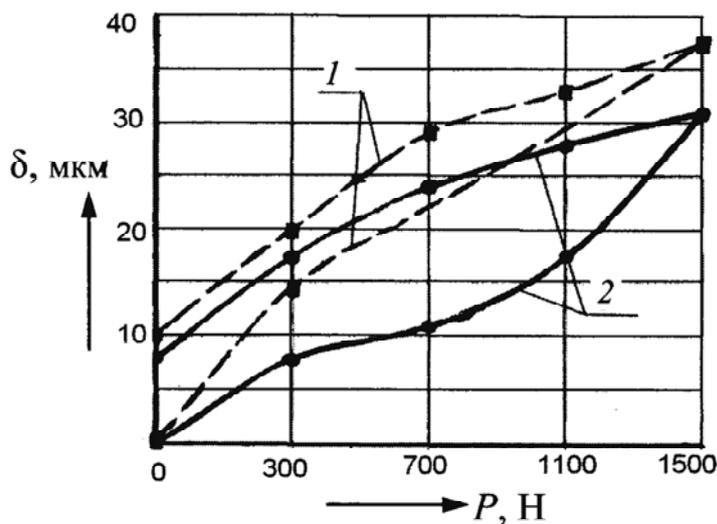
Рис. 3.32. Графики статической точности резцов с трехгранными (а) и пятигранными (б) пластинами

На рис. 3.33, а изображены графики перемещений: 1, 2, 3, 4 – шестигранных пластин (табл. 3.2) и державок типов *KL<sub>1</sub>*, *PT*, *KL<sub>2</sub>*, *CC* (рис. 3.26). Анализ рис. 3.33, а позволяет заключить, что применение

типов крепления  $KL_1$ ,  $PT$ ,  $KL_2$ ,  $CC$  позволяет соответственно повысить статическую точность в соотношении 1:1,9:1,98:2,64, при этом средний коэффициент жесткости увеличивается в 1:1,16:1,4:1,7 раза это объясняется тем, что типы креплений  $KL$  обладают высокой чувствительностью к точности изготовления элементов системы крепления, а также тем, что СМП опирается на тангенциально закрепленную опорную пластину. Изменение угла в плане с  $45^\circ$  (тип  $KL_1$ ) на  $90^\circ$  (тип  $KL_2$ ) позволяет повысить статическую точность в 2,64 раза.



a)



б)

Рис. 3.33. Графики статической точности резцов с шестигранными (а) и перетачиваемыми (б) пластинами

На рис. 3.33, б изображены графики перемещений: 1, 2 – перетачиваемых пластин (табл. 3.2) и державок типов *WP*, *WP* (рис. 3.26), отличающихся применением блок-вставок. Анализ рис. 3.33, б позволяет заключить, что применение типа крепления *WP* позволяет повысить статическую точность в 1,2 раза, это объясняется тем, что блок-вставка обеспечивает более высокую точность контактных поверхностей. Сравнение графиков на рис. 3.30, рис. 3.32, а, б позволяет заключить, что применение четырех-, трех- и пятигранных пластин в державках с типом крепления *PW*, с максимальной контурной площадью касания базовых граней приводит к изменению статической точности, соответственно в 1:1,5:1,28 раза, вследствие влияния формы пластины на уровень контактных перемещений.

Сравнение графиков на рис. 3.31–3.32, а, б и рис. 3.33, а позволяет заключить, что применение четырех-, трех-, пяти- и шестигранных пластин в державках с типом крепления *PT*, с максимальной контурной площадью касания базовых граней приводит к изменению статической точности, соответственно в 1:1,1:0,42:0,73 раза, вследствие влияния формы пластины на уровень контактных перемещений.

### 3.4.2. Статическая точность рабочей части сборного инструмента с СМП с композиционным покрытием базовых граней СМП

Для испытания влияния разработанного композиционного покрытия базовых граней СМП на жесткость использовали те же резцы и пластины, которые испытывались ранее без покрытия. На опорные грани пластин наносили композиционное покрытие на основе эпоксиполиэфирных смол (см. п. 2.2). Перед нанесением покрытия поверхность пластины обезжиривали и сушили. Далее на очищенную поверхность пластины специальным приспособлением (распылителем) наносили покрытие. Толщину покрытия регулировали специальным щупом и усилием плиты, которую устанавливали на нанесенный слой покрытия. Чтобы избежать прилипания прижимной поверхности приспособления, ее покрывали специальным антиадгезионным составом. Композиционный слой покрытия подвергали сушке в течение 24 ч. После этого резцы были готовы к проведению испытаний на жесткость.

Результаты испытания представлены на рис. 3.34. Анализируя численные значения и графики перемещений пластин с композиционным покрытием, и сравнивая их с перемещением пластин без покрытия, можно отметить, что при минимальном пятне контакта (рис. 3.32, а и рис. 3.34, а) перемещения пластин с покрытием увеличились при на-

грузке: 300 Н у трехгранных пластин на 4 мкм, у четырехгранных пластин (рис. 3.30 и рис. 3.34, б) уменьшились на 9 мкм, у пятигранных пластин (рис. 3.32, б и рис. 3.34, в) – на 7,5 мкм; при нагрузке 700 Н у трехгранных – на 1 мкм, четырехгранных пластин – 9 мкм, у пятигранных – 11 мкм; при нагрузке 1100 Н у трехгранных пластин – 7 мкм, у четырехгранных – на 9 мкм, у пятигранных – 14,1 мм; при нагрузке 1500 Н у трехгранных – 9 мкм, четырехгранных – 6 мкм, у пятигранных – 16,5 мкм.

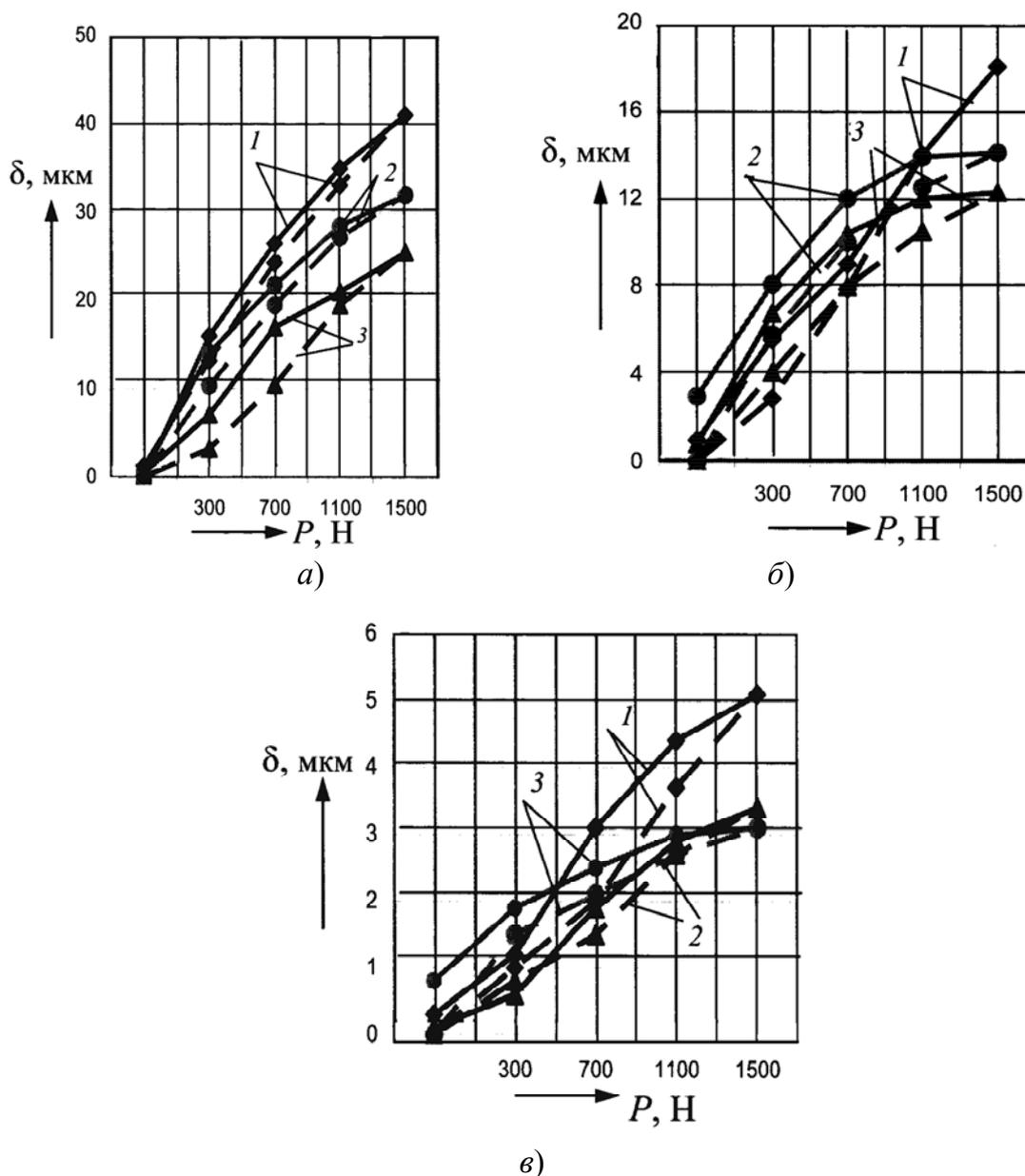


Рис. 3.34. Графики статической точности резцов с трехгранными (а), четырехгранными (б) и пятигранными (в) пластинами

Сравнительный анализ перемещений пластин с максимальным пятном контакта с покрытием и без него у трехгранных пластин (рис. 3.32, *а*, и рис. 3.34, *а*) показал, что значения перемещений снизились при нагрузках: 300 Н в 1,6 раза, 700 Н увеличились в 1,43 раза, 1100 Н – 1,9 раза, 1500 Н – 2,25 раза. Перемещения четырехгранных пластин (рис. 3.30 и рис. 3.34, *б*) с покрытиями с максимальным пятном контакта уменьшились в среднем в 1,76 раза, причем наблюдалось уменьшение значений перемещений с увеличением силы, действующей на резец. Перемещения пятигранных пластин (рис. 3.32, *б* и рис. 3.34, *в*) с покрытием и без покрытия с максимальным пятном контакта уменьшились в среднем в 4,5 раза.

Анализ рис. 3.34, *а* позволяет заключить, что с увеличением относительной площади касания базовой грани трехгранных пластин в соотношении 1:1,42:2,42 соответственно уменьшаются максимальные перемещения пластины в 1:1,26:1,64 раза, при этом средний коэффициент жесткости увеличивается в 1:1,35:1,76 раза.

Сравнивая графики перемещений четырехгранных пластин в резцах с покрытием СМП (рис. 3.34, *б*) можно отметить, что с увеличением относительной площади касания базовой грани четырехгранных пластин в соотношении 1:1,38:2,14 соответственно уменьшаются максимальные перемещения пластины в 1:1,28:1,5 раза, при этом средний коэффициент жесткости увеличивается в 1:1,69:1,6 раза.

В результате анализа графиков перемещений пятигранных пластин в резцах с покрытием СМП (рис. 3.34, *в*) можно отметить, что с увеличением относительной площади касания базовой грани пятигранных пластин в соотношении 1:1,34:2,4 соответственно уменьшаются максимальные перемещения пластины в 1: 1,5 : 1,65 раза, при этом средний коэффициент жесткости увеличивается в 1:1,52:1,9 раза. Следовательно, пластины с композиционным покрытием обладают большей жесткостью, чем пластины без покрытия.

## Глава ПРАКТИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ 4 И РАСЧЕТЫ

### 4.1. Расчет передних и задних углов дисковой СМП, обеспечивающей обработку радиусного участка детали

Моделирование геометрических параметров производили с использованием координатного метода (см. п. 1.4.2).

В системе  $XYZ$  (рис. 4.1) уравнение образующей поверхности детали имеет вид:

$$(X - X_A)^2 + (Y - Y_A)^2 = R^2. \quad (4.1)$$

Для упрощения выводов использовали новую систему координат, ось  $Y_1$  которой проходит через рассматриваемую точку и центр детали.

Такое расположение систем координат можно отразить уравнениями связи:

$$X_1 = X; \quad Y = Y_1 \cos t_i + Z_1 \sin t_i; \quad Z_1 = Z \cos t_i + Y \sin t_i. \quad (4.2)$$

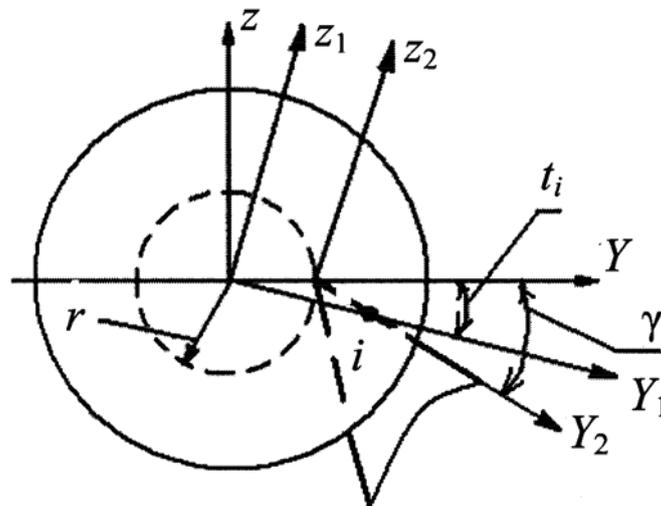
Для  $Z = 0$ ;  $Z_1 = 0$  и с учетом (4.2) получили уравнение поверхности детали в определенном сечении

$$X_1 = \sqrt{R^2 - (Y_1 \cos t_i - Y_A)^2} + X_A. \quad (4.3)$$

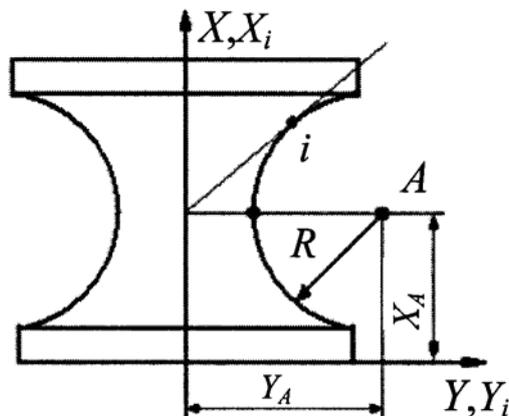
Используя уравнение (4.3), получили выражение для расчета угла в плане

$$\varphi = \arctg \left\{ - \frac{Y_1 \cos t_i - Y_A}{\sqrt{R^2 - (Y_1 \cos t_i - Y_A)^2}} \left( \cos t_i + \sin t_i Y_{1i} \frac{r \sin \gamma}{Y_i^2 \sqrt{1 - \frac{r^2 \sin^2 \gamma}{Y_i^2}}} \right) \right\}, \quad (4.4)$$

$$\text{где } t_i = \arcsin \frac{r \sin \gamma}{y_1} - \gamma. \quad (4.5)$$



a)



б)

Рис. 4.1. Схема к расчету геометрических параметров зуба инструмента

Для анализа углов приняли случай с плоской передней поверхностью и затылованной задней, с исходными данными:

$$r = 10 \text{ мм}, Y_A = 30 \text{ мм}, X_A = R = 20 \text{ мм}, \gamma = 10^\circ, \alpha = 20^\circ.$$

Результаты расчетов приведены в таблице 4.1.

Таблица 4.1

Рассчитанные значения  $x, y, \varphi$  (в градусах)

| Номер точки | 1   | 2  | 3  | 4  | 5   | 6  | 7  |
|-------------|-----|----|----|----|-----|----|----|
| $x$         | 40  | 33 | 20 | 7  | 0   | 5  | 15 |
| $y$         | 30  | 15 | 10 | 15 | 30  | 17 | 10 |
| $\varphi$   | 0,6 | 48 | 90 | 48 | 0,6 | 40 | 30 |

Рассчитанные значения передних и задних углов по выражениям (1.42)–(1.45) приведены на рис. 4.2.

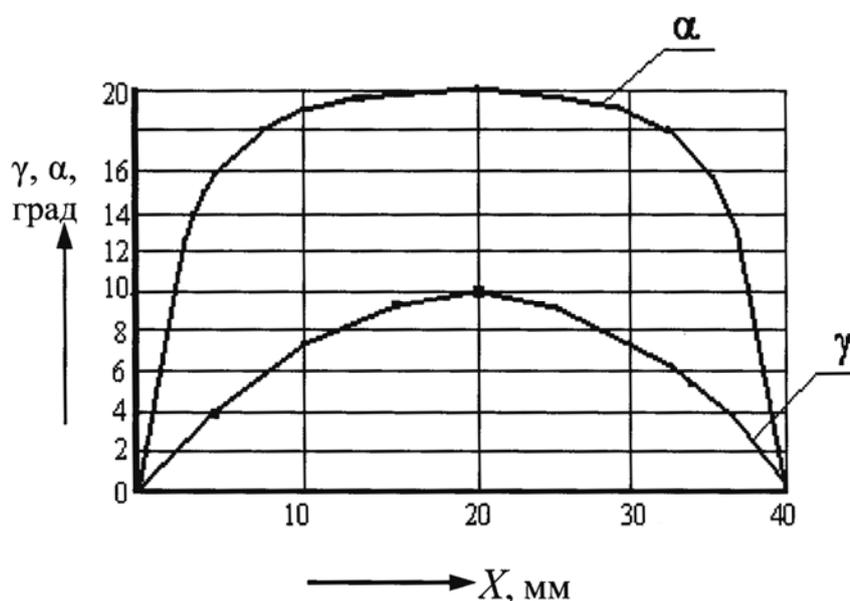


Рис. 4.2. Графики изменения передних и задних углов

Анализ результатов позволяет заключить, что для обеспечения оптимальной геометрии необходимо, либо производить подточку передней и задней поверхностей, либо применить дисковую пластину с положительными передними и задними углами.

## 4.2. Анализ влияния параметров процесса точения на топографию цилиндрической кинематической поверхности

Известно, что на токарном станке с ЧПУ можно обработать различные виды поверхностей. Рассмотрим особенности формирования кинематических поверхностей с образующей в виде дуги окружности. Схема обработки представлена на рис. 4.3.

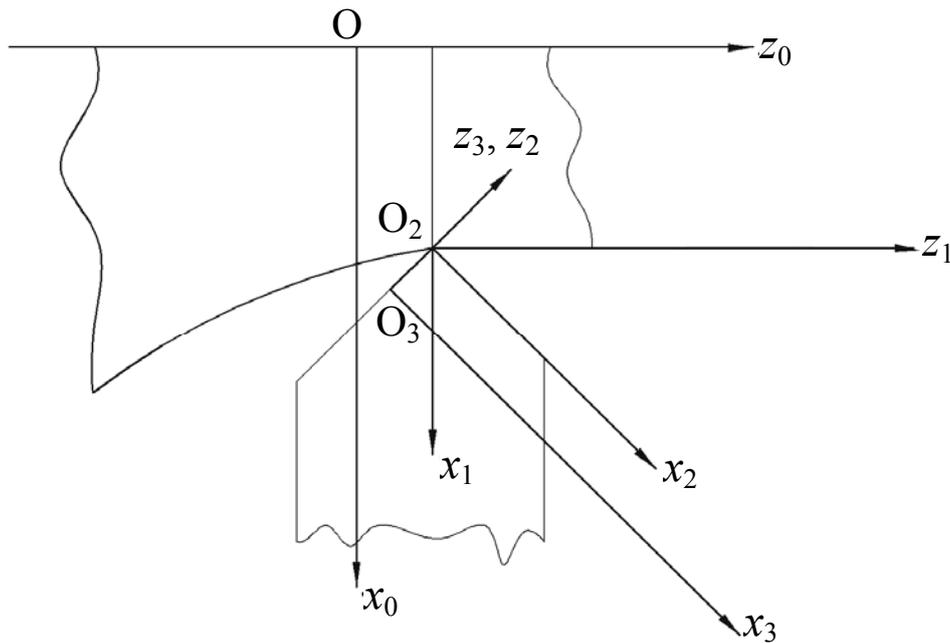


Рис. 4.3. Расчетная схема обработки участка детали с радиусной образующей

Учитывая необходимые движения, уравнение формообразования примет вид:

$$\bar{r}_o = [A_6(\psi)] \cdot [A_3(z_1)] \cdot [A_1(x_1)] \cdot \bar{r}_u, \quad (4.6)$$

где  $\bar{r}_u$  – радиус-вектор формообразующих точек резца:

$$\bar{r}_u = [A_5(\varphi)] \cdot [A_3(z_3)] \cdot \bar{e}, \quad (4.7)$$

где  $[A_5(\varphi)]$  – матрица, которая учитывает поворот системы координат вокруг оси  $Oy$  на угол в плане  $\varphi$ ;  $[A_3(z_3)]$  – матрица, которая учитывает перемещение системы координат вдоль режущей кромки (оси  $Oz_3$ );  $\bar{e}$  – вектор начала координат;  $[A_6(\psi)]$  – матрица, которая учитывает главное движение поворот системы координат вокруг оси  $Oz_0$ ;  $[A_3(z_1)]$  – матрица, которая учитывает продольную подачу (движение

вдоль оси  $Oz_1$ );  $[A_1(x_1)]$  – матрица, которая учитывает поперечную подачу (движение вдоль оси  $Ox_1$ )

$$z_1 = z_H + z; \quad x_1 = x_H + x, \quad (4.8)$$

где  $(x_H; z_H)$  – координаты начальной точки образующей поверхности детали.

С учетом (4.7) и (4.8) уравнение (4.6) можно записать:

$$\bar{r}_o = \begin{bmatrix} \cos(\psi) \cdot \sin(\varphi) \cdot z + \cos(\psi) \cdot (x_H + x) \\ -\sin(\psi) \cdot \sin(\varphi) \cdot z - \sin(\psi) \cdot (x_H + x) \\ \cos(\psi) \cdot z + (z_H + z) \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

Чтобы обеспечить обработку фасонной поверхности необходимо решить уравнение (4.9) совместно с уравнениями, отражающими функциональную и параметрическую связи, которые будут иметь вид:

$$x = \frac{2 \cdot x_{ц} - \sqrt{4x_{ц}^2 - 4 \cdot x_{ц}^2 + (z - z_{ц})^2 - R^2}}{2}, \quad (4.10)$$

$$z = S_{\text{прод}} \cdot \psi, \quad (4.11)$$

$$x = S_{\text{попер}} \cdot \psi, \quad (4.12)$$

где  $x_{ц}, z_{ц}$  – координаты центра образующей поверхности детали;  $S_{\text{прод}}$  и  $S_{\text{попер}}$  – значения продольной и поперечной подач, мм/рад;

С учетом (4.10)–(4.12) уравнение формообразования примет вид:

$$\bar{r}_o = \begin{bmatrix} \cos(\psi) \cdot \sin(\varphi) \cdot z + \cos(\psi) \cdot (x_H + x_{ц} - ((S_{\text{прод}} \psi)z_{ц} - z_{ц}^2 + R^2)^{0,5}) \\ -\sin(\psi) \cdot \sin(\varphi) \cdot z - \sin(\psi) \cdot (x_H + x_{ц} - ((S_{\text{прод}} \psi)^2 + \\ + 2(S_{\text{прод}} \psi)z_{ц} - z_{ц}^2 + R^2)^{0,5}) \\ \cos(\psi) \cdot z + (z_H + S_{\text{прод}} \psi) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Решение уравнения (4.13) для одной точки формообразующей кромки резца позволяет построить траекторию ее движения (рис. 4.4, а).

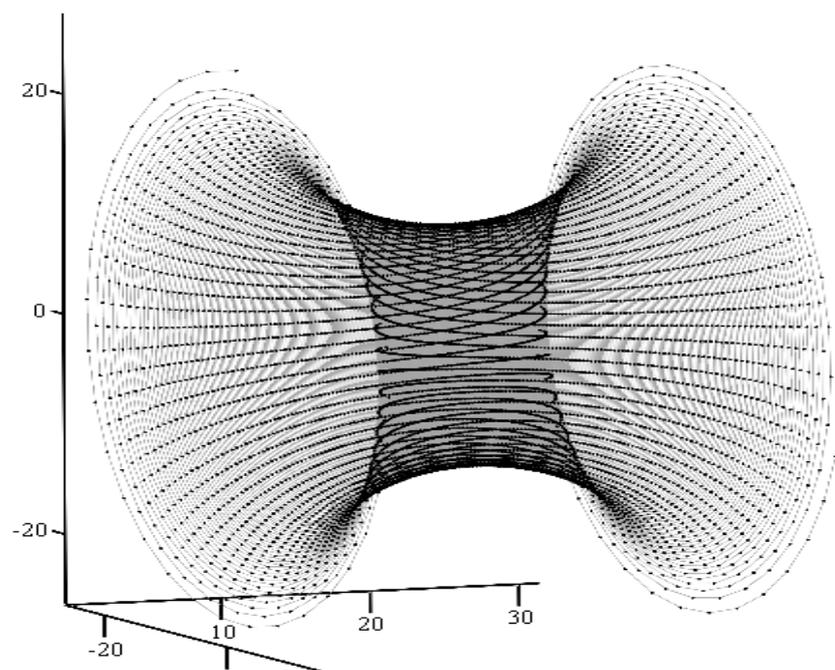
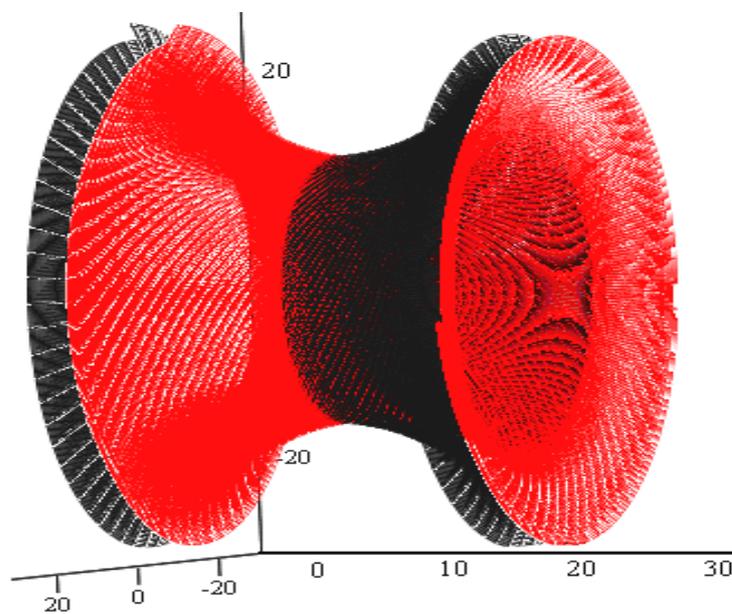
*a)**б)*

Рис. 4.4. Траектория движения точки режущей кромки резца (*a*); топография обработанной поверхности (*б*)

На рис. 4.4, б приведена топография обработанной поверхности для двух точек формообразующей кромки резца при следующих исходных данных:

$$z = 1 \text{ мм}; S_{\text{прод}} = 0,02 \text{ мм/рад (или 0,13 мм/об)}; \varphi = 65^\circ;$$

$$x_{\text{н}} = z_{\text{н}} = 0 \text{ мм}; R = 15 \text{ мм}; x_{\text{ц}} = 25 \text{ мм}; z_{\text{ц}} = 15 \text{ мм}.$$

Кроме того, полученные модели позволили определить влияние параметров образующей поверхности детали и элементов режима резания на погрешность обработанной поверхности.

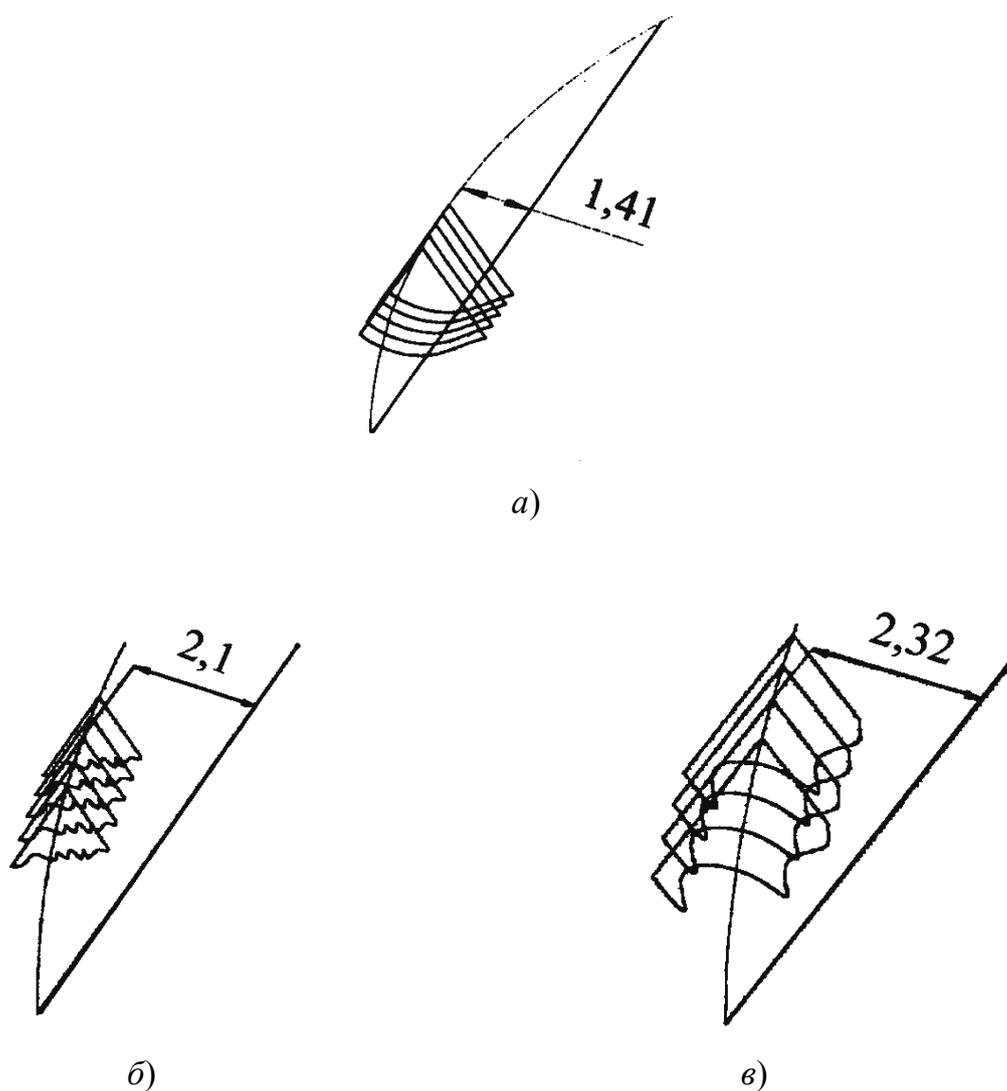


Рис. 4.5. Схемы формирования кинематической поверхности, образующая которой имела радиусы: 15 (а), 25 (б) и 40 мм (в)

На рис. 4.5 видно, что с увеличением радиуса кривизны образующей поверхности детали погрешность на периферийных точках уменьшается и изменяется топография поверхности. Анализ рис. 4.6 позволяет заключить, что при увеличении подачи изменяется топография обработанной поверхности, а значит изменяются ее эксплуатационные показатели (несущая способность, износостойкость и т. д.).

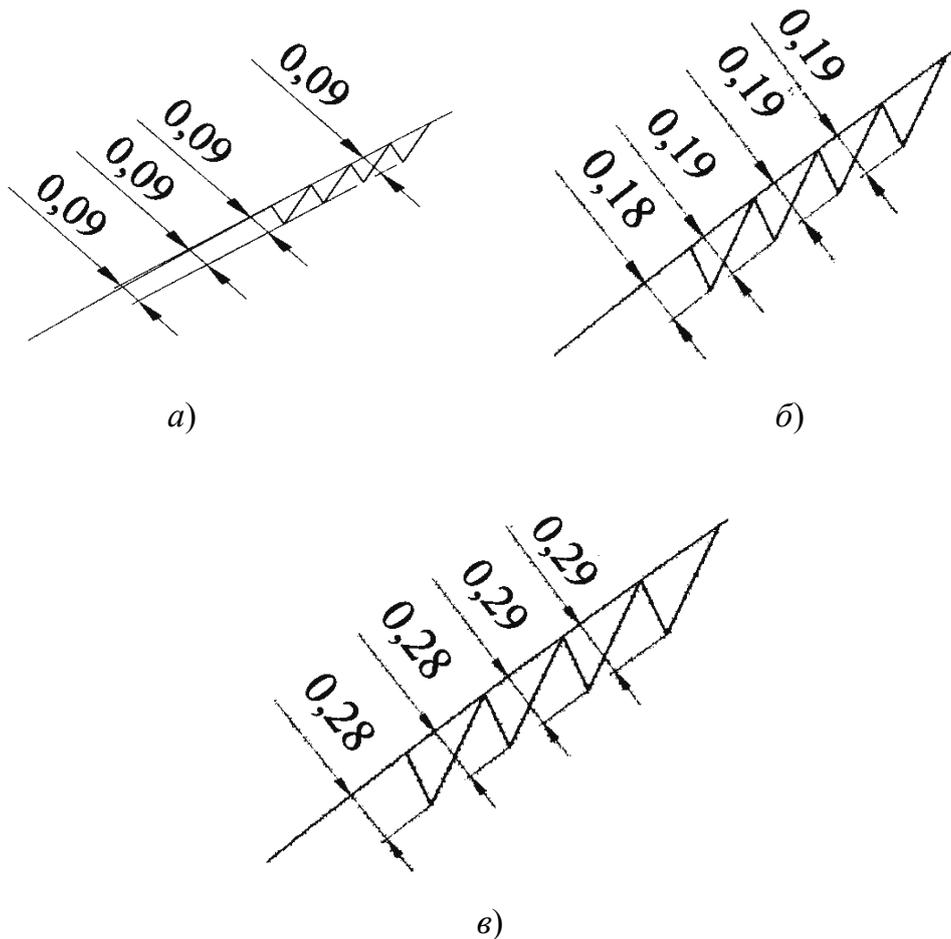
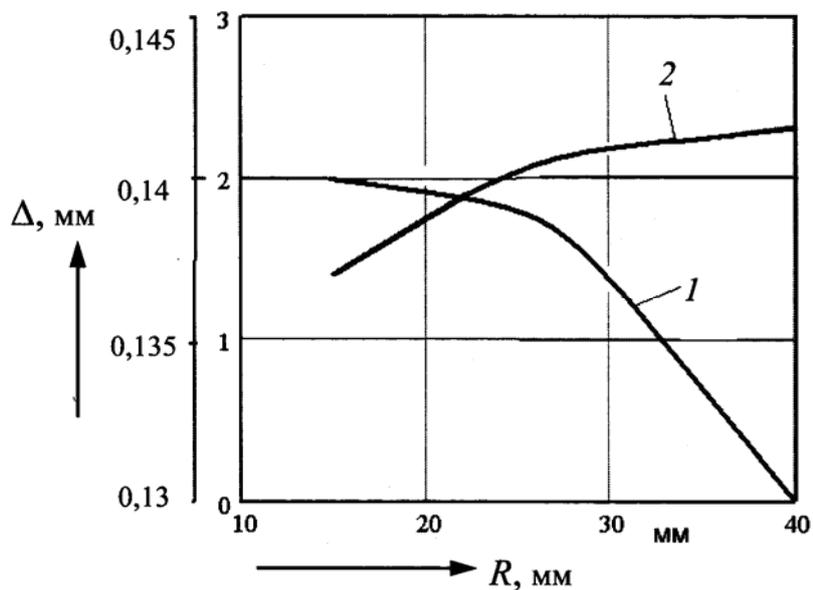


Рис. 4.6. Схемы формирования кинематической поверхности с подачами: 0,02 (а), 0,04(б) и 0,06 (в) мм/рад

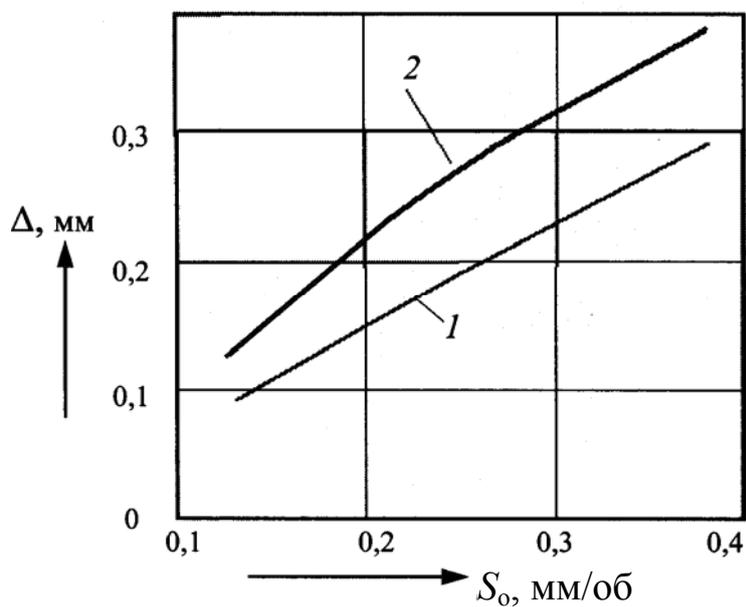
На рис. 4.7 представлены графики влияния радиуса кривизны образующей поверхности детали и подачи на ее погрешность.

Анализ графиков позволяет заключить, что шероховатость на периферии отличается от своих значений по центру фасонной поверхности в 13,5 раза. И при увеличении радиуса кривизны образующей фасонной поверхности в два раза шероховатость по центру фасонной поверхности уменьшается в 1,07 раза, а на периферии поверхности увеличивается в 1,3 раза.

С увеличением подачи шероховатость на двух участках увеличивается почти прямо пропорционально.



a)



б)

Рис. 4.7. Графики влияния радиуса образующей поверхности детали (а) (1 – у центра; 2 – на периферии) и подачи (1 – у центра; 2 – на периферии) на погрешность обработки

### 4.3. Влияние параметров режима резания на шероховатость обработанной поверхности при фрезеровании концевой фрезой

Шероховатость зависит от формообразующей кромки фрезы и траектории ее движения, на которую влияют параметры режима резания и геометрические параметры фрезы.

Схема обработки выступа концевой фрезой на фрезерном станке с вертикальным расположением шпинделя представлена на рис. 4.8.

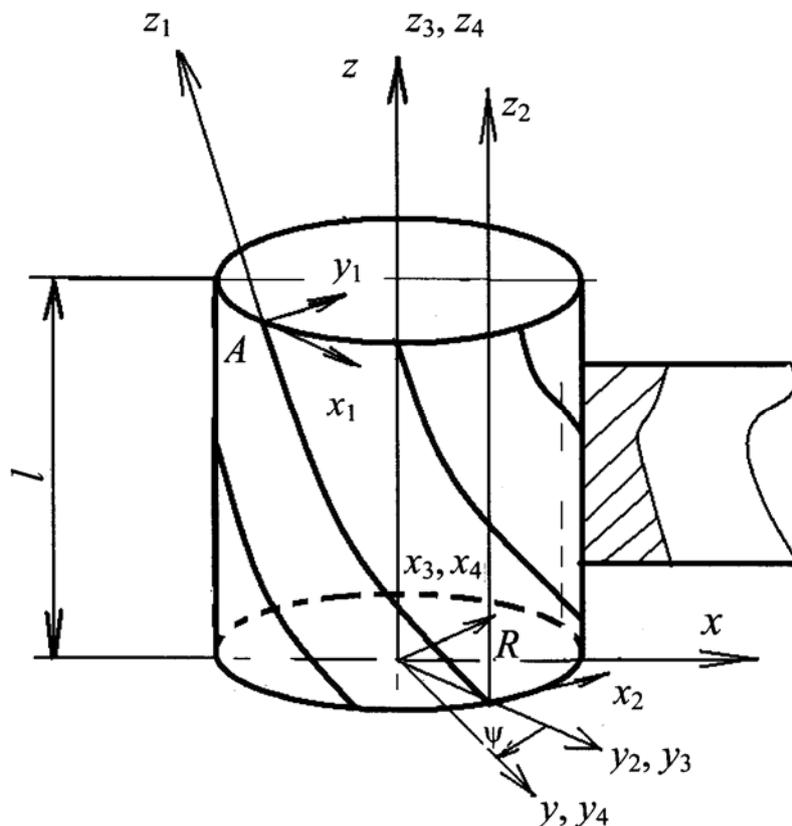


Рис. 4.8. Схема обработки прямолинейного выступа

В данном случае функция формообразования примет вид:

$$\bar{r}_0 = [A_1(x)] \cdot [A_6(\varphi)] \cdot \bar{r}_u, \quad (4.14)$$

где  $\bar{r}_u$  – радиус-вектор формообразующих точек фрезы;  $[A_1(x)]$  – матрица перемещения вдоль оси  $x$ ;  $[A_6(\varphi)]$  – матрица главного вращательного движения фрезы.

Радиус-вектор формообразующих точек фрезы может быть представлен через радиус фрезы  $R$ , полярный угол расположения точек режущих кромок и шаг винтовых канавок  $p$  в виде:

$$\bar{r}_u = [A_3(z/p)] \cdot [A_1(R)] \cdot [A_4(\psi)] \cdot \bar{e}, \quad (4.15)$$

где  $[A_3(z/p)]$  – матрица перемещения вдоль оси  $z$ ;  $[A_1(R)]$  – матрица перемещения вдоль радиуса инструмента;  $[A_4(\psi)]$  – матрица поворота на угол размещения точек режущих кромок;  $\bar{e}$  – радиус-вектор начала координат.

Подставив  $\bar{r}_u$  в функцию формообразования, получили:

$$\bar{r}_o = [A_1(x)] \cdot [A_6(\varphi)] \cdot [A_3(z/p)] \cdot [A_1(R)] \cdot [A_4(\psi)] \cdot \bar{e}. \quad (4.16)$$

Как известно, на траекторию движения зубьев влияют следующие параметры: радиус фрезы, подача на зуб, полярный угол точек фрезы, шаг винтовой линии зубьев и т. д. В качестве примера на рис. 4.9 изображена траектория движения зуба при радиусе фрезы  $R = 20$  мм, подаче на зуб  $S_z = 0,136$  мм/зуб, полярном угле расположения режущих кромок фрезы  $\psi = -\pi/3$ , шаге винтовых линий зубьев  $p = 40$  мм, длине фрезы  $z = 50$  мм и количестве зубьев фрезы  $z_f = 6$ .

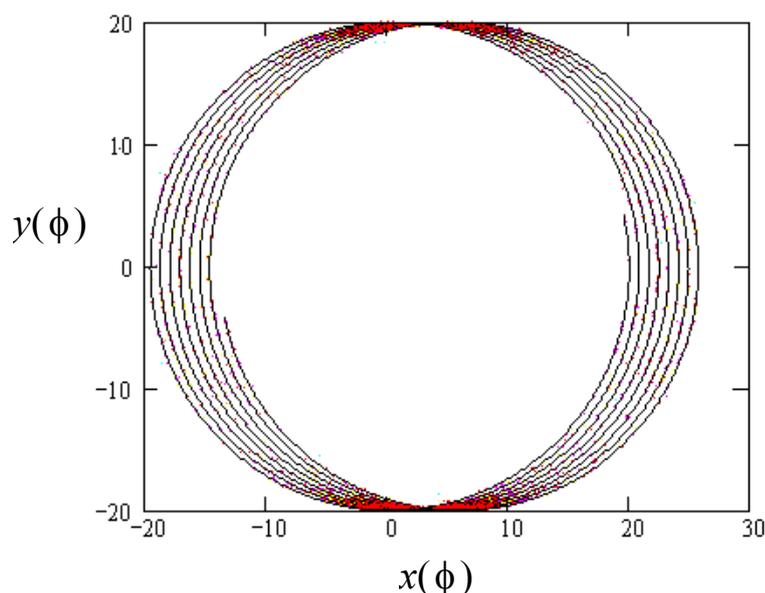


Рис. 4.9. Траектория движения одного зуба фрезы

Погрешность обработки определяли, как расстояние от номинальной геометрической направляющей до точки пересечения траекторий зубьев. При исходных данных она составила 4 мкм.

Влияние радиальных биений зубьев на шероховатость обработанной поверхности представлена на рис. 4.10.

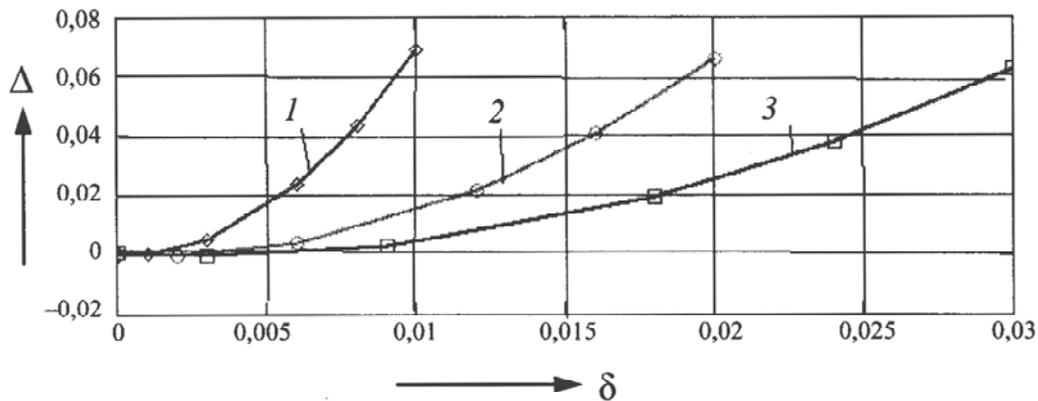


Рис. 4.10. Графики влияния радиальных биений зубьев на шероховатость обработанной поверхности при:  $S_z = 0,1$  мм/зуб (1); 0,2 мм/зуб (2); 0,3 мм/зуб (3)

Анализ расчетов позволил заключить, что при увеличении радиального биения в 2 раза погрешность возрастает в 4,1 раза при  $S_z = 0,1$ ; в 4,6 раза при  $S_z = 0,2$  и в 4,5 при  $S_z = 0,3$  мм/зуб, а коэффициент изменения погрешности  $K_\Delta$  при подаче  $S_z = 0,1$  был равен 7; при  $S_z = 0,2$  –  $K_\Delta = 3,4$ ; при  $S_z = 0,3$  мм/зуб,  $K_\Delta = 2,1$ .

Характер влияния величины подачи на шероховатость приведен на рис. 4.11

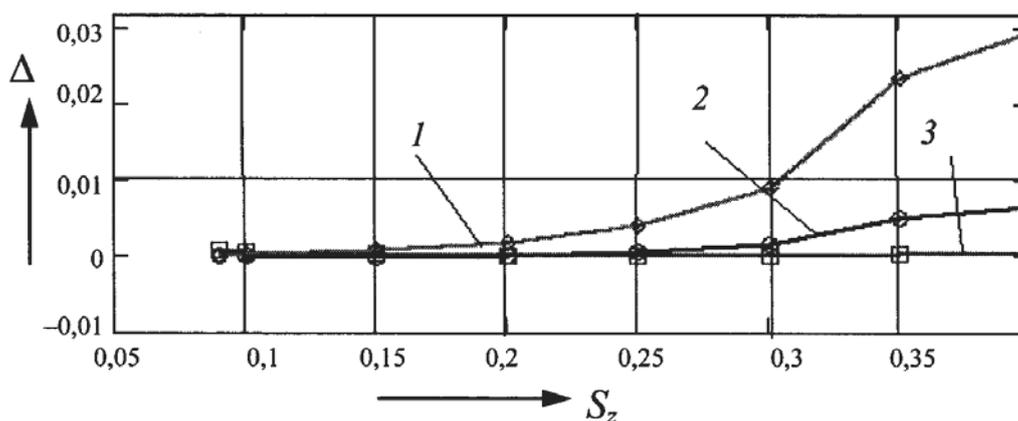


Рис. 4.11. Графики влияния подачи на шероховатость обработанной поверхности при радиальных биениях:  $\delta = 0,006$  мм (1); 0,003 мм (2); 0,001 мм (3)

Влияние отношения радиального биения к подаче на шероховатость приведена на рис. 4.12.

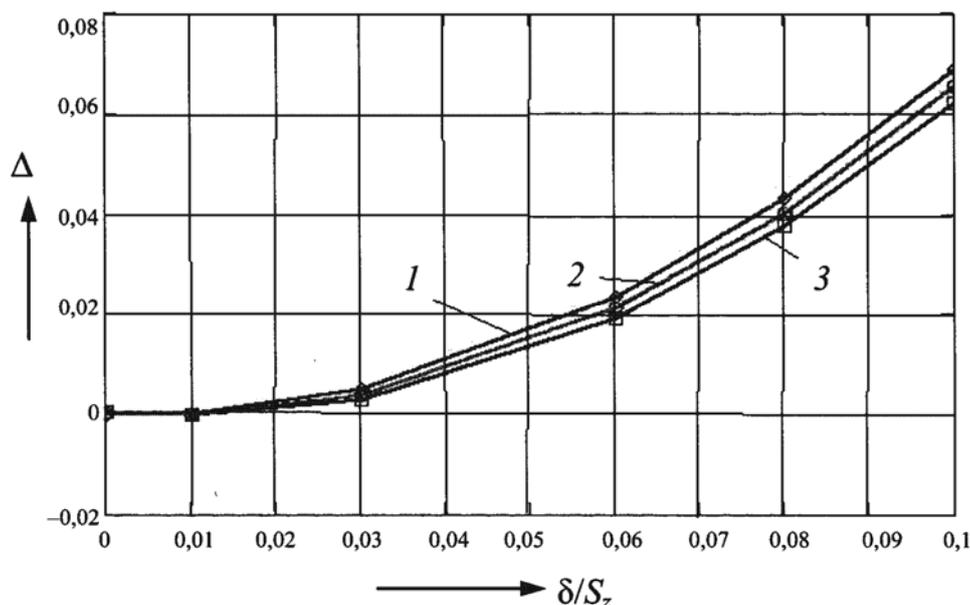


Рис. 4.12. Графики влияния отношения радиального биения к подаче на шероховатость обработанной поверхности при:  $S_z = 0,1$  мм/зуб (1);  $0,2$  мм/зуб (2);  $0,3$  мм/зуб (3)

Характер влияния величины радиуса на шероховатость представлен на рис. 4.13.

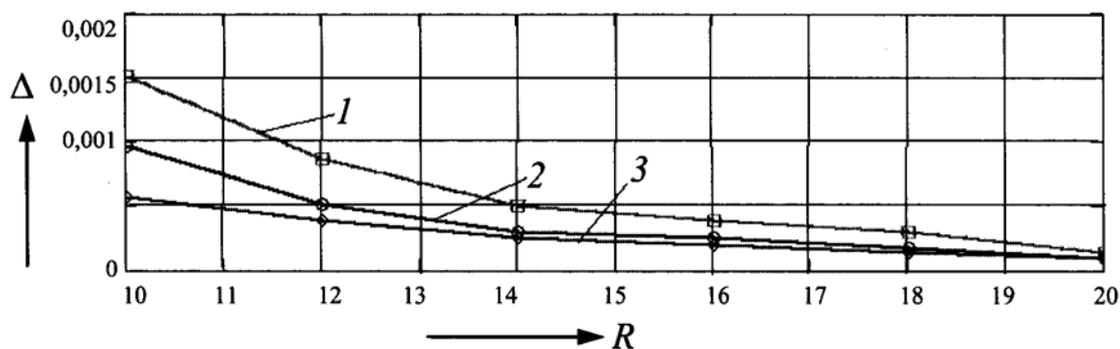


Рис. 4.13. Графики влияния радиуса инструмента на шероховатость обработанной поверхности при радиальных биениях:  $\delta = 0,006$  мм (1);  $0,003$  мм (2);  $0,001$  мм (3)

Проанализировав графики, представленные на рис. 4.11, можно сделать вывод, что с увеличением подачи в 2 раза величина шероховатости увеличивается в 1,3 раза при диаметре фрезы 10 мм и величине биений 6 мкм и практически не изменяется при диаметре фрезы 10 мм и при биениях 3 и 1 мкм. С увеличением подачи в 3 раза величина шероховатости увеличивается в 2 раза при диаметре фрезы 10 мм

и величине биений 6 мкм, в 1,2 раза при биениях в 3 мкм и практически не изменяется при биениях в 1 мкм.

С увеличением отношения величин биения и подач в 3 раза численное значение погрешности обработки возрастает в 1,4 раза, а при увеличении в 6 раз – увеличивается в 2 раза (рис. 4.12). Причем эта зависимость примерно одинакова для подач 0,1 мм/зуб, 0,2 мм/зуб и 0,3 мм/зуб.

С увеличением радиуса инструмента на 2 мм (рис. 4.13) снижается шероховатость на 5 мкм при величине биений 6 мкм и подаче 0,09 мм/зуб. При биении 3 мкм шероховатость снижается на 4 мкм, а при биении 1 мкм – на 1 мкм. С увеличением радиуса в 2 раза снижается шероховатость обработки более чем в 3 раза.

#### 4.4. Влияние параметров режима резания на шероховатость конической поверхности при фрезеровании шаровой фрезой

В качестве обобщенного примера рассмотрена обработка конической поверхности шаровой фрезой на многоцелевом станке с вертикальным расположением шпинделя. Схема обработки представлена на рис. 4.14.

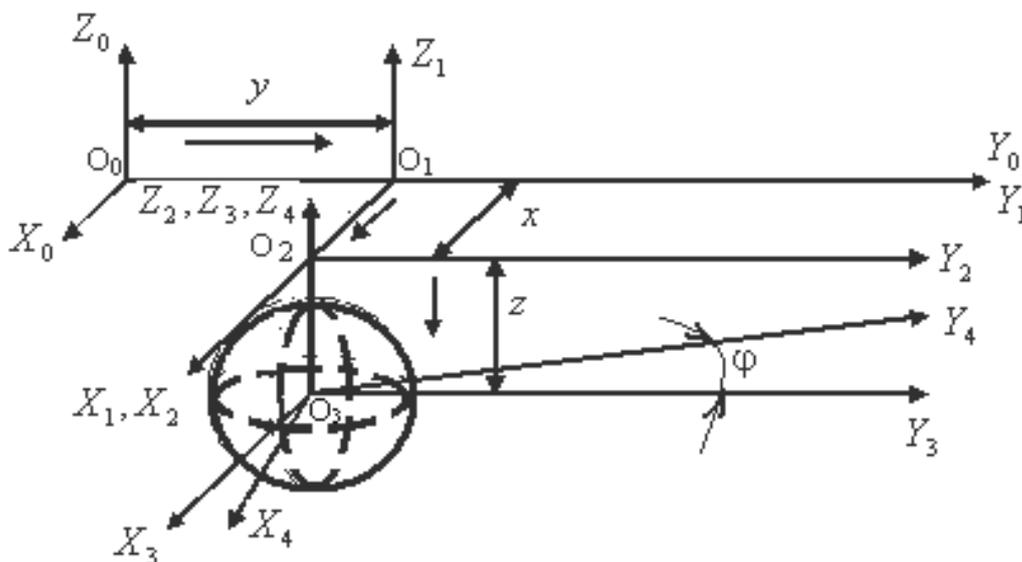


Рис. 4.14. Схема обработки фасонной поверхности шаровой фрезой

В данном случае функция формообразования имеет вид:

$$\bar{r}_0 = [A_2(y)] \cdot [A_1(x)] \cdot [A_3(z)] \cdot [A_6(\varphi)] \cdot \bar{r}_u, \quad (4.17)$$

где  $[A_2(y)]$ ,  $[A_1(x)]$ ,  $[A_3(z)]$  – матрицы перемещения систем координат вдоль осей  $y$ ,  $x$ ,  $z$ ;  $[A_6(\varphi)]$  – матрица поворота системы координат вокруг оси  $Z_3$  на угол  $\varphi$ ;  $\bar{r}_u$  – радиус-вектор формообразующих точек фрезы.

Радиус-вектор формообразующих точек фрезы в системе координат  $S_4$  может быть представлен через радиус шара  $R$ , долготу  $\psi$ , полярный угол  $\theta$  (рис. 4.15), в виде:

$$\bar{r}_4 = [A_6(\psi)] \cdot [A_5(\theta)] \cdot [A_1(R)] \cdot \bar{e}, \quad (4.18)$$

где  $\bar{e}$  – радиус-вектор начала координат;  $[A_6(\psi)]$  – матрица поворота системы координат  $S_5$  вокруг оси  $Z_4$  на угол  $\psi$ ;  $[A_5(\theta)]$  – матрица поворота системы координат  $S_6$  вокруг оси  $Y_5$  на угол  $\theta$ ;  $[A_1(R)]$  – матрица перемещения системы координат  $S_7$  вдоль оси  $X_6$  на величину  $R$ .

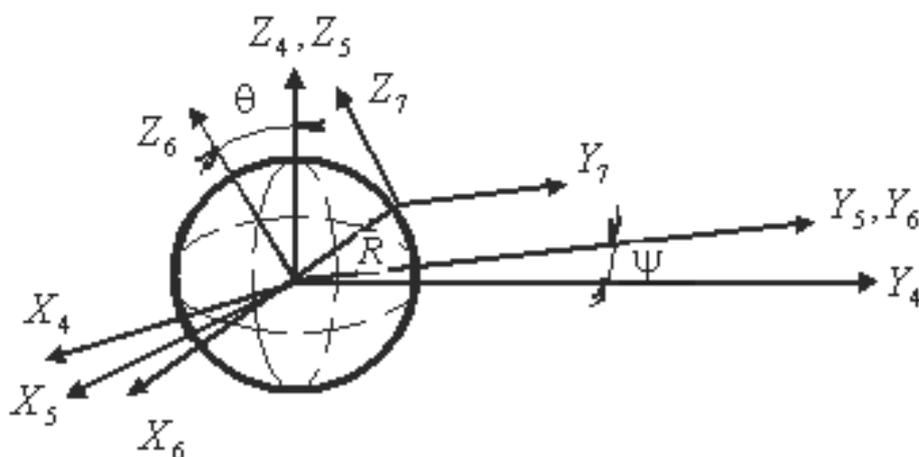


Рис. 4.15. Схема расположения формообразующих точек фрезы

Добавив к уравнению функции формообразования систему связей между параметрами, получили возможность определить всю совокупность обрабатываемых на станке поверхностей. После подстановки (4.18) в функцию формообразования получили:

$$\bar{r}_0 = [A_2(y)] \cdot [A_1(x)] \cdot [A_3(z)] \cdot [A_6(\varphi)] \cdot [A_6(\psi)] \cdot [A_5(\theta)] \cdot [A_1(R)] \cdot \bar{e}. \quad (4.19)$$

Последовательная подстановка матриц, представленных в уравнении (4.19), а также их перемножение позволили представить функцию образования поверхности в виде уравнения (4.20):

$$r_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + R \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\varphi + \psi) \\ y + R \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\varphi + \psi) \\ z - R \cdot \sin(\theta) \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (4.20)$$

где  $x, y, z$  – координаты центра фрезы.

Уравнение обрабатываемой поверхности не может быть однозначно определено функцией образования поверхности. Это обусловлено тем, что необходимо учитывать связи между переменными параметрами. Так, в нашем примере необходимо принимать во внимание функциональную связь  $f(x, y, z) = 0$  и скрытую (охватывающую вращение инструмента и долготу точки на сфере инструмента)

$$x^2 + y^2 = r^2; \quad (4.21)$$

$$z = (r - r_1) / \operatorname{tg} \alpha, \quad (4.22)$$

где  $r$  – радиус конуса в сечении плоскостью  $z = \text{const}$ ;  $\alpha$  – угол конусности;  $r_1$  – радиус конуса в сечении  $z = 0$  (рис. 4.16).

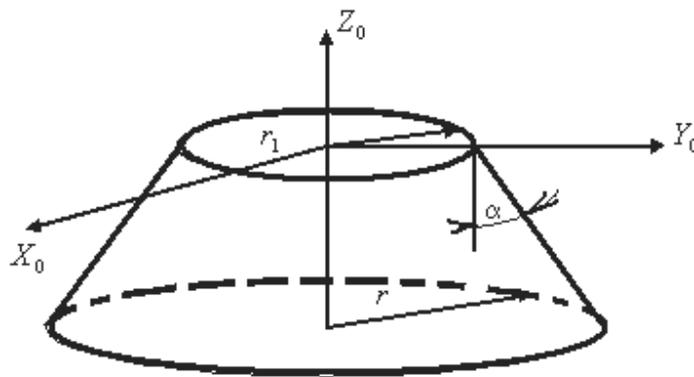


Рис. 4.16. Эскиз обрабатываемой поверхности

В результате проведенных последовательных подстановок окончательные уравнения, описывающие обработанную поверхность, приняли следующий вид:

$$x_0 = x + R \cdot \cos \theta \cdot \cos(\varphi + \psi); \quad (4.23)$$

$$y_0 = \sqrt{r^2 - x^2} + R \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\varphi + \psi); \quad (4.24)$$

$$z_0 = (r - r_1) / \operatorname{tg}(\alpha) - R \cdot \sin(\theta). \quad (4.25)$$

В результате решения уравнений (4.23)–(4.25) получили траекторию движения. В качестве примера выбрали шаровую фрезу с числом зубьев  $z = 17$  и радиусом  $R = 40$  мм. Наибольшее влияние на кинематическую погрешность обработки оказывает величина подачи на зуб, численное значение которой с учетом исходных параметров приняли по справочным данным ( $s_z = 0,2$  мм/зуб.). Полученная траектория представлена на рис. 4.17.

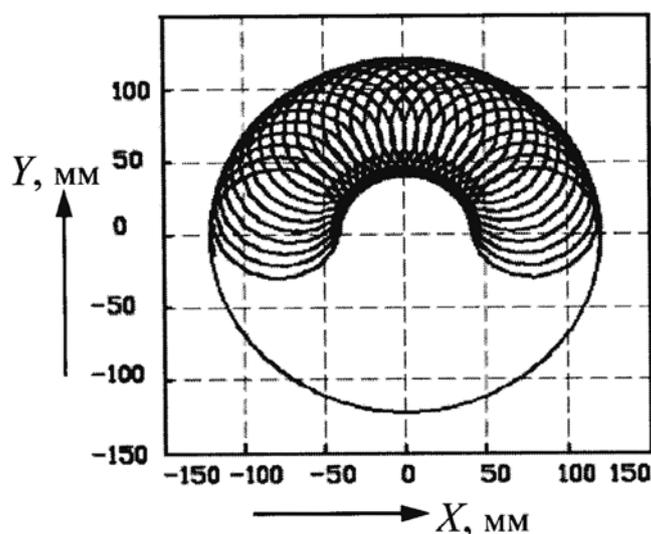


Рис. 4.17. Траектория движения одного зуба фрезы при обработке конической поверхности

Номинальные геометрическая и кинематическая направляющие поверхности детали представлены на рис. 4.18.

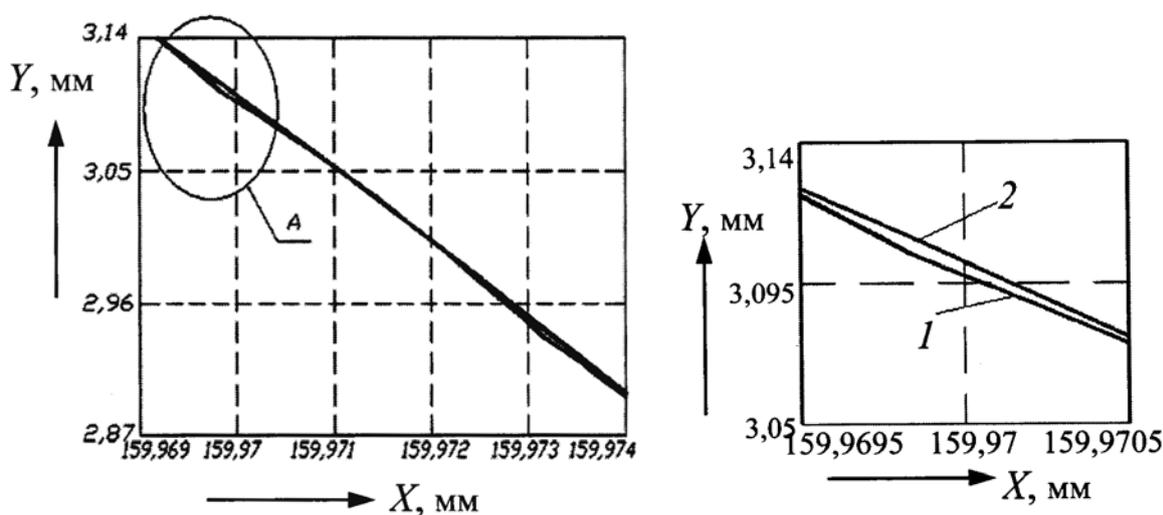


Рис. 4.18. Эскизы номинальных кинематической (1) и геометрической (2) направляющих

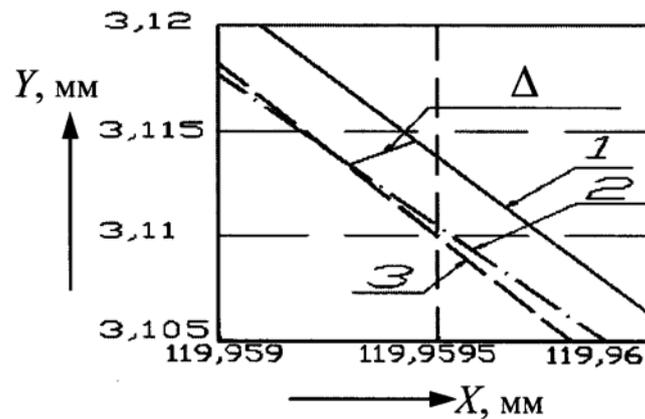


Рис. 4.19. Эскиз номинальной направляющей обрабатываемой поверхности (1) и траекторий движения смежных зубьев (2), (3)

Погрешности обработки определяли как расстояние между номинальными геометрической и кинематической направляющими. Для выбранного в качестве примера случая обработка погрешность составила 0,08 мкм. Кроме того, была определена погрешность при аналогичных условиях обработки по известным зависимостям. Она составляет 1 мкм [30]. Таким образом, полученная матричным способом кинематическая погрешность ниже, чем определенная традиционным способом.

Исходную функцию  $f(x)$  задавали в виде двух матриц  $Y$ ,  $X$  для первого зуба и двух матриц  $X_1$  и  $Y_1$  для второго зуба. В данные матрицы помещены значения координат узловых точек траектории соответственно первого и второго зуба. Затем с помощью встроенной функции кубической сплайн-интерполяции определили искомую функцию. Для этого первоначально был найден вектор вторых производных при приближении в узловых точках к кубическому полиному с помощью функции  $cspline(X, Y)$  для двух соседних зубьев. Затем вычислили множество значений интерполируемой функции в нужном количестве точек с помощью стандартной функции  $interp(cspline(X, Y), X, Y, x)$ . В качестве параметров для нее использовали вектор вторых производных, полученный ранее с помощью функции  $cspline(X, Y)$ , координаты узловых точек траектории движения соответствующего зуба, а также произвольная точка, в которой вычисляется значение интерполирующей функции.

На следующем этапе выполнили решение системы уравнений траектории движения зубьев, полученные в результате проведения интерполяции. В результате решения данной системы определили

точку пересечения траекторий двух соседних зубьев. Кинематическая погрешность обработанной поверхности в данном случае определена расстоянием от этой точки до номинальной обрабатываемой поверхности. Таким образом, погрешность определяли с использованием следующей формулы

$$\Delta = R - \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (4.26)$$

где  $R$  – радиус обрабатываемой поверхности;  $x, y$  – координаты точки пересечения траекторий.

Описанным способом определяли погрешность при различных значениях фактора, влияние которого изучали. Первоначально определяли зависимость погрешности обработки от величины отношения радиуса обрабатываемой поверхности к радиусу инструмента. Данное отношение принимали в пределах от 1,5 до 5 для шести различных вариантов режимов обработки (подача на зуб находится в пределах от 0,05 мм/зуб до 0,5 мм/зуб).

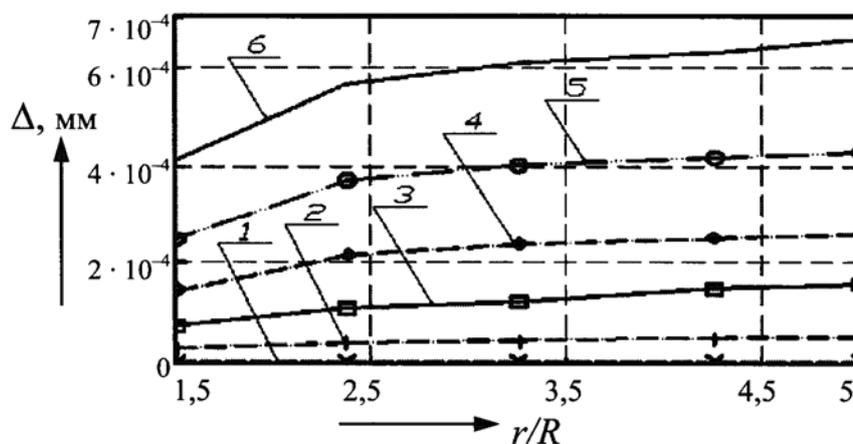


Рис. 4.20. Графики влияния отношения радиуса обрабатываемой поверхности к радиусу инструмента на погрешность обработки при:  $S_z = 0,05$  (1); 0,14 (2); 0,23 (3); 0,32 (4); 0,41 (5); 0,5 (6) мм/зуб

Анализ графиков, приведенных на рис. 4.20, позволил заключить, что при увеличении отношения радиусов погрешность увеличивается, причем в интервале от 1,5 до 2,5 это увеличение более резкое, чем при больших соотношениях. В интервале отношений от 2,5 и выше увеличение погрешности незначительно. Заметим, что при увеличении подачи на зуб в указанном ранее интервале скорость увеличения исследуемого параметра (кинематической погрешности обработанной поверхности) возрастает, что особенно заметно в интервале отношений от 1,5 до 2,5.

Влияние подачи на кинематическую погрешность обработанной поверхности отображено на рис. 4.21. Приведенные графики позволяют сделать вывод, что исследуемая зависимость имеет параболический характер. Таким образом, при назначении режимов обработки следует учитывать, что при малых величинах подачи погрешность увеличивается с небольшим шагом, а при больших величинах это увеличение значительно.

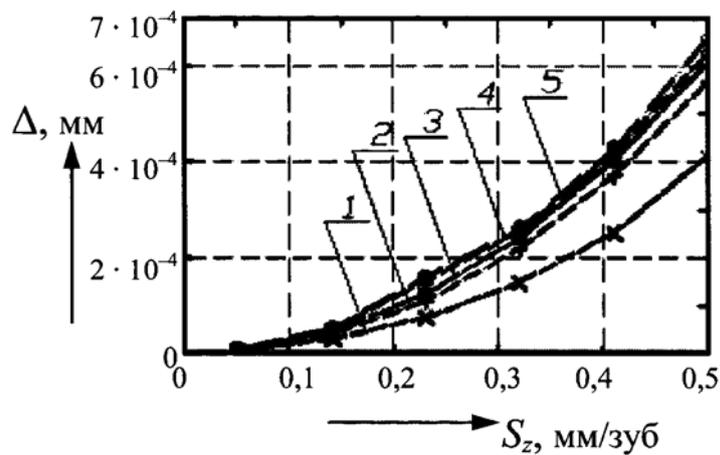


Рис. 4.21. Графики влияния подачи на зуб на погрешность обработки при  $r/R$ : 1,5 (1); 2,375 (2); 3,25 (3); 4,25 (4); 5 (5)

Значительное влияние на погрешность обработки оказывает радиальное биение зубьев.

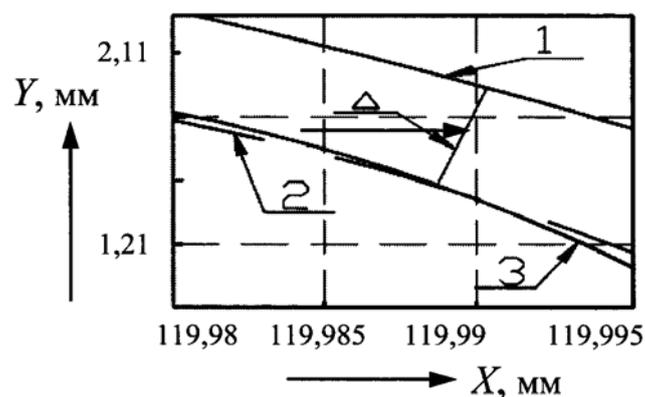
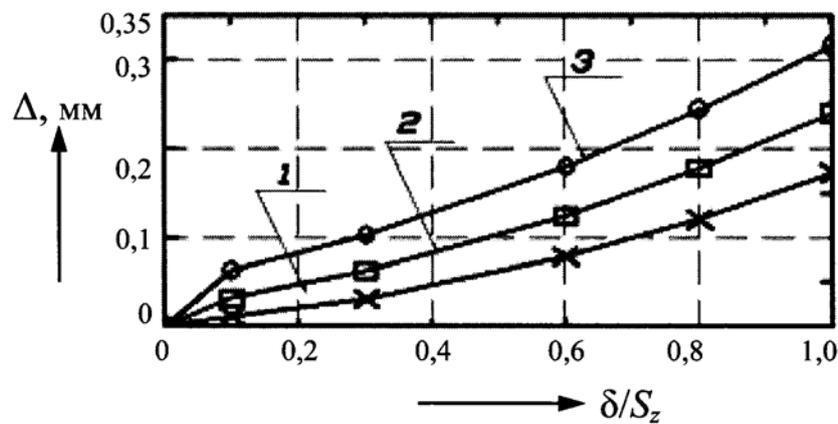


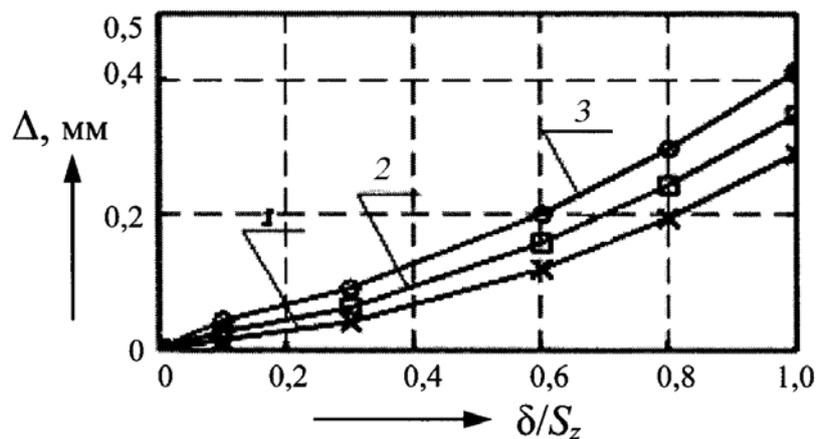
Рис. 4.22. Эскиз номинальной направляющей обрабатываемой поверхности (1) и траекторий движения смежных зубьев (2), (3) с учетом радиального биения

При построении графиков величину радиального биения приняли равной 50 мкм. Это соответствует наихудшему варианту, т. к. в случае, когда из двух соседних зубьев только один имеет радиальное биение погрешность обработки значительно ниже.

Определили влияние отношения радиального биения к подаче на зуб на погрешность обработки. Для более полного рассмотрения влияния данного фактора построили графики для двух значений отношений радиуса обрабатываемой поверхности к радиусу инструмента – 1,5 (рис. 4.23, а) и 3,0 (рис. 4.23, б) при трех различных режимах обработки (значение подачи на зуб находится в пределах от 0,1 мм/зуб до 0,3 мм/зуб).



а)



б)

Рис. 4.23. Графики влияния отношения радиального биения к подаче на зуб на погрешность обработки при:  $S_z = 0,1$  (1);  $0,2$  (2);  $0,3$  (3): а – для отношения радиусов – 1,5; б – для отношения радиусов – 3

Анализ полученных данных позволяет заключить, что при увеличении отношения радиального биения к подаче на зуб в 2 раза погрешность обработки увеличивается в 3,1 раза. Причем характер нарастания исследуемого параметра не меняется при изменении других факторов, которые были учтены при построении графиков.

#### 4.5. Вероятностная оценка точности инструментальной наладки СМРИ

Как показывают производственные испытания [176], можно выделить три вида условий работы инструментальных наладок с СМРИ. В условиях первого вида работы СМРИ не наблюдается больших скоростей и ускорений, динамические усилия незначительные. Изменения размера наладки в основном являются результатом износа его элементов. Вариация размера инструментальной поверхности за счет других факторов несущественная.

При работе в условиях второго вида режим функционирования СМРИ динамический. В каждом цикле значения размера инструментальной наладки  $R(t)$  резко отличаются. Дисперсия  $D_v$  производной  $v(t)$  случайного процесса  $R(t)$  большая и в основном зависит от дисперсии микровыкрашиваний формообразующих кромок  $D_w$ , которая превосходит дисперсию износа  $D_\omega$ .

В условиях третьего вида инструменты работают со средней скоростью, динамика функционирования не вызывает резких изменений размера  $R(t)$ , но с другой стороны, вероятностные характеристики случайных составляющих  $C(t)$  соизмеримы с вероятностными характеристиками процесса изнашивания  $\eta(t)$ .

Лимитирующий размер инструментальной наладки может быть представлен в виде многомерной случайной функции  $R_s(\psi_l, l = 1, \dots, n; t)$ , аргументы которой состоят из параметров  $\psi_l, l = 1, \dots, n$  и времени функционирования  $t$ . Для задач с одним входом-выходом любой размер – это случайное поле  $R_s(\psi, t)$  над плоскостью, которую образуют вход  $\psi$  и время функционирования  $t$ . В сечении случайного поля  $R_s(\psi, t)$  при любом фиксированном значении времени функционирования  $t = T$  получается случайная функция  $R_s = R_s(\psi, T) = R_s(\psi, t)_{t=T}$  одного аргумента – входа  $\psi$ . Она характеризует случайные изменения данного критерия как функцию

непрерывно меняющегося параметра в рассматриваемый момент функционирования  $T$ .

Каждой реализации  $R_{is}(\psi, T)$  случайной функции  $R_s(\psi, T)$  соответствует одна определенная траектория точки соприкосновения, например,  $i_b$ . Множество таких реализаций имеет математическое ожидание  $\overline{R_s} = M\{R_s(\psi, T)\}$ , которому соответствует средняя траектория точки  $B$ . При исследовании надежности инструмента необходимо ограничиваться теми ансамблями размеров, свойства которых обеспечивают непрерывность всех случайных полей  $R_s(\psi, t)$ ,  $S = 1, \dots, n$ , в интересующем диапазоне изменения аргументов  $\psi$  и  $t$ . Для обеспечения непрерывности поля достаточно, чтобы каждая реализация  $R_{is}(\psi, t)$  с вероятностью 1 являлась непрерывной функцией своих аргументов.

Во время функционирования скачкообразное изменение размеров инструментальной поверхности происходит только при разрушении режущего элемента. Если взять один размер конкретной инструментальной наладки, то, откладывая его значение над плоскостью  $(\psi, t)$  в пределах первого цикла  $(\psi_{\min} \leq \psi(t_{t_1}) \leq \psi_{\max})$ , получаем одну пространственную кривую; в пределах второго цикла  $(\psi_{\min} \leq \psi(t_{t_2}) \leq \psi_{\max})$ , вторую кривую и т. д. То есть над плоскостью  $(\psi, t)$  получаем семейство смещенных во времени кривых (рис. 4.24).

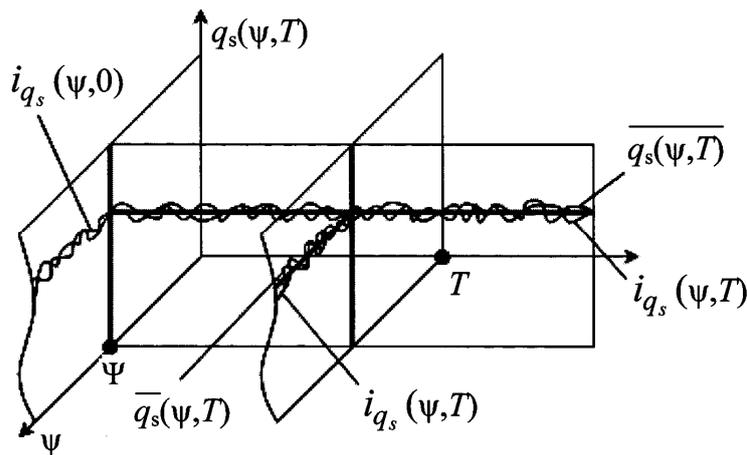


Рис. 4.24. Схема размерного поля СМРИ

Функциональная зависимость между параметром инструмента и размером инструментальной наладки обеспечивается посредством взаимодействия рабочих поверхностей его элементов.

Изучая поток выбросов случайного процесса программируемой точки инструментальной наладки, а также ошибки ее положения, получаем следующую эквивалентную схему: центрированный случайный процесс  $X(t) = \Delta\varphi(\psi, t) - \overline{\Delta\varphi(\psi, t)}$  пересекает два ограничительных предела  $a(t) = a(\psi) - \overline{\Delta\varphi(\psi, t)}$ ;  $u(t) = -u(\psi) - \overline{\Delta\varphi(\psi, t)}$ .

Случайный процесс  $X(t)$  совершает выбросы за установленные пределы  $a(t)$  и  $u(t)$ . Первый выброс каждой реализации квалифицируется как отказ (рис. 4.25).

Вероятность безотказной работы

$$p(T) = e^{-\int_0^T \lambda(t) dt},$$

где  $\lambda(t)dt$  – это условная вероятность того, что случайный процесс  $X(t)$  совершает первый выброс в промежутке от  $t$  до  $t + dt$ , при условии, что до момента  $t$  процесс находится в пределах  $[a(t), u(t)]$ .

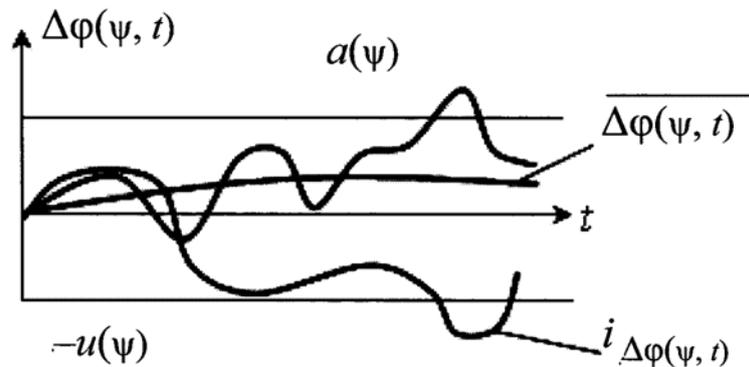


Рис. 4.25. Сечение размерного поля СМРИ

$\nu(t)dt$  – это безусловная вероятность того, что случайный процесс  $X(t)$  в точках  $[t, t + dt]$  совершает выброс;  $\nu(t)$  – интенсивность выбросов;

$\int_0^T \lambda(t)dt$  – это математическое ожидание числа первых выбросов за пределы  $[a(t), u(t)]$  в промежутке  $[0, T]$ ;

$\int_0^T \nu(t)dt$  – это математическое ожидание числа всех выбросов в промежутке  $[0, T]$ ,

не учитывая их номера по порядку  $\overline{n_\lambda(T)} = \int_0^T \lambda(t) dt$ ;  
 $\overline{n_\nu(T)} = \int_0^T \nu(t) dt$ ;  $p_\nu(T) = e^{-\overline{n_\nu(T)}}$ . (4.27)

В работах [227], [228] нижняя граница для  $p(T)$  устанавливается неравенством  $p(T) \geq 1 - \overline{n_\nu(T)}$ . Учитывая (4.27)  $p_\nu(T)$  оказывается более подходящей нижней границей для  $p(T)$ , т. к. при любом  $\overline{n_\nu(T)}$  ( $\overline{n_\nu(T)} > 0$ )

$$1 - \overline{n_\nu(T)} < e^{-\overline{n_\nu(T)}}. \quad (4.28)$$

Для моментов времени  $T$ , когда вероятность последующих (за первым) выбросов еще мала, различие между  $p_\nu(T)$  и  $p(T)$  является несущественной. Именно этот период представляет наибольший интерес при исследовании надежности СМРИ.

Интенсивность выбросов случайного процесса  $X(t)$  за пределы  $[a(t), u(t)]$

$$\nu(t) = \nu^+(t) + \nu^-(t),$$

где  $\nu^+(t)$  – интенсивность пересечений снизу вверх предела  $a(t)$  случайного процесса  $X(t)$  в момент  $t$ ;  $\nu^-(t)$  – интенсивность пересечений сверху вниз предела  $u(t)$  случайного процесса  $X(t)$  в момент  $t$ .

Согласно [229] интенсивность пересечений, непрерывно дифференцируема с непрерывными производными пределов  $a(t)$  и  $u(t)$ . Непрерывная дифференцируемость с вероятностью 1 случайным процессом соответственно выражаются так:

$$\nu^+(t) = \int_{\dot{a}(t)}^{\infty} [V - \dot{a}(t)] f[a(t), V; t] d_V, \quad (4.29)$$

$$\nu^-(t) = \int_{-\infty}^{\dot{u}(t)} [\dot{u}(t) - V] f[u(t), V; t] d_V, \quad (4.30)$$

где  $f[x, V; t]$  – совместная плотность распределения случайного процесса  $X(t)$  и его производной  $V(t) \equiv \dot{x}(t) = \frac{d}{dt} x(t)$  в один и тот же момент времени  $t$ .

Случайный процесс производной  $V(t)$  характеризуется функцией математического ожидания  $\bar{V}(t) = \frac{d}{dt} \bar{X}(t) \equiv 0$  и корреляционной функцией

$$K_{v(t_1, t_2)} = \frac{d^2}{dt_1 dt_2} K_x(t_1, t_2). \quad (4.31)$$

Для нормального случайного процесса  $X(t)$  можно взять интеграл от (4.29), (4.30) и интенсивности выбросов  $\upsilon^+(t)$  и  $\upsilon^-(t)$  выражаются следующим образом [227]:

$$\begin{aligned} \upsilon^+(t) = & \frac{\sqrt{D_v(t)}}{\sqrt{D_x(t)}} \sqrt{1 - r_{x_1v}^2(t, t)} \phi' \left( \frac{-a(t)}{\sqrt{D_x(t)}} \right) \left[ \phi' \left( \frac{-\dot{a}(t) + \frac{\sqrt{D_v(t)}}{\sqrt{D_x(t)}} r_{x_1v}(t, t) a(t)}{\sqrt{D_v(t)} \sqrt{1 - r_{x_1v}^2(t, t)}} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{-\dot{a}(t) + \frac{\sqrt{D_v(t)}}{\sqrt{D_x(t)}} r_{x_1v}(t, t) a(t)}{\sqrt{D_v(t)} \sqrt{1 - r_{x_1v}^2(t, t)}} \phi' \left( \frac{-\dot{a}(t) + \frac{\sqrt{D_v(t)}}{\sqrt{D_x(t)}} r_{x_1v}(t, t) a(t)}{\sqrt{D_v(t)} \sqrt{1 - r_{x_1v}^2(t, t)}} \right) \right], \quad (4.32) \end{aligned}$$

$$\upsilon^-(t) = \frac{\sqrt{D_v(t)}}{\sqrt{D_x(t)}} \sqrt{1 - r_{x_1v}^2(t, t)} \phi' \left( \frac{-u(t)}{\sqrt{D_x(t)}} \right) \left[ \phi' \left( \frac{-\dot{u}(t) + \frac{\sqrt{D_v(t)}}{\sqrt{D_x(t)}} r_{x_1v}(t, t) u(t)}{\sqrt{D_v(t)} \sqrt{1 - r_{x_1v}^2(t, t)}} \right) \right],$$

где  $\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{y^2}{2}} dy$  – функция Лапласа,  $\phi'(z) = \frac{d}{dz} \phi(z)$ ;

$D_x(t) = K_x(t_1, t_2)_{t_1=t_2=t}$  – дисперсия случайного процесса  $X(t)$ ;

$D_v(t) = K_v(t_1, t_2)_{t_1=t_2=t}$  – дисперсия случайного процесса производной

$V(t)$ ;  $r_{x_1v}(t, t)$  – нормированная взаимная корреляционная функция случайного процесса  $X(t)$  и его производной  $V(t)$  в один и тот же момент времени  $t$ .

Математическое ожидание числа пересечений  $a(t)$  или  $u(t)$  процессом  $x(t)$  в  $[0, T]$

$$n_v^\chi(T) = \int_0^T V^\chi(t) dt, \quad (4.33)$$

где  $\chi \equiv +1$  при пересечении предела  $a(t)$  снизу вверх;  $\chi \equiv -1$  при пересечении предела  $u(t)$  сверху вниз.

Так для определения  $n_v^\chi(T)$  необходимо проинтегрировать  $V^\chi(t)$  от 0 до  $T$ . Используя (4.32) можно значительно ускорить вычисления. В некоторых случаях удобнее пользоваться приближенными выражениями для  $V^\chi(t)$ .

Двумерная нормальная плотность  $f[x, v, t]$  разложима [229], [230] в ряд по степеням  $r_{x_1v}(t, t)$ :

$$f[x, v, t] = \frac{1}{\sqrt{D_x(t)}\sqrt{D_v(t)}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_{x_1v}^n(t, t)}{n!} \phi^{(n+1)}\left(\frac{x}{\sqrt{D_x(t)}}\right) \phi^{(n+1)}\left(\frac{v}{\sqrt{D_v(t)}}\right), \quad (4.34)$$

где  $\phi^{(n+1)}(Z) = \frac{d^{(n+1)}}{d_Z^{(n+1)}} \phi(Z)$ .

Учитывая (4.34), можно взять интегралы (4.29), (4.30) почленным интегрированием. Интенсивность пересечений случайным процессом  $X(t)$  пределов  $a(t) > 0$  с  $\dot{a}(t) < 0$  снизу вверх и  $u(t) < 0$  с  $\dot{u}(t) < 0$  сверху вниз в момент  $t$  при учете свойств  $\phi(Z)$  и  $\phi^{(n+1)}(Z)$ , соответственно выражается следующим образом:

$$\begin{aligned} \nu^+(t) = & \frac{\sqrt{D_v(t)}}{\sqrt{D_x(t)}} \phi'\left(\frac{a(t)}{\sqrt{D_x(t)}}\right) \phi'\left(\frac{-\dot{a}(t)}{\sqrt{D_v(t)}}\right) - \frac{\dot{a}(t)}{\sqrt{D_x(t)}} \phi'\left(\frac{a(t)}{\sqrt{D_x(t)}}\right) \phi\left(\frac{-\dot{a}(t)}{\sqrt{D_v(t)}}\right) - \\ & - \frac{\sqrt{D_v(t)}}{\sqrt{D_x(t)}} r_{x_1v}(t, t) \phi''\left(\frac{a(t)}{\sqrt{D_x(t)}}\right) \phi\left(\frac{-\dot{a}(t)}{\sqrt{D_v(t)}}\right), \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned}
v^-(t) = & \frac{\sqrt{D_v(t)}}{\sqrt{D_x(t)}} \phi' \left( \frac{-u(t)}{\sqrt{D_x(t)}} \right) \phi' \left( \frac{-\dot{u}(t)}{\sqrt{D_v(t)}} \right) + \\
& + \frac{\dot{u}(t)}{\sqrt{D_x(t)}} \phi' \left( \frac{-u(t)}{\sqrt{D_x(t)}} \right) \left[ 1 - \phi \left( \frac{-\dot{u}(t)}{\sqrt{D_v(t)}} \right) \right] - \\
& - \frac{\sqrt{D_v(t)}}{\sqrt{D_x(t)}} r_{x_1 v}(t, t) \phi'' \left( \frac{-u(t)}{\sqrt{D_x(t)}} \right) \left[ 1 - \phi \left( \frac{-\dot{u}(t)}{\sqrt{D_v(t)}} \right) \right] + \\
& + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{D_v(t)} r_{x_1 v}^n(t, t)}{\sqrt{D_x(t)} n!} \cdot \phi^{(n+1)} \left( \frac{-u(t)}{\sqrt{D_x(t)}} \right) \phi^{(n-1)} \left( \frac{-\dot{u}(t)}{\sqrt{D_v(t)}} \right).
\end{aligned}$$

Приближенные выражения для интенсивностей пересечений получают, ограничиваясь только первыми членами быстросходящихся рядов (4.35).

Выражения (4.32), (4.35) могут быть использованы для определения интенсивных пересечений  $v^x(t)$  и соответствовать математическому ожиданию числа выбросов  $n_v^x(t)$  для размеров инструментальных блоков. Ошибка положения  $\Delta\phi(\psi, t)$  в этом случае является нормальным нестационарным непрерывно дифференцируемым с вероятностью 1 случайным процессом, а математическое ожидание  $\overline{\Delta\phi(\psi, t)}$  имеет непрерывную производную в интервале  $[0, T]$ .

Если выполнены условия центральной предельной теоремы теории вероятности, то случайный процесс выхода в исследуемом положении или в определенной ситуации может быть рассмотрен как нормальный или близкий к нормальному. Если, например, нестационарный процесс ошибки положения  $\Delta\phi(\psi, t)$ , у которого  $\Delta\phi(\psi, t) = B + At$ , а случайный процесс  $\Delta\dot{\phi}(\psi, t) = X(t)$  является стационарным, то  $a(t) = a(\psi) - B - At$ ,  $\dot{a}(t) = -A$ ,  $u(t) = -u(\psi) - B - At$ ,  $\dot{u}(t) = -A$ ,  $r_{x_1 v}(t, t) = 0$ ,  $Dx(t) = D\Delta\phi(t) = \sigma_x^2 = \text{const}$ ;  $Dv(t) = \sigma_v^2 = \text{const}$  и значит математическое ожидание числа выбросов

$$\begin{aligned} \overline{n_v(T)} &= \overline{n_v^+(T)} + \overline{n_v^-(T)} = \\ &= \left[ \frac{\sigma_v}{A} \phi' \left( \frac{A}{\sigma_v} \right) + \phi \left( \frac{A}{\sigma_v} \right) \right] \cdot \left[ \phi \left( \frac{a(\psi) - B}{\sigma_x} \right) - \phi \left( \frac{a(\psi) - B - AT}{\sigma_x} \right) \right] + \\ &+ \left[ \frac{\sigma_v}{A} \phi' \left( \frac{A}{\sigma_v} \right) + \phi \left( \frac{A}{\sigma_v} \right) - 1 \right] \cdot \left[ \phi \left( \frac{u(\psi) + B + AT}{\sigma_x} \right) - \phi \left( \frac{u(\psi) + B}{\sigma_x} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Если  $\Delta\varphi(\psi, t) = X(t)$  нестационарный процесс с  $\overline{\Delta\varphi(\psi, t)} \equiv 0$  в симметричных пределах  $a(\psi) = u(\psi) = a$ , тогда  $a(t) = -u(t) = a$ ,  $\dot{a}(t) = \dot{u}(t) = 0$

$$\overline{n_v(T)} = \int_0^T \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sqrt{D_v(t)}}{\sqrt{D_x(t)}} \phi' \left( \frac{a}{\sqrt{D_x(t)}} \right) dt + \int_0^T \frac{\sqrt{D_v(t)} ar_{x1v}(t, t)}{D_x(t)} \phi' \left( \frac{a}{\sqrt{D_x(t)}} \right) dt.$$

Математическое ожидание числа выбросов для нестационарного процесса выхода более общего вида можно определить, используя (4.32) или приближенные формулы  $v^\chi(t)$ , которые получают, ограничиваясь первыми членами бесконечных рядов (4.35).

Совокупность размеров в определенной ситуации или в исследуемом положении инструментальной наладки – это случайный процесс времени функционирования. Каждый такой случайный процесс имеет отдельные составляющие, образование которых обусловлено изготовлением и функционированием наладки

$$\left. \begin{aligned} R_s(\psi, t) &= R_{n_s}(\psi) + \eta_s(\psi, t) + c_s(\psi, t) \\ R_s(c, t) &= R_{n_s}(c) + \eta_c(c, t) + c_s(c, t) \end{aligned} \right\} \quad (4.37)$$

где  $R_{n_s}(\psi)$  и  $R_{n_s}(c)$  – величина соответствующего размера в определенном положении или ситуации в новом инструменте;  $\eta_s(\psi, t)$  и  $\eta_c(c, t)$  – накопленная величина износа, соответствующего размера в определенном положении или ситуации за время функционирования  $t$ ;  $c_s(\psi, t)$ ,  $c_s(c, t)$  – составляющие, которые в основном определяются режимом обработки.

Так как уравнения (4.37) в сущности не различаются, то для простоты анализа можно записать

$$R(t) = R_n + \eta(t) + c(t),$$

где  $\eta(t) = \int_0^t w(t') dt'$ .

Здесь  $w(t')$  – скорость износа, которая характеризуется математическим ожиданием  $\overline{w(t)}$  и корреляционной функцией  $K_w(t_1, t_2)$

$$\overline{\eta(t)} = \int_0^t \overline{w(t')} dt',$$

$$K_{\eta}(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} K_w(t', t'') dt' dt''. \quad (4.38)$$

При установившемся износе  $\overline{\eta(t)} = \int_0^t \overline{w(t')} dt' = mt$ ,  $m = \overline{w(t)}$  средняя скорость износа.

Корреляционная функция стационарного случайного процесса  $w(t)$  является функцией одного аргумента – разности  $\tau = t_2 - t_1$  и выражение корреляционной функции  $K_{\eta}(t_1, t_2)$

$$K_{\eta}(t_1, t_2) = \int_0^{t_2} (t_2 - \tau) K_w(\tau) d\tau + \int_0^{t_1} (t_1 - \tau) K_w(\tau) d\tau - \int_0^{t_2 - t_1} (t_2 - t_1 - \tau) K_w(\tau) d\tau, \quad (4.39)$$

если  $t_1 = t_2 = t$ , то дисперсия

$$D_{\eta}(t) = 2 \int_0^t (t - \tau) K_w(\tau) d\tau. \quad (4.40)$$

Случайный процесс скорости износа  $w(t)$  часто имеет характер быстро убывающей корреляционной функции  $K_w(\tau)$ . В результате  $\eta(t)$  обладает свойством сильного перемешивания и имеет почти линейно возрастающую дисперсию.

Например,

$$K_w(\tau) = D_w e^{-\alpha|\tau|} \quad \text{или} \quad K_w(\tau) = D_w e^{-\alpha|\tau|} \cos \beta\tau, \quad (4.41)$$

то, соответственно,  $D_{\eta}(t) = \frac{2D_w}{\alpha}t + \frac{2D_w}{\alpha^n}(e^{-\alpha t} - 1)$ , (4.42)

$$D_{\eta}(t) = \frac{2D_w\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}t + \frac{2D_w}{\alpha^2 + \beta^2} \left\{ e^{-\alpha t} \left[ \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} \cos \beta t - \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \sin \beta t \right] - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} \right\}. \quad (4.43)$$

Выражение (4.43) позволяет заключить, что даже при сравнительно небольшом значении параметра  $\alpha$  со временем доминирующими становятся линейные члены.

Взаимная корреляционная функция случайного процесса  $\eta(t)$  и его производной  $w(t)$  будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \hat{R}_{\eta,w}(t_1, t_2) &= M\{\eta(t_1)w(t_2)\} = M\left\{ \int_0^{t_1} w(t') dt' w(t_2) \right\} = \int_0^{t_1} M\{w(t')w(t_2)\} dt' = \\ &= \int_0^{t_1} K_w(t', t_2) dt' = \int_0^{t_1} K_w(t_2 - t') dt' = - \int_{t_2}^{t_2-t_1} K_w(\tau) d\tau = \int_{t_2-t_1}^{t_2} K_w(\tau) d\tau, \\ \hat{R}_{\eta,w}(t_1, t_2) &= \hat{R}_{\eta,w}(t_1, t_2)_{t_1=t_2=t} = \int_0^t K_w(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Соответствующая нормированная взаимная корреляционная функция

$$r_{\eta,w}(t, t) = \frac{\hat{R}_{\eta,w}(t, t)}{\sqrt{\hat{R}_{\eta}(t)}' \sqrt{D_w}}. \quad (4.45)$$

Если случайный процесс скорости изнашивания имеет корреляционную функцию (4.41), то

$$\begin{aligned} r_{\eta,w} &= \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\sqrt{2} \sqrt{\alpha t + e^{-\alpha t} - 1}}, \\ r_{\eta,w}(t, t) &= \\ &= \frac{e^{-\alpha t} (\alpha \cos \beta t + \beta \sin \beta t) + \alpha}{\sqrt{2} \sqrt{\alpha(\alpha^2 + \beta^2)t + e^{-\alpha t} [(\alpha^2 + \beta^2) \cos \beta t - 2\alpha\beta \sin \beta t] - (\alpha^2 - \beta^2)}}. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Для процессов изнашивания, при относительно небольших значениях  $\alpha$ , нормированная взаимная корреляционная функция  $r_{\eta, w}(t, t)$  сравнительно быстро убывает и, тем самым, случайный процесс износа  $\eta(t)$  довольно быстро становится некоррелированным со своей производной  $w(t)$  в один и тот же момент  $t$ .

Составляющая  $c(t)$  в основном появляется в инструментах, которые работают со значительной динамикой. Деформация деталей сборного механизированного инструмента, случайные колебания, случайные расположения деталей в поле зазора и т. д. помимо износа вызывают дополнительные флуктуации размера инструментальной наладки, другими словами, к процессу износа добавляется случайный «шум».

В общем случае  $c(t)$  – это нестационарный случайный процесс, корреляционная функция  $K_c(t_1, t_2)$  которого очень быстро убывает по каждому из своих аргументов. В точных СМРИ отказы в основном наблюдаются перед тем, как в результате износа появляются зазоры, «шум» и  $c(t)$  с некоторым приближением может быть представлен как стационарный случайный процесс, со стационарной производной  $\omega(t)$ . Математическое ожидание  $\bar{c}(t) = \overline{\omega}(t) = 0$ , а корреляционная функция  $K_c(t_1, t_2) = K_c(t_2 - t_1) = K_c(\tau)$  случайного процесса  $c(t)$  очень быстро убывает по  $\tau$ .

Математическое ожидание размера инструментальной наладки

$$\bar{R}(t) = \bar{R}_n + \eta(t) + \bar{c}(t) = \bar{R}_n + mt = \bar{R}(0) + mt. \quad (4.47)$$

Дисперсия

$$D_R(t) = D_{R_n} + D_\eta(t) + D_c = D_R(0) + D_\eta(t) \approx D_R(0) + dt, \quad (4.48)$$

где  $d$  – коэффициент линейного члена в выражении (4.43).

Корреляционная функция

$$K_R(t_1, t_2) = D_{R_n} + K_\eta(t_1, t_2) + K_c(t_1, t_2).$$

Корреляционная функция производной  $V(t)$  случайного процесса  $R(t)$  будет иметь вид:

$$K_v(t_1, t_2) = \frac{d^2}{dt_1 dt_2} K_R(t_1, t_2) = K_w(t_1, t_2) + K_\omega(t_1, t_2). \quad (4.49)$$

Так как случайные процессы  $w(t)$  и  $\varpi(t)$  стационарны, то стационарным будет и случайный процесс  $V(t)$ , тогда (4.49) можно записать  $K_v(\tau) = K_w(\tau) + K_\varpi(\tau)$ .

Дисперсия производной  $V(t)$ :

$$D_v = K_v(0) = D_w + D_\varpi. \tag{4.50}$$

Взаимная корреляционная функция случайного процесса  $R(t)$  и его производная  $V(t)$

$$\begin{aligned} \hat{R}_{R,v}(t_1, t_2) &= \frac{d}{dt_2} K_R(t_1, t_2) = \frac{d}{dt_2} K_\eta(t_1, t_2) + \frac{d}{dt_2} K_c(t_1, t_2) = \\ &= \hat{R}_{\eta,w}(t_1, t_2) + \hat{R}_{c,\varpi}(t_1, t_2), \end{aligned} \tag{4.51}$$

где  $\hat{R}_{c,\varpi}(t_1, t_2)$  – взаимная корреляционная функция случайного процесса  $c(t)$  и его производной  $\varpi(t)$ . Так как  $c(t)$  является стационарным случайным процессом, то  $R_{c,\varpi}(t_1, t_2)_{t_1=t_2=t} = 0$  и, тем самым,

$$r_{R,v}(t_1, t_2) = \frac{\hat{R}_{R,v}(t_1, t_2)}{\sqrt{D_R} \sqrt{D_v}} = \frac{\hat{R}_{\eta,w}(t_1, t_2)}{\sqrt{D_{R_\eta} + D_\eta(t) + D_c} \sqrt{D_w + D_\varpi}}. \tag{4.52}$$

Приращением случайного процесса ( $R(t)$ ) за промежуток  $\delta$  будет величина  $\delta_R(t) = R(t + \delta) - R(t)$ . Матрицу величин приращений  $\|i_{\delta_R}(t_k)\|$  получают по значениям ординат случайного процесса  $R(t)$  с шагом  $\delta$  (рис. 4.26)

$$i_{\delta_R}(t_k) = i_R(t_k + \delta) - i_R(t_k)$$

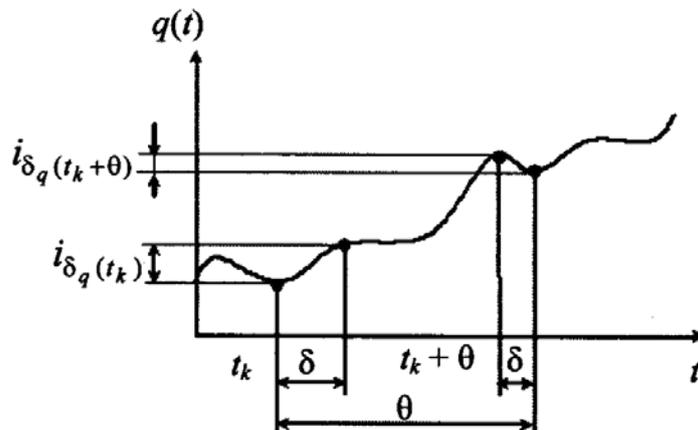


Рис. 4.26. График изменения случайного процесса

Математическое ожидание приращений

$$\overline{\delta_R(t)} = \overline{R(t+\delta)} - \overline{R(t)} = m(t+\delta) - mt = m\delta. \quad (4.53)$$

Корреляционная функция приращений

$$\begin{aligned} K_{\delta R}(t, t+\theta) &= M \left\{ \left[ \dot{\delta}_R(t)(t+\delta) - \dot{R}(t) \right] \cdot \left[ \dot{R}(t+\theta+\delta) - \dot{R}(t+\theta) \right] \right\} = \\ &= M \{ \dot{\eta}(t+\delta)\dot{\eta}(t+\theta+\delta) \} - M \{ \dot{\eta}(t+\delta)\dot{\eta}(t+\theta) \} - M \{ \dot{\eta}(t+\theta+\delta) \} + \\ &+ M \{ \dot{\eta}(t)\dot{\eta}(t+\theta) \} + M \{ \dot{c}(t+\delta)\dot{c}(t+\theta+\delta) \} - M \{ \dot{c}(t+\delta)\dot{c}(t+\theta) \} - \\ &- M \{ \dot{c}(t)\dot{c}(t+\theta+\delta) \} + M \{ \dot{c}(t)\dot{c}(t+\delta) \} = \\ &= K_{\eta}(t+\delta, t+\theta+\delta) - K_{\eta}(t+\delta, t+\theta) - K_{\eta}(t, t+\theta+\delta) + K_{\eta}(t, t+\theta) + \\ &+ K_c(t+\delta, t+\theta+\delta) - K_c(t+\delta, t+\theta) - K_c(t, t+\theta+\delta) + K_c(t, t+\theta). \end{aligned}$$

Согласно (4.39) и (4.41)

$$\begin{aligned} K_{\delta R}(t, t+\theta) &= -2 \int_0^{\theta} (\theta - \tau) K_w(\tau) d\tau + \int_0^{\theta-\delta} (\theta - \delta - \tau) K_w(\tau) d\tau + \\ &+ \int_0^{\theta+\delta} (\theta + \delta - \tau) K_w(\tau) d\tau + 2K_c(\theta) - K_c(\theta - \delta) - K_c(\theta + \delta). \quad (4.54) \end{aligned}$$

Таким образом, корреляционная функция приращения случайного процесса  $R(t)$  является функцией одного аргумента – разности  $(t+\theta) - t = \theta$ :

$$K_{\delta R}(t, t+\theta) = K_{\delta R}(\theta). \quad (4.55)$$

Полученные выражения (4.53) и (4.55) свидетельствуют о том, что  $R(t)$  принадлежит к классу случайного процесса со стационарными приращениями.

Учитывая (4.40) для  $\theta \geq \delta$ , получим:

$$\begin{aligned} K_{\delta R}(\theta) &= -D_{\eta}(\theta) + \frac{1}{2} D_{\eta}(\theta - \delta) + \frac{1}{2} D_{\eta}(\theta + \delta) + \\ &+ 2K_c(\theta) - 2K_c(\theta - \delta) - K_c(\theta + \delta). \quad (4.56) \end{aligned}$$

Дисперсию приращений получают по (4.54)

$$\begin{aligned} K_{\delta R}(\theta) = D_{\delta R} &= 2 \int_0^{\delta} (\delta - \tau) K_w(\tau) d\tau + 2D_c - 2K_c(\delta) = \\ &= D_{\eta}(\delta) + 2D_c - 2K_c(\delta). \end{aligned} \quad (4.57)$$

Уравнения (4.56) и (4.57) могут быть использованы для дисперсий  $D_w$  и  $D_{\omega}$  необходимых для определения (4.50) дисперсии  $D_v$  производной  $V(t)$  случайного процесса  $R(t)$ . Выражение дисперсии  $D_{\eta}(t)$  в зависимости от предполагаемого вида корреляционной функции  $K_w(t)$  содержит два ( $D_w, \alpha$ ) (4.42) или три ( $D_w, \alpha, \beta$ ) (4.43) параметра. Столько же параметров в зависимости от предполагаемого вида содержит корреляционная функция  $K_c(\tau)$ . Для оценки всех этих параметров необходимо иметь систему с соответствующим числом уравнений. Такую систему получают, подставляя в выражения (4.56) и (4.57) оценки  $\tilde{K}_{\delta R}(\theta)$  при соответствующих значениях  $\delta$  и  $\theta$ .

Решение системы в общем случае затруднено, и полученный результат будет все-таки приближенным, т. к. значения  $\tilde{K}_{\delta R}(\theta)$ , как и всякие оценки, являются случайными величинами.

Определим дисперсии производной  $V(t)$  для трех условий работы СМРИ.

Для первого условия матрицу  $\|i_R(t_k)\|$  действительных значений размера инструментальной наладки получают из измерений размеров  $i = 1, 2, \dots, n$  при функционировании в равноотстоящих моментах  $t_k, k = 1, 2, \dots, m$ .

Для этих инструментов допускаются измерения в момент остановки, т. к. в выражении  $R(t)$  пренебрегаем составляющей  $C(t)$ , т. е. здесь  $R(t)$  выражается  $R(t) = R_n + \eta(t)$ .

Оценку математического ожидания приращений получают по матрице приращений  $\|i_{\delta R}(t_k)\|$  случайного процесса  $R(t)$

$$\tilde{\delta}_R = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m i_{\delta R}(t_k)}{nm}. \quad (4.58)$$

Оценку средней скорости износа – по выражению (4.59)

$$\tilde{m} = \frac{\delta_R}{\delta}, \quad (4.59)$$

а оценку математического ожидания размера  $R(t)$  – по известной зависимости

$$\tilde{R}(t) = \tilde{R} + \tilde{m}t.$$

Тогда корреляционная функция приращения примет вид:

$$K_{\delta_R}(\theta) = \begin{cases} D_\eta(\delta) & \text{при } \theta = 0, \\ -D_\eta(\theta) + \frac{1}{2}D_\eta(\theta - \delta) + \frac{1}{2}D_\eta(\theta + \delta) & \text{при } \theta \geq \delta. \end{cases} \quad (4.60)$$

Можно образовывать системы уравнений для определенной дисперсии  $D_w$  и остальных неизвестных параметров корреляционной функции  $K_w(t)$ .

Для корреляционной функции  $K_w(t)$  можно задаваться аппроксимирующим выражением в виде (4.41), используя для составления системы уравнений оценки  $\tilde{K}_{\delta_R}(\theta)$ , соответственно, при  $\theta = 0, \delta$  или  $\theta = 0, \delta, 2\delta$ .

По полученным значениям параметров  $\tilde{D}_w, \alpha, \beta$  по формулам (4.42), (4.43) определяем оценку дисперсии  $\tilde{D}_R(t)$  случайного процесса  $R(t)$  и оценку (4.45) нормированной взаимной корреляционной функции  $\tilde{r}_{R,v}(t, t)$ . В большинстве случаев для этих условий работы корреляционная функция  $k_{\delta_R}(\theta)$  сравнительно быстро убывает (это означает, что случайный процесс обладает свойством сильного перемешивания) и, тем самым, при определении  $D_R(t)$  можно ограничиться только линейной составляющей (4.42), (4.43), т. е. полагать, что

$$\tilde{\alpha} = \frac{k_{\delta_R}(0)}{\delta}, \quad (4.61)$$

тогда, согласно (4.48),  $\tilde{D}_R(t) = \tilde{D}_{R_n} + \tilde{d}t$ . В этих же случаях

$$\tilde{r}_{R,v}(t, t) \approx 0. \quad (4.62)$$

Точечные оценки математического ожидания  $\tilde{R}(t)$  и дисперсии  $\tilde{D}_R(t)$  также могут быть определены с использованием матрицы  $\|i_R(t_k)\|$  значений ординат случайного процесса  $R(t)$  по формулам:

$$\tilde{\varphi}(t_k) = \frac{\sum_{i=1}^n i_{\varphi}(t_k)}{n};$$

$$\tilde{D}(t_k) = \left[ \frac{\sum_{i=1}^n i_{\varphi^2}(t_k)}{n} - \tilde{\varphi}^2(t_k) \right] \frac{n}{n-1},$$

с последующей аппроксимацией полученных оценок линейными функциями  $\tilde{R}(t) = \tilde{R}(0) + \tilde{m}t$ ,  $\tilde{D}_R(t) = \tilde{D}_R(0) + \tilde{d}t$ .

Этот способ, по сравнению с первым, требует большого количества испытываемых экземпляров. При первом виде условий работы даже при небольшом количестве экземпляров получают стабильные оценки (4.59) и (4.61) путём увеличения частоты измерений интересующего размера  $R(t)$ .

Для второго вида условий работы СМРИ

$$D_v \approx D_w. \tag{4.63}$$

Действительное значение размера инструментальной наладки во всех инструментах  $i = 1, 2, \dots, n$  измеряются в процессе функционирования в равноотстоящих промежутках времени  $t_k, k = 1, 2, \dots, m$ .

Оценки  $\tilde{R}(t)$  и  $D_{\tilde{R}}(t)$  определяются по полученной таким образом матрице  $\|i_R(t_k)\|$  такими же способами, как и для условий работы первого вида.

Для определения оценки дисперсии  $D_w$  помимо измерений, необходимых для образования матрицы  $\|i_R(t_k)\|$ , на одном из инструментов с номером  $i = I$  производятся дополнительные измерения. Размер  $R(t)$  измеряется в промежутке  $[t_k, t_k + \Delta]$  на каждом из  $r$  последующих циклов. Получаем матрицу  $\|i_R(t_{k,j})\|$ ;  $j = 1, 2, \dots, r$  столбцами и  $k = 1, 2, \dots, m$  строками. Каждую строку усредняем

$$I_{\tilde{R}}(t_k) = \frac{\sum_{j=1}^r I_R(t_{k,j})}{r}, \tag{4.64}$$

с формированием новой матрицы  $\|I_{\dot{R}}(t_{k,j})\|$  с элементами

$$I_{\dot{R}}(t_{k,j}) = I_R(t_{k,j}) - I_{\dot{R}}(t_k). \quad (4.65)$$

По матрице  $\|I_{\dot{R}}(t_{k,j})\|$ , руководствуясь известной процедурой, определяем оценки  $\tilde{K}_c(\theta_j)$  корреляционной функции  $\tilde{K}_c(\tau)$  подходящего вида.

Оценка дисперсии производной  $\omega(t)$

$$\tilde{D}(\omega) = \tilde{K}_\omega(0) = \left[ -\frac{d^2}{d\tau^2} \tilde{K}_c(\tau) \right]_{\tau=0}. \quad (4.66)$$

Нормированная взаимная корреляционная функция  $r_{R,v}(t,t)$  согласно (4.52), учитывая большое значение дисперсии  $D_\omega$ , практически равна нулю.

Не всегда скорость срабатывания измерительной аппаратуры позволяет измерить исследуемые параметры быстродействующих процессов в последующих циклах.

Оценка дисперсий случайного процесса  $C(t)$  может быть расчи-

тана по матрице  $\|I_{\dot{R}}(t_{k,j})\|$ :  $\tilde{D}_c = \frac{\sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^r I_{\dot{R}}(t_{k,j})^2}{mr - 1}$ , но определение оценки корреляционной функции  $K_c(\tau)$  усложняется, т. к. значения размера  $I_R(t_{k,j}), j = 1, 2, \dots, r$  получены в неравноотстоящих моментах.

Для оценки условий работы СМРИ третьего вида на одном из инструментов  $i = I$  размер  $R(t)$  измеряется в процессе функционирования в промежутках  $[t_k, t_k + \Delta], k = 1, \dots, m$  на каждом из  $r$  последующих циклов, полученные значения образуют матрицу  $\|I_R(t_{k,j})\|$ . По матрице  $\|i_R(t_k)\|$ , используя те же методы, что для первых условий работы, определяют оценки  $\tilde{m}, \tilde{d}, \tilde{\eta}(t), \tilde{D}_\eta(t), \tilde{D}_W$ , а по матрице  $\|I_R(t_{k,j})\|$ , используя методику анализа условий работы второго вида определяют оценки  $\tilde{D}_c$  и  $\tilde{D}_\omega$ . Необходимые для расчета надежности оценки  $\tilde{R}(t), D_{qR}(t), D_v$  получают по формулам (4.47) (4.48), (4.50).

## 4.6. Конструкции сборных механизированных инструментов

Как отмечалось выше, одним из эффективных путей повышения потенциальной надежности сборного инструмента является применение при его конструировании принципа ненагруженного резервирования режущих элементов. Такие инструменты представляют собой довольно сложную систему, работоспособность которой в равной степени зависит от работоспособности как режущей пластины, так и всех деталей механизмов замены и закрепления режущих пластин. В конструкциях таких инструментов были использованы пластины форм 0139А и 0141А (ГОСТ 2209-82), установленные в инструментальных блок-вставках. На этом принципе были сконструированы резцы с присоединяемым приводом и боковым зажимом режущих пластин (рис. 4.27), а также со встроенным приводом и вертикальным зажимом режущих пластин (рис. 4.28). Рассмотрим эти конструкции более подробно.

Резец с присоединяемым приводом (рис. 4.27) содержит корпус *12*, с размещенными в нем механизмами зажима и замены режущих пластин. Механизм зажима содержит рабочую пластину *7*, установленную в блоке *8* и закрепленную прихватом *9*, пластину *10*, закрепленную винтом *11*, поворотный вокруг оси винта *4* рычаг *5* и толкатель *3*. Механизм зажима закрыт пластиной *13*. Механизм замены режущих пластин состоит из магазина резервных пластин *6*, зафиксированного в корпусе винтом *2*, толкателя *3*, упора *14* и пластины *1*, закрепленной винтами *15*.

Для замены изношенной режущей пластины *7* новой пластиной, расположенной в исходной (верхней) позиции кассетного магазина *6*, упор *14*, закрепленный на толкателе *3*, из нижнего положения поворачивается в верхнее (горизонтальное) положение и продвигается совместно с толкателем *3* в крайнее правое положение. В момент поворота толкателя *3* вокруг своей оси его эксцентриковый участок освобождает широкий конец рычага *5* от силового замыкания, а второй конец этого рычага снимает упругое давление с Г-образного прихвата *9*, что приводит к разжатию блока *8* и режущей пластины *7*. В момент передвижения толкателя *3* в крайнее правое положение плоскопараллельная пластинчатая пружина *16* кассетного магазина *6* проталкивает «столб» запасных режущих пластин в освобождающуюся от толкателя загрузочную полость блока до упора верхней пластины в его треугольный уступ.

При обратном движении толкателя 3 совместно с упором 14 влево (исходное положение) левый конец толкателя увлекает вперед, ставшую в загрузочную полость блока новую режущую пластину, и вводит ее в зону закрепления (рабочую полость блока). Изношенная режущая пластина при этом выталкивается новой пластиной из зоны закрепления в специальный лоток. Опускание упора 14 в крайнее нижнее положение осуществляет закрепление новой режущей пластины. В конструкции резца предусмотрена регулировка длины хода толкателя путем переустановки пластины 1 вдоль державки и закрепления ее с помощью винтов 15.

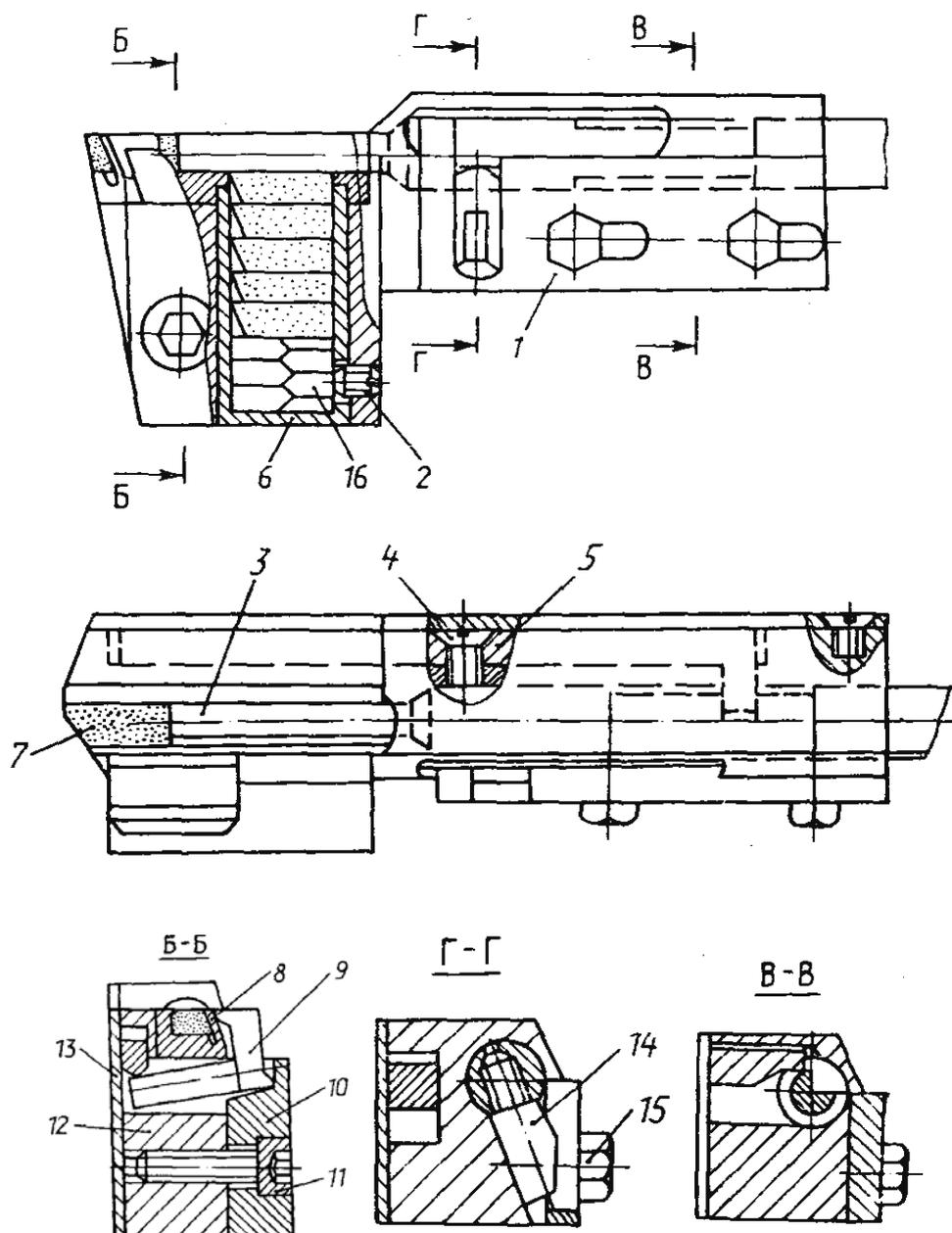


Рис. 4.27. Эскиз резца с присоединяемым приводом

Конструкция резца со встроенным приводом (рис. 4.28) содержит корпус 20 с расположенными в нем механизмами зажима и замены режущих пластин. Механизм зажима состоит из инструментального блока 15, рычага 1, качающегося на оси 2, пружины 9, шарика 8 и плунжера 10 с уплотнением 11. Механизм замены пластин состоит из магазина резервных пластин 16, встроенного в корпус 20 гидроцилиндра, крышек 3, 12 и 13, упора 4, ползушки 6, пружин 5 и 7. В магазине 16 расположены резервные пластины 17, поджатые кверху пружиной 18, опирающейся на крышку 14.

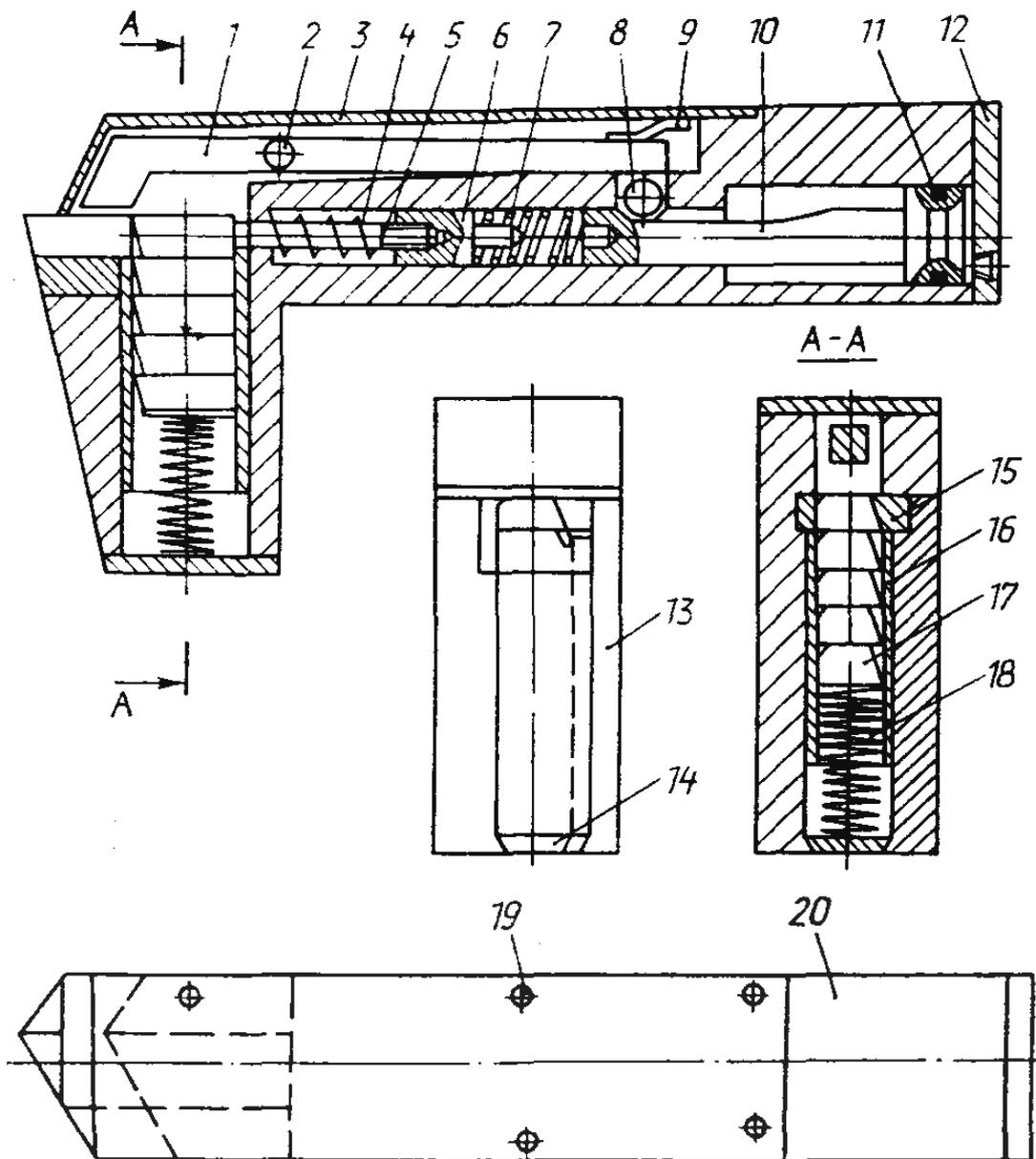


Рис. 4.28. Эскиз резца со встроенным приводом и вертикальным зажимом

После износа пластины через отверстие в крышке 12 из гидроцилиндра масло выпускается на слив, а пружины 5 и 7 отводят упор 4 и ползушку 6 вправо, после чего новая пластина из магазина 16 занимает место упора в инструментальном блоке. Во время перемещения плунжера 10 вправо шарик 8, опускаясь, освобождает рычаг 1, который поворачивается на оси 2 и разжимает изношенную пластину. Из гидросистемы масло через крышку 12 подводится в гидроцилиндр и перемещает шток плунжера 10 влево, а упор 4 выдвигает новую пластину в рабочую зону на место изношенной.

При этом шарик 8, скользя по штоку плунжера 10, поворачивает рычаг 1 вокруг оси 2 и зажимает новую пластину. Механизм зажима закрыт крышкой 3, закрепленной винтами 19.

Для повышения работоспособности таких инструментов в опорной поверхности ложемент (рис. 4.29) выполнено сквозное углубление с переменной шириной, заполненное материалом с высокими показателями упругости и теплопроводности, например, свинцом. Форма углубления определяется по формуле [231]:

$$y = \frac{b}{2} \left[ 1 - \frac{1}{1 - \delta} \exp\left(-\frac{\delta^{3,67}}{0,31}\right) \right],$$

где  $b$  – ширина режущей пластины;  $\delta$  – безразмерная величина, определяемая отношением координаты вдоль пластины к длине контактирования.

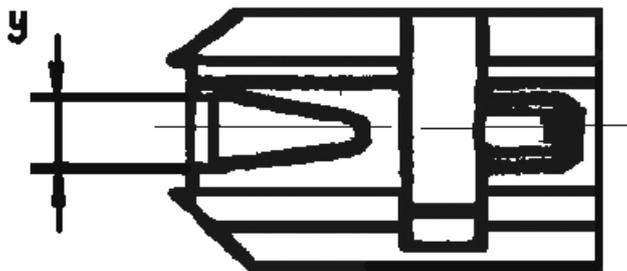


Рис. 4.29. Эскиз унифицированного ложемента

На рис. 4.30 приведено устройство для замены режущих пластин резца, которое состоит из приводного толкателя, закрепленного на станке и резца [232]. Резец состоит из державки 2, в пазах которой установлена режущая пластина 3 и клин 4. Режущая пластина и продольный паз имеет угловые базовые поверхности под углом  $\beta = 3...5^\circ$  к горизонтальной оси и 5 к вертикальной. Поперечный паз имеет

опорную поверхность под клин 4, который подпружинен элементами 5 и 6. Сверху резца установлен магазин 7 с резервными пластинами 8, закрепленный винтами 9 и 10 к державке 2.

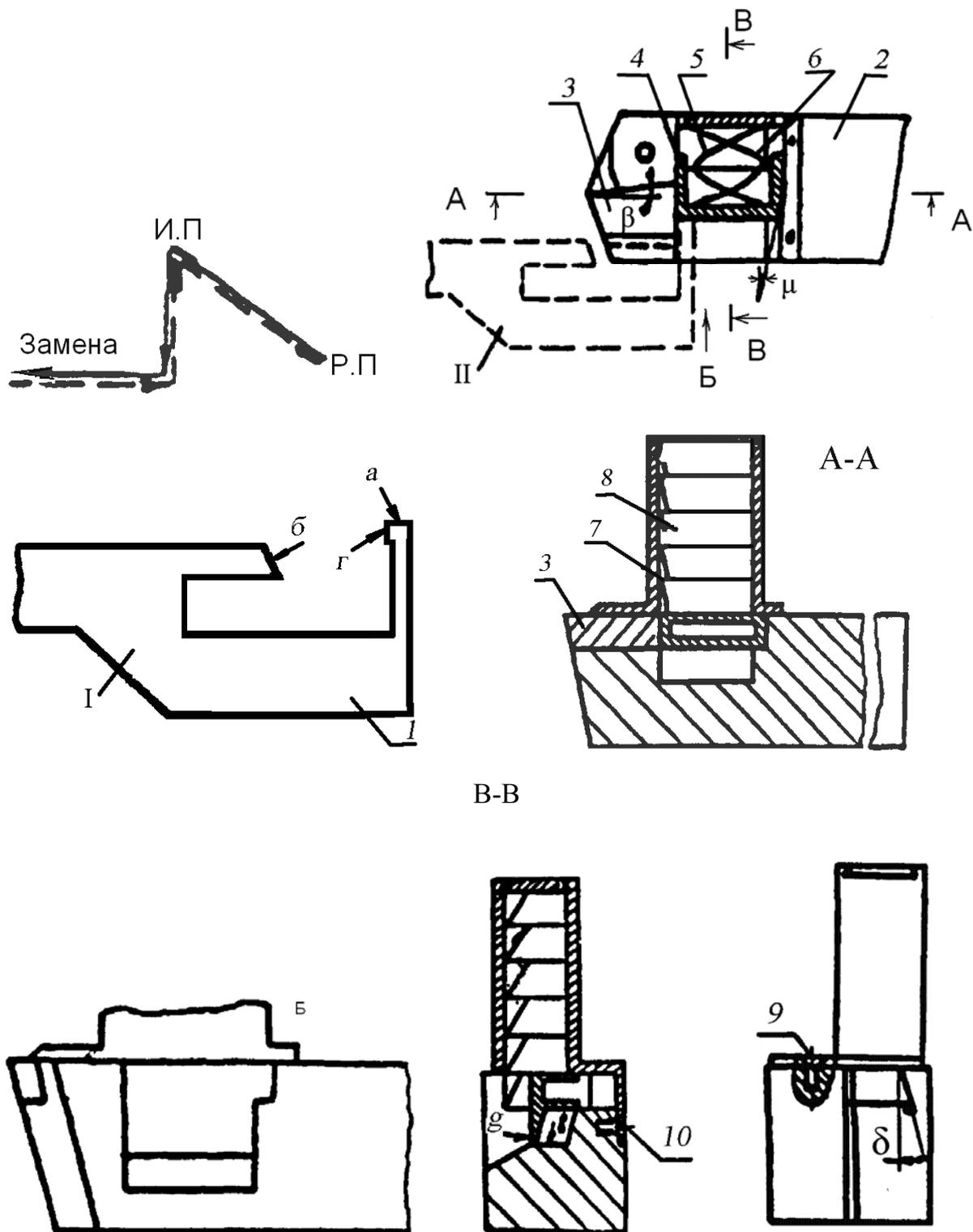


Рис. 4.30. Эскиз устройства механизированной замены режущих пластин

После затупления режущей кромки пластины 3 резец из рабочего положения (Р.П) перемещается в исходное (И.П). Затем он перемещается в поперечном направлении до касания конца *a* приводного толкателя 1 с клином 4. Перемещаясь дальше, приводной толкатель перемещает клин 4 вдоль паза до выхода из контакта с пластиной 3.

В этот момент второй конец приводного толкателя 5 контактирует с режущей кромкой пластины 3. Затем резец перемещается вдоль оси и конец упора *b* перемещает пластину 3 слева направо. В момент размещения пластины 3 под магазином она под собственным весом и весом резервных пластин опускается вниз до поверхности паза *b*. Затем резец перемещается назад, а резервная пластина из магазина упорной поверхностью 2 перемещается в рабочее положение. Резец перемещается в поперечном направлении и поверхность *a* выходит из контакта с клином 4. Клин, перемещаясь вдоль своей оси, фиксирует новую пластину за счет скоса под углом  $\mu = 5^\circ$ . Так как  $\mu$  и  $\beta$  являются самотормозящими, то пластина 3 надежно базируется в державке.

Во время перемещения клина 4 он своим выступом *g* выталкивает отработавшую пластину из паза державки. После этого резец отводится в рабочее положение.

На рис. 4.31 изображен резец с механизированным поворотом режущей пластины.

Устройство для поворота режущей пластины состоит из приводного элемента и резца. Приводной элемент выполнен в виде клина 1 и зубчатой рейки 2, которые крепятся болтами 3, 4 к планке 5, закрепленной неподвижно к уголку 6, который, в свою очередь, неподвижно закреплен к шпиндельной бабке 7 токарного станка. В револьверной головке 8 жестко закреплен резец 9, состоящий из державки 10 со сквозным боковым пазом *z*. Державка 10 и корпус 11 закреплены между собой при помощи четырех планок 12 четырьмя винтами 13 и зафиксированы штифтом 14. Подкладка 15 и режущая пластина 16 установлены в пазу *ж* державки 10 и закреплены винтом 17 посредством пружины 18 к поворотной оси 19.

На поворотной оси 19 свободно установлено зубчатое колесо 20. Боковой паз *z* державки обеспечивает кинематическую связь зубчатой рейки 2 с зубчатым колесом 20. На поворотной оси установлена стопорная шайба 21, имеющая два усика – наружный и внутренний.

Наружный отогнутый усик  $e$  шайбы размещен в углублении на нижнем торце зубчатого колеса  $20$ , а внутренний усик – в пазу  $a$  поворотной оси  $19$ . Под шайбой  $21$  расположена пружина  $22$ , а под ней установлен, неподвижно относительно оси  $19$ , штифт  $23$ . Кроме того, державка  $10$  снабжена корпусом  $11$  и упорным винтом  $24$ , ось которого радиальна относительно поворотной оси  $19$ , причем в корпусе, в нижней части резца, дополнительно выполнен, перпендикулярно державке, второй сквозной паз  $d$ .

В средней части поворотной оси  $19$  выполнены конические лыски  $b$ , кинематически связанные с торцем упорного винта  $24$ .

После затупления режущей кромки пластины  $16$  резец из рабочего положения вместе с диском револьверной головки  $8$  устанавливается в положение поворота режущей пластины. Затем он перемещается вдоль оси шпинделя до касания нижнего конца оси  $19$  с приводным клином  $1$ . В результате этого взаимодействия ось  $19$ , с закрепленной на ней режущей пластиной  $16$ , перемещается, поднимая пластину на уровень, когда ее нижняя опорная поверхность будет располагаться над верхней поверхностью державки. В этот момент зубчатое колесо  $20$  входит в контакт с зубчатой рейкой  $2$ , в результате дальнейшего перемещения резца происходит поворот зубчатого колеса  $20$  на  $90^\circ$ , вместе с ним поворачивается и ось  $19$  с режущей пластиной  $16$ . Затем резец вместе с диском  $8$  перемещается в направлении к оси шпинделя, а зубчатое колесо  $20$  выходит из зацепления с рейкой  $2$ . После чего резец перемещается вдоль оси шпинделя и под действием пружины  $22$  ось  $19$  скользит по клину  $1$ , опускаясь вниз, возвращается в исходное положение, причем винт  $24$ , взаимодействуя с коническими лысками  $b$  на оси  $19$ , прижимает режущую пластину  $16$  к пазу  $ж$  державки  $10$ . Затем резец вместе с револьверной головкой  $8$  возвращается в рабочее положение.

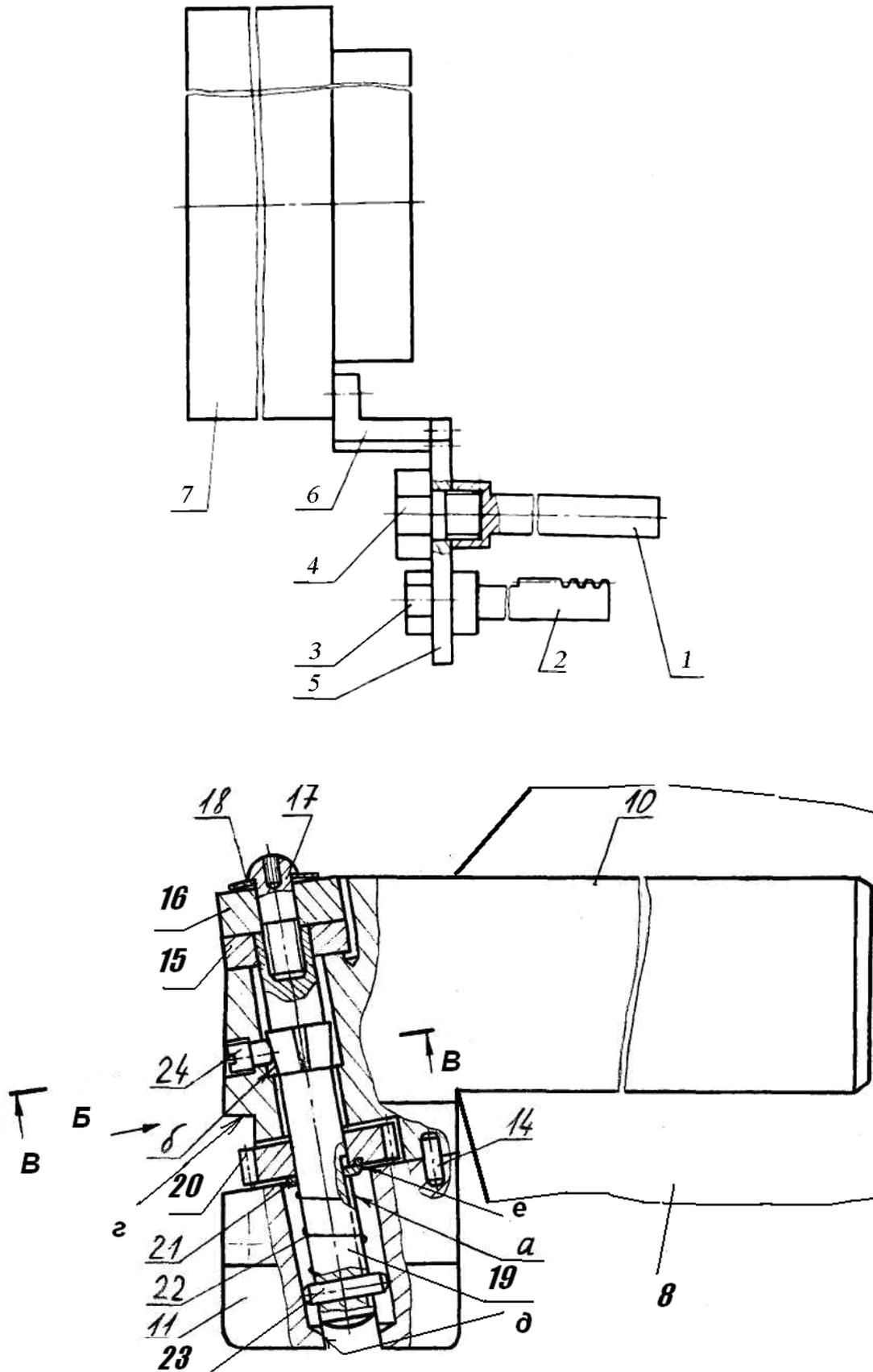


Рис. 4.31. Эскиз резца с механизированным поворотом режущей пластины (1-й фрагмент; окончание см. на с. 297)

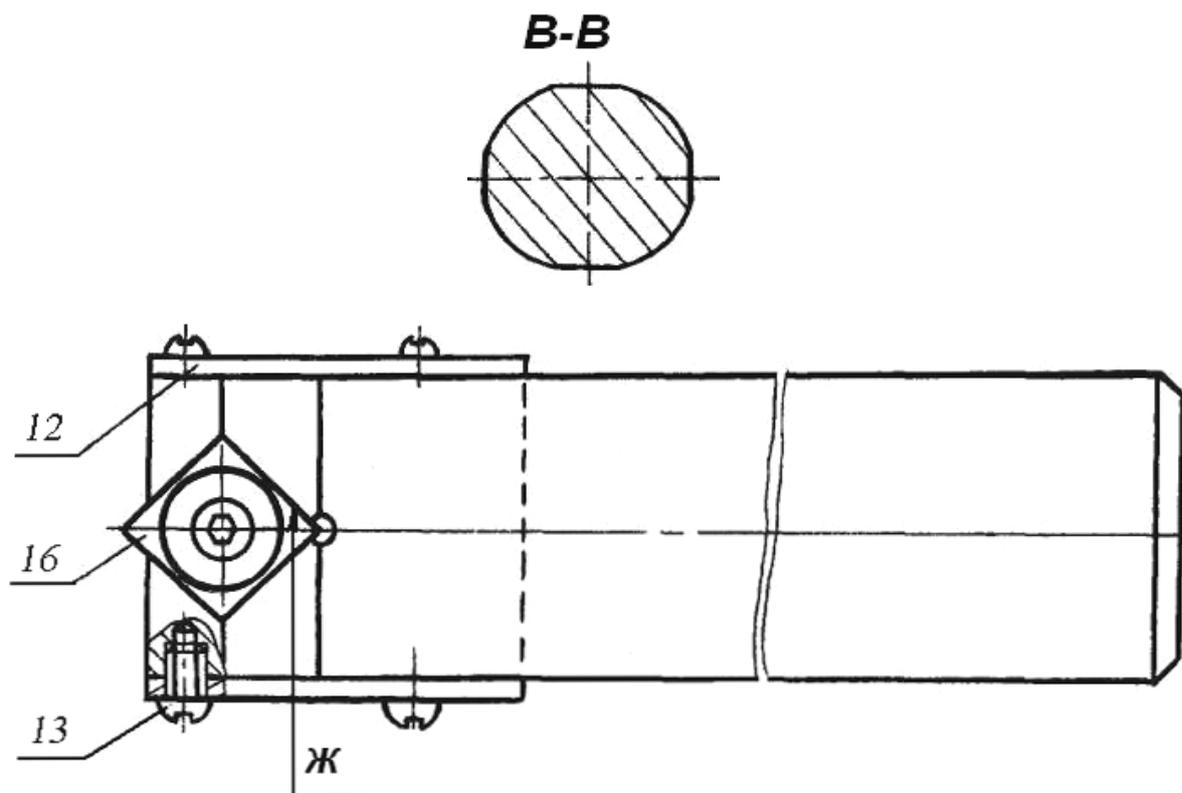


Рис. 4.31. Окончание (начало см. на с. 296)

На рис. 4.32, 4.33 приведено устройство, которое состоит из зубчатой рейки 1 с уступом 2, которая крепится на станке, и резца [233]. Резец состоит из державки 3, на скосе которой закреплена упругая изогнутая пластина 4, свободным концом контактирующая с боковой гранью пластины 5 установленной на штифт 6, этот штифт запрессован в отверстии державки 3. На штифте 6 установлена подкладка 7. В отверстии державки установлен винт 8, на цилиндрической части которого закреплен пружинящий прижим 9, а на резьбовой части установлен штифт 10, контактирующий в момент поворота пластины с выступом *a* зубчатого колеса 11.

На цилиндрической части прижима закреплены две пластины 12 и 13. На пластине 12 выполнен паз контактирующий с базовыми гранями режущей пластины. С одной стороны пластины 13 выполнен выступ 14, а с другой скос контактирующий со скосом державки.

В пазу державки установлена плоская пружина 15, закрепленная клином 16, свободный конец которой входит в угловой паз *b* на цилиндрической части прижима.

После затупления режущей кромки пластины 5 резец перемещается в позицию замены грани на станке и затем перемещается вдоль

оси рейки 1. Рейка 1 вращает зубчатое колесо 11, которое, упираясь торцом в державку, перемещает винт 8 вверх вместе с прижимом. Винт от проворота предохраняет плоская пружина 15, конец которой скользит по пазу  $b$  и скосу державки. После выхода пластины 13 из паза державки (на величину  $h$ ) штифт 10 контактирует с выступом  $a$  зубчатого колеса 11, вынуждая поворачиваться винт 8 и прижим 9. При повороте прижима 9 выступ 14, контактируя с гранью пластины 5, поворачивает ее на угол  $\psi$ . При дальнейшем перемещении резца выступ 2 нажимает на изогнутую пластину 4 с внешней стороны и деформируя, выпрямляет ее, а свободный конец пластины 4, перемещаясь по грани режущей пластины 5, доворачивает ее до нового положения. В это время прижим 9 совершает полный оборот. Затем резец перемещается в обратном направлении. Зубчатое колесо 11, вращаясь, перемещает винт 8 вниз и происходит закрепление пластины 5 прижимом 9 сверху и базовыми поверхностями пластины 12 – сбоку. Резец снова готов к работе.



Рис. 4.32. Механизированный резец

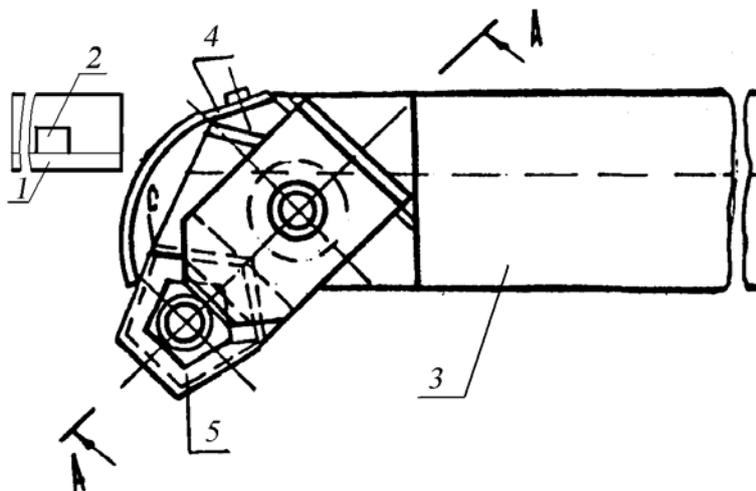


Рис. 4.33. Эскиз конструкции механизированного резца (1-й фрагмент; окончание см. на с. 299)

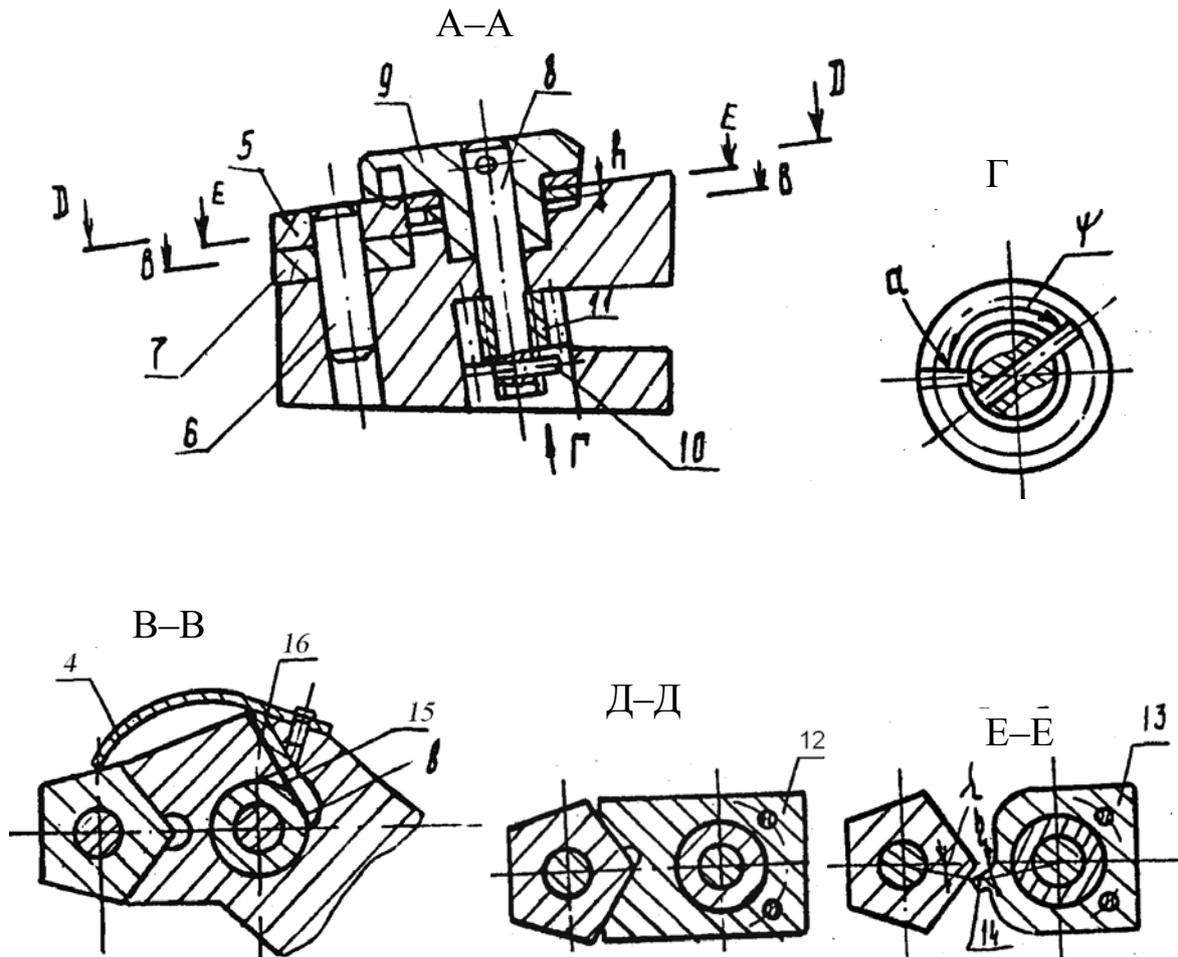


Рис. 4.33. Окончание (начало см. на с. 298)

На рис. 4.34 приведена конструкция резца, состоящего из корпуса 1, в пазу которого установлена режущая пластина 2, закрепленная с помощью винта 3. На цилиндрической части винта 3 выполнен паз переменной глубины и резьба [234]. В пространстве между режущей пластиной и винтом размещены компенсатор 4 с пружиной 5. В паз винта входит фиксатор 6, расположенный в отверстии корпуса, в котором размещены винт 7 и пружина 8. На резьбовом участке винта установлено зубчатое колесо 9. Для замены затупившейся грани пластины 2 резец отводится в позицию замены, и в паз 10 корпуса вводится закрепленная на станке зубчатая рейка, которая поворачивает зубчатое колесо 9, перемещая винт 3 вверх вместе с режущей пластиной 2. Фиксатор 6, доходя до нижнего положения в пазу винта, позволяет поворачивать его на угол, соответствующий новому положению режущей пластины. При обратном перемещении рейки винт 3 опускается вместе с пластиной и, поворачиваясь, закрепляет ее.

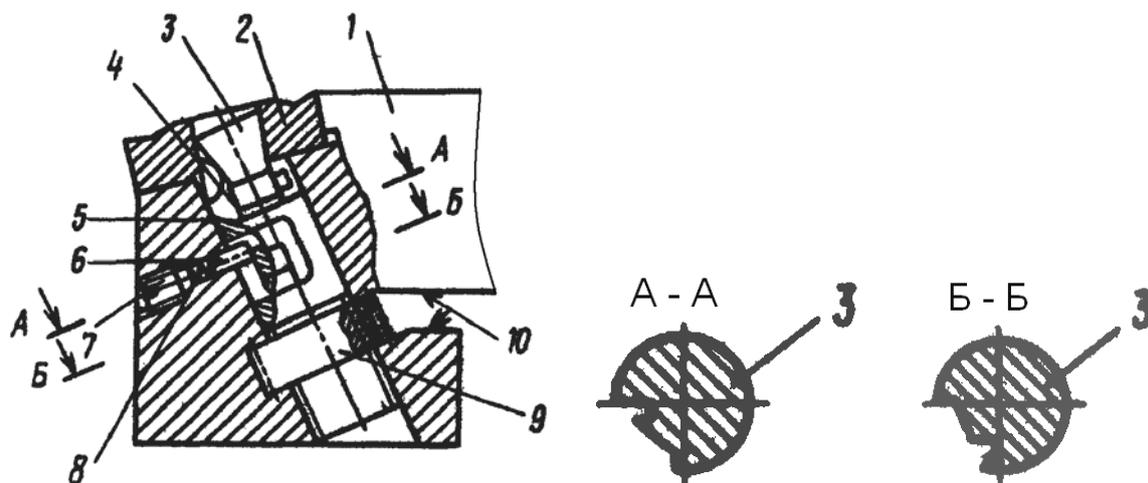


Рис. 4.34. Эскиз устройства механизированного поворота режущей пластины

На рис. 4.35 и 4.36 изображена фреза состоящая из корпуса 1, в пазах которого установлены державки 2, закрепленные винтами 3 [235]. В отверстии державки установлены механизмы периодического поворота и зажима пластин 4, состоящие из поворотных осей 5 и приводных гаек 11. На верхнюю цилиндрическую ступень осей 5 установлены режущие пластины 4 и закреплены посредством винтов 6 и плоских пружин 7. Коническая поверхность оси, опираясь на цилиндрический штифт 8, дополнительно прижимает режущую пластину боковыми базовыми гранями к угловому пазу пластины 9, закрепленной на державке 2 посредством винтов 10. На нижней резьбовой части оси 5 навинчена гайка 11 и неподвижно установлен в отверстии штифт 12. Ось 5 от поворота стопорится пружинным фиксатором 13, который имеет ступенчатую форму и ступень с большей шириной неподвижно установлена в державке 2. Положение режущих кромок фрезы регулируется в осевом и радиальном направлениях. В радиальном направлении – винтами 15, посредством клиньев 14 и плоских пружин 16. В осевом направлении – посредством винтов 17, установленных в шайбе 18, закрепленной на корпусе 1 с помощью винтов 19. В державке 2 выполнены пазы, имеющие прямоугольный профиль в сечении, закрытые плоскими пружинами 20, закрепленными на корпусе неподвижно с помощью заклепок 21. Фреза 22 устанавливается в шпинделе 23 станка, на столе 24 которого крепится рейка 25.



Рис. 4.35. Механизированная фреза

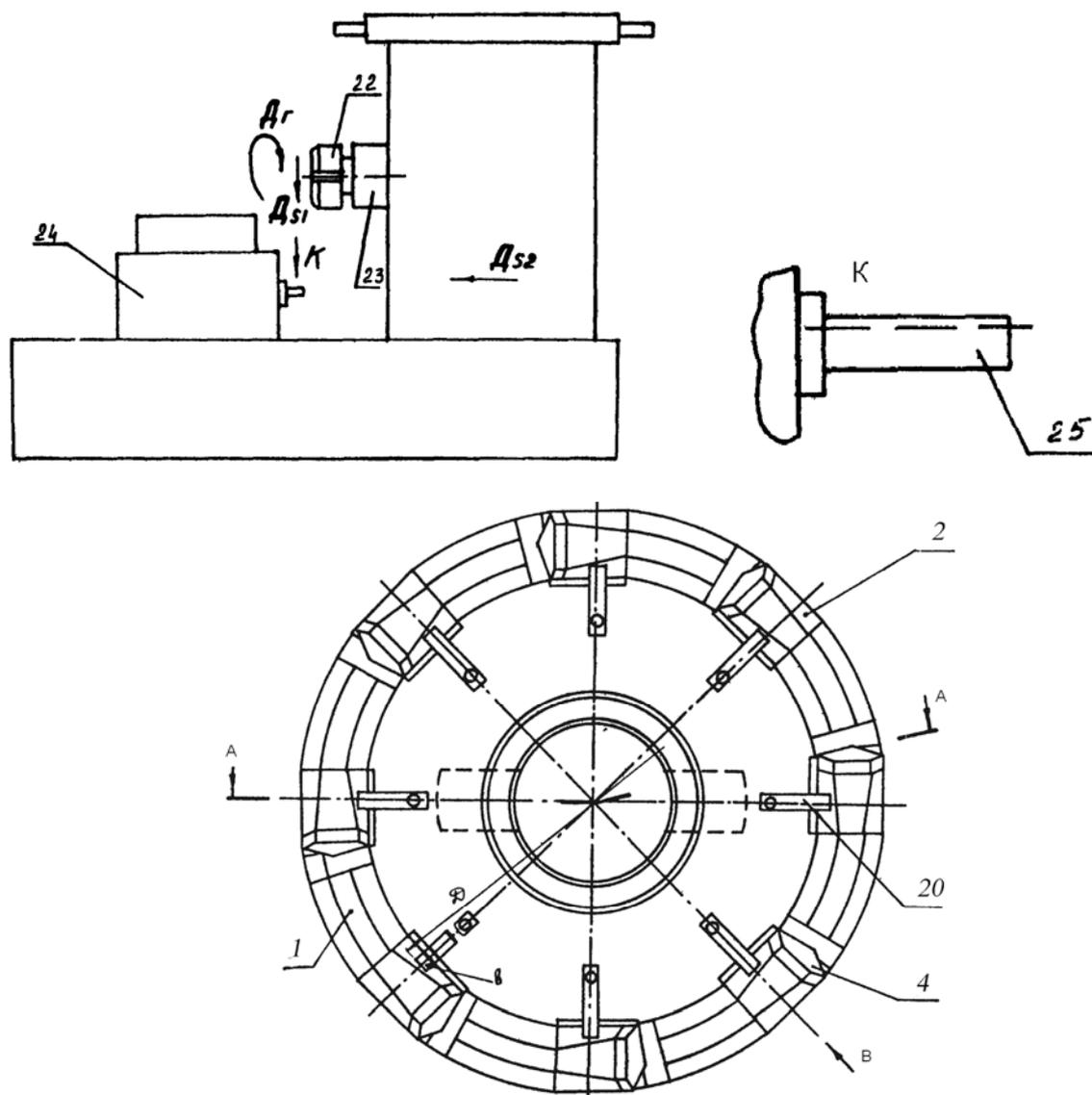


Рис. 4.36. Эскиз устройства для поворота СМП (1-й фрагмент; окончание см. на с. 302)

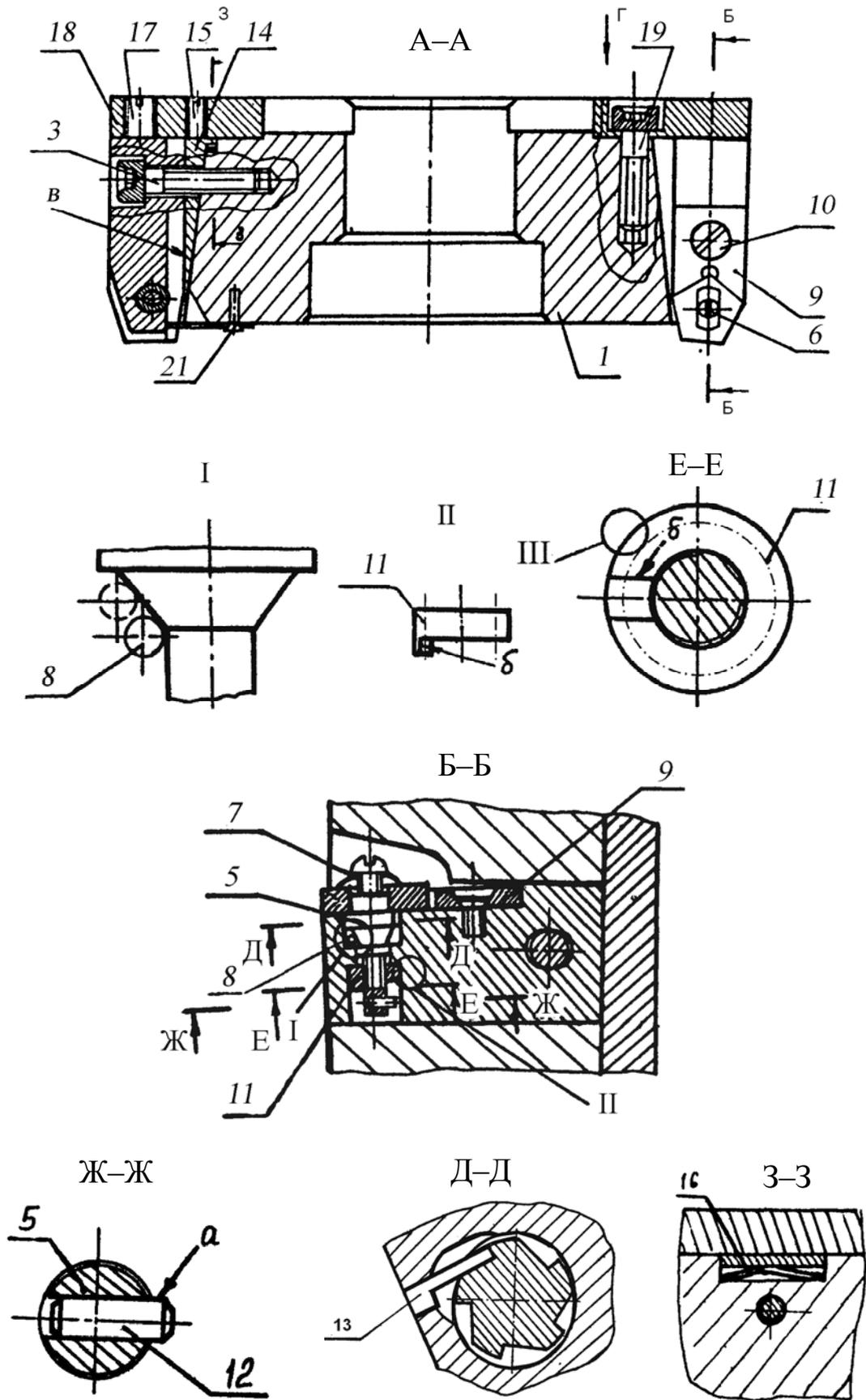


Рис. 4.36. Окончание (начало см. на с. 301)

После затупления режущих кромок фреза подводится в позицию их замены с помощью привода станка. Измерительными датчиками (не показаны) определяются изношенные грани пластин. Угловое положение их заносится в устройство числового управления станка, где рассчитываются необходимые углы поворота шпинделя станка вместе с фрезой. Поворот осуществляется до тех пор, пока паз державки с изношенной гранью окажется напротив торца рейки 25. После этого стойка станка вместе с фрезой 22 перемещается вдоль оси фрезы (движение  $D_{S2}$ ). Рейка 25, деформируя пластину 20, входит в паз державки 2 и зацепляется с зубьями гайки 11. Рейка 25 прижимается к гайке деформированной пластиной 20. При дальнейшем перемещении рейки гайка 11 поворачивается и ось 5 перемещается вверх до тех пор, пока поверхность  $a$  штифта 12 коснется поверхности  $\delta$  выступа гайки 11. В момент контакта этих поверхностей режущая пластина должна выйти из углового паза пластины 9. При дальнейшем повороте гайки 11 поворачивается ось 5 вместе с пластиной 4 на следующую грань. В момент поворота оси 5 фиксатор 13 выходит из паза оси 5. После этого стойка станка перемещается обратно, т. е. слева направо, и гайка 11 поворачивается в обратном направлении. При повороте гайки 11 ось 5 стопорится от поворота пружинным фиксатором 13 и вследствие чего имеет возможность только перемещаться вниз до контакта конической части оси 5 со штифтом 8. После этого контакта пластина 4 перемещается вместе с осью 5 вниз и вправо до касания нижней базовой грани с плоскостью державки 2 и боковых базовых граней с пазом пластины 9. Усилие зажима регулируется жесткостью крепления рейки 25. При превышении установленного усилия рейка 25 проскальзывает по гайке 11.

Возможна также замена граней одновременно всех режущих пластин фрезы, для этого необходимо установить рейки 25 на столе станка по количеству режущих пластин. Рейки должны быть установлены по кругу диаметром, равным диаметру пазов державок  $D$ .

На рис. 4.37 изображена фреза с автоматической заменой режущих кромок, установленная в шпинделе 1 станка, на шпиндельной бабке 2 которого закреплен корпус 3 упора 4 [236]. Фреза содержит корпус 5, державки 6 с установленными на осях 12 посредством винтов 7 режущими пластинами 8 и механизм их зажима и поворота. Механизм зажима и поворота режущих пластин выполнен в виде П-образной скобы собранной из пластин 9. Один конец скобы имеет базовую призму, являющуюся опорой режущей пластины в осевом направлении, а другой – прямоугольный паз, в который входит кинематически связанная со скобой (например, фрикционно) ось 12 режущей пластины.

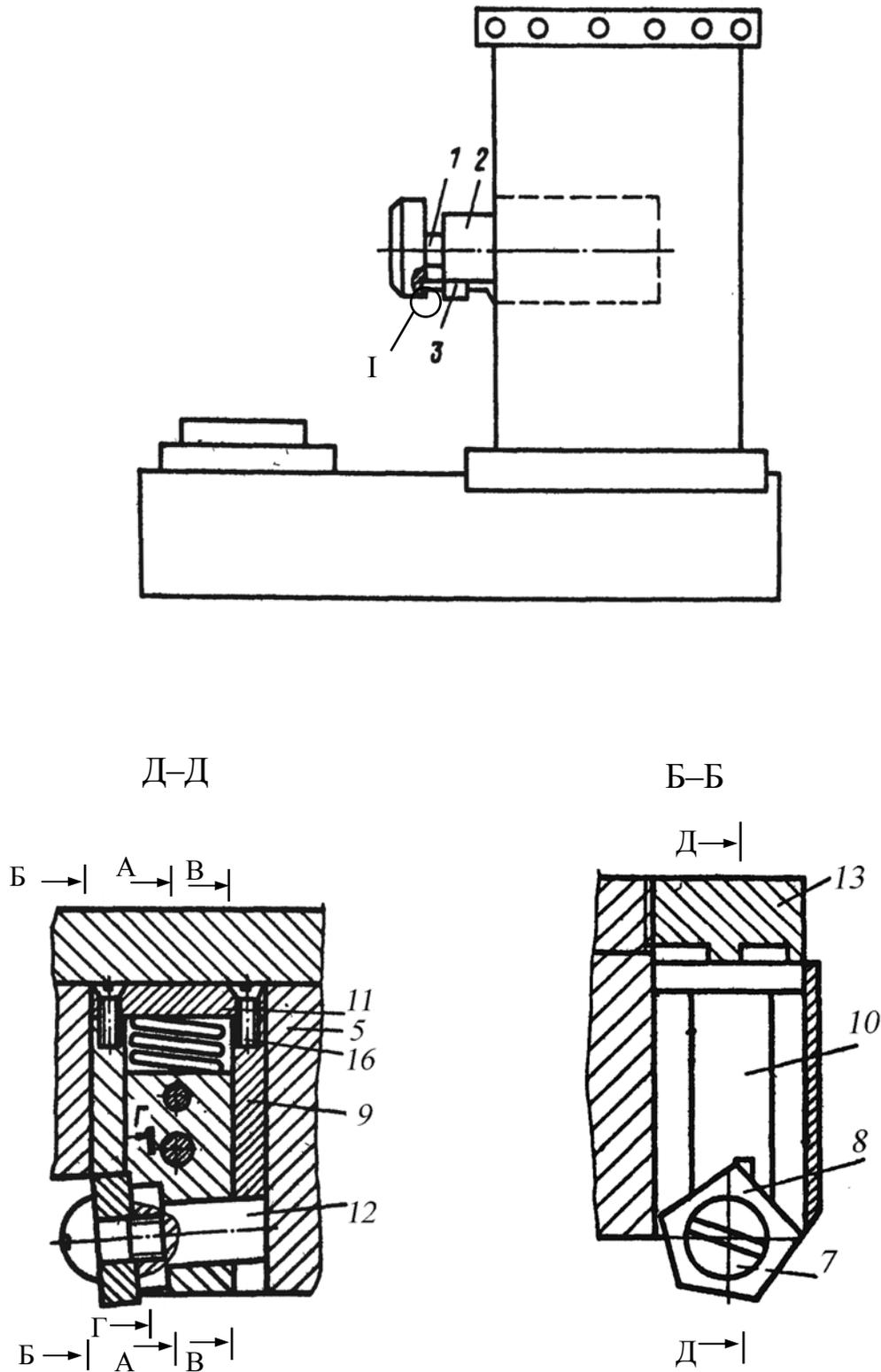


Рис. 4.37. Эскиз устройства для поворота режущих пластин механизированного инструмента (1-й фрагмент; окончание см. на с. 305)

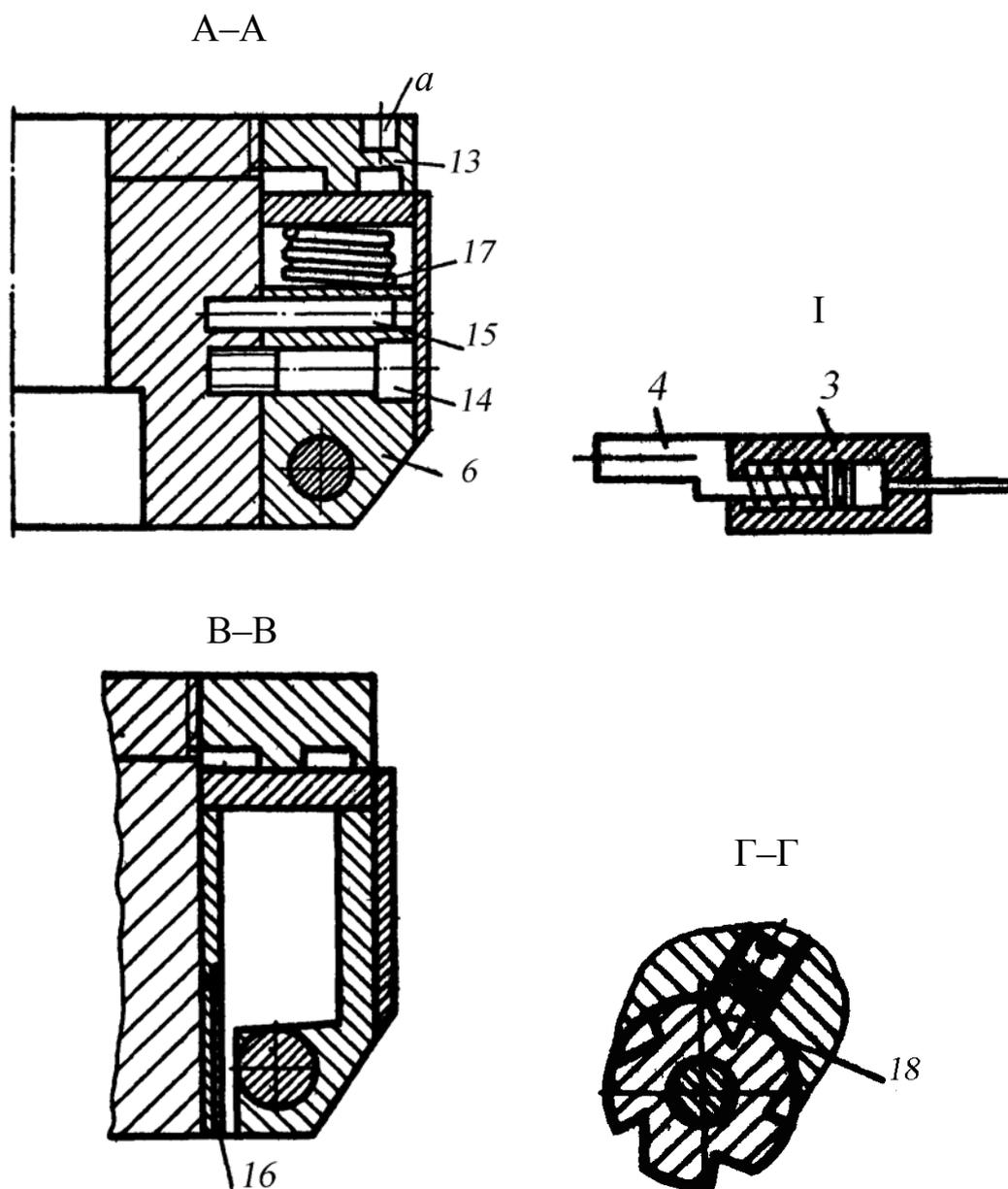


Рис. 4.37. Окончание (начало см. на с. 304)

Привод механизма зажима и поворота режущей пластины выполнен в виде криволинейной приводной гайки 13, кинематически связанной (например, резьбой) с корпусом фрезы, на нижнем торце которой выполнен кольцевой выступ, контактирующий с внешней стороной центральной части П-образной скобы, а на верхнем торце выполнено отверстие *a*, в которое вводится упор 4. Кроме того, державки 6 неподвижно закреплены в корпусе фрезы посредством винта 14 и штифта 15. Для обеспечения более плотного контакта пла-

стины 9 с осью 12, а также для компенсации их износа в конструкцию фрезы введена плоская пружина 16.

Для замены режущей кромки пластины 8 упор 4 входит в отверстие *a*, и фреза поворачивается вокруг своей оси против часовой стрелки (если смотреть снизу) и приводит в движение гайку 13. Под действием пружины 17 П-образная скоба перемещается в осевом направлении, осуществляя одновременно отвод базовой призмы от режущей пластины и поворот последней за счет поворота ее оси посредством взаимодействия с ней другого конца П-образной скобы. При обратном повороте корпуса фрезы П-образная скоба опускается, и осуществляется подвод базовой призмы к режущей пластине. Поворота оси в данном случае не происходит благодаря подпружиненному фиксатору 18 и проскальзыванию другого конца П-образной скобы относительно оси 12.

На рис. 4.38 приведена конструкция фрезы, которая содержит корпус 1, державки 2, с установленными на осях 3 режущими пластинами 4, и механизмы их зажима и поворота [237]. Механизм зажима и поворота режущей пластины выполнен в виде П-образной скобы, собранной из пластин 5. Один конец скобы имеет базовую призму 6, являющуюся опорой режущей пластины в осевом направлении, а другой – зубчатую рейку 7, входящую в зацепление с зубчатым сектором 8, соединенным через подпружиненный фиксатор 9 с осью 3 режущей пластины. Привод механизма зажима и поворота режущей пластины выполнен в виде эксцентрикового винта 10, контактирующего с внешней стороной центральной части П-образной скобы.

Для замены режущей кромки поворачивают эксцентриковый винт. Под действием пружины 11 П-образная скоба перемещается в осевом направлении, осуществляя одновременно отвод базовой призмы от режущей пластины и поворот последней за счет поворота ее оси посредством взаимодействия зубчатой рейки, сектора и подпружиненного фиксатора.

При обратном перемещении скобы осуществляется подвод базовой призмы к режущей пластине. Поворота оси в данном случае не происходит, вследствие проскальзывания подпружиненных фиксаторов 9 и 12.

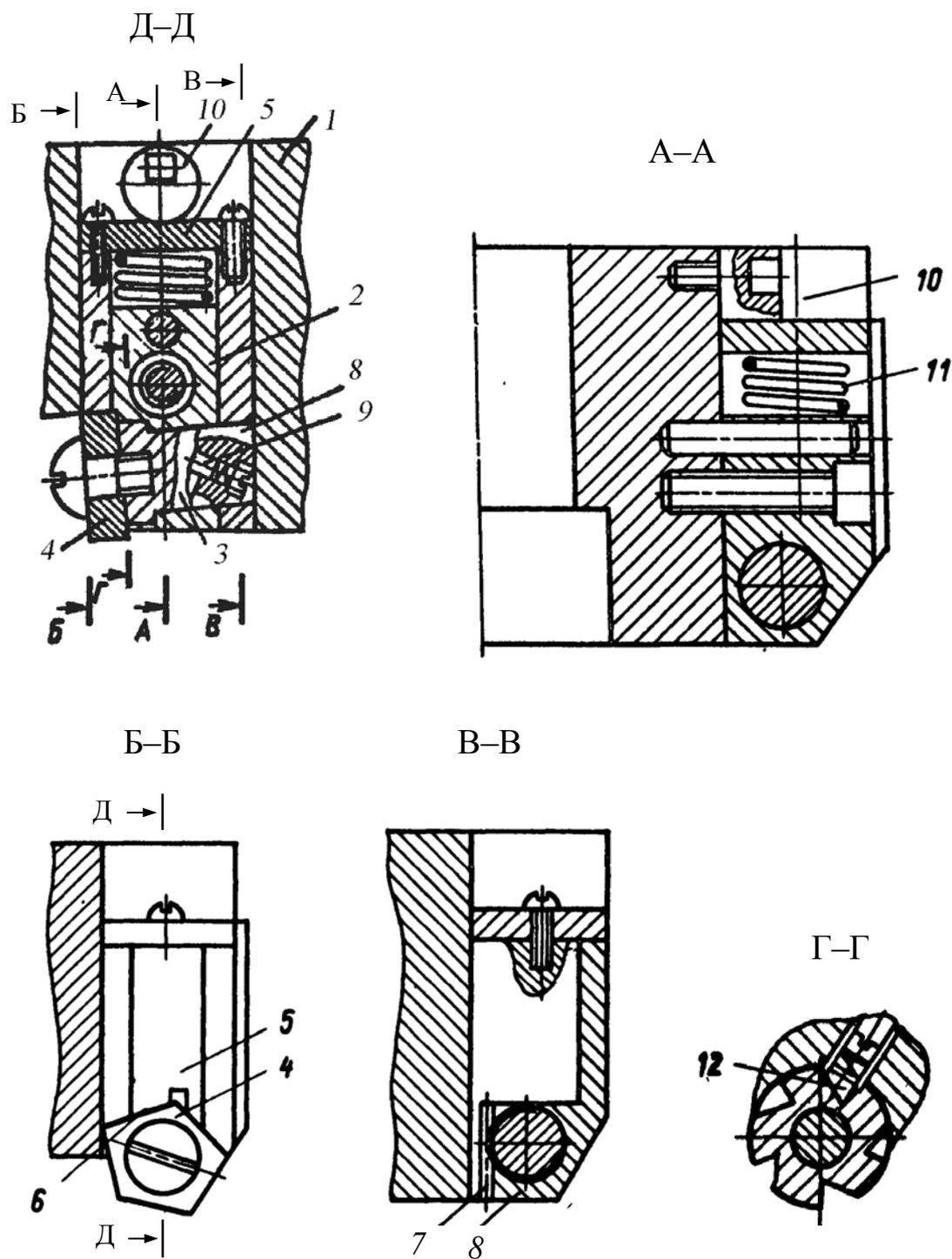


Рис. 4.38. Эскиз фрезы с механизмом поворота режущих пластин

На рис. 4.39 изображена фреза с автоматической заменой режущих пластин [238], состоящая из корпуса 1, в котором расположен механизм автоматической замены и закрепления режущих пластин.

Он содержит магазины с резервными пластинами 2 и пружинами 3. Резервные пластины входят в боковой паз 4 в нижней части инструментальных блоков 5. В верхней части блоков 5 имеется другой паз 6, в котором свободно размещены упоры 7, которые входят своим выступом в планки 8, закрепленные в пазах корпуса инструмента с помощью винтов 9. Планки 8 вместе с упорами 7 могут регулироваться в осевом направлении. В верхнем пазу инструментальных блоков установлены режущие пластины 10. Для закрепления режущих пластин в рабочем положении инструментальные блоки охватывают их по трем сторонам, причем с одной стороны стенка блока выполнена в виде упругого лепестка *a*, контактирующего со скосом шайбы 12, закрепленной с помощью винтов 13 на корпусе инструмента 1. В корпусе инструмента установлен по скользящей посадке приводной элемент, состоящий из диска 14, в котором веерообразно расположены винты 15, пружины 16 и шарики 17. С помощью шариков 17 крутящий момент от диска 14 передается втулке 18. На периферийной поверхности втулки 18 имеется винтовая канавка 19 с прямоугольным профилем в сечении. Выступы на инструментальных блоках 5 входят в зацепление с винтовой втулкой 18. В тангенциальных отверстиях корпуса инструмента свободно установлены толкатели 20 с пружинами 21.

Пазы инструментального магазина закрываются диском 22, который крепится к корпусу 1 винтами 23. Для защиты механизма закрепления и замены пластин от загрязнений инструмент закрыт крышками 24 и 25, закрепленными винтами 26 и 27.

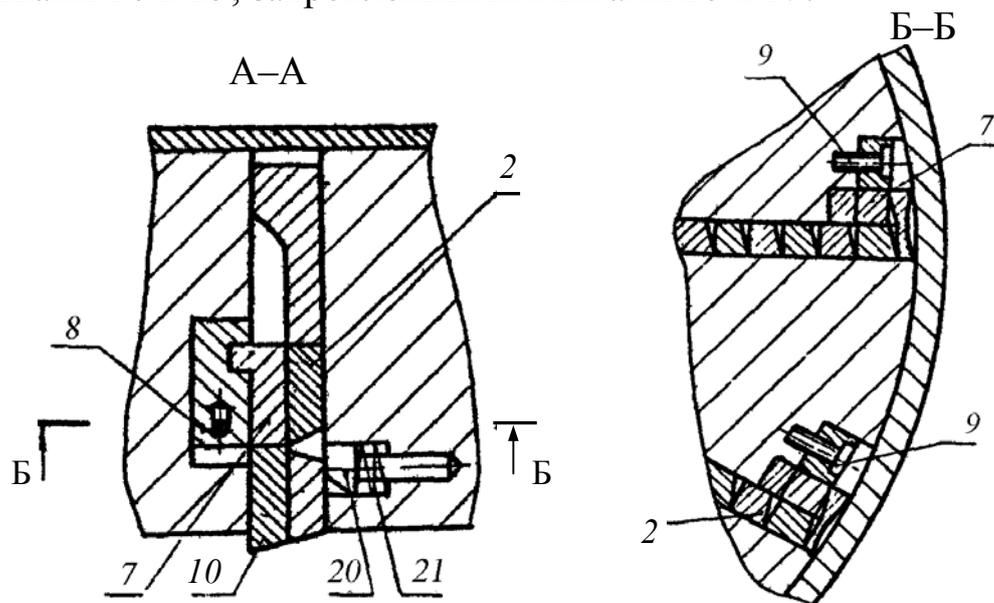


Рис. 4.39. Эскиз инструмента с механизмом замены режущих пластин (1-й фрагмент; окончание см. на с. 309)

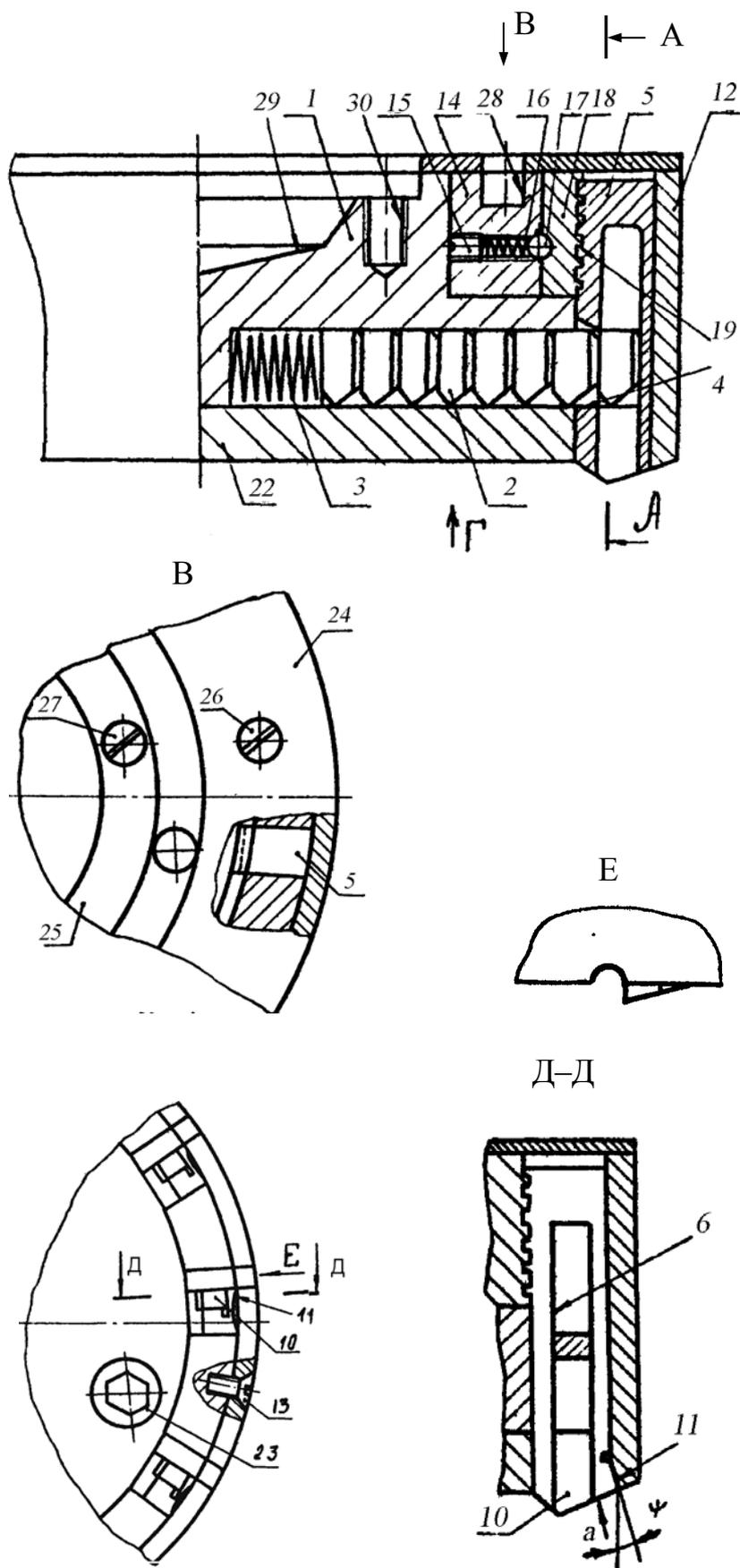


Рис. 4.39. Окончание (начало см. на с. 308)

После затупления режущих кромок пластин в отверстие 28 кольца приводного элемента вводится жесткий упор, корпус которого закреплен на шпиндельной бабке станка. Шпиндель станка вращается, а кольцо 14 остается неподвижным вместе с кольцом 18, и за счет кинематической связи втулки с инструментальными блоками 5 они перемещаются в пазах корпуса 1 вниз до тех пор, пока резервная пластина 2 не окажется за упором 7. В это время толкатели 20 выталкивают резервные пластины 2 из нижних пазов 4 блоков 5 в верхние 6. Затем шпиндель станка вращается в обратном направлении и инструментальные блоки 5 перемещаются вверх, а упоры 7 выталкивают затупившиеся пластины посредством резервных пластин 2. В это время упругий лепесток 11 блоков 5 закрепляет новые пластины в рабочем положении за счет взаимодействия со скосом охватывающего кольца 12. Жесткий упор выводится из отверстия 28, и инструмент готов к работе. Инструмент на станке крепится с помощью оправки, одна часть которой входит в ступенчатое отверстие 29 корпуса и крепится винтами в резьбовых отверстиях 30, а вторая – в шпиндель станка. Для предохранения от перегрузки механизма зажима кольцо 14 соединяется с кольцом 18 посредством подпружиненных шариков 17.

На рис. 4.40 приведен эскиз осевого инструмента с механизмом поворота режущих пластин. Инструмент состоит из корпуса 1 со стружечными канавками, в котором расположен механизм поворота и зажима режущих пластин 2 и 3 [239].

Механизм поворота и зажима состоит из Т-образной тяги 4, на одном конце которой жестко закреплена планка 5, кинематически связанная (например, резьбой) с приводной гайкой 6, фиксированной в осевом направлении двумя пружинными шайбами 7 и 8. На другом конце Т-образной тяги 4 установлены подвижно две ступенчатые оси 9. На нижней ступени осей 9 находятся зубчатые втулки 10, а на верхнем торце втулок отогнута пластина *a*, служащая фиксатором оси 9. Зубчатая втулка 10 входит в зацепление с пружинной рейкой 11, один конец которой неподвижно закреплен в корпусе 1. На торце второй ступени оси 9 (большей по диаметру) закреплена режущая пластина 2 посредством винта 12, а в нижней ее части выполнены пазы *б*, в которых расположены пружинные фиксаторы 13, жестко закрепленные в отверстиях Т-образной тяги.

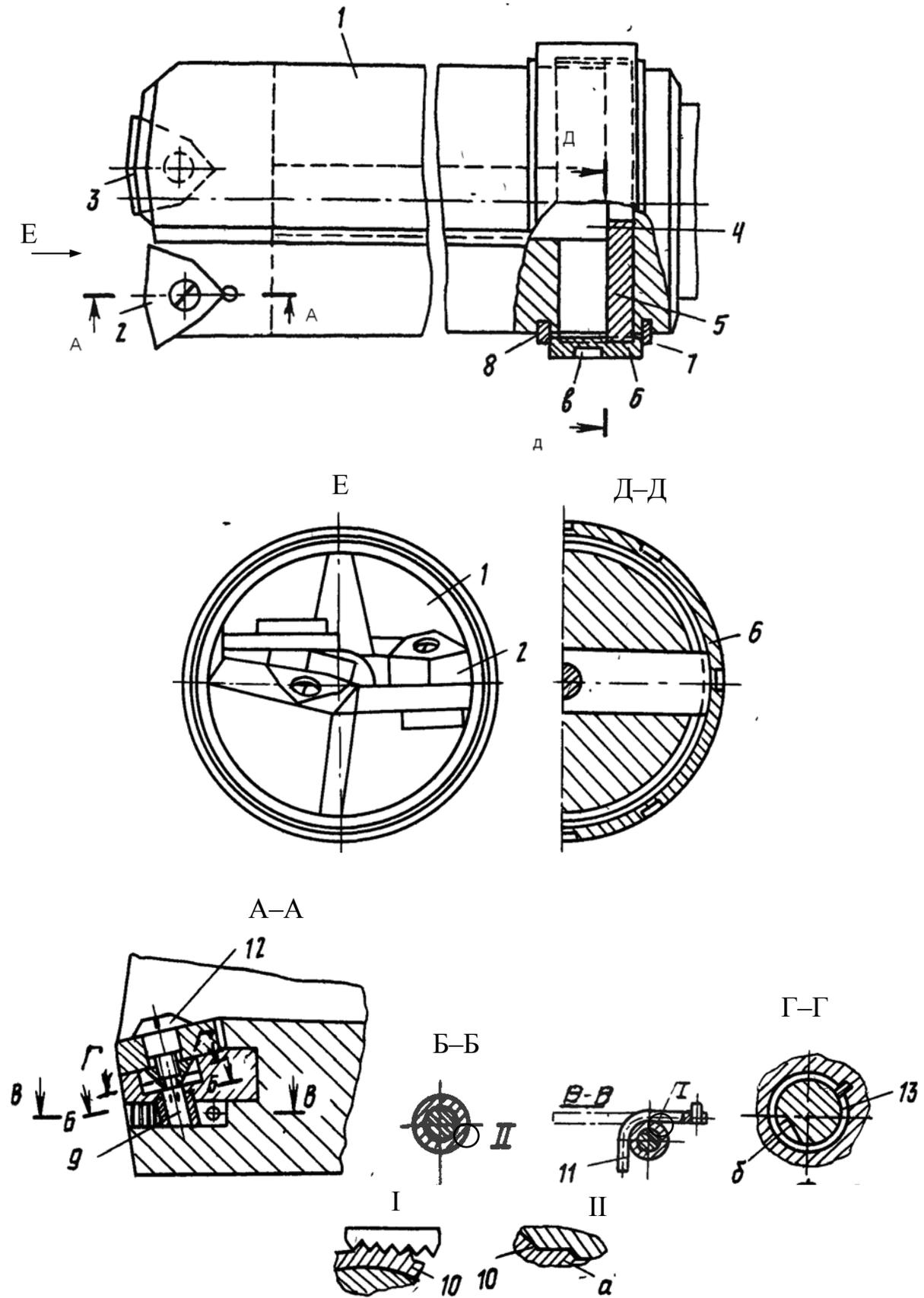


Рис. 4.40. Эскиз осевого инструмента с механизмом поворота режущих пластин

При затуплении режущих кромок устройство отводится из зоны обработки и упор, корпус которого закреплен на шпиндельной бабке (не показан), входит в отверстие в приводной гайке 6. Сверло поворачивается против часовой стрелки и планка 5 перемещается вместе с тягой 4 в крайнее левое положение. При этом перемещении режущие пластины 2 и 3 выходят из контакта с призматическими пазами корпуса. В это время ось 9 поворачивается посредством зубчатой втулки 10, которая взаимодействует с пружинной рейкой 11. При повороте оси 9 поворачиваются и режущие пластины. Затем сверло вращается по часовой стрелке, и Т-образная тяга перемещается в крайнее правое положение. Режущие пластины при этом не поворачиваются, благодаря фиксаторам 13 и пластине *a*.

#### 4.7. Конструкции оснастки для восстановления работоспособности сборных механизированных инструментов

Для заточки режущих пластин форм 0139А, 0141А используются приспособления, изображенные на рис. 4.41, 4.42.

В пазах цилиндрического корпуса 1 приспособления устанавливают режущие элементы 2 [240]. Режущие кромки элементов 2 располагают параллельно оси корпуса приспособления (рис. 4.41). Заточку производят абразивным инструментом 3, которому вместе с корпусом 1 сообщают согласованное вращательное движение. После двух-трех оборотов корпуса 1 абразивному инструменту 3 сообщают движение подачи ( $D_s$ ) вдоль оси корпуса приспособления. Кроме того, абразивный инструмент 3 выполнен в виде червяка, радиусы  $R_{2i}$  профиля которого в радиальном сечении определяют по формуле

$$R_{2i} = \sqrt{R_{1i}^2 + R_{\text{но}}^2 - 2R_{\text{но}}R_{1i}(\sin 2\alpha - \alpha \cos 2\alpha)},$$

где  $R_{1i}$  – радиус траектории перемещения точки профиля режущего элемента;  $R_{\text{но}}$  – радиус корпуса приспособления;  $\alpha$  – угол между радиусом траектории перемещения точки профиля режущего элемента и прямой, параллельной оси абразивного инструмента и пересекающей ось вращения корпуса приспособления.

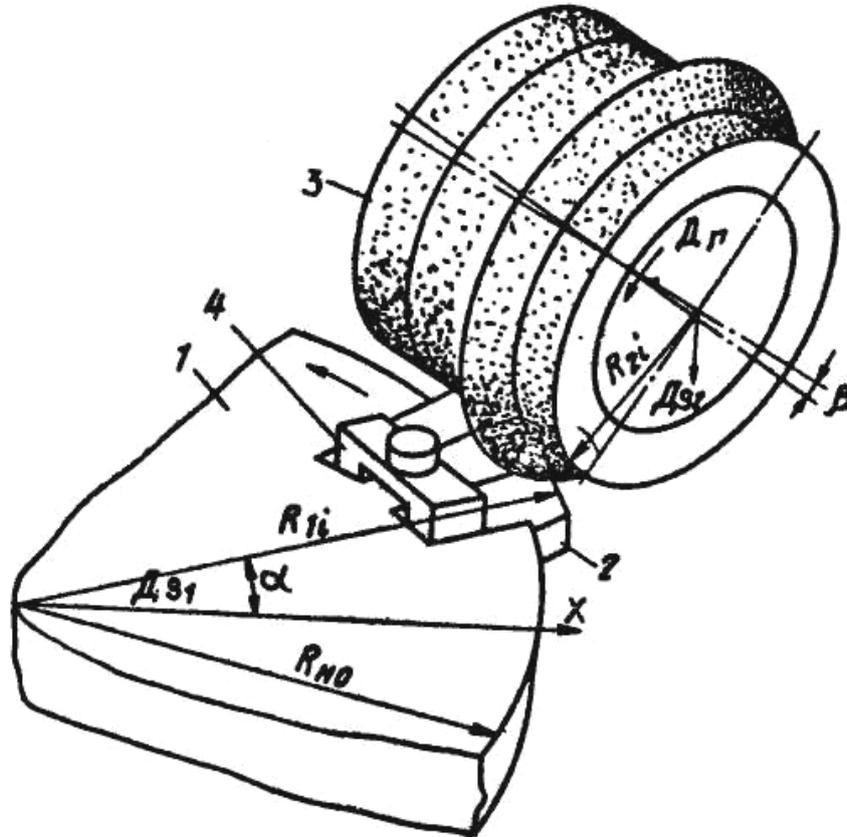


Рис. 4.41. Эскиз наладки для заточки и доводки СМП

Червячный шлифовальный инструмент 3 устанавливают так, чтобы его ось была наклонена под углом  $\beta$  подъема винтовой линии червяка. Режущие элементы 2 закрепляют прижимами 4.

Абразивный инструмент 3 подводят к затачиваемым режущим элементам 2 сверху так, чтобы режущая кромка элемента 2 была касательна к впадинам червяка 3. Червяк 3 совершает главное вращательное движение ( $D_r$ ), а приспособление – согласованное с ним движение обкатки ( $D_{S_1}$ ).

Известно механизированное приспособление, которое состоит из сварного корпуса 1 (рис. 4.42), упорного кожуха 2 и кулачка 3, перемещающегося вокруг корпуса по направляющим 4, закрепленным посредством винтов 5 [241]. Приводной вал 6, установленный в корпусе 1 приспособления, приводится в движение от червячной передачи 7 и 8 и приводит в движение механизмы установки режущих элементов и зажимные элементы, а также механизмы настройки режущих элементов на угол заточки.

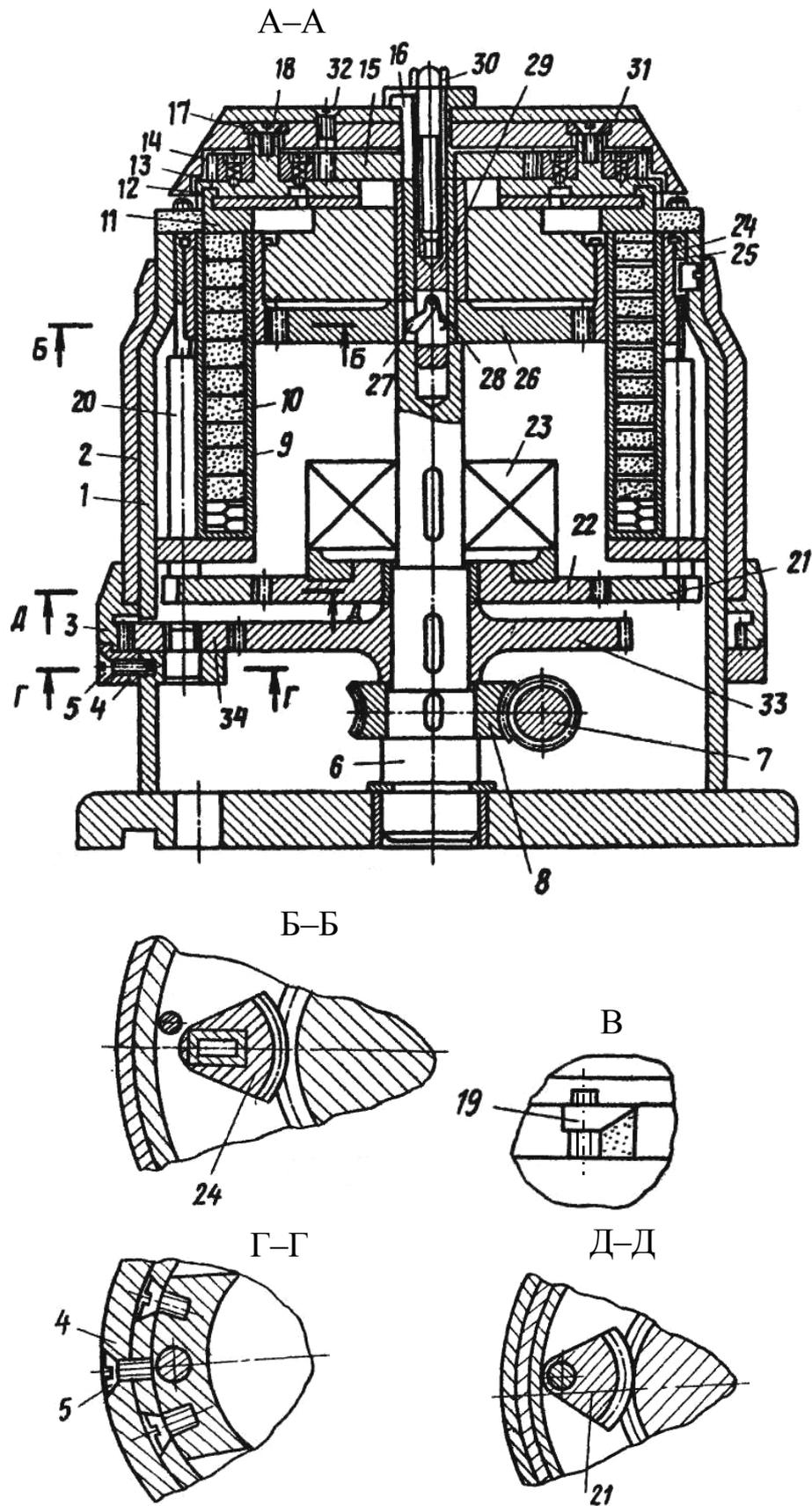


Рис. 4.42. Эскиз механизированного заточного приспособления (1-й фрагмент; окончание см. на с. 315)

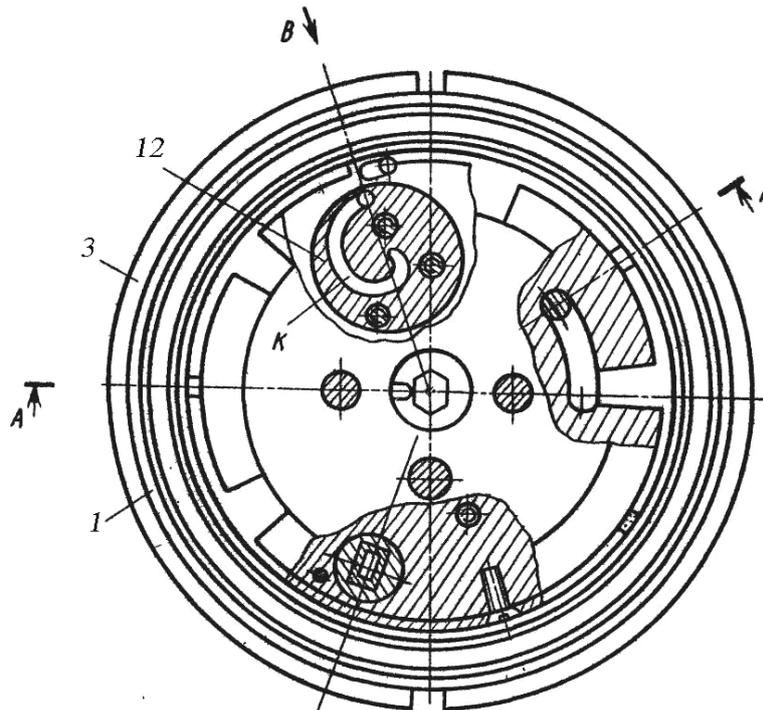


Рис. 4.42. Окончание (начало см. на с. 314)

Механизмы установки режущих элементов состоят из расположенных по периметру корпуса *1* на равном расстоянии от оси приводного вала *6* магазинов *9* для размещения режущих элементов (пластин) *10*, толкателей-отсекателей *11*, которые перемещаются возвратно-поступательно от центра устройства посредством составных дисков *12*, закрепленных подвижно с помощью шариковых фиксаторов *13* на зубчатых колесах *14*, причем в указанных дисках имеется паз *K*, выполненный по спирали. Зубчатые колеса *14* входят в зацепление с центральным зубчатым колесом *15*, закрепленным на приводном валу *6* посредством шпонки *16*. Составные диски *12* имеют возможность поворачиваться вокруг своей оси (не показана), и для предотвращения их перемещения вдоль оси служат шайба *17* и винт *18*.

Зажимные элементы состоят из прижимов *19*, винтов *20*, оси которых параллельны оси приводного вала *6*. На винтах *20* неподвижно закреплены зубчатые секторы *21*, входящие в зацепление с зубчатым колесом *22*, которое свободно вращается на приводном валу *6* и жестко связано с электромагнитной муфтой *23*.

Механизмы настройки режущих элементов на угол заточки (задний угол) состоят из зубчатых секторов *24*, закрепленных на магазинах *9* и установленных подвижно в дисках *25* зубчатого колеса *26*, передающего вращение оси приводного вала *6* посредством подпружиненной шпонки *27*. Эта шпонка может поворачиваться вокруг

оси 28, закрепленной во втулке 29, перемещающейся с помощью винта 30 вдоль оси приводного вала 6. В зубчатых секторах 24 выполнены прямоугольные пазы. Все устройство закрывается крышкой 31, которая крепится винтами 32. Кроме того, на приводном валу 6 установлено зубчатое колесо 33, входящее в зацепление с зубчатым колесом 34, взаимодействующим с кулачком 3.

Затачиваемые режущие элементы, например пластины, закладываются в магазины 9 и устанавливаются сверху в пазы зубчатых секторов 24. Вращательное движение от червяка 7 через зубчатые колеса 15 и 14 и шариковые фиксаторы 13 передается составным дискам 12, по пазам которых перемещаются толкатели-отсекатели 11 от периферии к центру устройства.

Пластины из магазинов 9 поступают на освободившееся от толкателей-отсекателей 11 место. Затем происходит вращение приводного вала 6 в обратную сторону, и толкатели-отсекатели 11 перемещаются от центра к периферии устройства, толкая пластины.

В это время движение от приводного вала 6 посредством зубчатых колес 33 и 34 передается на кулачок 3, который перемещает упорный кожух 2 вверх. Пластины 10, упираясь в кожух 2, останавливаются.

В это время включается муфта 23, и движение от приводного вала 6 передается через зубчатое колесо 22 и секторы 21 винтам 20, которые ввинчиваются в прижимы 19 и зажимают пластины. Во время зажима происходит опускание вниз упорного кожуха 2, и устройство готово к заточке пластин. При изменении заднего угла заточки винт 30 поворачивают и перемещают втулку 29 вдоль оси приводного вала 6 вниз, вводят шпонку 27 в зацепление с зубчатым колесом 26, которое, вращаясь от приводного вала 6, передает движение зубчатым секторам 24, поворачивающим на необходимый угол магазины 9.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленной работе приведены результаты комплексных исследований по обеспечению работоспособности сборного механизированного инструмента.

Приведены модели, описывающие процесс формообразования поверхностей деталей и его влияние на параметры режущего инструмента. Раскрыты принятые понятия и определения схем срезания припуска и формообразования поверхностей при обработке материалов резанием, позволившие синтезировать новые методы обработки, а также режущие и формообразующие кромки инструмента. Приведены модели геометрических и кинематических поверхностей, их анализ и способы задания, позволяющие определить расположение формообразующих кромок в режущем инструменте.

Раскрыта методика моделирования прямой задачи формообразования, приведены математические модели формообразующих кромок инструмента, а также геометрических параметров зуба сборного инструмента. По полученным моделям формообразующих кромок описано моделирование формообразования поверхностей деталей.

Приведена методика математического моделирования обратной задачи формообразования сборным инструментом. Описаны модели аппроксимации образующей и направляющей геометрической поверхности детали.

Приведен анализ стабильности геометрических параметров режущих элементов инструмента по результатам исследований точности размеров и углов СМП, исследований контурных площадей касания базовых граней пластин и отклонений их от плоскостности.

Разработано композиционное полимерное покрытие для базовых граней СМП сборного режущего инструмента. Приведен анализ процесса формирования эпоксиполиэфирного материала для покры-

тия базовых граней спеченных многогранных пластин. Произведена оптимизация состава покрытия по критерию адгезионной прочности к базовым граням спеченных многогранных пластин. Описаны результаты исследований физико-механических свойств материала покрытия. Приведены результаты термического и дифференциально-термического анализа разработанного материала покрытия. Исследованы контурные площади контакта пластин с композиционным покрытием с эталонной плоскостью.

Раскрыта математическая модель, позволяющая определить точки контакта режущего элемента и паза корпуса инструмента. Приведена плоскостная математическая модель, позволяющая определить точность позиционирования СМП в корпусе инструмента. Приведен анализ погрешности позиционирования при базировании СМП на штифт.

Описана обобщенная методика моделирования точности сборного механизированного инструмента.

Приведен анализ исследований статической прочности и точности. Раскрыта графовая модель НДС зуба инструмента.

Приведены результаты исследований влияния конструктивных параметров зуба инструмента на напряженно-деформированное состояние режущего элемента инструмента. Описаны результаты расчета граничных условий контакта сменных многогранных пластин.

Выявлено влияние размеров и передних углов на НДС закрепленного зуба. Приведены экспериментальные исследования статической точности рабочей части сборного инструмента с СМП без покрытия и с композиционным покрытием базовых граней.

Приведены расчеты передних и задних углов дисковой СМП, обеспечивающей обработку радиусного участка детали.

Выполнен анализ влияния параметров процесса точения на топографию цилиндрической кинематической поверхности, а также режима резания на шероховатость обработанной поверхности при фрезеровании концевой и шаровой фрезами.

Приведена вероятностная оценка точности инструментальной наладки СМРИ. Описаны конструкции сборных механизированных инструментов и оснастки для восстановления их работоспособности.

# ЛИТЕРАТУРА

1. Рыжов, Э. В. Технологическое управление геометрическими параметрами контактирующих поверхностей / Э. В. Рыжов // Расчётные методы оценки трения и износа : сб. ст. / БИТМ. – Брянск, 1975. – С. 75–81.
2. Ящерицын, П. И. Технологическая наследственность в машиностроении / П. И. Ящерицын, Э. В. Рыжов, В. И. Аверченков. – Минск : Наука и техника, 1977. – 256 с.
3. Маталин, А. А. Точность механической обработки и проектирование технологических процессов / А. А. Маталин. – Ленинград : Машиностроение, 1970. – 319 с.
4. Соколовский, А. П. Научные основы технологии машиностроения / А. П. Соколовский. – Ленинград : Машгиз, 1955. – 515 с.
5. Корсаков, В. С. Точность механической обработки / В. С. Корсаков. – Москва : Машгиз, 1962. – 379 с.
6. Панкин, А. В. Обработка металлов резанием / А. В. Панкин. – Москва : Машгиз, 1961. – 520 с.
7. Шарин, Ю. С. Технологическое обеспечение станков с ЧПУ / Ю. С. Шарин. – Москва : Машиностроение, 1986. – 176 с.
8. Ермаков, Ю. М. Технология и станки тангенциального точения / Ю. М. Ермаков. – Москва : Машиностроение, 1979. – 152 с.
9. Данилов, В. А. Формообразующая обработка сложных поверхностей резанием / В. А. Данилов. – Минск : Навука і тэхніка, 1995. – 264 с.
10. Добровольский, Н. Д. Исследование процесса формообразования при ротационном протягивании со свободным выходом стружки / Н. Д. Добровольский // Машиностроение : сб. науч. ст. – Минск, 1982. – Вып. 2. – С. 86–92.
11. Новосёлов, Ю. А. Определение оптимальных кинематических параметров процесса фрезеточения / Ю. А. Новосёлов, Н. Н. Попок // Машиностроение : сб. науч. ст. – Минск, 1985. – Вып. 10. – С. 11–15.

12. Голембиевский, А. И. Анализ способа обработки при планетарном движении заготовок / А. И. Голембиевский, Г. Е. Голембиевская // *Машиностроение* : сб. науч. ст. – Минск, 1985. – Вып. 10. – С. 92–96.
13. Данилов, В. А. Сравнительный анализ методов фрезерования сложных поверхностей / В. А. Данилов // *Машиностроение* : сб. науч. ст. – Минск, 1985. – Вып. 10. – С. 102–106.
14. Родин, П. Р. Обработка фасонных поверхностей на станках с ЧПУ / П. Р. Родин, Г. А. Линкин, В. Н. Татаренко. – Киев : Техника, 1976. – 198 с.
15. Данилов, В. А. Повышение стойкости инструментов с круглыми режущими пластинками / В. А. Данилов // *Машиностроение* : сб. науч. ст. – Минск, 1989. – Вып. 14. – С. 26–30.
16. Голембиевский, А. М. Системный анализ процесса зубодолбления / А. М. Голембиевский. – Минск : Навука і тэхніка, 1993. – 152 с.
17. Голембиевский, А. М. Основы системологии способов формообразующей обработки в машиностроении / А. М. Голембиевский. – Минск : Наука и техника, 1986. – 168 с.
18. Фельдштейн, Е. А. Шероховатость поверхности при тонком точении спечённых порошковых материалов / Е. А. Фельдштейн // *Машиностроение* : сб. науч. ст. – Минск, 1979. – Вып. 5. – С. 94–98.
19. Решетов, Д. Н. Точность металлорежущих станков / Д. Н. Решетов, А. Т. Портман. – Москва : Машиностроение, 1984. – 336 с.
20. Смирнов, А. И. Анализ перспектив развития методов формообразования в машиностроении / А. И. Смирнов, И. А. Смирнов. – Москва : НИИМаш, 1982. – 49 с.
21. Кузовенко, Е. Г. Новые способы и схемы резания для чистового фрезерования плоскостей / Е. Г. Кузовенко, В. Ф. Негайцов, А. И. Валеев // *Перспективы развития резания конструкционных материалов* : сб. ст. – Москва, 1980. – С. 260–264.
22. Ермаков, Ю. М. Современные тенденции в развитии лезвийной обработки / Ю. М. Ермаков. – Москва : НИИМаш, 1983. – 68 с.
23. Ермаков, Ю. М. Состояние и тенденции развития комбинированных способов механической обработки / Ю. М. Ермаков. – Москва : ВНИИТЭМП, 1985. – 48 с.
24. Kuklik, H. Programmierung von gekrümmten Oberflächen / H. Kuklik, // *Jnd.-Anz.* – 1984. – № 6. – S. 31–36.
25. Радзевич, С. П. Новые достижения в области обработки деталей сложной формы на станках с ЧПУ / С. П. Радзевич. – Москва : ВНИИТЭМП, 1987. – 48 с.

26. Данилов, В. А. Определение рациональных схем профилирования сложных поверхностей / В. А. Данилов, Л. А. Данилова. – Машиностроение : сб. науч. ст. – Минск, 1986. – Вып. 11. – С. 63–67.
27. Дружинский, А. И. Сложные поверхности: математическое описание и технологическое обеспечение : справочник / А. И. Дружинский. – Ленинград : Машиностроение, 1985. – 263 с.
28. Константинов, М. Т. Расчёт программ фрезерования на станках с ЧПУ / М. Т. Константинов. – Москва : Машиностроение, 1985. – 160 с.
29. Лашнев, С. И. Расчёт и конструирование металлорежущих инструментов с применением ЭВМ / С. И. Лашнев, М. И. Юликов. – Москва : Машиностроение, 1975. – 392 с.
30. Лашнев, С. И. Проектирование режущей части инструмента с применением ЭВМ / С. И. Лашнев, М. И. Юликов. – Москва : Машиностроение, 1980. – 208 с.
31. Devor, R. E. Control of Surface Error in End Milling / R. E. Devo, J. W. Sutherland, W. A. Kline // Proceedings of the Eleventh North American Manufacturing Research Conference. – 1983. – № 6. – P. 356–362.
32. Fischer, H. L. Surface Finish as a Function of Tool Blometry and Feed - A Thooretical Approach / H. L. Fischer, J. T. Elrod // Microtechnic Precision and Production Engineering. – 1975. – Vol. XXV, № 3. – P. 175–178.
33. Martellotti, M. E. An Analysis of the Milling Process / M. E. Martellotti // Transactions of the ASME. – 1941. – Vol. 63. – P. 667–700.
34. Shaw, M. C. Metal Cutting Principlis / M. C. Shaw // Clarendon Press. – 1984. – № 3. – P. 105–109.
35. You, S. Y. Scallop Removal in Dic Milling by Tertiary Cutter Motion / S. Y. You, K. F. Eman // Journal of Engineering for Industry. – 1989. – № 3. – P. 213–215.
36. Данилов, В. А. Токарная обработка некруглых поверхностей / В. А. Данилов // Машиностроитель. – 1991. – № 8. – С. 13–14.
37. Кирсанов, Г. Н. Профилирование высокопроизводительных червячных твёрдосплавных фрез / Г. Н. Кирсанов, И. С. Лабозник // Станки и инструмент. – 1983. – № 10. – С. 22–23.
38. Шишков, В. А. Образование поверхностей резанием по методу обката / В. А. Шишков. – Москва : Машгиз, 1951. – 151 с.
39. Митрофанов, В. Г. Моделирование процесса консольного растачивания отверстий / В. Г. Митрофанов, А. Г. Схиртладзе // Станки и инструмент. – 1981. – № 9. – С. 24–26.

40. Базров, Б. М. Выбор условий фрезерования, обеспечивающих максимальную производительность при заданной точности / Б. М. Базров, О. А. Новиков // Станки и инструмент. – 1983. – № 11. – С. 22–24.
41. Bedi, S. Computer – aided Fairing and Direct Numerical Controlled Machining of Ship Hull Hydrodynamic Testing Models / S. Bedi, W. Chernoff, G. W. Vickers // CSME Transactions. – 1988. – Vol. 12, № 1. – P. 43–48.
42. Vickers, G. W. The Definition and Manufacture of Compound Curvature Surfaces Using G-surf / G. W. Vickers, S. Bedi, R. Haw // Computers in Industry. – 1985. – Vol. 6, № 3. – P. 173–183.
43. Vickers, G. W. Ball-Mills Versus End-Mills for Curved Surface Machining / G. W. Vickers, E. W. Quan // Journal of Engineering for Industry. – 1989. – № 1. – P. 22–24.
44. Михайлов, М. И. К вопросу о методике моделирования кинематических поверхностей, сформированных режущим инструментом по различным схемам формообразования / М. И. Михайлов // Машиностроение : сб. науч. тр. – Минск, 2000. – Вып. 16. – С. 125–132.
45. Ресурсосберегающий режущий инструмент и рациональное инструментообеспечение / М. И. Михайлов [и др.] ; под общ. ред. М. И. Михайлова, П. В. Сысоева. – Минск : НТО машиностроителей, 1991. – 108 с.
46. Михайлов, М. И. Точность сборного режущего инструмента : учеб. пособие / М. И. Михайлов. – Гомель : ГПИ, 1992. – 33 с.
47. Кирсанов, Г. Н. Проектирование инструментов. Кинематические методы / Г. Н. Кирсанов. – Москва : Машиностроение, 1984. – 272 с.
48. Перепелица, Б. А. Отображение аффинного пространства в теории формообразования поверхностей резанием / Б. А. Перепелица. – Харьков : Выща шк. ; Изд-во Харьк. ун-та, 1981. – 152 с.
49. Родин, П. Р. Основы проектирования режущих инструментов : учеб. пособие / П. Р. Родин. – Киев : Выща шк., 1990. – 424 с.
50. Родин, П. Р. Основы формообразования поверхностей резанием / П. Р. Родин. – Киев : Техніка, 1976. – 196 с.
51. Федотенок, А. А. Кинематическая структура металлорежущих станков / А. А. Федотенок. – Москва : Машиностроение, 1970. – 189 с.
52. Коновалов, Е. Г. Основы новых способов металлообработки / Е. Г. Коновалов. – Минск : Наука и техника, 1961. – 328 с.
53. Коновалов, Е. Г. Ротационная обработка поверхностей с автоматической подачей / Е. Г. Коновалов, П. С. Чистосердов, А. И. Фломенбит. – Минск : Наука и техника, 1976. – 187 с.

54. Симоновский, В. Н. Некоторые исследования по теории формообразования поверхностей в машиностроении : автореф. дис. ... канд. техн. наук : 05.02.08 / В. Н. Симоновский ; БПИ. – Минск, 1971. – 21 с.
55. Падураев, В. Н. Технология физико-механических методов обработки / В. Н. Падураев. – Москва : Машиностроение, 1985. – 342 с.
56. Шнейдер, Ю. Г. Образование регулярных микрорельефов на деталях и их эксплуатационные свойства / Ю. Г. Шнейдер. – Ленинград : Машиностроение, 1972. – 320 с.
57. Ящерицын, П. И. Основы технологии механической обработки и сборки в машиностроении / П. И. Ящерицын. – Минск : Выш. шк., 1974. – 543 с.
58. Борисенко, А. В. Ротационное резание материалов / А. В. Борисенко, И. Г. Дривотин, В. Я. Лебедев ; под общ. ред. П. И. Ящерицына. – Минск : Наука и техника, 1987. – 252 с.
59. Шустер, В. Г. Формирование микрорельефа поверхности детали при токарной обработке / В. Г. Шустер, С. И. Фецак, В. Т. Портман // Станки и инструменты. – 1993. – № 1. – С. 8–11.
60. Бобров, В. Ф. Резание металлов самовращающимися резцами / В. Ф. Бобров, Д. Е. Иерусалимский. – Москва : Машиностроение, 1972. – 179 с.
61. Михайлов, М. И. Схематизация срезания припуска как способ создания прогрессивных видов обработки и инструмента / М. И. Михайлов // Современные материалы, оборудование и технологии упрочнения и восстановления деталей машин : тез. докл. науч. конф., Новополоцк, 1995 г. / ПГУ. – Новополоцк, 1995. – С. 29.
62. Зарайский, Л. А. Механическая обработка гребных винтов / Л. А. Зарайский. – Ленинград : Машиностроение, 1957. – 198 с.
63. Коновалов, Е. Г. Резание круглыми ротационными резцами / Е. Г. Коновалов, Л. А. Гик. – Минск : Наука и техника, 1969. – 272 с.
64. Коновалов, Е. Г. Прогрессивные схемы ротационного резания металлов / Е. Г. Коновалов, В. А. Сидоренко, А. В. Соусь. – Минск : Наука и техника, 1972. – 286 с.
65. Кулик, В. К. Прогрессивные процессы обработки фасонных поверхностей / В. К. Кулик, Ю. В. Петриков, В. В. Мотов. – Киев : Техніка, 1987. – 168 с.
66. Тимченко, А. И. Процессы формообразования профильных поверхностей изделий с равноосным контуром : автореф. дис. ... д-ра техн. наук : 05.02.08 / А. И. Тимченко ; Мосстанкин. – Москва, 1993. – 46 с.

67. Ходырев, В. И. Обработка наружных поверхностей вращения ротационными резцами / В. И. Ходырев. – Орел : ОПИ, 1975. – 149 с.
68. Молочко, В. И. О шероховатости обработанной поверхности при вибрационном резании / В. И. Молочко, А. А. Волынец // Машиностроение : сб. науч. тр. – Минск, 2001. – Вып. 17. – С. 53–57.
69. Новиков, О. А. Достижение заданной точности торцового фрезерования с максимальной производительностью : автореф. дис. ... канд. техн. наук : 05.02.08 / О. А. Новиков ; Ин-т нефтехим. и газовой пром-сти. – Москва, 1982. – 24 с.
70. Демкин, Н. Б. Качество поверхностей и контакт деталей / Н. Б. Демкин, Э. В. Рыжов. – Москва : Машиностроение, 1981. – 221 с.
71. Шероховатость поверхностей (теоретико-вероятностный подход) / А. П. Хусу [и др.]. – Москва : Наука, 1975. – 344 с.
72. Суслов, А. Г. Научные основы технологии машиностроения / А. Г. Суслов, А. М. Дальский. – Москва : Машиностроение, 2002. – 684 с.
73. Лашнев, С. И. Формообразование зубчатых деталей реечными и червячными инструментами / С. И. Лашнев. – Москва : Машиностроение, 1971. – 212 с.
74. Ефремов, В. Д. Технологическое обеспечение качества рабочих кромок инструмента и деталей / В. Д. Ефремов, П. И. Ящерицын. – Минск : БГАТУ, 1997. – 251 с.
75. Этин, А. О. Кинематический анализ методов обработки металлов резанием / А. О. Этин. – Москва : Машиностроение, 1964. – 147 с.
76. Богораз, И. И. Производство гребных винтов / И. И. Богораз, И. М. Кауфман. – Ленинград : Машиностроение, 1978. – 188 с.
77. Коганов, И. А. Прогрессивная обработка зубчатых профилей и фасонных поверхностей / И. А. Коганов. – Тула : ТПИ, 1970. – 189 с.
78. Падураев, В. Н. Автоматически регулируемые и комбинированные процессы резания / В. Н. Падураев. – Москва : Машиностроение, 1977. – 347 с.
79. Радзевич, С. П. Формообразование сложных поверхностей на станках с ЧПУ / С. П. Радзевич. – Киев : Техніка, 1991. – 57 с.
80. Загурский, А. В. Методы формообразования поверхностей на станках / А. В. Загурский, В. И. Загурский // Станки и инструмент. – 1990. – № 4. – С. 33–35.
81. Шевелева, Г. И. Теория формообразования и контакта движущихся тел / Г. И. Шевелева. – Москва : МГТУ «Станкин», 1999. – 168 с.
82. Юнусов, Ф. С. Формообразование сложнопрофильных поверхностей шлифованием / Ф. С. Юнусов. – Москва : Машиностроение, 1987. – 168 с.

83. Гречишников, В. А. Проектирование дискового инструмента для обработки винтовых поверхностей / В. А. Гречишников, Г. И. Кирсанов // *Машиностроитель*. – 1978. – № 10. – С. 16–17.
84. Кирсанов, Г. Н. Расчёт профиля дискового инструмента для обработки винтовых поверхностей / Г. Н. Кирсанов, С. С. Ласточкин // *Станки и инструмент*. – 1980. – № 5. – С. 23–25.
85. Гречишников, В. А. Системы автоматизированного проектирования режущих инструментов: обзорная информация / В. А. Гречишников. – Москва : ВНИИТЭМР, 1987. – 52 с.
86. Силин, А. Ф. Систематизация режущих инструментов и видов обработки по методам формообразования / А. Ф. Силин // *Станки и инструмент*. – 1990. – № 9. – С. 35–38.
87. Грановский, Г. И. Кинематика резания / Г. И. Грановский. – Москва : Машгиз, 1948. – 200 с.
88. Кузнецов, А. М. Технологические основы создания методов обработки в машиностроении : автореф. дис. ... д-ра техн. наук : 05.02.08 / А. М. Кузнецов ; МВТУ им. Н. Баумана. – Москва, 1975. – 36 с.
89. Акимов, А. В. Конструирование и исследование высокопроизводительных твердосплавных резцов : автореф. дис. ... канд. техн. наук : 05.03.01 / А. В. Акимов ; Мосстанкин. – Москва, 1953. – 18 с.
90. Хейфец, М. Л. Процессы самоорганизации при формировании поверхностей / М. Л. Хейфец, Л. М. Кожуро, Ж. А. Мрочек. – Гомель : ИММС НАНБ, 1999. – 196 с.
91. Колчин, Н. И. Механика машин / Н. И. Колчин. – Ленинград : Машгиз. – 1962. – 550 с.
92. Штаерман, И. Я. Контактная задача теории упругости / И. Я. Штаерман. – Москва ; Ленинград : ГИТТЛ, 1949. – 270 с.
93. Билик, Ш. М. Макрогеометрия деталей машин / Ш. М. Билик. – Москва : Машиностроение, 1972. – 344 с.
94. Илиев, Х. Н. Нестационарная плоская контактная задача для шероховатых тел : автореф. дис. ... канд. техн. наук : 05.03.01 / Х. Н. Илиев ; ВМЭИ. – София, 1974. – 24 с.
95. Шульц, В. В. Форма естественного износа деталей машин и инструмента / В. В. Шульц. – Ленинград : Машиностроение, 1990. – 208 с.
96. Кривенко, И. С. Новые типы червячных передач на судах / И. С. Кривенко. – Ленинград : Судостроение, 1967. – 256 с.
97. Позняк, Э. Г. Дифференциальная геометрия / Э. Г. Позняк, Е. В. Шишкин. – Москва : Едиториал УРСС, 2003. – 408 с.

98. Бронштейн, И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И. Н. Бронштейн, К. А. Семьяндяев. – Москва : Наука, 1986. – 544 с.
99. Александров, А. Д. Геометрия : учеб. пособие / А. Д. Александров, Н. Ю. Нецветаев. – Москва : Наука, 1990. – 672 с.
100. Математика и САПР : в 2 кн. / П. Жермен-Лакур [и др.] ; пер. с фр. – Москва : Мир, 1989. – Кн. 1 ; 2.
101. Каталог фирмы «Вальтер», 2004. – 36 с.
102. Михайлов, М. И. Методика автоматизированного расчета углов фасонного резца / М. И. Михайлов // Машиностроение : сб. науч. тр. – Минск, 2002. – Вып. 18. – С. 60–63.
103. Михайлов, М. И. Методика расчета профиля фрезы с учетом характера винтовой кинематической поверхности детали / М. И. Михайлов // Машиностроение : сб. науч. тр. – Минск, 2001. – Вып. 17. – С. 47–53.
104. Демкин, Н. Б. Фактическая площадь касания твердых поверхностей / Н. Б. Демкин. – Москва : АН СССР, 1962. – 110 с.
105. Ушаков, В. А. Зависимость свойств ненасыщенных полиэфирных смол от кислотного числа полиэфира / В. А. Ушаков, В. Д. Валгин, В. Н. Демин // Пластические массы. – 1970. – № 11. – С. 44–45.
106. Никитин, Е. Е. Исследование процессов трения и износа композиций на основе полиэфирных эпоксидных смол / Е. Е. Никитин, В. В. Лакиза // Повышение износостойкости и срока службы машин : тез. докл. НТК, Киев, 1970 г. / Киев. политехн. ин-т. – Киев, 1970. – Вып. 4. – С. 99.
107. Михайлов, М. И. Оптимизация состава фрикционного покрытия твердосплавных пластин сборного инструмента / М. И. Михайлов, З. Я. Шабакаева // Материалы, технология, инструмент. – 1996. – № 3. – С. 28–34.
108. Михайлов, М. И. Комплексный анализ композиционного материала на основе эпоксиполиэфирных смол / М. И. Михайлов, З. Я. Шабакаева, П. В. Сысоев // О природе трения твердых тел : тез. докл. междунар. симпозиума, Гомель, 2002 г. / ИММС им. В. А. Белого НАНБ. – Гомель, 2002. – С. 85.
109. Сысоев, П. В. Демпфирующие композиционные покрытия на основе эпоксиполимерных смол / П. В. Сысоев, М. И. Михайлов, З. Я. Шабакаева // Физика и механика композиционных материалов на основе полимеров : тез. докл. междунар. науч. конф., Гомель, 1993 г. / ИММС НАН РБ, Гомель, 1993. – С. 29–30.
110. Михайлов, М. И. Влияние фрикционных покрытий СМП на их износостойкость / М. И. Михайлов, З. Я. Шабакаева // Современные

- проблемы машиноведения : материалы междунар. науч.-техн. конф., Гомель, 2000 г. – Гомель, 2000. – Т. 1. – С. 153–156.
111. Демпфирующие композиционные покрытия на основе эпоксиполимерных смол / П. В. Сысоев [и др.] // Физика и механика композиционных материалов на основе полимеров : тез. докл. науч. конф., Гомель, 1993 г. / ИММС им. В. А. Белого. – Гомель, 1993. – С. 49.
112. Полимерная фрикционная композиция : пат. 7400 Респ. Беларусь МПК7 С 08J 5/14 / П. В. Сысоев, З. Я. Шабакаева, М. И. Михайлов ; заявитель ГНУ «ИММС им. В. А. Белого НАН Б». – № 20010681 ; заявл. 01.08.01 ; опубл. 30.09.05 // Афіцыйны бюл. / Нац. цэнтр інтэлектуал. уласнасці. – 2005. – № 3 . – С. 57.
113. Плескачевский, Ю. М. Работоспособность сборных резцов с композиционным покрытием многогранных пластин / Ю. М. Плескачевский, М. И. Михайлов, З. Я. Шабакаева // Трение и износ. – 2004. – № 5. – С. 519–522.
114. Инфракрасная спектроскопия полимеров / Н. Дехант [и др.] ; под ред. Н. Деханта. – Москва : Химия, 1976. – 472 с.
115. Наканиси, К. Инфракрасные спектры и строение органических соединений / К. Наканиси. – Москва : [б. и.], 1965. – 216 с.
116. Град, Н. М. Полиэфирно-эпоксидные композиции и их применение в промышленности / Н. М. Град. – Ленинград : ЛДНТП, 1981. – 20 с.
117. Фрикционные композиты на основе полимеров / А. К. Погосян [и др.] ; под ред. В. А. Белого. – Минск : Информтрибо, 1992. – 218 с.
118. Дунаев, П. Ф. Расчет допусков размеров / П. Ф. Дунаев, О. П. Леликов. – Москва : Машиностроение, 2006. – 400 с.
119. Михайлов, М. И. Моделирование точности сборного механизированного инструмента / М. И. Михайлов // Современные проблемы машиноведения : тез. докл. МНТК. – Гомель, 2006. – С. 88–89.
120. Зорев, Н. Н. Опыт повышения режимов резания в механических цехах Харьковского трубогенераторного завода им. Кирова / Н. Н. Зорев, И. Я. Адам, Н. И. Ташлицкий. – Москва : Машгиз, 1949. – 14 с.
121. Хаэт, Г. Л. Прочность режущего инструмента / Г. Л. Хаэт. – Москва : Машиностроение, 1975. – 164 с.
122. Романов, В. В. Выбор оптимального радиуса округления режущих кромок инструмента по его прочности при прерывистом резании / В. В. Романов, В. Н. Чижов // Изв. вузов. Сер. Машиностроение. – 1988. – № 3. – С. 126–131.

123. Третьяков, И. П. Проблема прочности металлорежущего инструмента и некоторые пути ее решения / И. П. Третьяков. – Ленинград, 1953. – Сер. 4, № 6. – 12 с.
124. Третьяков, В. И. Металлокерамические твердые сплавы / В. И. Третьяков. – Москва : Metallurgizdat, 1962. – 520 с.
125. Писаренко, Г. С. Прочность металлокерамических материалов и сплавов при нормальных и высоких температурах / Г. С. Писаренко, В. Т. Траценко. – Киев : Изд-во АН УССР, 1962. – 164 с.
126. Андреев, Г. С. Исследование напряжений в рабочей части резца на поляризационно-оптической установке с применением кино съемки / Г. С. Андреев // Вестн. машиностроения. – 1958. – № 5. – С. 51–54.
127. Грудов, П. П. Режущие свойства твердосплавных фрез при фрезеровании чугуна и стали / П. П. Грудов, С. И. Волков, М. С. Харламов. – Москва : ВМИИ, 1953. – 18 с.
128. Андреев, Г. С. Поляризационно-оптическое изучение процесса резания с применением киносъемки / Г. С. Андреев, В. М. Захарцева // Передовой научно-технический и производственный опыт : сб. ст. – Москва, 1958. – С. 21–24.
129. Андреев, Г. С. Напряженное состояние режущей части резца при периодическом резании / Г. С. Андреев // Прочность режущего инструмента : сб. ст. – Москва, 1969. – С. 12–14.
130. Полетика, М. Ф. Исследование процесса резания поляризационно-оптическим методом / М. Ф. Полетика, М. Х. Утешев // Изв. Томск. политехн. ин-та. – 1964. – Т. 114. – С. 748–750.
131. Полетика, М. Ф. Поляризационно-оптическая установка для исследования процесса резания / М. Ф. Полетика, М. К. Утешев. – Москва : ГОСИНТИ, 1963. – 22 с.
132. Бетанели, А. И. Приспособление для поляризационно-оптического исследования напряжений в режущей части инструмента в процессе резания / А. И. Бетанели // Тр. Грузин. политехн. ин-та. – Тбилиси, 1965. – № 3. – С. 16–21.
133. Гениатулин, А. М. Анализ экспериментальных методов изучения деформаций элементов сборных режущих инструментов / А. М. Гениатулин. – Курган, 1984. – 12 с. – Деп. в ВНИИТЭРМ 20.12.84, № 348.
134. Kottwinkel, W. Untersuchungen an schneidenden Werkzeugen Hilfe der Spannungsoptik / W. Kottwinkel // Industrie Anzeiger. – 1957. – № 36. – S. 75–80.

135. Usui, E. Protoplastic Analysis of Machining Stresses / E. Usui, H. Takejama // Trans. ASME. – 1960. – Ser. B. – Vol. 82. – P. 140–146.
136. Chandmsekaran, H. Photoplastic Analysis of Toolchip Interface Stresses / H. Chandmsekaran, D. Капоср // Trans. of ASME. – 1966. – Ser. B. – Vol. 87. – P. 98–101.
137. Полетика, М. Ф. Контактные напряжения на передней поверхности резца / М. Ф. Полетика // Прочность режущего инструмента : сб. ст. – Москва, 1967. – С. 22–26.
138. Полетика, М. Ф. Контактные нагрузки на режущих поверхностях инструмента / М. Ф. Полетика. – Москва : Машиностроение, 1969. – 196 с.
139. Полетика, М. Ф. Аналитические методы расчета прочности режущей части инструмента / М. Ф. Полетика, М. Х. Утешев // Высокопроизводительное резание в машиностроении : сб. ст. – Москва, 1966. – С. 4–10.
140. Primus, J. F. Spezifische Beanspruchungen in den Kontaktsonen von Drehwerkenden und ihr Einfluss auf Spanbildung / J. F. Primus. – Berlin, 1970. – 168 s.
141. Кокер, Э. Оптический метод исследования напряжений / Э. Кокер, Л. Файлон. – Москва ; Ленинград : ОНТИ, 1936. – 248 с.
142. Сборный твердосплавный инструмент / Г. Л. Хаеа [и др.] ; под общ. ред. Г. Л. Хаеа. – Москва : Машиностроение, 1989. – 256 с.
143. Primus, J. F. Spezifische Beanspruchungen in den Kontaktsonen von Drehwerkenden und ihr Einfluss auf Spanbildung und Verschleiss / J. F. Primus // Industrie Anzeiger. – 1970. – № 24. – S. 17–21.
144. Бетанели, А. И. Хрупкая прочность режущей части инструмента / А. И. Бетанели. – Тбилиси : ГПИ, 1969. – 248 с.
145. Рылин, А. В. Анализ напряженного состояния лезвия инструмента / А. В. Рылин, В. А. Сенюков, А. В. Серов // Изв. вузов. Сер. Машиностроение. – 1985. – № 7. – С. 117–120.
146. Утешев, М. Х. Некоторые результаты исследования напряженного состояния режущей части инструмента при помощи лазера / М. Х. Утешев, В. А. Сенюков // Прочность режущего инструмента. – 1969. – С. 51–53.
147. Primus, J. F. Ermittlung der Spannungsverteilung auf der Spanfläche von Drehwerkzeugen bei der Stahlzerspannung / J. F. Primus // Industrie Anzeiger. – 1971. – № 6. – S. 140–146.
148. Хаеа, Г. Л. Оценка качества режущего инструмента с помощью вероятностного интегрального показателя / Г. Л. Хаеа, И. А. Ор-

- динарцев, Т. Г. Ивченко // Надежность и контроль качества. – 1982. – № 2. – С. 44–49.
149. Хае́т, Г. Л. Торцовые твердосплавные фрезы с ножами повышенной прочности / Г. Л. Хае́т, Н. Я. Ильченко // Металлорежущий и контрольно-измерительный инструмент. – 1969. – Вып. 9. – С. 21–23.
150. Лоладзе, Т. Н. Прочность и износостойкость режущего инструмента / Т. Н. Лоладзе. – Москва : Машиностроение, 1982. – 320 с.
151. Титов, Г. Н. Прочность инструментальных материалов / Г. Н. Титов // Совершенствование технологии машин и приборов. – Пенза, 1960. – Вып. 3. – С. 17–20.
152. Титов, Г. Н. Прочность металлорежущих инструментов / Г. Н. Титов. – Москва : Машгиз, 1947. – 146 с.
153. Иноземцев, Г. Г. Прочность резцов / Г. Г. Иноземцев. – Москва ; Свердловск : Машгиз, 1948. – 124 с.
154. Колев, К. С. К вопросу расчета резцов и сверл на прочность / К. С. Колев // Тр. Сев.-Кавказ. горно-металлург. ин-та. – Орджоникидзе, 1956. – Вып. 12. – С. 148–150.
155. Archibald, F. R. Analysis of the Stresses in a Cutting Enge / F. R. Archibald // Trans. of ASME. – 1956. – № 6. – P. 47–52.
156. Тимошенко, С. Н. Теория упругости / С. Н. Тимошенко. – Москва : ОНТИ, 1937. – 420 с.
157. Клушин, М. И. К расчету на прочность режущей части инструментов / М. И. Клушин // Исследования и опыт внедрения скоростного резания металлов минералокерамическими инструментами : сб. ст. – Горький, 1957. – С. 26–29.
158. Клушин, М. И. К расчету на прочность режущей части инструментов / М. И. Клушин // Инструментальные режущие материалы. – Москва, 1960. – С. 54–59.
159. Клушин, М. И. Резание металлов / М. И. Клушин. – Москва : Машгиз, 1958. – 324 с.
160. Клушин, М. И. Расчет режущей части инструментов на прочность / М. И. Клушин // Станки и инструмент. – 1958. – № 2. – С. 20–22.
161. Даутов, И. В. К вопросу о расчете режущего инструмента на прочность / И. В. Даутов // Изв. вузов. Сер. Машиностроение. – 1966. – № 6. – С. 132–135.
162. Мухелишвили, Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили. – Москва : АН СССР, 1949. – 246 с.

163. Бобров, В. Ф. Определение напряжений в режущей части металло-режущих инструментов / В. Ф. Бобров // Высокопроизводительное резание в машиностроении : сб. ст. – Москва, 1966. – С. 3–7.
164. Бетанели, А. И. К вопросу о расчете прочности режущей части инструмента / А. И. Бетанели // Тр. Грузин. политехн. ин-та. – Тбилиси, 1964. – № 4. – С. 151–153.
165. Грубин, А. Н. Исследование контактного напряженного состояния для тел переменной кривизны с прямолинейной линией соприкосновения / А. Н. Грубин // Тр. Куйбышев. индустр. ин-та. – Куйбышев, 1958. – Вып. 4. – С. 152–156.
166. Филоненко-Бородич, М. М. О плоской задаче для клина / М. М. Филоненко-Бородич // ИМН. – 1962. – № 3. – С. 141–143.
167. Белоносов, С. М. Основные плоские статистические задачи теории упругости при односвязных и двухсвязных областях / С. М. Белоносов. – Новосибирск : СО АН СССР, 1962. – 182 с.
168. Полетика, М. Ф. К расчету режущей части инструмента на прочность / М. Ф. Полетика, М. Х. Утешев // Изв. Томск. политехн. ин-та. – 1965. – Т. 123. – С. 81–83.
169. Повышение прочности и износостойкости твердосплавного инструмента / Л. Г. Куклин [и др.]. – Москва : Машиностроение, 1968. – 138 с.
170. Остафьев, В. А. Матричный метод расчета напряжений в режущем инструменте / В. А. Остафьев. – Москва : ЦНИИТЭстроймаш, 1971. – 72 с.
171. Остафьев, В. А. Расчет прочности режущей части инструмента / В. А. Остафьев // Станки и инструмент. – 1972. – № 7. – С. 22–24.
172. Остафьев, В. А. Расчет динамической прочности режущего инструмента / В. А. Остафьев. – Москва : Машиностроение, 1979. – 168 с.
173. Остафьев, В. А. Влияние прерывистости работы режущего инструмента : материалы 3-го Всесоюз. науч.-техн. семинара, Донецк, 1984 г. / Донец. политехн. ин-т. – Донецк, 1984. – С. 113–115.
174. Миранцов, Л. М. Исследование напряженно-деформированного состояния механически закрепленной режущей пластины резцов для тяжелых токарных станков МКЭ / Л. М. Миранцов, В. С. Гузенко, В. А. Овчаренко // Надежность режущего инструмента : материалы 3-го Всесоюз. науч.-техн. семинара, Донецк, 1984 г. / Донец. политехн. ин-т. – Донецк, 1984. – С. 103–105.
175. Новоселов, Ю. А. Расчет напряженно-деформированного состояния режущих инструментов с учетом особенностей их исполне-

- ния / Ю. А. Новоселов, М. И. Михайлов // Изв. вузов. Сер. Машиностроение. – 1984. – № 5. – С. 126–130.
176. Михайлов, М. И. Повышение прочности сборного режущего инструмента / М. И. Михайлов. – Минск : Навука і тэхніка, 1993. – 174 с.
177. Фельдштейн, Е. Э. Прогнозирование работоспособности сменных многогранных пластин режущих инструментов / Е. Э. Фельдштейн // СТИН. – 1998. – № 10. – С. 14–19.
178. Утешев, М. Х. Повышение стойкости и работоспособности режущего инструмента / М. Х. Утешев // Новые материалы и технологии в машиностроении : материалы региональной науч.-техн. конф., Тюмень, 1997 г. / Тюмен. политехн. ин-т. – Тюмень, 1997. – С. 9–10.
179. Трусов, В. В. Повышение работоспособности режущего инструмента конструкционными методами / В. В. Трусов, В. А. Козлов // Инструмент. – 1998. – № 12. – С. 30.
180. Кабалдин, Ю. Г. Механизмы разрушения твёрдосплавного инструмента при прерывистом резании / Ю. Г. Кабалдин, А. А. Бурков, С. В. Виноградов // Вестн. машиностроения. – 2000. – № 5. – С. 31–35.
181. Работоспособность инструмента, упрочнённого методом эпиламирования / В. В. Хрипунов [и др.] // Вестн. машиностроения. – 2000. – № 5. – С. 62–63.
182. Малыгин, В. И. Выбор способа механического крепления режущих пластин кольцевых свёрл / В. И. Малыгин, П. В. Перфильев // Прогрессивный инструмент : материалы НТК, Москва, 1988 г. / Ун-т дружбы народов. – Москва, 1988. – С. 120–125.
183. Малыгин, В. И. Расчётный метод оценки качества сборного инструмента по напряжённому состоянию / В. И. Малыгин, П. В. Перфильев // Вестн. машиностроения. – 1992. – № 10–11. – С. 44–46.
184. Малыгин, В. И. Модель напряжённно-деформированного состояния режущего элемента сборного инструмента / В. И. Малыгин, Н. В. Лобанов // Вестн. машиностроения. – 2000. – № 2. – С. 22–26.
185. Прочность твердосплавных пластин для черновой обработки жаропрочных сплавов / М. Ю. Левин [и др.] // Станки и инструмент. – 1990. – № 12. – С. 30–31.
186. Гречишников, В. А. Исследование деформированного состояния сборного режущего элемента методом конечных элементов / В. А. Гречишников, С. В. Лукина, А. И. Веселов // Конструкторско-технологическая информатика 2000 : материалы IV Международн. конгресса, Москва, 2000 г. / МГТУ. – Москва, 2000. – Т. 1. – С. 158–160.

187. Баженов, А. В. Особенности композиционных резцов как объектов механики деформируемого твёрдого тела / А. В. Баженов, В. И. Желтков // Математические методы в технике и технологиях : материалы 12-й Междунар. науч. конф., Великий Новгород, 1–3 июня 1999 г. : в 4 т. / НГУ. – Великий Новгород, 1999. – Т. 4. – С. 123–124.
188. Баженов, А. В. Суперэлементная модель композиционных резцов / А. В. Баженов, В. И. Желтков // Математические методы в технике и технологиях : материалы 12-й Междунар. науч. конф., Великий Новгород, 1–3 июня 1999 г. : в 4 т. / НГУ. – Великий Новгород, 1999. – Т. 2. – С. 124–126.
189. Хамуда, С. Н. Экспериментальное исследование жесткости сборных торцевых фрез по их статическим характеристикам / С. Н. Хамуда, К. Г. Громаков, А. Д. Шустиков // Исследование процессов обработки металлов и динамики технологического оборудования. – Москва, 1982. – С. 44–49.
190. Шустиков, А. Д. Исследование спектров колебания и стойкости торцевых фрез с механически закрепленными режущими пластинами / А. Д. Шустиков, В. В. Матвейкин, С. Н. Хамуда // Исследование динамики технологического оборудования и инструмента : сб. ст. – Москва, 1982. – С. 34–37.
191. Шустиков, А. Д. Анализ качества сборных проходных резцов / А. Д. Шустиков. – Москва : НИИМаш, 1981. – 40 с.
192. Методика исследования статических характеристик сборных фрез / В. М. Малыгин [и др.] // Вопросы повышения качества металлорежущего оборудования и инструмента : сб. ст. / МСТИ. – Москва, 1984. – С. 33–37.
193. Способ контроля качества инструмента : а. с. 2895679 СССР, МКИ5 В23В / А. Д. Шустиков [и др.] ; Ун-т дружбы народов им. П. Лумумбы. – № 4497433 ; заявл. 24.10. 78 ; опубл. 07.12.81 // Открытия. Изобрет. – 1981. – № 45. – С. 28.
194. Вольвачев, Ю. Ф. Оценка качества сборных проходных резцов по статическим и динамическим характеристикам на полуавтоматических испытательных стендах : автореф. дисс. ... канд. техн. наук : 05.03.01 / Ю. Ф. Вольвачев ; Мосстанкин. – Москва, 1953. – 18 с.
195. Борцов, В. Е. Математическая модель механизма образования погрешностей взаимозаменяемой размерной настройки сборного режущего инструмента на токарных станках с ЧПУ / В. Е. Борцов, С. В. Спренне // Автоматизация и механизация технологических процессов в авиационной промышленности : сб. ст. / ХАИ. – Харьков, 1978. – № 1. – С. 85–94.

196. Михайлов, М. И. Экспериментальное исследование сборных резцов / М. И. Михайлов // *Машиностроение : сб. науч. тр.* – Минск, 1990. – Вып. 15. – С. 39–42.
197. Михайлов, М. И. Исследование точности сборного резца со сменной четырехгранной пластиной / М. И. Михайлов, В. В. Свич, А. А. Карпов // *Современные проблемы машиноведения : материалы МНТК, Гомель, 1–3 июля 2000 г. : в 2 т. / ГГТУ им. П. О. Сухого.* – Гомель, 2000. – Т. 1. – С. 156–158.
198. Выбор, эксплуатация и организация внедрения резцов со сменными механически закрепляемыми пластинами : метод. рекомендации. – Москва : ВНИИТЭРМ. – 1987. – 60 с.
199. Когель, И. З. Исследование жесткости узлов крепления пластин твердого сплава в корпусе инструмента и ее влияние на стойкость лезвия при торцевом фрезеровании : автореф. дисс. ... канд. техн. наук : 05.03.01 / И. З. Когель ; Мосстанкин. – Москва, 1985. – 22 с.
200. Толкачева, И. М. Информационная модель автоматизированной системы проектирования режущего инструмента / И. М. Толкачева // *Конструкторско-технологическая информатика 2000 : материалы IV Междунар. конгресса, Москва, 2000 г. / МГТУ.* – Москва, 2000. – Т. 2. – С. 207–208.
201. Шашок, А. В. Моделирование надёжности режущего инструмента / А. В. Шашок // *Новые материалы и технологии НМТ-2000 : тез. докл. Всерос. науч.-техн. конф., Москва, 24–25 окт., 2000 г. / ЛАТМЭС.* – Москва, 2000. – С. 318–319.
202. You, S. H. Was ist dran an Big Brother. Produktion // *Die Wochenzeitung für das technische Management.* – 2000. – № 3. – S. 11.
203. Tman, K. F. Systeme d'outil equilibre multi-fonctions. TraMetal; *Revue technique mensuelle du travail des metaux.* – 2000. – № 51. – P. 14–16.
204. Show, M. G. Porte-outil polyvalent pour tours a poupee mobile // *TraMetal: revue technique mensuelle du travail des metaux.* – 2000. – № 49. – P. 20.
205. Уфимович, И. А. Повышение эксплуатационной эффективности инструмента на основе исследования напряженно-деформированного состояния и прочности его режущей части при различных видах стружкообразования : автореф. дисс. ... канд. техн. наук : 05.03.01 / И. А. Уфимович ; Томск. политехн. ун-т. – Томск, 1999. – 24 с.
206. Артамонов, Е. В. Разработка конструкций сменных многогранных пластин повышенной прочности с применением метода конечных элементов / Е. В. Артамонов, М. Х. Утешев, Т. Е. Помигалова // *Инструмент Сибири.* – 2000. – № 1. – С. 9–10.

207. Щуров, И. А. Расчёт упругих деформаций инструментов при резьбообразовании машинными метчиками / И. А. Щуров, М. Ю. Попов, И. Я. Мирнов // Прогрессивные технологии в машиностроении : сб. науч. тр. Юж.-Урал. гос. ун.-та. – Челябинск : ЮУрГУ, 1998. – С. 3–13 .
208. Bedi, S. Boring bars / S. Bedi, W. Chernoff // *Cutt. Tool Eng.* – 2001. – № 6. – P. 26.
209. Show, M. G. Systeme de porte-outils pour plaquettes negatives / M. G. Show // *TraMetal: Revue technique mensuelle du travail des metaux.* – 2000. – P. 22.
210. Лукина, С. В. Система автоматизированного проектирования сборного режущего инструмента / С. В. Лукина // Конструкторско-технологическая информатика 2000 : материалы IV Междунар. конгресса, Москва, 2000 г. / МГТУ. – Москва, 2000. – Т. 2. – С. 33–36.
211. Vickers, G. W/ Stabiles Werkzeug, wenig Vibration / G. W. Vickers, E. W. Quan // *Ind.-Anz.* – 2000. – № 3. – S. 43.
212. Хандожко, А. В. Совершенствование автоматизированного проектирования инструментов / А. В. Хандожко // Конструкторско-технологическая информатика 2000 : материалы IV Междунар. конгресса, Москва, 2000 г. / МГТУ. – Москва, 2000. – Т. 2. – С. 240–242.
213. Quan, E. W. Autofacing tools / E. W. Quan // *Manuf. Eng. (USA).* – 2000. – № 3. – P. 115.
214. Method and apparatus for mitigating vibration associated with rotary cutting machines : пат. 6071219 США, МПК7 В 23 Q 3/157, В23 В 31/00 / Cook Harold. – № 09/128067 ; заявл. 03. 08. 1998 ; опубл. 06. 06. 2000 // НПК 483/1. Англ.
215. Шевченко, М. В. Экспериментальное исследование жесткости концевых фрез / М. В. Шевченко // Сб. науч. тр. С.-Петербур. ин-та машиностр. – 1999. – № 1. – С. 225–227.
216. Корн, Г. Тензорный анализ сетей / Г. Корн. – Москва : Совет. радио, 1978. – 720 с.
217. Корн, Г. Исследование сложных систем по частям / Г. Корн. – Москва : Наука, 1972. – 574 с.
218. Korn, G. Equivalent circuits of the elastic field / G. Korn // *J. Appl. Mech.* – 1944. – September – P. A149–A161.
219. Trent, H. Isomorphisms between oriented linear graphs and lumped physical systems / H. Trent // *J. Acoust. Soc. Amer.* – 1955. – № 3. – P. 500–527.

220. Кузовков, Е. Г. Графовая модель упругого тела. Расчет напряженно-деформированного состояния / Е. Г. Кузовков. – Киев, 1985. – 53 с. – (Препринт / АН УССР ; Ин-т проблем прочности).
221. Кузовков, Е. Г. Конфигурации и параметры графовой модели упругого тела / Е. Г. Кузовков // Проблемы прочности. – 1986. – № 5. – С. 98–103.
222. Кузовков, Е. Г. Графовая модель упругого тела в смешанных переменных / Е. Г. Кузовков // Проблемы прочности. – 1986. – № 6. – С. 88–92.
223. Кузовков, Е. Г. Графовая модель упругой среды в декартовой системе координат / Е. Г. Кузовков // Проблемы прочности. – 1993. – № 12. – С. 60–70.
224. Михайлов, М. И. Исследование влияния формы паза державки на напряженно-деформированное состояние резца / М. И. Михайлов, М. Р. Шейбак // Современные проблемы машиноведения : тез. докл. междунар. науч.-техн. конф., Гомель, 4 окт. 2006 г. / ГГТУ им. П. О. Сухого. – Гомель, 2006. – С. 89–90.
225. Михайлов, М. И. Исследование прочности сборных резцов с фрикционным покрытием СМП / М. И. Михайлов, П. В. Сысоев, З. Я. Шабакеева // Полимерные композиты : тез. докл. междунар. науч.-техн. конф., Гомель, 11 нояб. 1998 г. / ИММС АН РБ. – Гомель, 1998. – С. 39.
226. Михайлов, М. И. Исследование точности сборного резца со сменной четырёхгранной пластиной / М. И. Михайлов, В. В. Свич, А. А. Карпов // Современные проблемы машиноведения : материалы МНТК, Гомель, 7 июля 2000 г. / ГГТУ им. П. О. Сухого. – Гомель, 2000. – Т. 1. – С. 156–158.
227. Cranur, H. Stationary and Belated Stochastic Processes / H. Cranur, M. R. Leadbetter // Jon. Wiley. – 1967. – P. 147–165.
228. Leadbetter, M. R. Cyrve Grrsings by Normal Processes and Reliability Implications / M. R. Leadbetter, J. D. Gryer // SIAM Bewiew. – 1965. – Nol. 7, № 2. – 173–181.
229. Корданский, Х. Б. Приложение теории вероятности в инженерном деле / Х. Б. Корданский. – Москва ; Ленинград : Физматиз, 1963. – 436 с.
230. Деч, Р. Нелинейные преобразования случайных процессов / Р. Деч. – Москва : Совет. радио, 1965. – 432 с.
231. Сборный резец : а. с. 1220859 СССР, МКИ 5 В 23 В 27/16 / Ю. А. Новоселов, М. И. Михайлов ; № 1171222 ; заявл. 11.05.84 ; опубл. 30.03.86 // Открытия. Изобрет. – 1986. – № 12. – С. 28.

232. Устройство для замены режущих пластин резца : пат. 3107 Респ. Беларусь, МПК 7 В 23 В 27/16 / М. И. Михайлов, А. В. Жабинский ; заявитель Гомел. завод пусковых двигателей ; № 1171222 ; заявл. 11.05.84 ; опубл. 30.03.86 // Открытия. Изобрет. – 1986. – № 12. – С. 28.
233. Устройство для замены граней пластины резца : а. с. 1804953 СССР, МКИ 5 В 23 В 27/16 / М. И. Михайлов, А. А. Барановский ; № 3805432 ; заявл. 14.06.91 ; опубл. 30.03.93 // Открытия. Изобрет. – 1993. – № 12. – С. 26.
234. Сборный режущий инструмент : а. с. 1458090 СССР, МКИ 5 В 23 В 27/16 / М. И. Михайлов ; № 4007897; заявл. 15.01.86 ; опубл. 15.02.89 // Открытия. Изобрет. – 1989. – № 6. – С. 32.
235. Торцовая фреза МИГ : а. с. 1741982 СССР, МКИ 5 В 23 В 27/16 / М. И. Михайлов, А. А. Геращенко ; № 4692070 ; заявл. 19.05.89 ; опубл. 23.06.92 // Открытия. Изобрет. – 1992. – № 23. – С. 24.
236. Фреза с автоматической заменой режущих кромок : а. с. 1579729 СССР, МКИ 5 В 23 Q 41/02 / М. И. Михайлов ; № 4153012 ; заявл. 28.11.86 ; опубл. 23.07.90 // Открытия. Изобрет. – 1990. – № 27. – С. 41.
237. Фреза с автоматической заменой режущих кромок : а. с. 1313589 СССР, МКИ 5 В 23 С 5/06 / М. И. Михайлов ; № 4002150 ; заявл. 04.12.85 ; опубл. 30.05.87 // Открытия. Изобрет. – 1987. – № 20. – С. 34.
238. Инструмент с автоматической заменой режущих пластин для станков с горизонтальным шпинделем : а. с. 1634393 СССР, МКИ 5 В 23 С 5/06 / М. И. Михайлов ; № 4374088 ; заявл. 05.02.88 ; опубл. 15.03.91 // Открытия. Изобрет. – 1991. – № 10. – С. 38.
239. Устройство для механической обработки : а. с. 1553284 СССР, МКИ 5 В 23 В 51/06 / М. И. Михайлов ; № 4374088 ; заявл. 05.02.88 ; опубл. 15.03.90 // Открытия. Изобрет. – 1990. – № 12. – С. 28.
240. Способ заточки режущих элементов : а. с. 1450979 СССР, МКИ 5 В 23 В 3/34 / М. И. Михайлов ; № 4010631 ; заявл. 09.12.85 ; опубл. 15.01.89 // Открытия. Изобрет. – 1989. – № 2. – С. 36.
241. Устройство для заточки режущих элементов : а. с. 1324825 СССР, МКИ 5 В 23 В 3/34 / М. И. Михайлов ; № 3984925 ; заявл. 09.12.85 ; опубл. 23.07.87 // Открытия. Изобрет. – 1987. – № 27. – С. 46.

## Содержание

|  |     |
|--|-----|
| Введение .....   | 3   |
| Глава 1. Формообразование поверхностей деталей и его влияние на параметры режущего инструмента .....             | 7   |
| 1.1. Методы формообразования и поверхности при обработке материалов резанием .....                               | 7   |
| 1.2. Принятые понятия и определения .....  | 14  |
| 1.3. Геометрические и кинематические поверхности: анализ и способы задания .....                                 | 28  |
| 1.4. Методика моделирования прямой задачи формообразования .....   | 46  |
| 1.4.1. Математические модели формообразующих кромок инструмента .....  | 46  |
| 1.4.2. Моделирование геометрических параметров зуба сборного инструмента .....                                   | 61  |
| 1.4.3. Моделирование формообразования кромками инструмента .....   | 68  |
| 1.5. Математическое моделирование обратной задачи формообразования сборным инструментом .....                    | 73  |
| Глава 2. Геометрическая точность сборного инструмента .....  | 99  |
| 2.1. Анализ стабильности геометрических параметров режущих элементов инструмента .....                           | 99  |
| 2.1.1. Точность размеров и углов сменных многогранных пластин (СМП) .....  | 99  |
| 2.1.2. Контурные площади касания базовых граней пластин .....  | 107 |
| 2.1.3. Плоскостность опорных граней СМП .....  | 113 |
| 2.2. Разработка композиционного полимерного покрытия для базовых граней СМП сборного режущего инструмента .....  | 123 |
| 2.2.1. Анализ процесса формирования эпоксиполиэфирного материала покрытия .....                                  | 124 |
| 2.2.2. Оптимизация состава покрытия спеченных многогранных пластин по критерию адгезионной прочности к ним ..... | 129 |
| 2.2.3. Физико-механические свойства материала покрытия .....   | 132 |
| 2.2.4. Термический и дифференциально-термический анализ эпоксиполиэфирного материала .....                       | 139 |
| 2.2.5. Контурные площади контакта пластин, имеющих композиционное покрытие .....                                 | 142 |
| 2.3. Моделирование точек контакта режущего элемента с пазом корпуса инструмента .....                            | 144 |
| 2.4. Моделирование точности позиционирования СМП в корпусе инструмента .....                                     | 158 |

|  |     |
|--|-----|
| 2.4.1. Анализ плоскостным методом точности<br>позиционирования СМП в корпусе инструмента .....                                 | 158 |
| 2.4.2. Анализ погрешностей при базировании СМП на штифт.....   | 167 |
| 2.5. Моделирование точности сборного механизированного<br>инструмента .....  | 178 |
| Глава 3. Статическая прочность и точность рабочей части инструмента.....   | 191 |
| 3.1. Анализ исследований статической прочности и точности .....  | 191 |
| 3.2. Графовая модель напряженно-деформированного<br>состояния (НДС) зуба инструмента.....                                      | 203 |
| 3.3. Влияние конструктивных параметров на напряженно-<br>деформированное состояние режущего элемента инструмента .....         | 217 |
| 3.3.1. Расчет граничных условий контакта сменных<br>многогранных пластин .....   | 217 |
| 3.3.2. Влияние размеров и передних углов на НДС<br>закрепленного зуба .....  | 223 |
| 3.3.3. Влияние формы и размеров на НДС свободной части зуба.....   | 230 |
| 3.3.4. Влияние композиционного покрытия на прочность<br>режущего элемента.....   | 232 |
| 3.4. Экспериментальные исследования статической точности<br>рабочей части сборного инструмента .....                           | 240 |
| 3.4.1. Статическая точность рабочей части сборного<br>инструмента с СМП без покрытия .....                                     | 240 |
| 3.4.2. Статическая точность рабочей части сборного<br>инструмента с СМП с композиционным покрытием<br>базовых граней СМП ..... | 248 |
| Глава 4. Практические рекомендации и расчеты .....   | 251 |
| 4.1. Расчет передних и задних углов дисковой СМП,<br>обеспечивающей обработку радиусного участка детали .....                  | 251 |
| 4.2. Анализ влияния параметров процесса точения на топографию<br>цилиндрической кинематической поверхности .....               | 254 |
| 4.3. Влияние параметров режима резания на шероховатость<br>обработанной поверхности при фрезеровании концевой фрезой ...       | 260 |
| 4.4. Влияние параметров режима резания на шероховатость<br>конической поверхности при фрезеровании шаровой фрезой .....        | 264 |
| 4.5. Вероятностная оценка точности инструментальной<br>наладки СМРИ.....   | 272 |
| 4.6. Конструкции сборных механизированных инструментов .....   | 289 |
| 4.7. Конструкции оснастки для восстановления работоспособности<br>сборных механизированных инструментов.....                   | 312 |
| Заключение.....  | 317 |
| Литература.....  | 319 |