Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Высшая математика»

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

ПРАКТИКУМ
по выполнению домашних заданий курсов «Математика» и «Высшая математика» для студентов дневной формы обучения

Электронный аналог печатного издания

Гомель 2007

УДК 517.55(075.8)
ББК 22.16я73
Ф94

*Рекомендовано к изданию научно-методическим советом
факультета автоматизированных и информационных систем
ГГТУ им. П. О. Сухого
(протокол № 10 от 26.10.2006 г.)*

Авторы-составители: *С. П. Курлович*, *И. В. Иванейчик*, *Е. А. Дегтярева*

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, доц. каф. «Физика»
ГГТУ им. П. О. Сухого *П. А. Хило*

Ф94 **Функции** нескольких переменных : практикум по выполнению домашних заданий курсов «Математика» и «Высшая математика» для студентов днев. формы обучения / авт.-сост.: С. П. Курлович, И. В. Иванейчик, Е. А. Дегтярева. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2007. – 25 с.– Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: http://gstu.local/lib. – Загл. с титул. экрана.

ISBN 978-985-420-631-8.

Изложен учебный материал по теме «Функции нескольких переменных». Сформулированы основные понятия и приведены решения типовых задач, даны задания для самостоятельного решения.

Для студентов дневной формы обучения.

УДК 517.55(075.8)
ББК 22.16я73

ISBN 978-985-420-631-8

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Переменная величина z называется **однозначной функцией двух переменных** x, y (аргументы), если каждой совокупности их значений $(x; y)$ из данной области соответствует единственное определенное значение z. Обозначается $z = f(x; y)$. График изображен на рис. 1.

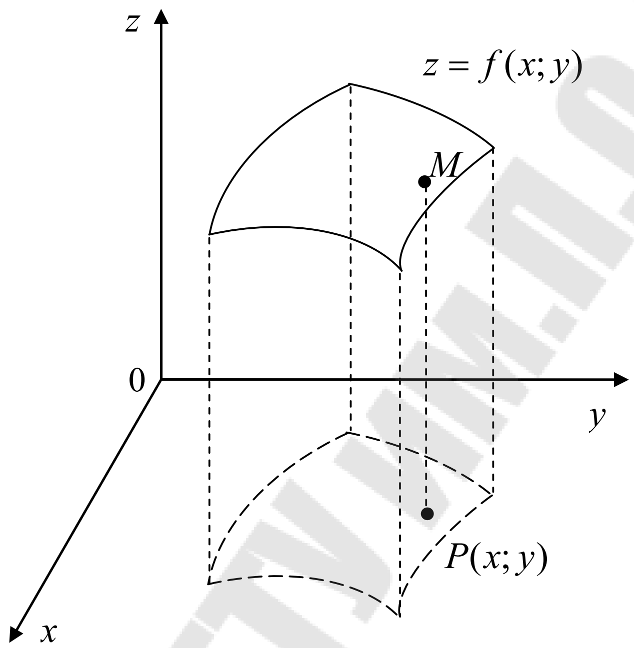

Рис. 1

Аналогично определяется и функция большего числа переменных.

Под **областью определения функции** $z = f(x; y)$ понимается совокупность точек $(x; y)$ плоскости $x0y$, в которых данная функция определена.

Число $\boldsymbol{A}$ называется **пределом функции** $z = f(x; y)$ при стремлении точки $P'(x; y)$ к точке $P(a; b)$, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех точек, удовлетворяющих неравенству $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$, выполняется неравенство $| f(x; y) - A | < \varepsilon$. При этом пишут $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x; y) = A$.

Функция $z = f(x; y)$ **непрерывна** в точке $P(a; b)$, если $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x; y) = f(a; b)$.

Функция, непрерывная во всех точках некоторой области, непрерывна в этой области.

ЗАДАНИЯ

1. Найти $f(2;1)$, если

$$f(x;y)=xy^2+\frac{x}{y^2}.$$

2. Найти $f(0;1)$, если

$$f(x;y)=x^3y+\frac{\cos x}{\pi y}.$$

3. Найти $f\left(\frac{1}{x};\frac{1}{y}\right)$, если

$$f(x;y)=\frac{x^2+y^2}{xy}.$$

4. Найти $f\left(-\frac{1}{x};\,2y\right)$, если

$$f(x;y)=\frac{x^2-y^2}{x}.$$

5. Найти $f(x)$, если

$$f\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{2y}.$$

6. Найти $f(x;y)$, если

$$f(x-y;x+y)=x^2-y^2.$$

7. Найти и изобразить область определения функции

$$z=\sqrt{1-x^2-y^2}.$$

8. Найти и изобразить область определения функции

$$z=\ln(x^2+y).$$

9. Найти и изобразить область определения функции

$$z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}.$$

10. Найти и изобразить область определения функции

$$z=\sqrt{\sin(x^2+y^2)}.$$

11. Найти предел функции

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\frac{\sin xy}{x}.$$

12. Найти предел функции

$$\lim_{\substack{x\to \infty\\ y\to 3}}\left(1+\frac{y}{x}\right)^x.$$

Дополнительные задания

13. Найти и изобразить область определения функции

$$z=\frac{1}{\sqrt{x+y}}+\frac{1}{\sqrt{x-y}}.$$

14. Найти и изобразить область определения функции

$$z=\sqrt{x-\sqrt{y}}.$$

15. Найти и изобразить область определения функции

$$z=y+\arcsin x.$$

16. Найти и изобразить область определения функции

$$z=\arccos\frac{y}{x}.$$

17. Найти область определения функции трех аргументов

$$u=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}.$$

18. Найти область определения функции трех аргументов

$$u=\arcsin x+\arcsin y+\arcsin z.$$

19. Найти пределы функции

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sqrt{x^2+y^2+9}-3}{x^2+y^2}.$$

20. Найти пределы функции

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin\left(x^3+y^3\right)}{x^2+y^2}.$$

§ 2. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

Если в функции $z = f(x; y)$ положить y постоянной, то производная по переменной x

$$f'_x(x; y) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x; y) - f(x; y)}{\Delta x}$$

называется **частной производной функции** $z = f(x; y)$ по переменной x.

Аналогично определяется и обозначается частная производная по переменной y:

$$f'_y(x; y) = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x; y + \Delta y) - f(x; y)}{\Delta y}.$$

Для нахождения частных производных используют обычные формулы дифференцирования.

Пример 1. Найти частные производные функции

$$z = e^{\sin \frac{x}{y}}.$$

Решение

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{\sin \frac{x}{y}} \cdot \cos \frac{x}{y} \cdot \frac{1}{y} = \frac{e^{\sin \frac{x}{y}} \cdot \cos \frac{x}{y}}{y};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{\sin \frac{x}{y}} \cdot \cos \frac{x}{y} \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{y^2} \right) = -\frac{x e^{\sin \frac{x}{y}} \cdot \cos \frac{x}{y}}{y^2}.$$

ЗАДАНИЯ

1. Найти частные производные функции

$$z = x^4 + y^3 - 2xy.$$

2. Найти частные производные функции

$$z = xy^2 + y^3 - y^3.$$

3. Найти частные производные функции

$$z = \frac{2y}{x}.$$

4. Найти частные производные функции

$$z = \sqrt{x^2 - y^2}.$$

5. Найти частные производные функции

$$z = \operatorname{arcctg}\frac{y}{x}.$$

6. Найти частные производные функции

$$z = x^{y}.$$

7. Найти частные производные функции

$$z = \cos xy.$$

8. Найти частные производные функции

$$z = \sin x^2 y^2.$$

9. Вычислить $f'_x(2;1)$ и $f'_y(2;1)$

$$f(x;y) = \frac{\sqrt{y^2 + x^2}}{y}.$$

10. Вычислить $f'_x(2;1)$ и $f'_y(2;1)$

$$f(x;y) = \frac{\sqrt{x+y}}{xy}.$$

Дополнительные задания

11. Найти частные производные функции

$$z = (1+xy)^{y}.$$

12. Найти частные производные функции

$$z = \operatorname{arctg}\sqrt{y^{x}}.$$

13. Найти частные производные функции

$$u = (xy)^{z}.$$

14. Найти частные производные функции

$$u = y^{xz}.$$

15. Найти частные производные функции

$$u = \operatorname{arctg}(x-y)^{z}.$$

16. Найти частные производные функции

$$u = (\sin z)^{xy}.$$

17. Проверить, удовлетворяет ли указанному уравнению данная функция

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2;\ z = \ln\left(x^2 + xy + y^2\right).$$

18. Проверить, удовлетворяет ли указанному уравнению данная функция

$$x\frac{\partial z}{\partial y} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z;\ z = xy + xe^{\frac{y}{x}}.$$

§ 3. ПОЛНОЕ ПРИРАЩЕНИЕ И ПОЛНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

Полным приращением функции $z = f(x;y)$ называется разность

$$\Delta z = \Delta f(x;y) = f(x+\Delta x; y+\Delta y) - f(x;y).$$

Полное приращение выражается через частные производные

$$\Delta z = \frac{\partial f(x;y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x;y)}{\partial y}\Delta y + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y,$$

где γ_1 и γ_2 – бесконечно малые стремящиеся к нулю при Δx и Δy, стремящихся к нулю.

Полным дифференциалом функции $z = f(x;y)$ называется главная часть полного приращения функции линейная относительно приращений аргументов Δx и Δy.

Дифференциалы независимых переменных совпадают с их приращениями, т. е. $dx = \Delta x,\ dy = \Delta y.$

Полный дифференциал функции $z = f(x;y)$ вычисляется по формуле:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Пример 1. Для функции $f(x;y) = x^2 + xy$ найти полное приращение и полный дифференциал.

Решение

По определению

$$\Delta z = f(x+\Delta x; y+\Delta y) - f(x;y),$$

$$f(x+\Delta x; y+\Delta y) = (x+\Delta x)^2 + (x+\Delta x)(y+\Delta y) = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 +$$
$$+ xy + x\Delta y + \Delta xy + \Delta x\Delta y = x^2 + xy + (2x+y)\Delta x + x\Delta y + (\Delta x^2 + \Delta x\Delta y).$$

Так как $f(x;y) = x^2 + xy$, то

$\Delta z = (2x+y)\Delta x + x\Delta y + (\Delta x^2 + \Delta x \cdot \Delta y)$ – полное приращение.

Тогда полный дифференциал $dz = (2x + y)dx + xdy$, где $dx = \Delta x, \quad dy = \Delta y$.

Пример 2. Найти полный дифференциал функции $z = x^2 + y^2$.

Решение

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y; \quad dz = 2xdx + 2ydy = 2(xdx + ydy).$$

При достаточно малых $|\Delta x|$ и $|\Delta y|$ для дифференцируемой функции $z = f(x; y)$ имеет место приближенное равенство $\Delta z \approx dz$.

Тогда для приближенных вычислений используется равенство $z(x + \Delta x; y + \Delta y) \approx z(x; y) + dz|_{P(x;y)}$.

ЗАДАНИЯ

1. Найти полное приращение и полный дифференциал функции $z = x^2 y$. Вычислить их в точке $P(1; 2)$, положив $\Delta x = 0{,}1$, $\Delta y = 0{,}2$.

2. Найти полное приращение и полный дифференциал функции $z = y^2 x$. Вычислить их в точке $P(1; 1)$, положив $\Delta x = 0{,}1$, $\Delta y = 0{,}2$.

3. Найти полный дифференциал функции

$z = x^2 + xy - 2$.

4. Найти полный дифференциал функции

$z = x^4 + y^2 - 3x$.

5. Найти полный дифференциал функции

$z = yx^y$.

6. Найти полный дифференциал функции

$z = \ln(x^2 + y^2)$.

7. Найти полный дифференциал функции

$u = xyz$.

8. Найти полный дифференциал функции

$u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

9. Вычислить приближенно:

$(1{,}02)^3 \cdot (0{,}97)^2$.

10. Вычислить приближенно:

$(1{,}01)^4 \cdot (2{,}01)^2$.

Дополнительные задания

11. Найти полный дифференциал функции

$$z = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}.$$

12. Найти полный дифференциал функции

$$z = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}.$$

13. Найти полный дифференциал функции

$$z = \ln\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right).$$

14. Найти полный дифференциал функции

$$z = \sin\sqrt{\frac{x}{x+y}}.$$

15. Вычислить приближенно:

$$1{,}04^{2{,}02}.$$

16. Вычислить приближенно:

$$\ln\left(\sqrt[3]{1{,}03} + \sqrt[4]{0{,}98} - 1\right).$$

§ 4. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ ФУНКЦИЙ

1. *Случай одной независимой переменной*

Пусть $z = f(x; y)$ есть дифференцируемая функция двух аргументов x и y, которые, в свою очередь, являются дифференцируемыми функциями одной независимой переменной t: $x = \varphi(t)$; $y = \psi(t)$. Тогда производная сложной функции $z = f(\varphi(t); \psi(t))$ вычисляется по формуле

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}. \qquad (1)$$

В частности, если t совпадает с одним из аргументов, например x, то «полная» производная функции z по x будет

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}. \qquad (2)$$

2. *Случай нескольких независимых переменных*

Пусть $z = f(x; y)$, где $x = \varphi(u; v)$, $y = \psi(u; v)$. Тогда частные производные функции z по u и v выражаются формулами:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u};$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}. \qquad (3)$$

Пример 1. Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$ если $z = x^2 y^3$, $x = uv$, $y = \frac{u}{v}$.

Решение

Применим формулы (3):

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = 2xy^3 v + 3x^2 y^2 \frac{1}{v} =$$

$$= 2uv\left(\frac{u}{v}\right)^3 v + 3(uv)^2\left(\frac{u}{v}\right)^2 \cdot \frac{1}{v} = \frac{2u^4}{v} + 3u^4 \cdot \frac{1}{v};$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = 2xy^3 u + 3x^2 y^2\left(-\frac{u}{v^2}\right) =$$

$$= 2uv\left(\frac{u}{v}\right)^3 u + 3(uv)^2\left(\frac{u}{v}\right)^2 \cdot \left(-\frac{u}{v^2}\right) = \frac{2u^5}{v^2} - \frac{3u^5}{v^2}.$$

ЗАДАНИЯ

1. Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, если

$z = \frac{x}{y}$, $x = u\sin v$, $y = u\cos v$.

2. Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, если

$z = x^2 + y^2$,

$x = u\sin v$, $y = u\cos v$.

3. Найти $\frac{dz}{dt}$, если

$z = \frac{y}{x}$, $x = e^t$, $y = \ln t$.

4. Найти $\frac{dz}{dt}$, если

$z = xy^3$, $x = \sin t$, $y = \cos t$.

5. Найти $\frac{du}{dt}$, если

$u = xyz$, $x = t^2 + 1$,

$y = \ln t$, $z = \sin t$.

6. Найти $\frac{du}{dt}$, если

$u = x^2 yz$, $x = \cos t$,

$y = \sin t$, $z = e^t$.

7. Найти $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, если

$u = \alpha\beta^2$, $\alpha = \sin x + \cos y + \sin z$,

$\beta = xyz$.

8. Найти $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, если

$u = e^{\alpha}\ln\beta$, $\alpha = x^2 + y^2 + z^2$,

$\beta = xyz$.

9. Найти $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, если

$u = \alpha^2\beta^3\gamma$, $\alpha = e^x y$,

$\beta = e^y x$, $\gamma = y\ln x$.

10. Найти $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, если

$u = \sin\alpha\cos\beta\sin\gamma$, $\alpha = xy$,

$\beta = xyz$, $\gamma = x^3 y^3$.

Дополнительные задания

11. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{dz}{dx}$, если

$z = \operatorname{arctg}(xy)$, $y = e^x$.

12. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{dz}{dx}$, если

$z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, $y = x^2$.

13. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{dz}{dx}$, если

$z = x^y$, $y = \sin x$.

14. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{dz}{dx}$, если

$z = y^x$, $y = \cos x$.

15. Показать, что функция

$z = y \cdot \varphi\left(x^2 - y^2\right)$

удовлетворяет уравнению

$\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$.

16. Показать, что функция

$z = xy + x \cdot \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

удовлетворяет уравнению

$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$.

§ 5. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Частными производными второго порядка функции $z = f(x; y)$ называются частные производные от ее частных производных первого порядка и обозначаются:

$$f''_{xx}(x; y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2};$$

$$f''_{xy}(x; y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y};$$

$$f''_{yx}(x; y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x};$$

$$f''_{yy}(x; y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Частные производные, взятые по различным переменным, называются смешанными. Они равны между собой, т. е. $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}$.

Пример 1. Найти частные производные второго порядка от функции $z = x^2 y^3$.

Решение

Найдем производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 3y^2 = 3 \cdot x^2 y^2 .$$

Дифференцируем вторично:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy^3) = 2y^3;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2xy^3) = 6xy^2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 y^2) = 6xy^2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 3y^2) = 6x^2 y .$$

Очевидно, что $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}$.

Дифференциалом второго порядка функции $z = f(x; y)$ называется дифференциал от дифференциала первого порядка этой функции:

$$d(dz) = d^2 z .$$

Аналогично определяются дифференциалы функции z порядка выше второго:

$$d^n z = d(d^{n-1} z) .$$

Дифференциал второго порядка вычисляется по формуле

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 . \qquad (1)$$

Удобно пользоваться символической формулой

$$d^n z = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} \right)^n z .$$

Пример 2. Найти полные дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции $z = x^2 + 2xy - y^2$.

Решение

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2y; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x - 2y.$$

Так как

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy,$$

получим

$$dz = (2x + 2y)dx + (2x - 2y)dy.$$

Для нахождения дифференциала 2-го порядка применим формулу (1):

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2.$$

Тогда $d^2 z = 2dx^2 + 4dxdy - 2dy^2$.

ЗАДАНИЯ

1. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, если $z = x^2y^3 + 2x - 2y$.

2. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, если $z = x^3y^2 + \frac{y}{x}$.

3. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, если $z = \ln(x^2 - y)$.

4. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, если $z = \cos(xy)$.

5. Вычислить $f''_{xy}(1;2)$, если $z = x^2y^3$.

6. Вычислить $f''_{xy}(1;2)$, если $z = x^y$.

7. Найти $d^2 z$, если $z = e^{xy}$.

8. Найти $d^2 z$, если $z = \sin(xy)$.

9. Найти $df(1;2)$ и $d^2 f(1;2)$, если $f(x;y) = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$.

10. Найти $df(1;2)$ и $d^2 f(1;2)$, если $f(x;y) = x^2 - y^2 - 3\ln x + \ln y$.

Дополнительные задания

11. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$, если $z=e^x(\cos y+x\sin y)$.

12. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$, если $z=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$.

13. Найти $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$, если $z=y^{\ln x}$.

14. Найти $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$, если $z=\sqrt{2xy+y^2}$.

15. Найти $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$, если $z=\ln\left(x^2+y^2\right)$.

16. Найти $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$, если $z=e^{xy^2}$.

17. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, если $z=y^{\ln x}$.

18. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2=0$, если $z=y^{\ln x}$.

§ 6. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ

Если функциональная зависимость y от переменной x задана в виде неявной функции $F(x;y)=0$, то первую производную $\frac{dy}{dx}$ находим, дифференцируя уравнение $F(x;y)=0$ по переменной x, считая y функцией от x:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0.$$

Отсюда получаем формулу

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}=-\frac{F'_x(x;y)}{F'_y(x;y)}. \qquad (1)$$

Пример 1. Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$, если $(x^2+y^2)^3-3(x^2+y^2)+1=0$.

Решение

Обозначим левую часть данного уравнения через $F(x;y)$, т. е.

$$F(x;y)=(x^2+y^2)^3-3(x^2+y^2)+1.$$

Находим частные производные:

$$F'_x(x;y)=3(x^2+y^2)^2 2x-3\cdot 2x=6x\left(x^2+y^2\right)^2-6x;$$
$$F'_y(x;y)=3(x^2+y^2)^2 2y-3\cdot 2y=6y\left(x^2+y^2\right)^2-6y.$$

Применив формулу (1), получим:

$$y'=\frac{dy}{dx}=-\frac{6x(x^2+y^2)^2-6x}{6y(x^2+y^2)^2-6y}=-\frac{x}{y}.$$

Чтобы найти вторую производную, продифференцируем по x найденную первую производную, учитывая, что y есть функция от x:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(-\frac{x}{y}\right)=$$
$$=-\frac{y-y'x}{y^2}=-\frac{y-\left(-\frac{x}{y}\right)x}{y^2}=-\frac{x^2+y^2}{y^3}.$$

Аналогично, если функциональная зависимость переменной z от двух независимых переменных x и y задана неявно, в виде функции $F(x;y;z)=0$, то частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ находим, дифференцируя уравнение $F(x;y;z)=0$ по переменным x и y, считая переменную z функцией, зависящей от переменных x и y.

Таким образом, частные производные этой неявно заданной функции могут быть найдены по формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x(x;y;z)}{F'_z(x;y;z)}, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y(x;y;z)}{F'_z(x;y;z)}. \qquad (3)$$

Пример 2. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $x^2 - y^2 + z^2 - yz = 0$.

Решение

Введем $F(x;y;z) = x^2 - y^2 + z^2 - yz$.

Находим частные производные:

$$F'_x = 2x; \quad F'_y = -2y - z; \quad F'_z = 2z - y.$$

Применив формулы (2) и (3), получим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x}{2z - y} = \frac{2x}{y - 2z}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{-2y - z}{2z - y} = \frac{2y + z}{2z - y}.$$

ЗАДАНИЯ

1. Найти $\frac{dy}{dx}$, если

$y = 4 - y^x$.

2. Найти $\frac{dy}{dx}$, если

$y = x - \ln y$.

3. Функция z переменных x и y задана уравнением

$x^3 - y^3 + z^3 - 3xyz = 0$.

Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

4. Функция z переменных x и y задана уравнением

$x^2 - y^2 + z^2 - xy = 0$.

Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

5. Функция z переменных x и y задана уравнением

$x\cos y + y\cos z + z\cos x = 1$.

Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

6. Функция z переменных x и y задана уравнением

$x\sin y + y\sin z + z\sin x = 1$.

Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Дополнительные задания

7. Найти производную функции, заданной неявно:

$x^2 + \frac{2}{y} - \sqrt{x^2 - y} = 0$.

8. Найти производную функции, заданной неявно:

$\sqrt{x^2 + y^2} + 5y = 0$.

9. Найти производную функции, заданной неявно:

$e^{xy} = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$.

10. Найти производную функции, заданной неявно:

$\ln \operatorname{tg}\frac{y}{x} = \frac{y}{x}$.

§ 7. ПРОИЗВОДНАЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ И ГРАДИЕНТ ФУНКЦИИ

Производной функции $z = f(x;y)$ в точке P **в направлении** $\bar{l} = \overrightarrow{PP_1}$ называется

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{\left|\overline{PP_1}\right| \to 0} \frac{f(P_1) - f(P)}{\left|\overline{PP_1}\right|},$$

где $f(P)$ и $f(P_1)$ – значения функции в точках P и P_1.

Если функция $z = f(x;y)$ дифференцируема, то производная по направлению определяется формулой

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta, \qquad (1)$$

где α – угол, образованный вектором $\bar{l}$ и осью $0X$; β – угол, образованный вектором $\bar{l}$ и осью $0Y$.

Аналогично определяется производная в данном направлении $\bar{l}$ для функции трех переменных $u = f(x;y;z)$

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma, \qquad (2)$$

где α, β, γ – углы между вектором $\bar{l}$ и соответствующими координатными осями.

Пример 1. Найти производную функции $z = x^2 - y^2$ в точке $P(1;0)$ в направлении, составляющем с осью $0X$ угол в 120°.

Решение

Воспользуемся формулой (1), где $\alpha = 120^\circ, \beta = 30^\circ$:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{P(1;0)} = \left.\left(2x\cos 120^\circ + (-2y)\cos 30\right)\right|_{P(1;0)} =$$

$$= 2\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-2\cdot 0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + 0 = -1.$$

Знак «минус» показывает, что функция в данной точке и в данном направлении убывает.

Градиентом функции $z = f(x; y)$ в точке P называется вектор, указывающий направление наибольшей скорости изменения функции в этой точке и определяемый соотношением

$$\overline{\text{gradz}} = \frac{\partial z}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\bar{j}. \qquad (3)$$

Производная данной функции в направлении $\bar{l}$ связана с градиентом функции формулой

$$\frac{\partial z}{\partial l} = np_{\bar{l}}\,\overline{\text{grad}\, z}. \qquad (4)$$

Для функции трех переменных $u = f(x; y; z)$ определяется соотношением

$$\overline{\text{grad}\, u} = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}. \qquad (5)$$

Направление градиента функции в данной точке есть направление наибольшей скорости возрастания функции в этой точке.

Пример 2. Найти градиент функции $u = x^2 + y^2 + z^2$ в точке $P(1; 2; 3)$.

Решение

Вычислим значение частных производных $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial z}$ в точке $P(1; 2; 3)$ и применим формулу (5).

Так как градиент функции $u = x^2 + y^2 + z^2$ зависит от трех переменных, то

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{P(1;2;3)} = \left.2x\right|_{P(1;2;3)} = 2, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{P(1;2;3)} = \left.2y\right|_{P(1;2;3)} = 4, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{P(1;2;3)} = \left.2z\right|_{P(1;2;3)} = 6.$$

Тогда

$$\left.\overline{\text{grad}\, z}\right|_{P(1;2;3)} = 2\bar{i} + 4\bar{j} + 6\bar{k}.$$

ЗАДАНИЯ

1. Найти производную функции $z = x^2 - y - 2y^2 x$ в точке $P(1;1)$ в направлении, составляющем с осью $0X$ угол в 60°.

2. Найти производную функции $z = 3x - xy + 2x^2 y^2$ в точке $P(2;1)$ в направлении, составляющем с осью $0X$ угол в 30°.

3. Найти производную функции $u = xy + yz - x^2 z$ в точке $P(2;1;1)$ в направлении, идущем от этой точки к точке $N(3;3;4)$.

4. Найти производную функции $u = x^2 - 3yz + 5$ в точке $P(1;1;1)$ в направлении, идущем от этой точки к точке $N(2;1;4)$.

5. Найти $\overline{\mathrm{grad}\, z}$ в точке $P(5;1)$ функции $z = x^2 + y^2 - 2xy$.

6. Найти $\overline{\mathrm{grad}\, z}$ в точке $P(1;2)$ функции $z = x^3 - y^2 - xy$.

7. Найти $\overline{\mathrm{grad}\, u}$ в точке $P(1;1;1)$ функции $u = xyz$.

8. Найти $\overline{\mathrm{grad}\, u}$ в точке $P(2;1;0)$ функции $u = x^2 + y^2 + z^2$.

Дополнительные задания

9. Найти угол между градиентами функции $z = \arcsin\dfrac{x}{x+y}$ в точках $M(1;1)$; $N(3;4)$.

10. Найти угол между градиентами функции $z = \ln\dfrac{y}{x}$ в точках $M\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{4}\right)$; $N(1;1)$.

§ 8. ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Функция $z = f(x;y)$ имеет **максимум** (**минимум**) в точке $P(a;b)$, если для всех отличных от P точек $P'(x;y)$ в достаточно малой окрестности точки $P(a;b)$ выполняется неравенство $f(a;b) > f(x;y)$ ($f(a;b) < f(x;y)$). Максимум или минимум функции называются ее **экстремумом** и обозначаются $z_{\max} = z(a;b)$ или $z_{\min} = z(a;b)$.

Необходимые условия экстремума функции $z = f(x;y)$ в точке $P(x;y)$

$$\begin{cases} f'_x(x;y) = 0 \\ f'_y(x;y) = 0 \end{cases}. \qquad (1)$$

Точка $P(x;y)$ называется стационарной.

Достаточные условия экстремума функции $z = f(x;y)$ в точке $P(a;b)$, удовлетворяющей условиям (1), следующие: пусть $A = f''_{xx}(a;b)$, $B = f''_{xy}(a;b)$, $C = f''_{yy}(a;b)$. Составим дискриминант $\Delta = AC - B^2$. Тогда:

1) если $\Delta > 0$, то функция имеет экстремум в точке $P(a;b)$, а именно максимум, если $A < 0$ (или $C < 0$) и минимум, если $A > 0$ (или $C > 0$);

2) если $\Delta < 0$, то в точке $P(a;b)$ экстремума нет;

3) если $\Delta = 0$, то вопрос о наличии экстремума остается открытым (требуются дополнительные исследования).

Пример 1. Исследовать на экстремум функцию

$$z = 2xy - x^2 - \frac{2}{3}y^3 - 1.$$

Решение

Найдем частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2y - 2x; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x - 2y^2.$$

Найдем критические точки, приравняв полученные частные производные к нулю:

$$\begin{cases} 2y - 2x = 0 \\ 2x - 2y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = y^2 \end{cases} \quad \begin{matrix} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{matrix} \quad \text{или} \quad \begin{matrix} x_2 = 1 \\ y_2 = 1. \end{matrix}$$

Получим две стационарные точки: $P_1(0;0)$; $P_2(1;1)$.

Найдем производные 2-го порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -4y.$$

Составим дискриминант $\Delta = AC - B^2$ для каждой стационарной точки. Для точки $P_1(0;0)$ имеем: $A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{P_1(0;0)} = -2$; $B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right|_{P_1(0;0)} = 2$; $C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{P_1(0;0)} = 0$. Тогда $\Delta = -2 \cdot 0 - 2^2 = -4 < 0$. Следовательно, в точке $P_1(0;0)$ экстремума нет.

Для точки $P_2(1;1)$ имеем: $A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{P_2\,(1;1)} = -2$; $B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right|_{P_2\,(1;1)} = 2$; $C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{P_2\,(1;1)} = -4$. Тогда $\Delta = -2\cdot(-4) - 2^2 = 4 > 0$. Следовательно, в точке $P_2(1;1)$ есть экстремум. Так как число $A = -2 < 0$, то в данной точке функция имеет максимум:

$$z_{\max} = z(1;1) = 2\cdot 1\cdot 1 - 1^2 - \frac{2}{3}\cdot 1^3 - 1 = 2 - 1 - \frac{2}{3} - 1 = -\frac{2}{3}.$$

ЗАДАНИЯ

1. Исследовать на экстремум функцию $z = (x-1)^2 + 2y^2$.

2. Исследовать на экстремум функцию $z = (x-1)^2 - 2y^2$.

3. Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y.$$

4. Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^3 y^2 (6 - x - y) \ (x > 0,\ y > 0).$$

Дополнительные задания

5. Убедиться, что в точках $P_1(\sqrt{2};\sqrt{2})$; $P_2(-\sqrt{2};-\sqrt{2})$ функция $z = x^4 + y^4 - 2x^2 - 4xy - 2y^2$ имеет минимум.

6. Убедиться, что в точке $P(5;6)$ функция $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$ имеет минимум.

§ 9. НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ В ЗАМКНУТОЙ ОБЛАСТИ

Функция $z = f(x;y)$, дифференцируемая в ограниченной замкнутой области, достигает своего наибольшего и наименьшего значения или в точках экстремума внутри области, или на границе области. Поэтому для отыскания наибольшего и наименьшего значений функции $z = f(x;y)$ необходимо найти все критические точки, лежащие внутри данной области и вычислить в них значения функции. Далее, нужно исследовать поведение функции на границе области. Для этого уравнения границ подставляются в функцию. Получается функция одной переменной, для которой требуется найти наибольшее и наименьшее значение на отрезке. Сравнивая все полученные численные значения $z = f(x; y)$, выбираем наибольшее и наименьшее значение функции.

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^3 + y^3 - 3xy$ в области $0 \le x \le 2;\ -1 \le y \le 2$.

Решение

Заданная область есть прямоугольник (рис. 2).

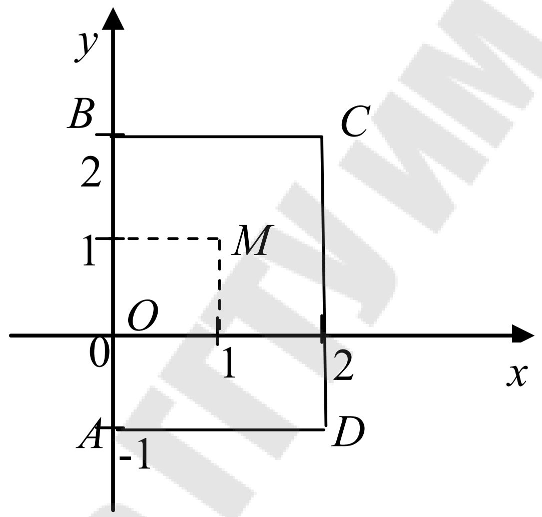

Рис. 2

1. Найдем стационарные точки, лежащие внутри области:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x.$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2,\ x_1 = 0, \quad x_2 = 1 \\ x = y^2,\ y_1 = 0,\ y_2 = 1. \end{cases}$$

Получаем две стационарные точки: $O(0;0)$ и $M(1;1)$. Точка $M(1;1)$ лежит внутри области, точка $O(0;0)$ – на границе.

$$z_1 = z(0;0) = 0; \quad z_2 = z(1;1) = -1.$$

2. Исследуем поведение функции на границах области:

$[AB]: x = 0;\ -1 \le y \le 2;$ тогда $z(x;y) = z(y) = y^3$, исследуем ее на наибольшее и наименьшее значение на отрезке $[-1;2]$:

$$z' = 3y^2;\ z' = 0 \text{ при } y = 0 \in [-1;2]; \quad z(0) = 0 = z_1 \text{(получили ранее).}$$

$$z_3 = z(A) = z(-1) = (-1)^3 = -1;\ z_4 = z(B) = z(2) = 2^3 = 8;$$

$$[BC]: y = 2;\ 0 \le x \le 2;\ z(x;y) = z(x) = x^3 - 6x + 8.$$

$$z' = 3x^2 - 6; \quad z' = 0 \text{ при } x = \pm\sqrt{2}; \quad x = -\sqrt{2} \notin [0;2]; \quad x = \sqrt{2} \in [0;2].$$

$$z_5 = z(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 8 = 8 - 4\sqrt{2} = 4(2 - \sqrt{2});$$

$$z_6 = z(C) = z(2) = 2^3 - 6 \cdot 2 + 8 = 4;$$

$$[DC]: x = 2; -1 \le y \le 2; z(x;y) = z(y) = 8 + y^3 - 6y; z' = 3y^2 - 6; z' = 0$$
при $y = \pm\sqrt{2}$;

$$y = -\sqrt{2} \notin [-1;2];\ y = \sqrt{2} \in [-1;2];\ z_7 = z(\sqrt{2}) = 8 + 2\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = 4(2 - \sqrt{2});$$

$$z_8 = z(D) = z(-1) = 8 - 1 + 6 = 13;$$

$$[AD]: y = -1; 0 \le x \le 2; z(x;y) = z(x) = x^3 + 3x - 1; z' = 3x^2 + 3; z' \ne 0 .$$

3. Сравнивая полученные значения $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8$, заключаем, что

$$z_{\text{наиб}} = z(2;-1) = 13,$$
$$z_{\text{наим}} = z(1;1) = z(0;-1) = -1.$$

ЗАДАНИЯ

1. Определить наибольшее и наименьшее значения функции
$$z = 1 + x + 2y$$
в области D: $x \ge 0; y \ge 0; x + y \le 1$.

2. Определить наибольшее и наименьшее значения функции
$$z = 3x + y - xy$$
в области D: $x \ge 0; y \le 4; x + y \ge x$.

3. Определить наибольшее и наименьшее значения функции
$$z = x^2 y$$
в области D: $x^2 + y^2 \le 1$.

4. Определить наибольшее и наименьшее значения функции
$$z = x^2 - y^2$$
в области D: $x^2 + y^2 \le 1$.

Дополнительные задания

5. Определить наибольшее и наименьшее значения функции $z = \frac{1}{2}x^2 - xy$ в области D, ограниченной заданными линиями D:

$$y = 8;\ y = 2x^2.$$

6. Определить наибольшее и наименьшее значения функции $z = xy + x + y$ в области D, ограниченной заданными линиями D:

$$x = 1;\ x = 2;\ y = 2;\ y = 3.$$

7. Разложить число 12 на три положительных слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.

8. Из всех прямоугольных параллелепипедов, имеющих данный объем V, найти тот, полная поверхность которого наименьшая.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления : для втузов : в 2 т. / Н. С. Пискунов. – Москва : Наука, 1970. – Т. 1.

2. Гурский, Е. И. Руководство к решению задач по высшей математике : учеб. пособие : в 2 ч. / Е. И. Гурский [и др.]. – Минск : Высш. шк., 1990. – Ч. 1.

3. Гусак, А. А. Задачи и упражнения по высшей математике : в 2 ч. / А. А. Гусак. – Минск : Высш. шк., 1988. – Ч. 1.

4. Рябушко, А. П. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике : в 3 ч. / А. П. Рябушко. – Минск : Высш. шк., 1990. – Ч. 2.

Содержание

Учебное электронное издание комбинированного распространения

Учебное издание

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Практикум по выполнению домашних заданий курсов «Математика» и «Высшая математика» для студентов дневной формы обучения

Авторы-составители: **Курлович** Сергей Петрович
Иванейчик Ирина Владимировна
Дегтярева Екатерина Александровна

Редактор *Н. В. Гладкова*

Компьютерная верстка *Н. В. Широглазова*

Подписано в печать 29.10.07.
Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Цифровая печать. Усл. печ. л. 1,63. Уч.-изд. л. 1,1.
Изд. № 111.
E-mail: ic@gstu.gomel.by
http://www.gstu.gomel.by
.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Издательский центр учреждения образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого».
ЛИ № 02330/0131916 от 30.04.2004 г.
246746, г. Гомель, пр. Октября, 48.