УДК 681.3+658.152+519.6

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ПОСТРОЕНИЮ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СЛОЖНОЙ СИСТЕМЫ ПО ЕЕ ФОРМАЛЬНОМУ ОПИСАНИЮ

К. С. КУРОЧКА, Н. А. КУРОЧКА

Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого», Республика Беларусь

Введение

Для исследования сложных систем широко применяют различные виды математического моделирования, целью которого является получение, обработка, представление и использование информации об объектах и их системах, которые взаимодействуют между собой и внешней средой. Таким образом, математическая модель выступает как средство познания свойств и закономерности поведения сложной системы. Связи между элементами в реальных системах сложны и многообразны, поэтому в современных условиях исследование систем без использования средств вычислительной техники не представляется возможным. Применение ЭВМ требует преобразования исследуемой системы в некое формальное описание (функциональная модель) [1]. Для решения данной задачи разработан ряд средств и методов. Наиболее распространенным является описание системы средствами функционального моделирования с помощью специализированных языков IDEF0 [2] или UML [3]. Однако процесс построения математической модели на основе функциональной представляет собой достаточно сложную задачу и в настоящее время формализован только для построения имитационных математических моделей определенного класса систем [1]. Поскольку имитационное моделирование имеет ряд существенных недостатков [4], то является актуальной задача автоматизации построения аналитической или численно-аналитической математической модели сложной системы. Для ее решения предлагается использовать предварительное построение функциональной модели, на основании которой будет формироваться математическая модель. Таким образом, построение математической модели будет состоять из двух этапов:

- построение функциональной модели системы;
- автоматизированное построение численно-аналитической модели системы.

Построение функциональной модели сложной системы

При исследовании системы воспользуемся микроподходом [1], [4]. Каждому элементу системы поставим в соответствие элемент функциональной модели. Построим математическую модель для i-го элемента системы в виде

$$\Phi_i(x, y, z, t) = 0, \tag{1}$$

где Φ_i – функционал связи элементов математической модели; x – вектор входных переменных, $x = \{x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\}$; y – вектор выходных переменных,

$y = \{y_1(t), y_2(t) \ldots y_m(t)\}$; z – вектор внешних воздействий, $z = \{z_1(t), z_2(t) \ldots, z_r(t)\}$; t – время.

В случае если не удалось построить математическую модель (1) для какого-либо элемента системы, то будем считать его модулем и проведем дополнительную дискретизацию до тех пор, пока не будет возможным построение соотношений (1).

Пронумеруем каждый вектор входных и выходных переменных, а также внешних воздействий. В итоге получим три множества:

$$x_i \in X,\ y_i \in Y,\ z_i \in Z,$$

где $i = \overline{1, N}$, N – количество элементов функциональной модели.

Для каждого элемента функциональной модели необходимо описать входные и выходные интерфейсы. Под входным интерфейсом будем понимать унифицированный вектор x или z, под выходным интерфейсом – вектор y. Будем считать, что интерфейсы совпадают, если в соответствующих векторах совпадают имена переменных (значения переменных могут и не совпадать). Тогда каждый интерфейс будет представлять собой класс объектов, а вектора x_i, y_i, z_i будут являться экземплярами соответствующего класса интерфейса. Дополним класс интерфейса свойством, содержащим ссылку на другой интерфейс, с которым связывается данный, т. е. интерфейсы будем рассматривать попарно: входной – выходной. Сформируем множество входных интерфейсов $I_{\text{вх}}$ и множество выходных интерфейсов $I_{\text{вых}}$. Очевидно, что эти два множества могут отличаться только на интерфейсы векторов внешних воздействий и на один выходной набор переменных, представляющий результат функционирования математической модели всей системы в целом. В противном случае в формальной модели будет иметься тупиковый элемент, либо элемент, не имеющий входных переменных. Всякий тупиковый элемент может быть отнесен к внешней среде системы и исключен из рассмотрения, а элемент, не имеющий входных переменных, может быть аппроксимирован вектором внешних воздействий. Таким образом, каждый элемент функциональной модели будет определяться своей математической моделью (1), поддерживаемыми интерфейсами и связями с другими элементами.

Определим иерархические связи между элементами функциональной модели. Введем понятие уровня (слоя) в функциональной модели. Таким образом, элементы могут располагаться на различных уровнях модели. Уровни между собой взаимодействуют последовательно, т. е. пока не будут выполнены все элементы нижнего уровня, переход к элементам следующего уровня невозможен. Элементы одного уровня функциональной модели могут выполняться совместно (параллельно).

Элемент функциональной модели графически будем обозначать прямоугольником, в правом верхнем углу которого укажем номер слоя или время t. Входящие в прямоугольник сбоку стрелки будут обозначать вектор входных переменных x, выходящие стрелки – вектор выходных переменных y, стрелки, входящие в прямоугольник сверху – вектор внешних воздействий z (рис. 1).

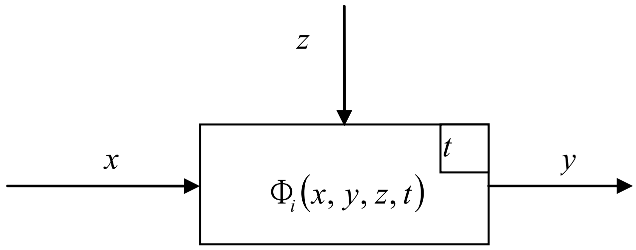

Рис. 1. Графическое обозначение элемента функциональной модели

В функциональных моделях многих реальных систем можно выделить ряд элементов, имеющих одинаковое ядро математической модели и одни и те же интерфейсы. Следовательно, при компьютерной реализации целесообразно каждую группу таких элементов описать как класс. В этом случае, элементы функциональной модели будут представлять собой экземпляры данных классов, а схожие группы элементов можно будет описать новым классом, который будет являться потомком, описанных ранее базовых классов. Таким образом, функциональная модель системы в памяти компьютера будет представлять собой связанный список, при этом связь между элементами будет определяться соответствующими экземплярами родительского класса интерфейсов. Следовательно, если описать заранее множества классов элементов функциональной модели и интерфейсов, то этап построения функциональной модели можно осуществить методами визуального объектно-ориентированного проектирования, заключающимися в построении исследуемой системы на экране монитора компьютера из заранее созданных конструктивных элементов [5].

Построение математической модели сложной системы осуществляется на основании функциональной модели по следующему алгоритму:

1. Выбирается первый уровень функциональной модели.

2. Последовательно просматривается список размещенных на текущем уровне элементов функциональной модели и формируется математическая модель уровня посредством объединения в общую систему всех математических моделей элементов. В результате получается система:

$$\begin{cases} \Phi_1(X, Y, Z, t) = 0 \\ \Phi_2(X, Y, Z, t) = 0 \\ \quad\quad \ldots \\ \Phi_N(X, Y, Z, t) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

3. Учитываются известные значения векторов входных переменных и векторов внешних воздействий, и решается система (2).

4. Сохраняются результаты решения и осуществляется переход на следующий уровень функциональной модели.

5. Проводится проверка на предмет рассмотрения всех уровней. В случае отрицательного ответа осуществляется переход на шаг 2.

Апробация предлагаемой методики построения математической модели

Рассмотрим процесс построения математической модели сложной физической системы, состоящей из железобетонной плиты, лежащей на упругом неоднородном грунтовом основании. Размеры плиты: ширина – 20 м, длина – 30 м, толщина – 0,4 м. Физические характеристики плиты: модуль упругости

E = 27 000 МПа, коэффициент Пуассона $\mu = 0{,}3$. Неоднородное основание состоит из слоя суглинка тугопластичного мощностью 2,5 м с модулем упругости E = 12 МПа и коэффициентом Пуассона $\mu = 0{,}3$, слоя глины текучей мощностью 1,5 м с модулем упругости E = 6,875 МПа и коэффициентом Пуассона $\mu = 0{,}41$ и слоя мергеля мощностью 5,5 м с модулем упругости E = 9 МПа и коэффициентом Пуассона $\mu = 0{,}45$. На железобетонную плиту действует равномерно распределенная нагрузка интенсивностью q = 114 000 Н.

В качестве элементов функциональной модели выделим железобетонную плиту и слои грунтового основания. Таким образом, модель будет состоять из четырех элементов двух типов: элемент плиты и три элемента грунтового основания (рис. 2).

Вектора входных и выходных переменных будут представлять собой соответственно перемещения точек верхней и нижней грани слоев грунтового основания. Вектор внешних воздействий для плиты будет представлять собой равномерно распределенную нагрузку. Внешние воздействия для элементов грунтового основания будут определять граничные условия данных элементов, т. е. известные перемещения на границах рассматриваемой области грунтового основания.

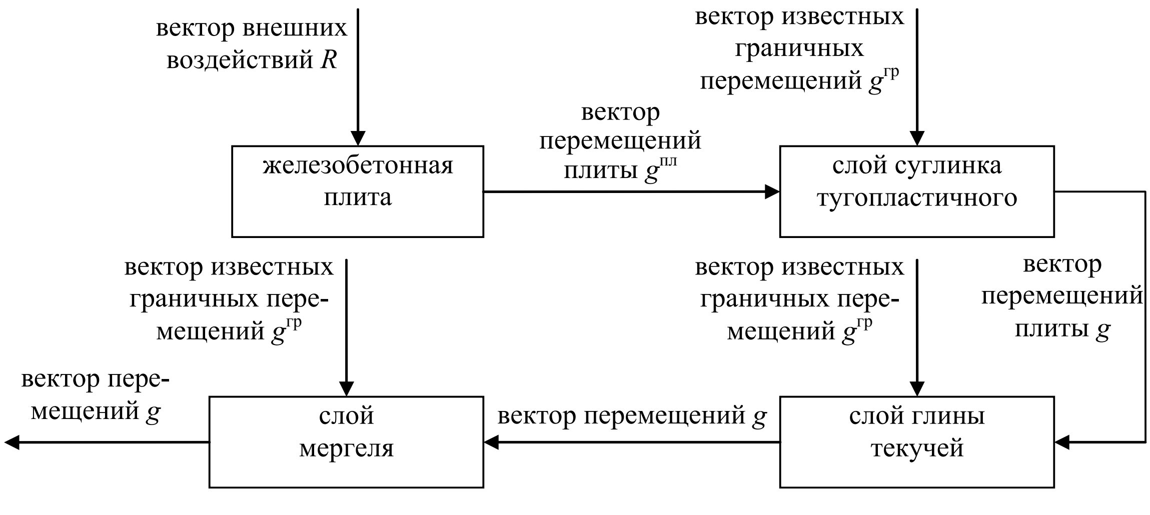

Рис. 2. Функциональная модель системы «железобетонная плита – неоднородное грунтовое основание»

В качестве ядра математической модели элементов функциональной модели, согласно принципу возможных перемещений [6], примем соотношение

$$\tilde{g}^T R = \iiint_V \tilde{\varepsilon}^T \sigma dV, \tag{3}$$

где g – вектор узловых перемещений; символ «~» означает вариацию; R – вектор узловых усилий; σ – вектор напряжений; ε – вектор деформаций; V – объем элемента.

Воспользовавшись формулами Коши и законом Гука, соотношение (3) можно переписать в виде:

$$\iiint_V \Psi(g) V - R = 0.$$

Тогда для рассматриваемой системы выражение (2) будет иметь вид:

$$\begin{cases} \iiint\limits_V f(E_1, \mu_1, g)dV - R = 0, \\ \iiint\limits_V f(E_2, \mu_2, g)dV - R = 0, \\ \iiint\limits_V f(E_3, \mu_3, g)dV - R = 0, \\ \iiint\limits_V f(E_4, \mu_4, g)dV - R = 0, \end{cases}$$

где E_i, μ_i – соответственно модуль упругости и коэффициент Пуассона каждого элемента рассматриваемой системы, $i = \overline{1,4}$.

В последней системе вектор g будет содержать перемещения всех точек исследуемой системы, вектор R – все действующие на систему внешние силы.

Применяя метод конечных элементов [7], несложно последнюю систему преобразовать к виду

$$\mathrm{K}g = R, \tag{4}$$

где K – глобальная матрица жесткости всей системы, а выражение (4) будет представлять собой систему линейных алгебраических уравнений, решая которую, найдем вектор перемещений g.

Для рассматриваемой задачи в результате исследования построенной математической модели максимальная осадка плиты составила 0,057 м, что отличается менее чем на 10 % от результатов экспериментальных данных, по которым максимальный прогиб составил 0,055 м.

Описанный подход можно применять не только для построения математических моделей физических систем, но и при исследовании бизнес-процессов.

Рассмотрим сложную систему, определяющую процесс управления нематериальными активами предприятия [8]. Проведем декомпозицию данной системы, в результате которой была получена функциональная модель, представленная на рис. 3.

В полученной функциональной модели можно выделить элементы двух классов. Для первого класса элементов, осуществляющих анализ или оценку параметров, математическая модель будет определяться соответствующим уравнением регрессии

$$\varphi_i(x_i) = y_i, \tag{5}$$

где i – номер рассматриваемого элемента модели.

Для элементов, определяющих группировку факторов, выбор решения или метода математическая модель будет представлять собой кусочно-непрерывную функцию с дискретным набором значений:

$$\varphi_i(x_i) = \begin{cases} y_1, \text{ если } x_i \in (-\infty; \alpha_1] \\ y_2, \text{ если } x_i \in (\alpha_1; \alpha_2] \\ \quad \ldots \\ y_{j+1}, \text{ если } x_i \in (\alpha_j; +\infty), \end{cases} \tag{6}$$

где j – количество вариантов решений или применяемых методов; α_j – вектор предельных значений для j-го варианта решения.

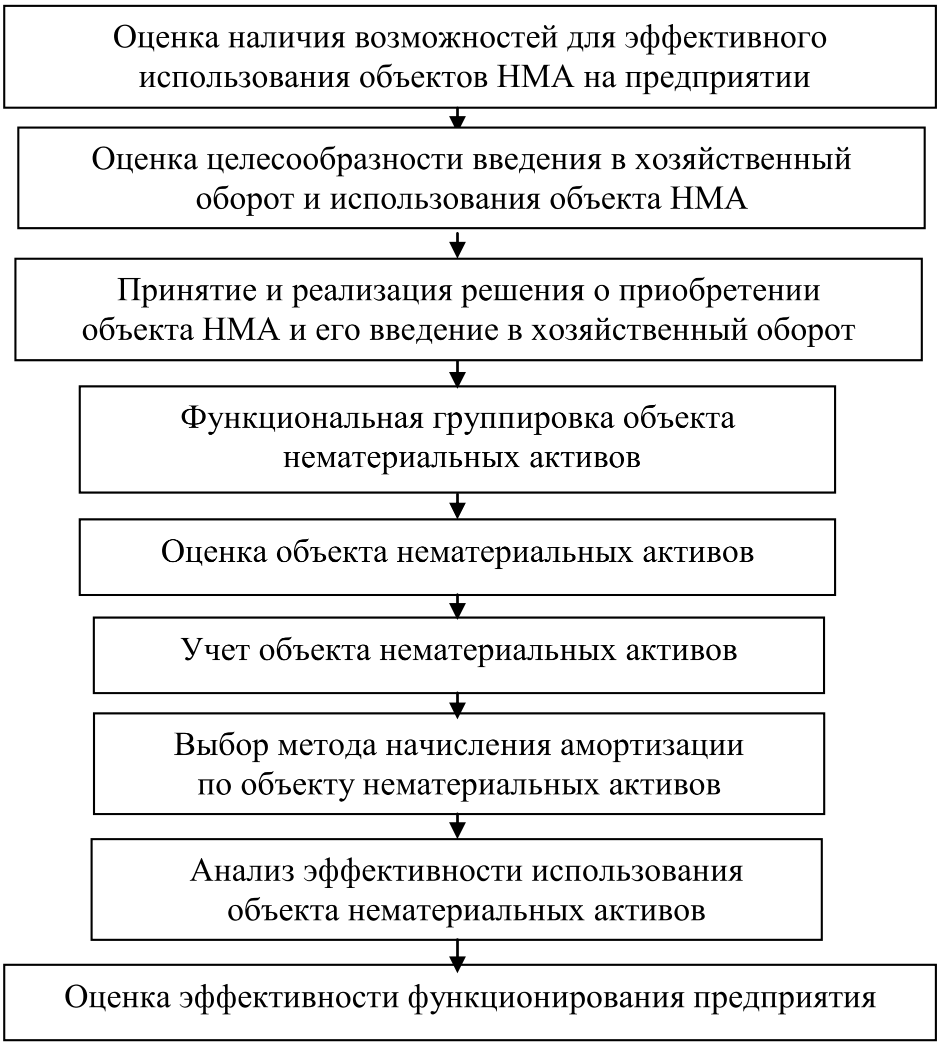

Рис. 3. Функциональная модель процесса управления нематериальными активами субъектов хозяйствования

Таким образом, математическая модель рассматриваемой системы в общем виде может быть представлена системой уравнений вида (5) и (6). Для рассматриваемой задачи, подставляя конкретные функции (5) и (6), после выполнения ряда преобразований математическая модель всей системы была получена в виде:

$$F(X,k) = \begin{cases} 2{,}815 \cdot \text{НМА} + 0{,}038 \cdot \text{ЧП} + 0{,}018 \cdot \text{БС} - 114{,}117, \text{ если } k = A \\ 1{,}056 \cdot \text{НМА} + 0{,}018 \cdot \text{ЧП} + 0{,}006 \cdot \text{БС} - 21{,}813, \text{ если } k = B \\ 0{,}246 \cdot \text{НМА} + 0{,}003 \cdot \text{ЧП} - 0{,}005 \cdot \text{БС} - 1{,}305, \text{ если } k = C, \end{cases} \tag{7}$$

где $F(X, k)$ – классификационная функция, позволяющая оценить эффективность функционирования предприятия от использования нематериальных активов; НМА – стоимость нематериальных активов предприятия (млн р.); ЧП – чистая прибыль предприятия (млн р.); БС – сумма бюджетных поступлений (млн р.); k – классификационный признак предприятия.

В результате исследования математической модели было выделено три группы предприятий, соответственно, три значения классификационного признака.

Группа A – эффективно (прибыльно) функционирующие предприятия, имеющие в составе имущества значительный объем НМА, что позволяет говорить о наличии у персонала квалификации и опыта работы с данными объектами. Кроме того, предприятия данной группы получают финансовую поддержку от государства. Это дает основание сделать вывод о том, что у предприятий данной группы обеспечены условия для эффективного использования объектов НМА.

Группа B – предприятия со средним, по сравнению с предприятиями других групп, уровнем прибыльности, стоимости НМА и объемом государственного финансирования. Это свидетельствует о наличии удовлетворительных условий для эффективного внедрения и использования объектов НМА, которые, тем не менее, могут быть улучшены после проведения некоторых преобразований.

Группа C – предприятия, характеризующиеся низким уровнем прибыльности, отсутствием у персонала опыта управления объектами нематериальных активов (данный вид активов практически отсутствует в составе имущества предприятия), незначительным размером бюджетных ассигнований (по сравнению с предприятиями других групп). Это свидетельствует об отсутствии у предприятий данной группы условий для эффективного использования объектов НМА.

При этом объект относится к тому классу, для которого классификационное значение функции (7) максимально.

Заключение

Предлагаемая методика построения математических моделей может применяться для исследования различных систем с большим спектром свойств их элементов.

В случае, если для сложной системы удается построить функциональную модель, а для элементов функциональной модели получить математические модели в виде (1), то процесс построения математической модели может быть автоматизирован, согласно предложенному алгоритму.

В настоящее время разработано программное обеспечение на основе описанного подхода по построению и исследованию математических моделей сложных систем механики и бизнес-процессов.

Литература

1. Задачи и модели исследования операций. В 3 ч. Ч. 3. Технология имитации на ЭВМ и принятие решений : учеб. пособие / И. В. Максимей [и др.]. – Гомель : БелГУТ, 1999.
2. Методология функционального моделирования. Рекомендации по стандартизации. – Москва : ИПК Изд-во стандартов, 2001.
3. Гома, Х. UML. Проектирование систем реального времени, параллельных и распределенных приложений / Х. Гома. – Москва : ДМК Пресс, 2002.

4. Максимей, И. В. Математическое моделирование больших систем : учеб. пособие для специальности «Прикладная математика» / И. В. Максимей. – Минск : Выш. шк., 1985.

5. Курочка, К. С. Формализация процесса компьютерного моделирования линейной системы: здание – фундамент – основание / К. С. Курочка // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях : Материалы IV Респ. науч. конф. студентов и аспирантов. – Гомель : ГГУ, 2001. – С. 29–31.

6. Старовойтов, Э. И. Основы теории упругости, пластичности и вязкоупругости : учеб. для строительных специальностей вузов / Э. И. Старовойтов. – Гомель : БелГУТ, 2001.

7. Быховцев, В. Е. Компьютерное моделирование систем нелинейной механики грунтов / В. Е. Быховцев, А. В. Быховцев, В. В. Бондарева. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2002.

8. Курочка, Н. А. Использование системного подхода в управлении нематериальными активами / Н. А. Курочка // Экономика, финансы, управление. – 2002. – № 5. – С. 63–71.

Получено 25.05.2007 г.