Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Машины и технология литейного производства»

ОСНОВЫ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ПОСОБИЕ
по одноименному курсу
для студентов специальности 1-36 02 01
«Машины и технология литейного производства»
дневной формы обучения

Электронный аналог печатного издания

Гомель 2007

УДК 621.74:167(075.8)
ББК 34.61+72я73
О-75

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом механико-технологического факультета ГГТУ им. П. О. Сухого (протокол № 5 от 28.06.2006 г.)

Авторы-составители: *В. М. Карпенко*, *А. В. Ткаченко*

Рецензент: канд. техн. наук, доц., зав. каф. «Материаловедение в машиностроении» ГГТУ им. П. О. Сухого *И. Н. Степанкин*

О-75 **Основы** научных исследований : пособие по одноим. курсу для студентов специальности 1-36 02 01 «Машины и технология литейного производства» днев. формы обучения / авт.-сост.: В. М. Карпенко, А. В. Ткаченко. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2007. – 47 с.– Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: http://gstu.local/lib. – Загл. с титул. экрана.

ISBN 978-985-420-634-9.

Пособие состоит из трех разделов, охватывающих основные этапы подготовки, проведения и обработки результатов научного исследования. Содержит теоретические сведения, позволяющие овладеть учебной дисциплиной, и примеры обработки результатов эксперимента.

Для студентов специальности 1-36 02 01 «Машины и технология литейного производства» дневной формы обучения.

УДК 621.74:167(075.8)
ББК 34.61+72я73

ISBN 978-985-420-634-9

Введение

Литейное производство – один из древнейших способов обработки металлов. Его главная особенность состоит в возможности получения самых сложных изделий путем заливки жидкого металла в полость формы из огнестойкого природного материала (камня, песка), имеющую конфигурацию изготавливаемого изделия. В этом процессе основными операциями являются плавление, перегрев жидкого металла и заливка форм. Процессом литья человек овладел уже на самых ранних этапах освоения и применения металлов и их сплавов. До настоящего времени литейный способ получения сложных металлических изделий остается наиболее доступным, надежным и экономичным.

Первым литейным сплавом была бронза. Это объясняется тем, что для восстановления меди из ее окислов необходима сравнительно небольшая затрата тепловой энергии – 40 ккал/(г · моль). Температура плавления бронзы также не слишком высока (1050 °С). Однако в рабовладельческом и феодальном обществах литейное производство не могло достигнуть значительного развития, так как оно ограничивалось в основном удовлетворением заказов в виде художественного литья, крестов, деталей церковной утвари, колоколов и др.

В древней Руси искусство литья металлов и сплавов достигло довольно высокого уровня. Например, при раскопках в районе среднего течения Днепра были найдены бронзовые котелки, наконечники стрел и копий, серьги, кольца, головные уборы и другие литые изделия, относящиеся к началу IV в. н. э. В дальнейшем искусство бронзового литья в России поступательно расширялось и совершенствовалось, достигнув апогея при изготовлении таких исторических шедевров мастерства и искусства русских литейщиков, как Царь-пушка (1586 г., А. Чохов), Царь-колокол (1735 г., И. Моторин), Медный всадник (1872 г., Э. Фальконе).

Литье из сплавов железа осваивалось значительно позже бронзового. Основная причина этого заключается в необходимости затрачивать большую тепловую энергию для восстановления окислов железа – 195 ккал/(г · моль).

В XIII–XIV вв. в Европе появились первые фасонные отливки из чугуна – дешевого, технологического литейного материала. В XVII–XVIII вв. началось производство белого чугуна для изготовления прокатных валков, деталей ковкого чугуна, отбеленных и фасонных отливок, что потребовало освоения новых технологических процессов литья и термообработки.

Развитие литья из сплавов железа неразрывно связано с общим промышленным прогрессом. С середины XIX в. начинается научное обобщение многовекового опыта литейщиков, переход от полукустарного, основывающегося на искусстве «одиночек», к современному высокомеханизированному производству.

Разработка в 1886 г. русскими учеными А. С. Лавровым и Н. В. Калакуцким основ получения качественных стальных отливок, открытие явления ликвации, механизма возникновения усадочных раковин и напряжений в отливках послужили толчком к дальнейшему развитию сталелитейного производства. Этому способствовало также расширение в семидесятых годах XIX в. сети железных дорог России. В работах основоположника металлографии Д. К. Чернова о закономерностях структурных превращений и формировании свойств в сталях (конец XIX в.) были заложены основы научного подхода к процессам кристаллизации отливок, что способствовало расширению производства фасонного литья. В 1905 г. впервые в литейном производстве для выплавки стали применили дуговые электрические печи, а в 1920–1930 гг. – индукционные.

Важной вехой в истории литейного производства является открытие в первой половине XX в. высокопрочного чугуна с шаровидным графитом (ЧШГ), которое способствовало развитию исследований в области теории графитизации и структурообразования. Исследования советских ученых Н. Г. Гиршовича, К. П. Бунина, Ю. Н. Тарана, А. Е. Кривошеева. Б. С. Мильмана, К. И. Ващенко, А. А. Горшкова и зарубежных – Паттерсона, Витт-мозера, Де Си, Моржери создали теоретические основы и определили направления совершенствования технологических процессов производства отливок из новых материалов.

Продукция литейного производства во многих отраслях народного хозяйства служит конструкционной основой машин, механизмов и агрегатов, рабочим инструментом и важнейшим сменным оборудованием. Литейное производство является главной заготовительной базой для станкостроительной, автотракторной, электротехнической, сельскохозяйственной, транспортной, металлургической, строительной, атомной, космической и других отраслей народного хозяйства. Литые изделия в виде машин и механизмов, сменного оборудования и инструментов обеспечивают выпуск разнообразнейшей продукции металлургии, машиностроения, бумагоделательной, мукомольной, резинохимической отраслей промышленности.

1. ОБЩАЯ МЕТОДИКА НАУЧНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ

Интенсивное развитие исследований в литейном производстве как науки и одной из важнейших отраслей народного хозяйства обусловлено многообразием практических и теоретических задач, поставленных перед отечественной металлургией и машиностроением. Совершенствование специальных методов исследования, оснащение исследовательского процесса сложнейшей экспериментальной техникой и приборами, его математизация и широкое использование ЭВМ требуют все большей формализации общей методики исследования. При этом происходит непрерывное усложнение и совершенствование частных методов исследования, что вызывает необходимость узкой специализации отдельных исследователей и больших научных коллективов для решения частных проблем и задач теоретического и прикладного характера.

Несмотря на все возрастающую сложность и многообразие форм исследовательского процесса, в адаптационной стадии своей деятельности начинающий исследователь может успешно руководствоваться общей методикой научного исследования. Термином «методика» принято определять систему последовательных приемов, обеспечивающих наиболее эффективное проведение исследования. Основоположник английского материализма философ Френсис Бэкон писал: «Достоинство хорошей методы состоит в том, что она уравнивает способности; она вручает всем средство легкое и верное» [1]. Формализация последовательности выполнения основных этапов исследования делает ее своеобразным алгоритмом для проведения практически любого экспериментального исследования в области технических наук.

Выбор темы исследования. В значительной мере выбор темы зависит от характера решаемой общей или частной проблемы. Если научно-исследовательская работа выполняется по заданию министерства, ведомства или промышленного предприятия, то название темы, ее актуальность и новизна определяются характером поставленной проблемы. При этом тема должна охватывать не только круг прикладных задач, но и допускать возможность создания научного задела, проведения глубокой теоретической разведки в пределах изучаемых вопросов. «Наука, – по словам известного советского физика и общественного деятеля С. И. Вавилова, – всегда должна работать в запас, впрок, и только при этом условии она будет находиться в естественных для нее условиях» [1].

Весьма ответственным моментом является также выбор темы для диссертационной работы. Несмотря на то что подготовка диссертации – процесс в значительной мере индивидуализированный, успешная ее защита служит своеобразной оценкой или квалификационной характеристикой деятельности всего научного коллектива, в котором эта работа выполняется. В определенной мере выбор темы, ее актуальность, важность для развития науки и производства, а также успешная защита диссертационной работы приобретают общественное значение. В большинстве случаев тема квалификационной работы выбирается в соответствии с общей проблематикой и научным направлением исследовательской деятельности коллектива, в котором работает диссертант. Обычно темой кандидатской диссертации предусматривается узконаправленное исследование, обеспечивающее глубокую и всестороннюю разработку частной теоретической проблемы или производственной задачи, имеющей важное для промышленности значение. Основные требования к выбору тем кандидатских и докторских диссертаций определяются соответствующими положениями высшей аттестационной комиссии (ВАК). Принятая система утверждения тем диссертационных работ специализированными советами и Министерством высшего и среднего специального образования исключает параллелизм и дублирование, позволяет сосредоточить научные кадры на наиболее важных и перспективных научных направлениях.

Постановка задачи. Эффективность исследовательской работы в значительной мере определяется конкретностью и ясностью поставленной задачи. В современных условиях большинство работ в области литейного производства представляет собой комплексные и многоцелевые исследования, направленные на решение одной или нескольких частных проблем. Поэтому уже в начальной стадии необходимо четко установить и предельно конкретно сформулировать круг основных задач, которые необходимо решить в ходе выполнения работы. Задача исследования должна соответствовать характеру практических или теоретических вопросов, подлежащих решению. При этом следует учитывать квалификационные, экспериментальные, технико-экономические возможности, предшествующий опыт и специализацию данного научного коллектива, а также состояние вопроса. Все эти факторы определяют качество и сроки выполнения поставленных задач.

Изучение состояния вопроса. Представление о состоянии вопроса создается на основании изучения литературных и патентных данных, ознакомления с результатами ранее выполненных научно-исследовательских работ и защищенных диссертаций, просмотра технической документации, сертификатов, рекламных проспектов и образцов передовой отечественной и зарубежной продукции, анализа ГОСТов, ведомственных и межведомственных технических условий и т. д. Значительную помощь в изучении состояния вопроса могут оказать консультации с ведущими специалистами в данной отрасли народного хозяйства, с учеными и производственниками.

Каждый научный сотрудник должен активно владеть приемами самостоятельной библиографической работы. В условиях «информационного взрыва», когда удвоение количества новых научных результатов сопровождается восьмикратным ростом объема научной информации, задача информационного поиска становится чрезвычайно сложной. Непосредственное ознакомление исследователя с оригинальной литературой даже по узкоспециальным темам в таких условиях становится физически невозможным.

Несмотря на отмеченные трудности, выход из создавшегося положения существует, если руководствоваться некоторыми практическими приемами библиографической работы непосредственно с литературными источниками. К числу основных методов библиографического поиска относятся следующие: хронологический, обратнохронологический и сравнительно-хронологический.

Хронологический метод используется в тех случаях, когда необходимо воссоздать последовательные этапы разработки какой-либо проблемы, гипотезы, теории или технологического процесса в течение какого-либо периода. Этот метод отличается повышенной трудоемкостью, хотя и позволяет исследователю критически оценить развитие во времени тех или иных теоретических концепций.

В технических науках весьма эффективным является обратнохронологический метод поиска. Техника его применения состоит в следующем. Исследователь начинает знакомство с последними новейшими литературными источниками и, руководствуясь содержащимися в них списками литературы, постепенно переходит к более ранним источникам. Таким образом можно с минимальными затратами труда и времени провести информационный поиск с заданной во времени глубиной. Этот метод позволяет исследователю достаточно быстро определить состояние вопроса в данной области, зная предысторию.

Сравнительно-хронологический метод используют в тех случаях, когда необходимо одновременно проследить историю развития нескольких взаимосвязанных научных концепций или процессов. Весьма полезным при информационном поиске является систематический просмотр изданий основных видов практической библиографии: учебно-регистрационной, научно-вспомогательной, рекомендательной и критической. Библиографические материалы этих видов публикуются в «Книжной летописи», «Летописи журнальных статей», «Летописи рецензий» и других изданиях.

Большой объем библиографических источников печатается на аннотированных печатных карточках и кодированных перфокартах. Использование последних дает возможность применять механизированный поиск литературных источников. Целенаправленность машинного поиска может быть обеспечена специальным кодированием библиографических карточек с помощью индексов системы Универсальной десятичной классификации (УДК). Весьма полезным источником библиографической информации являются также реферативные журналы (РЖ), выпуск которых организован по различным отраслям науки и техники в послевоенный период.

Аналитический обзор литературы должен сочетать беспристрастность и критическое обсуждение. В обзоре необходимо выявить и систематизировать основные тенденции, противоборствующие позиции, гипотезы и теории. Не следует заранее принимать сторону более авторитетных авторов или слепо примыкать к более привычной теоретической концепции. «Привычка к определенному мнению, – отмечал Я. Берцелиус, – порождает часто глубокое убеждение в его правоте; она скрывает наиболее слабые пункты этого мнения и отнимает у нас способность воспринимать доказательства, говорящие против него» [1].

Выбор частных методик. Выбор частных методик или специальных методов исследования является одним из наиболее сложных вопросов общей методики исследования. Отсутствие формализованных методов выбора частных методик нередко приводит к грубым методологическим ошибкам при получении и оценке новых научных результатов. Наиболее общим критерием выбора частных методик исследования является необходимая точность и надежность получаемых результатов. В свою очередь точность опытных данных зависит от чувствительности входных датчиков и регистрирующих приборов; точности изготовления, препарирования и измерения образцов; стабильности условий постановки и проведения эксперимента, а также ряда других контролируемых и неконтролируемых факторов.

Не следует прибегать к необоснованно сложным экспериментальным методикам с целью «онаучивания» работы, если это не обеспечивает получения более точных результатов. Известный русский физик П. Н. Лебедев говорил: «Я ужасно не люблю экспериментально трудных работ: у меня все время такое неприятное ощущение, точно я был недостаточно остроумен, чтобы выдумать более простое исследование вопроса, хотя в данном случае не могу даже догадаться, как можно было бы сделать еще проще» [1].

Математическое планирование эксперимента. Рассматриваемый этап общей методики научного исследования в литейном производстве является относительно новым и обусловлен необходимостью повышения экономической и научной эффективности проводимых исследований. На этом этапе исследователь планирует предстоящий эксперимент с помощью наиболее подходящих для решения поставленной задачи формализованных математических методов. Это позволяет не только свести до минимума трудозатраты для получения необходимой научной или технологической информации, но и обеспечить ее оптимальный для данных условий вариант, а при необходимости и получить расчетный аппарат в виде математического описания исследуемого процесса. Применение математического планирования особенно эффективно при выполнении поисковых многофакторных исследований, связанных с оптимизацией процесса.

В некоторых случаях более целесообразно использовать специальные кибернетические методы исследования, основанные на элементах теории игр, теории графов и др.

Обработка экспериментальных данных. Этот этап предусматривает математическую или (и) графическую обработку опытных данных. «Особенно придирчиво ученый должен относиться к опыту – верховному судье всех научных гипотез и теорий. Он должен всесторонне проверять теорию опытами и тщательно исключать при постановке эксперимента всевозможные источники ошибок, не отбрасывая и не скрывая хотя бы отдельные результаты, не укладывающиеся в его гипотезу», – писал советский физик и физикохимик Н. Н. Семенов, основоположник теории цепных реакций, тепловой теории горения и взрывов [1]. Если методика исследования предусматривает выполнение пятого этапа, то математическая обработка данных производится в процессе или по окончании эксперимента методом математического планирования. Она включает статистический анализ, целью которого является, с одной стороны, извлечение максимума информации из результатов эксперимента, а с другой – проверка достоверности получаемой зависимости, оценка ее точности. Великий итальянский художник и ученый Леонардо да Винчи писал: «Никакой достоверности нет в науках там, где нельзя приложить ни одной из математических наук, и в том, что не имеет связи с математикой» [1].

В тех случаях, когда в методике отсутствует пятый этап, после обработки результатов традиционного «пассивного» эксперимента должны быть получены графики или эмпирические формулы, описывающие полученные зависимости.

Методы обработки опытных данных условно подразделяются на методы первичной и вторичной обработки. К первой группе относят: нахождение среднего значения, оценку меры точности, наибольшей возможной ошибки отдельного измерения и другие элементарные методы математической статистики. Ко второй группе относят методы, используемые для правильного представления результатов эксперимента в табличной и графической формах; графического дифференцирования и интегрирования; подбора формул по данным опыта и др.

Обсуждение результатов эксперимента. Должно проводиться в соответствии с основными принципами диалектического материализма и логикой научного исследования. Такой подход позволяет, как отмечено ранее, исключить логические ошибки при построении и доказательстве версий и гипотез, базирующихся на результатах исследования.

Обсуждение экспериментальных материалов должно сопровождаться его глубоким, критическим обобщением, в основе которого лежит один из важнейших приемов научного анализа – восхождение от конкретного к абстрактному (общему) и снова к конкретному на более высоком теоретическом уровне.

Объективная оценка собственных результатов, сопоставление их с результатами предшествующих исследований, которые получены при изучении состояния вопроса, нередко дают исследователю основания для пересмотра существующих гипотез и теорий, если они не соответствуют полученным принципиально новым фактам. «На уровне самого высокого творчества процесс созидания представляет собой не что иное, как глубочайший критицизм», – писал Н. Винер [1]. Отвергая существующие гипотезы, исследователь может выдвинуть свою. Новая гипотеза должна убедительно подтверждаться собственными результатами и по крайней мере не противоречить данным других исследователей, в достоверности которых нет оснований сомневаться. Однако следует иметь в виду, что скороспелая, недостаточно обоснованная гипотеза может принести ущерб не только авторитету исследователя, но и на длительный период поставить под сомнение действительно перспективное и важное направление исследований.

При обсуждении собственных результатов исследователю необходимо строго научно обосновать свои теоретические построения, избегая декларативности и голословности. Критерии оценки собственных и «чужих» научных результатов должны быть одинаково объективны. «Кто хочет правильно рассуждать, должен уметь освободиться от привычки принимать все на веру, должен считать равновозможными противоположные мнения и отказаться от предубеждений...» – указывал великий итальянский мыслитель Джордано Бруно[1].

Выводы и практические рекомендации. На основании обсуждения результатов исследования должны быть сделаны выводы и разработаны практические рекомендации. Выводы могут быть краткими или развернутыми в зависимости от вида и объема исследования. Однако в любом случае они должны быть емкими, четкими и ясными, действительно вытекать из результатов исследования и давать исчерпывающий ответ на вопросы, поставленные в задаче исследования. Не следует бояться отрицательных результатов, так как для науки при добросовестно поставленном исследовании одинаково важен и положительный, и отрицательный результат. Положительный результат даст основания для продолжения исследований в данном направлении. Отрицательный – свидетельствует о нецелесообразности концентрации средств и усилий на данной задаче. Отсюда вытекает рентабельность обоих результатов.

Следует особое внимание обращать на содержательность, конкретность, практическую и теоретическую ценность выводов и рекомендаций. Рекомендации должны содержать предложения о наиболее эффективном пути и объеме внедрения результатов в теорию и практику. Необходимо также определить целесообразность продолжения исследований в данном направлении.

Практическое применение результатов исследования. Исследовательская работа может считаться законченной, если полученные выводы и рекомендации найдут практическое применение в теории или будут внедрены в производство с положительным экономическим эффектом.

2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПЛАНИРОВАНИЯ И ПРОВЕДЕНИЯ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Сложность и многообразие технологических процессов, многоплановость проблем, теоретических и производственных задач в области литейного производства требуют выработки нового стиля инженерно-исследовательской работы, основанного на использовании математики, кибернетики и вычислительной техники. Применение обширного арсенала математических методов должно сочетаться с гибким творческим мышлением исследователя. По мнению известного математика А. Д. Александрова, «...применение математики имеет смысл в единении с глубокой теорией конкретного явления. Об этом важно помнить, чтобы не сбиваться на простую игру в формулы, за которой не стояло бы реального содержания» [1]. Только глубокое проникновение в сущность исследуемых процессов с помощью методологически правильно поставленных исследований позволяет получить точные и достоверные научные данные, которые имеет смысл обрабатывать математическими методами.

2.1. Регрессионный и дисперсионный анализ. Корреляция и области ее применения

Любой процесс может быть охарактеризован определенным числом факторов или входных параметров, которые в различной мере влияют на выходные параметры, т. е. на результат или продукт, получаемый в ходе реализации процесса. Так, комплекс свойств (выходных параметров), определяющих качество отливки, может зависеть от множества технологических (входных) параметров: состава и свойств формовочных и стержневых смесей; способа изготовления литейной формы состава шихты; термовременного режима плавки, рафинирования и заливки металла; содержания основных и легирующих химических элементов в сплаве, скорости затвердевания и охлаждения отливки и т. д.

Целью исследования часто является установление количественной зависимости выходных параметров процесса от одного или группы факторов, колебания значений которых в реальных условиях случайны. Это обусловлено в свою очередь влиянием на них случайных и в большинстве своем не поддающихся учету факторов.

Если взаимосвязь между двумя переменными величинами выражается функцией $y = f(x)$, то в математическом анализе такая зависимость называется функциональной. Это значит, что в соответствии с видом функции каждому значению переменной отвечает одно или несколько вполне определенных значений переменной y.

При изучении взаимного влияния или связи случайных величин, какими являются практически все оцениваемые в исследовательской практике параметры, наблюдается иной вид связи. Особенность ее состоит в том, что одному значению переменной x может соответствовать некоторая совокупность значений другой зависимой переменной y. Появление такой совокупности значений зависимой переменной y вызвано влиянием множества побочных факторов, действующих одновременно или последовательно и в разных направлениях. В этом случае связь в отличие от функциональной имеет статистический характер и называется корреляционной. Корреляционная связь занимает промежуточное положение между строгой функциональной зависимостью и полным отсутствием ее между переменными.

Примерами корреляционной связи в области литейного производства могут быть зависимости между содержанием легирующего элемента в сплаве и твердостью или прочностью отливки, изготовленной из этого сплава; жидкотекучестью сплава и суммарным объемом усадочных дефектов в осевой зоне массивной отливки, содержанием глины и газопроницаемостью формовочной смеси и т. д.

Если результаты определения какого-либо из перечисленных выходных параметров и соответствующих им входных параметров – переменных факторов – представить в виде пар x_1, y_1; x_2, y_2; ...; x_n, y_n и отвечающие им точки построить в координатах x – y, то получим корреляционное поле (рис. 2.1).

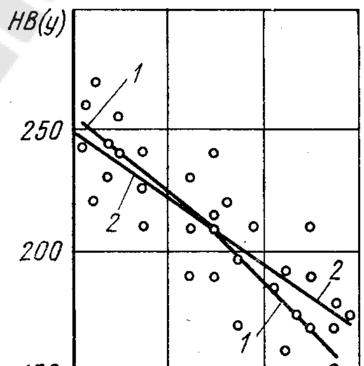

Рис. 2.1. Корреляционное поле зависимости твердости $HB(y)$ от степени эвтектичности $S_э(x)$ серого чугуна: *1* – эмпирическая линия регрессии; *2* – теоретическая

Расположение точек на поле в общем оказывается не случайным и подчиняется определенной зависимости. Если найти и нанести на поле средние значения $\overline{y}_i$, соответствующие всем значениям переменной x_i в интервалах, ограниченных вертикальными линиями координатной сетки, то зависимость y от x станет более очевидной. Ломаная линия, соединяющая точки средних значений y, является эмпирической линией регрессии. С увеличением числа опытов ломаная линия будет сглаживаться, освобождаясь от случайных зигзагов, и приближаться к некоторой прямой. Математическое описание этой предельной линии соответствует теоретической линии регрессии. В общем виде для данной выборки она может быть представлена уравнением прямой:

$$y = b_0 + b_1 x. \tag{2.1}$$

Коэффициенты регрессии b_0 и b_1 определяются по формулам, выведенным на основании метода наименьших квадратов:

$$b_1 = \frac{\sum (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum (x_i - \overline{x})^2}, \quad b_0 = \overline{y} - \overline{b}_1 x. \tag{2.2}$$

Колебания y относительно своей средней величины с изменением x определяются двумя компонентами: стохастической, зависящей от наличия связи между y и x, и случайной, связанной с влиянием случайных факторов. Количественной мерой, учитывающей закономерную (стохастическую) долю колебаний y от x относительно средней $\overline{y}$, является коэффициент корреляций r. При парной корреляции, когда рассматривается связь двух переменных, величина отклонения y от $\overline{y}$ определяется отклонением x от $\overline{x}$ и выражается теоретическим линейным уравнением регрессии:

$$y - \overline{y} = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \overline{x}), \tag{2.3}$$

где r – коэффициент корреляции; σ_y, σ_x – средние квадратические отклонения y и x соответственно от средних $\overline{y}$ и $\overline{x}$.

Угловой коэффициент r (σ_y / σ_x) в уравнении (2.3) равен b_i в выражении (2.1). Он определяет наклон линии регрессии на диаграмме в координатах $x - y$ и называется коэффициентом регрессии. Вычисление величин, входящих в выражение коэффициента регрессии, осуществляют по формулам:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2}; \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{\sum y_i^2}{n} - \bar{y}^2}; \tag{2.4}$$

$$r = \frac{\frac{1}{n}\sum (x_i y_i) - \bar{x}\,\bar{y}}{\sigma_x \sigma_y}. \tag{2.5}$$

Коэффициент корреляции не может быть использован для оценки технологической важности фактора. Его величина указывает только на тесноту связи между переменными, а знак – на характер влияния. Значения коэффициента корреляции могут находиться в пределах $-1 \le r \le 1$. Если $r < 0$, то увеличение x вызывает уменьшение y; при $r > 0$ наблюдается обратная закономерность. Если $|r| = 1$, то связь является линейной функциональной, если $|r| = 0$, то корреляционной связи между x и y нет или она нелинейна. При изучении связи между тремя переменными две из них принимают за независимые переменные x_1 и x_2, а третью – за функцию y. В этом случае уравнение регрессии будет иметь вид:

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2. \tag{2.6}$$

Коэффициенты регрессии b_0, b_1 и b_2 вычисляют по формулам:

$$b_1 = \frac{r_{yx_1} - r_{yx_2} r_{x_1x_2}}{1 - r_{x_1x_2}^2} \frac{\sigma_y}{\sigma_x}; \quad b_2 = \frac{r_{yx_2} - r_{yx_1} r_{x_1x_2}}{1 - r_{x_1x_2}^2} \frac{\sigma_y}{\sigma_x}; \quad y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2, \tag{2.7}$$

где $r_{yx_1}, r_{yx_2}, r_{x_1x_2}$ – коэффициенты корреляции между факторами y и x_1, y и x_2, x_1 и x_2 соответственно; σ_y – среднее квадратическое отклонение y; σ_{x_1}, σ_{x_2} – средние квадратические отклонения факторов x_1 и x_2.

Если количество переменных равно трем и более, то теснота линейной связи оценивается с помощью коэффициента множественной корреляции R. Этот коэффициент всегда имеет положительное значение ($0 \le R \le 1$). Для трех переменных значение R может быть вычислено по одной из формул:

$$R_{yx_1x_2} = \sqrt{\frac{r_{yx_1}^2 + r_{yx_2}^2 - 2r_{yx_1} r_{yx_2} r_{x_1x_2}}{1 - r_{x_1x_2}^2}}; \qquad (2.8)$$

$$R_{yx_1x_2} = \sqrt{\frac{\frac{1}{n}\sum[b_1(x_1 - \overline{x_1}) + b_2(x_2 - \overline{x_2})]^2}{\sigma_y^2}}. \qquad (2.9)$$

При исследовании зависимостей методами множественной корреляции иногда возникает необходимость выявить влияние какой-либо одной переменной на выход процесса. Такая оценка при закреплении значений остальных факторов на постоянном уровне может осуществляться с помощью частных коэффициентов корреляции r'. Для двух факторов:

$$r'_{yx_1x_2} = \frac{r_{yx_1} - r_{yx_2} r_{x_2x_1}}{\sqrt{(1 - r_{yx_2}^2)(1 - r_{x_2x_1}^2)}}; \quad r'_{yx_2x_1} = \frac{r_{yx_2} - r_{yx_1} r_{x_2x_1}}{\sqrt{(1 - r_{yx_1}^2)(1 - r_{x_1x_2}^2)}}. \qquad (2.10)$$

Точка между индексами частного коэффициента корреляции отделяет фактор или группу факторов, которые исключаются из корреляционной зависимости между двумя первыми, стоящими слева от точки.

При изучении множественной корреляционной связи ограничиваются предположением о линейности связи между исследуемыми факторами. Уравнение множественной корреляции для трех переменных геометрически определяет положение некоторой плоскости в трехмерном пространстве переменных x_1, x_2 и y. Расчет уравнений множественной корреляции с числом факторов более двух трудоемкий и обычно производится по стандартным программам с помощью ЭВМ. Линейность связи и ряд других причин ограничивает область применения корреляционного анализа. Поэтому на практике чаще используют регрессионный анализ и влияние факторов оценивают по коэффициентам регрессии.

При нелинейной корреляции между двумя переменными обычно используют уравнение в виде многочлена:

$$y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots + b_n x^n . \qquad (2.11)$$

Если степень n многочлена (2.11) известна, то определение коэффициентов b_0, b_1, b_2, …, b_n производят методами множественной регрессии. В общем случае тесноту нелинейной связи зависимой переменной y и независимых x_i (i = 1, 2, 3, ..., n) оценивают корреляционным отношением:

$$\eta = \frac{\sum(\bar{y}_i - \bar{y})^2}{\sum(y - \bar{y})^2}, \qquad (2.12)$$

где $\bar{y}$ – общая средняя фактора y; $\bar{y}_i$ – среднее значение фактора y, соответствующее группе или интервалу значений фактора x; y – значения каждого фактора в группе. Значения корреляционного отношения находятся в пределах $0 \le \eta \le 1$. Корреляционное отношение может служить мерой тесноты как линейной, так и нелинейной связи, однако в последнем случае оно не позволяет судить, насколько близко расположены опытные точки к кривой регрессии – параболе, гиперболе и т. д.

В некоторых случаях для приведения нелинейной корреляционной зависимости к более простому линейному виду удобнее рассматривать не сами переменные, а некоторые их функции, например, обратные величины, логарифмы и т. п. Это так называемая функциональная корреляция. Например, нелинейное корреляционное уравнение вида

$$y = b_0 x_1^{b_1} x_2^{b_2} x_3^{b_3} \ldots x_n^{b_n} \qquad (2.13)$$

логарифмированием можно преобразовать в линейное по параметрам:

$$\lg y = \lg b_0 + b_1 \lg x_1 + b_2 \lg x_2 + b_3 \lg x_3 + \ldots + b_n \lg x_n . \qquad (2.14)$$

Такое преобразование позволяет для нахождения коэффициента регрессии и оценки тесноты связи воспользоваться обычным линейным методом наименьших квадратов с учетом определенных особенностей «линейных» членов уравнения.

Коэффициент корреляции обычно рассчитывают по ограниченному количеству данных – выборке из генеральной совокупности, вследствие чего он всегда содержит ошибку. Поэтому необходима проверка гипотезы о статистической значимости связи.

Если исходить из нормального распределения коэффициента корреляции, то ориентировочно его достоверность можно оценить по величине отношения:

$$\frac{|r|}{\sqrt{n-1}}. \tag{2.15}$$

Если отношение (2.15) меньше трех, то коэффициент корреляции неотличим от нуля и связь отсутствует. Иными словами, нуль-гипотеза подтверждена.

Для большого числа опытов (n > 100) и не очень большого r критерий надежности коэффициента корреляции рассчитывается как t-отношение:

$$t = \frac{|r|}{\sigma_r}, \tag{2.16}$$

где

$$\sigma_r = \frac{1-r^2}{\sqrt{n}} \tag{2.17}$$

есть средняя квадратическая ошибка коэффициента корреляции. Если $t > t^*$, то r значим, т. е. нуль-гипотеза отвергается. Для уровня значимости $p = 0{,}01$ $t^*_{0,01} = 2{,}58 \cong 2{,}6$. Таким образом, при $t > 2{,}6$ связь между факторами считается не случайной. Для оценки достоверности коэффициентов корреляции используют и другие приемы.

Приведенное выше изложение сущности корреляционного анализа основывалось на предположении, что разброс результатов наблюдений обусловлен преимущественно случайными причинами. Если же значения факторов изменять каким-либо закономерным образом, то возникает задача оценки степени влияния такого изменения каждого фактора на выход процесса. Например, необходимо оценить раздельное влияние (вклад) податливости формы, типа шихты, режима плавки и термовременной обработки на качество отливки – выход процесса. Такая задача может быть решена методом дисперсионного анализа [2].

Сущность метода состоит в следующем. Пусть выход некоторого процесса характеризуется влиянием двух факторов *A* и *B*. В соответствии с правилом сложения дисперсий для некоррелированных случайных величин общая дисперсия выхода процесса $\sigma^2_{\text{общ}}$ равна сумме составляющих дисперсий:

$$\sigma^2_{\text{общ}} = \sigma^2_A + \sigma^2_B + \sigma^2_{AB} + \sigma^2_{\text{ост}}, \qquad (2.18)$$

где σ^2_A и σ^2_B – дисперсии, связанные с влиянием факторов *A* и *B* соответственно; σ^2_{AB} – дисперсия, связанная с влиянием взаимодействия факторов *A* и *B*; $\sigma^2_{\text{ост}}$ – остаточная, случайная часть дисперсии, обусловленная влиянием неконтролируемых и неизвестных факторов.

Аналогично можно представить выражение для общей дисперсии $\sigma^2_{\text{общ}}$ при большом количестве факторов. Следует иметь в виду, что при дисперсионном анализе дисперсии отдельных факторов *A*, *B*, *C*, ... не связаны с какой-либо случайной величиной, так как значения переменных, на основании которых вычислены дисперсии, не являются случайными, а изменяются в заданном порядке.

Критерием оценки влияния отдельных факторов на выход процесса может служить *F*-отношение:

$$F = \frac{\sigma^2_{\text{ф}}}{\sigma^2_{\text{ост}}}. \qquad (2.19)$$

Сравнивая расчетное значение *F* с критическим *F**, производят оценку надежности дисперсий отдельных факторов $\sigma^2_{\text{ф}}$ и их относительного влияния на выход процесса.

Рассматриваемые в данном разделе математические методы основаны на так называемом «пассивном» эксперименте, что является их основным недостатком. Пассивный эксперимент заключается в том, что исследователь лишь фиксирует изменения факторов и соответствующие им колебания выхода процесса. Изменение факторов в промышленных условиях происходит в узких пределах, что не дает возможности исследовать и оптимизировать механизм течения процесса. Достоинство метода пассивного эксперимента состоит в том, что получение экспериментального материала не требует дополнительных затрат и не связано с риском экспериментирования в производственных условиях.

2.2. Математическое планирование эксперимента

Планирование эксперимента является новым методом подхода к постановке и проведению исследования. Математический аппарат метода играет активную роль на всех этапах эксперимента [2], [3], [4]. Планирование эксперимента как один из прикладных разделов математической теории эксперимента получило широкое применение для решения широкого круга исследовательских задач: построения интерполяционных моделей, изучения кинетики и механизма явлений, оптимизации процессов и др. [4].

Сущность методов математического планирования эксперимента состоит в том, что опыты проводятся по определенной схеме – матрице планирования, характеризующейся оптимальными свойствами. К этим свойствам относятся следующие: алгебраическая сумма элементов каждого вектор-столбца, за исключением столбца, соответствующего свободному члену, равна нулю; сумма произведений элементов двух произвольно взятых вектор-столбцов матрицы равна нулю (ортогональность); сумма квадратов элементов каждого вектор-столбца равна числу опытов.

Благодаря указанным свойствам исследователь получает максимальную информацию об объекте при минимальном количестве опытов. Понятие «объект» имеет широкий смысл. Это может быть технологический процесс или агрегат, многокомпонентный сплав, формовочная или стержневая смесь и т. д. На объект оказывают действие многие факторы x_1, x_2, ..., x_n. Факторами могут быть технологические параметры процесса или агрегата: температура заливки или выпуска металла из плавильного агрегата; содержание углерода, кремния, марганца и других элементов в сплаве; содержание глины, влаги, песков различных марок в формовочной смеси. В отличие от методов, рассмотренных в подразд. 2.1, при математическом планировании эксперимента значения факторов задаются исследователем в широких пределах.

Воздействие факторов на объект вызывает изменение его состояния, которое оценивается по изменению значений критерия или функции оптимизации: увеличению выхода годного литья; повышению механических свойств отливок; возрастанию физико-механических свойств формовочной смеси и т. п. Следует иметь в виду, что критерий оптимизации должен характеризоваться статистической эффективностью, т. е. при данных условиях иметь возможно меньшую дисперсию и соответственно меньшую ошибку определения [5].

Цель планирования эксперимента может состоять в раздельном или одновременном решении задач двух типов. В первом случае исследователю необходимо решить задачу оптимизации, т. е. определить такие значения переменных факторов x_i для которых величина критерия оптимизации y была бы максимальной (минимальной). При решении второго типа задач исследователя интересует математическое описание влияния каждого фактора на функцию оптимизации.

При двухфакторном эксперименте множество значений унимодальной функции оптимизации, которые она принимает в случае изменения значений переменных факторов, можно представить в виде поверхности некоторого «холма» с одной сглаженной вершиной (рис. 2.2). Такую поверхность, соответствующую выходу изучаемого процесса, называют поверхностью отклика, а точку с максимальным значением одноэкстремальной функции – оптимумом. Обычно процесс оптимизации слагается из двух этапов. Первый этап состоит в достижении кратчайшим путем «почти стационарной области», т. е. участка поверхности на сглаженной вершине «холма», где крутизна относительно невелика. Второй этап предусматривает описание этого участка, т. е. поверхности отклика в «почти стационарной области». Для большинства исследовательских и технологических задач достаточно ограничиться достижением «почти стационарной области».

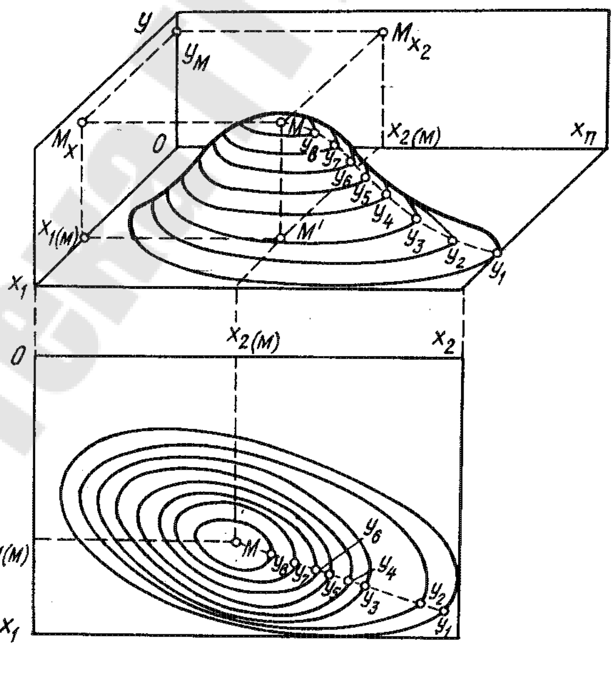

Рис. 2.2. Геометрическое изображение поверхности отклика («холма») в двухфакторном эксперименте: $y_1 – y_8$ – изолинии равного выхода функции $y = f(x_1; x_2)$; M – точка оптимума

Возможность использования аппарата планирования эксперимента ограничивается рядом требований, предъявляемых к задаче исследования: критерий оптимальности – целевая функция – должен быть четко сформулирован и иметь количественное выражение; факторы, оказывающие влияние на объект, могут быть или количественными, или поддающимися количественному описанию, например, с помощью шкалы «желательности» (плохо, удовлетворительно, хорошо) и учитываться планированием. Не учитываемые факторы следует закреплять на постоянном уровне.

Важными этапами, предшествующими планированию эксперимента, являются выбор математической модели поверхности отклика («холма») и интервала, шага или единицы варьирования факторов.

Математическая модель функции отклика необходима для нахождения кратчайшего пути (направления), обеспечивающего наиболее экономичное достижение «почти стационарной области». Так как вид функции поверхности не известен, то ее обычно аппроксимируют (представляют с определенным приближением) полиномом.

Часто для описания исследуемого объекта ограничиваются моделью, содержащей линейные члены и взаимодействия первого порядка. Так как коэффициент регрессии такой функции определяют на основе экспериментальных данных, то математическая модель может иметь вид уравнения регрессии:

$$y = b_0 + \sum b_i x_i + \sum_{ij} b_{ij} x_i x_j \,, \qquad (2.20)$$

где b_0, b_i, b_{ij} – выборочные коэффициенты регрессии; y – целевая функция.

Фактор, учтенный в планировании, может изменяться в пределах исследуемого диапазона. Совокупность всех значений фактора называется его областью определения. Перед планированием исследователь априорно принимает решение о нахождении основного или нулевого уровня факторов. Основному уровню соответствует точка, координаты которой представляют собой сочетание значений факторов, по мнению исследователя, наиболее близкое к оптимальному. Величина основного уровня x^0 должна допускать изменение значений фактора в сторону увеличения и уменьшения на определенную величину, называемую интервалом, шагом или единицей варьирования S.

Прибавление единицы варьирования к значению основного уровня фактора дает «верхний уровень» x^+, а вычитание – «нижний уровень» x^-:

$$x^+ = x^0 + S; \quad x^- = x^0 - S. \tag{2.21}$$

Выбор единиц варьирования факторов требует достаточного опыта исследователя. В общем случае единица варьирования, с одной стороны, должна существенно изменять значение фактора, позволяя этим самым оценить различие результатов опытов на «шумовом фоне»; с другой стороны, необходимо, чтобы величины единиц варьирования различных факторов обеспечивали получение соизмеримых воздействий на исследуемый объект. Ориентировочно можно считать, что «средняя» величина единицы варьирования составляет 10…30 % от области определения фактора.

Для упрощения записи и расчетного аппарата планирования эксперимента верхний уровень фактора обозначают +1 (или «+»), а нижний уровень –1 (или «–»). Такое упрощение равносильно переносу начала координат исследуемого объекта в точку с координатами нулевого уровня факторов и измерению значений факторов в новом масштабе. Координаты точки в новой системе координат связаны с прежними зависимостью

$$x_i' = \frac{x_i - x_i^0}{S_i}, \tag{2.22}$$

где x_i' – кодированное значение фактора; x_i – значение фактора в натуральных единицах; x_i^0 – значение основного уровня в натуральных единицах; S_i – масштабный коэффициент в натуральных единицах; i – номер фактора.

Наибольшее распространение получило планирование на двух уровнях. Это обусловлено возможностью описания большинства объектов или процессов оптимизации с помощью линейной полиномиальной модели. Если k факторов варьируются на двух уровнях, то план такого эксперимента условно записывается в виде 2^k.

Полный факторный эксперимент (ПФЭ). Как отмечено выше, планирование эксперимента осуществляется на основе матриц планирования, приобретающих оптимальные свойства при построении. Матрица планирования представляет собой таблицу значений исследуемых факторов, соответствующие уровни которых должны быть реализованы в ходе эксперимента. Строки матрицы соответствуют отдельным опытам, а вектор-столбцы – значениям каждого фактора в этих опытах.

Матрица планирования трехфакторного эксперимента представлена табл. 2.1. Столбцы x_1', x_2', x_3' задают условия опытов, т. е. указывают, на каком уровне (верхнем «+» или нижнем «–») должен находиться исследуемый фактор в том или ином опыте. При построении планов (матриц) эксперимента типа 2^k закономерный порядок чередования знаков факторов в различных опытах может быть установлен несколькими способами. Например, в отличие от порядка, принятого в табл. 2.1, знаки могут чередоваться в соответствии со степенями двойки. Так, для первого фактора знаки меняются поочередно, для второго – через два, для третьего – через четыре и т. д. Закономерное чередование знаков обеспечивает матрице планирования свойства, указанные в начале подразд. 2.2. Столбцы с возможными комбинациями факторов $x_1'x_2'$, $x_1'x_3'$, $x_2'x_3'$, $x_1'x_2'x_3'$ позволяют оценить взаимодействия факторов. Столбец x_0', в котором для всех опытов фактор обозначен «+1», соответствует фиктивной переменной, используемой для определения свободного члена b_0' уравнения регрессии (2.20).

Таблица 2.1

Матрица планирования трехфакторного эксперимента

Полуреплика	Номер опыта	x_0'	x_1'	x_2'	x_3'	$x_1'x_2'(x_4')$	$x_1'x_3'$	$x_2'x_3'$	$x_1'x_2'x_3'$	Результаты опыта
Первая	1	+	–	–	+	+	–	–	+	y_1
	2	+	+	–	–	–	–	+	+	y_2
	3	+	–	+	–	–	+	–	+	y_3
	4	+	+	+	+	+	+	+	+	y_4
Вторая	5	+	–	–	–	+	+	+	–	y_5
	6	+	+	–	+	–	+	–	–	y_6
	7	+	–	+	+	–	–	+	–	y_7
	8	+	+	+	–	+	–	–	–	y_8

Матрица представленного типа, а в общем случае типа 2^k, является матрицей полного факторного эксперимента. Она позволяет реализовать все возможные неповторяющиеся комбинации факторов на двух уровнях. Геометрическая интерпретация ПФЭ представлена на рис. 2.3.

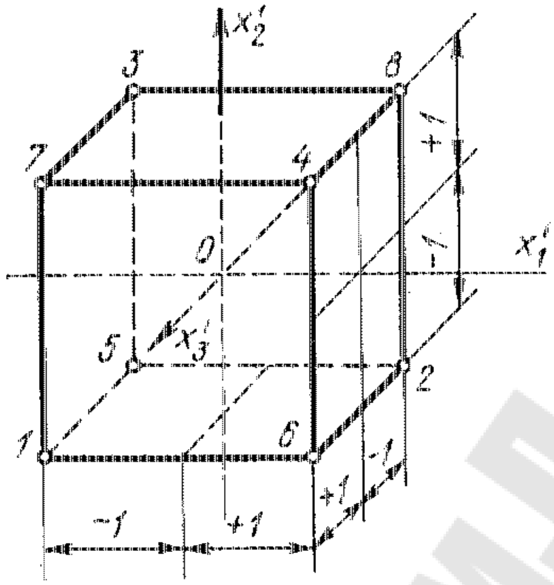

Рис. 2.3. Геометрическое изображение
полного факторного эксперимента 2^3:
1–8 – номера опытов

Рассматривая совместно табл. 2.1 и рис. 2.3, видим, что, например, если в пятом опыте (строке) все факторы находятся на нижнем уровне («–»), то пятая точка на схеме лежит в области отрицательных значений факторов x_1', x_2', x_3' по отношению к началу координат, помещенному в точку основного (нулевого) уровня. Четвертая же точка, наоборот, расположена в области положительных значений факторов, что, естественно, согласуется с соответствующими уровнями («+») факторов в четвертой строке (опыте) табл. 2.1.

Дробный факторный эксперимент (ДФЭ). При трехфакторном эксперименте типа 2^3 число опытов равно 8, при четырехфакторном – 16, при пятифакторном – 32 и т. д. Резкое возрастание числа опытов с увеличением количества факторов делает практически невозможным осуществление полного перебора всех значений при ПФЭ. Выходом из создавшегося положения является применение так называемых дробных реплик от полного факторного эксперимента. Это возможно благодаря указанным выше оптимальным свойствам матрицы планирования.

Во многих практических задачах взаимодействия второго и высших порядков пренебрежимо малы или отсутствуют. В связи с этим представляется возможным планировать, например, трехфакторный эксперимент по матрице двухфакторного с реализацией всего четырех опытов вместо восьми при ПФЭ.

Если взаимодействие факторов отсутствует, то в трехфакторном эксперименте произведение (отсутствующее взаимодействие) $x_1'x_2'$ можно приравнять, например, четвертому фактору $x_4' = x_1'x_2'$. После такой замены матрица трехфакторного эксперимента будет так называемой полурепликой от ПФЭ (см. табл. 2.1). Применение дробных реплик ПФЭ весьма экономично, однако связано с определенным осложнением.

Если в ПФЭ типа 2^k все коэффициенты регрессии имеют раздельные оценки, то замена парного взаимодействия новым фактором, т. е. переход к ДФЭ, приводит к смешению оценок. Это следует из того, что, например, столбцы $x_2'x_3'$ и x_1', $x_1'x_3'$ и x_2', $x_1'x_2'$ и x_3' первой полуреплики попарно одинаковы, т. е. коэффициенты регрессии учитывают не только линейные члены, но и их произведения: $b_1 \to x_1' + x_2'x_3'$, $b_2 \to x_2' + x_1'x_3'$, $b_3 \to x_3' + x_1'x_2'$.

Для оценки смешанных эффектов применяется определяющий контраст Y, представляющий собой произведение факторных столбцов. Так, первая полуреплика (см. табл. 2.1) имеет $Y = x_1'x_2'x_3'$, а вторая $Y = -x_1'x_2'x_3'$.

Так как при кодированном выражении факторов $(x_i')^2 = 1$, то, используя выражение $b_i \to x_i' + Yx_i'$, для первой полуреплики находим: $b_1 \to x_1' + (x_1')^2 x_2'x_3' = x_1' + x_2'x_3'$; $b_2 \to x_2' + (x_2')^2 x_1'x_3' = x_2' + x_1'x_3'$; $b_3 \to x_3' + (x_3')^2 x_1'x_2' = x_3' + x_1'x_2'$. Аналогично – для второй полуреплики: $b_1 \to x_1' + (x_1')^2 x_2'x_3' = x_1' + x_2'x_3'$; $b_2 \to x_2' - x_1'x_3'$; $b_3 \to x_3' - x_1'x_2'$.

Если определить среднее из суммы и разностей совместных оценок, полученных по обеим репликам, то найдем, что $b_1 \to 2[(x_1' + x_2'x_3') + (x_1' - x_2'x_3')] = x_1'$; $b_2 \to x_2'$, $b_3 \to x_3'$. Таким образом, объединение результатов двух полуреплик дает тот же эффект, что и полный трехфакторный эксперимент.

При исследовании многофакторных процессов применяют дробные реплики, образованные делением ПФЭ на две, четыре, восемь и т. д. частей: 1/2; 1/4; 1/8. Такие реплики называются регулярными. Реплики типа 3/4; 5/8 и т. д. называются нерегулярными. Дробные реплики, в которых p эффектов взаимодействия заменены факторами (линейными членами модели), записываются в виде 2^{k-p}. Так, полуреплика ПФЭ 2^5 записывается в виде 2^{5-2}.

Планирование эксперимента с помощью ПФЭ или ДФЭ, как отмечено выше, имеет целью определить коэффициенты регрессии модельного уравнения, описывающего с той или иной степенью приближения поверхность отклика. Вследствие ортогональности вектор-столбцов матрицы планирования коэффициенты уравнения регрессии взаимно независимы. Их вычисление для любого количества факторов производится по формулам:

$$b_i = \frac{1}{n}\sum_{i}^{n} x'_{ij} y_i; \quad b_0 = \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i}^{n} y_i, \tag{2.23}$$

где x'_{ij} – кодированное значение фактора; y_i – результат опыта; n – количество опытов.

Так как x'_{ij} равно +1 или –1, то b_j фактически равен алгебраической сумме результатов опытов y, деленной на число опытов n. При этом y имеет знак соответствующего столбца матрицы планирования для данного опыта. Подставляя полученные коэффициенты в модельное уравнение регрессии (2.20), получаем математическое описание изучаемого объекта.

Крутое восхождение по поверхности отклика. Для планирования эксперимента в «почти стационарной области» наиболее эффективны ПФЭ и ДФЭ. Однако из самых распространенных исследовательских задач как раз и является нахождение этой области. Для решения такой задачи весьма эффективно сочетание метода факторного планирования с движением по градиенту.

Сущность метода состоит в том, что участок поверхности отклика аппроксимируют плоскостью (рис. 2.4) и с центром в точке основного уровня проводят ПФЭ или ДФЭ, в результате чего находят коэффициенты регрессии модельного линейного уравнения.

Следует иметь в виду, что составляющие градиента являются частными производными функции отклика. Так как исходный участок поверхности отклика при крутом восхождении аппроксимируется плоскостью, то частные производные уравнения этой плоскости равны коэффициентам регрессии при факторах. Следовательно, при движении по градиенту необходимо изменять факторы пропорционально значениям соответствующих коэффициентов регрессии. Знак и величина коэффициента показывают, в каком направлении и на сколько единиц варьирования необходимо изменить значение данного фактора по отношению к основному уровню. В установленном таким образом направлении выполняют серию шагов до получения максимального значения параметра оптимизации. Так как движение осуществляется по градиенту, то пройденный путь является кратчайшим к области оптимума.

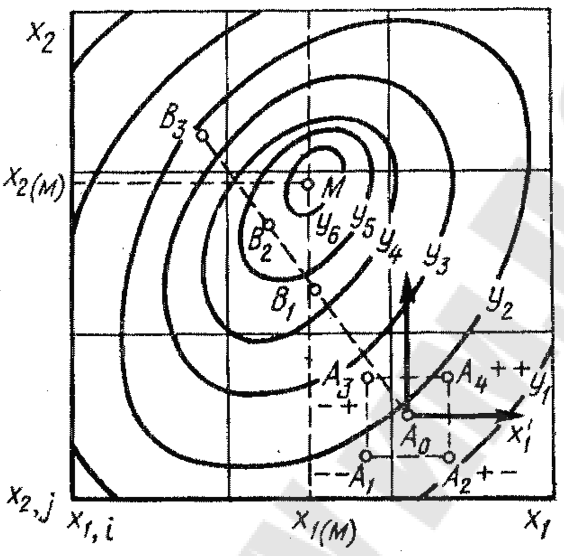

Рис. 2.4. Схема крутого восхождения по поверхности отклика к области оптимума:
$y_1 - y_6$ – изолинии равного выхода функции отклика $y = f(x_1; x_2)$;
A_0 – основной уровень; A_1, A_2, A_3, A_4 – исходные опыты;
B_1, B_2, B_3 – значения функции при восхождении; M – точка оптимума

В области полученного максимального значения функции отклика процедура крутого восхождения может быть повторена. При этом за основной уровень принимается максимальное значение функции, полученное на предыдущем этапе восхождения. Операция может продолжаться до тех пор, пока все коэффициенты регрессии линейной модели станут незначимыми. Незначимость коэффициентов b_i свидетельствует о выходе в область оптимума поверхности отклика.

Высокая эффективность и простота расчетного аппарата обусловили весьма широкое распространение рассматриваемого метода для решения многих исследовательских задач. Однако при использовании его следует строго оценивать достоверность получаемых результатов. Значения коэффициентов регрессии не должны быть соизмеримы с ошибкой их определения. Кроме того, необходимо оценивать адекватность (тождественность, соответствие) описания поверхности отклика за пределами области экстремума линейной моделью.

Если модельное уравнение регрессии существенно нелинейно или влияние эффектов взаимодействия соизмеримо с линейными эффектами, то метод крутого восхождения не применим. В этом случае необходимо использовать планирование второго порядка.

Для решения большинства исследовательских и технологических задач литейного производства, как отмечено ранее, достаточным является достижение «почти стационарной области» поверхности отклика. В тех случаях, когда исследователя интересует описание этой области, применяют планирование второго порядка. Целью такого описания может быть локализация точки оптимума или определение типа поверхности отклика. Для решения задачи производится аппроксимация обычно полиномами второй степени. Это обусловлено тем, что по мере приближения к оптимуму все большую значимость приобретают эффекты второго порядка, так как отличие поверхности отклика от плоскости возрастает.

Реализация планов второго порядка требует большого объема опытов и расчетных работ. Конкретным результатом такого планирования является математическое описание «почти стационарной области» регрессионным уравнением. Дифференцируя уравнения по каждой переменной и приравнивая полученные выражения нулю, получаем систему уравнений. Решение этой системы дает координаты точки локализованного оптимума. Для описания «почти стационарной области» широкое применение нашло ортогональное и ротатабельное центрально-композиционное планирование [3].

2.3. Планирование эксперимента при исследовании многокомпонентных систем

До разработки и практического использования методов планирования эксперимента построение диаграмм состав-свойство было связано с необходимостью проведения огромного количества опытов и ограничивалось максимум трех-четырехкомпонентными системами. Комплексное использование методов физико-химического анализа и теории планирования эксперимента позволило значительно снизить трудоемкость исследовательского труда при построении многокомпонентных диаграмм.

Планирование эксперимента при построении и исследовании диаграмм состав-свойство, являющихся сложными многокомпонентными системами (МКС), относится к числу наиболее сложных исследовательских задач [3]. Эта сложность обусловлена главным образом необходимостью использования математического аппарата, отдельные элементы которого выходят за пределы программы курса высшей математики для вузов. Поэтому в данном подразделе рассмотрены лишь отдельные общие тенденции и возможные направления применения теории планирования эксперимента для построения и исследования МКС.

Целью исследования многокомпонентных систем (формовочных и стержневых смесей, шихт и сплавов, противопригарных красок и т. п.) в большинстве случаев является построение зависимостей свойств системы от ее состава и технологического режима обработки или получения, оптимизация состава или технологического процесса по одному или нескольким критериям оптимизации.

В связи с тем, что составляющие многокомпонентных систем («смесевые факторы») не являются независимыми переменными, задача оптимизации может быть решена одним из двух применяемых в настоящее время методов.

В первом случае исходят из того, что независимо могут варьироваться лишь q–1 составляющую МКС, а последняя q-я составляющая определяется как остаток от общей суммы. Это позволяет исключить из рассмотрения одну составляющую, а для оставшихся q–1 независимых переменных МКС и $k - q$ режимных факторов применяют модельный полином соответствующего вида. Эффект влияния q-й составляющей распределяется между коэффициентами полинома.

Во втором случае, когда необходимо исследовать МКС в широком диапазоне изменения всех q переменных и $k - q$ режимных факторов, используют модели с наложением ограничения: сумма относительного содержания составляющих МКС должна быть равна единице. Для оценки коэффициентов модельных полиномов строят оптимальные планы на области определения всех k переменных.

Планирование эксперимента при наличии количественных смесевых факторов позволяет установить количественные зависимости между пропорциями отдельных компонентов и свойствами смеси: поиск функциональных зависимостей состав-свойство или построение диаграмм состав-свойство. Целью использования этого метода также может служить нахождение координат точек, обеспечивающих оптимизацию исследуемых свойств.

В тех случаях, когда кроме чисто смесевых необходимо исследовать количественные несмесевые факторы, характеризующие ход процесса (температуру, давление, скорость охлаждения и др.), применяют факторные планы, сложные совмещенные планы, построенные с использованием планов на симплексе и факторных экспериментов типа 2^k.

Задачу планирования эксперимента для МКС с качественными факторами, являющимися основными, решают путем выделения перспективных комбинаций и отсева неприемлемых. Оптимизация, заключающаяся в нахождении оптимальных комбинаций при неполном переборе, осуществляется с помощью гипергреко-латинских планов.

Если отдельные качественные факторы не относятся к основным, а лишь создают «шумовой фон», то целью исследования является не оценка, а устранение влияния таких факторов. Для этой цели используются латинские квадраты, кубы и параллелепипеды.

3. ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА

3.1. Общие правила ведения и оформления рабочего лабораторного журнала

Существует два способа ведения рабочего лабораторного журнала: в тетради или на отдельных листах бумаги, собираемых в скоросшивателе.

Преимущество второго способа в том, что можно пользоваться разной бумагой – гладкой, линованой, графической и табличной. Кроме того, листки с записями легко собрать в любой последовательности и в необходимом количестве.

Тетрадь же удобна для записи рефератов литературных источников и случайных мыслей по теме исследования. Все страницы необходимо пронумеровать, а на первой или последней дать подробный перечень записей. Желательно, чтобы страницы имели поля для различных пометок, в том числе даты внесения записей.

В рабочий лабораторный журнал результаты экспериментов надо записывать аккуратно, полно, четко, грамотно и наглядно.

По ходу каждого эксперимента важно сразу же записать результаты измерений без какой-либо промежуточной обработки. Не следует приступать к расчетам, прежде чем результаты измерения не будут занесены в журнал. Регистрировать измерения нужно по схеме: посмотрел, записал, проверил. Перед началом эксперимента необходимо переписать номера приборов и установок, а также класс их точности и градуировочные характеристики. В журнал следует заносить все первичные данные измерений и результаты их обработки. Это позволит в дальнейшем при необходимости проверить правильность сделанных расчетов.

Важное значение в объяснении идеи эксперимента, описании установки, обработке и оформлении результатов исследования играют схемы. Схема должна быть как можно проще и иллюстрировать только то, что имеет отношение к эксперименту. Соблюдать масштаб при вычерчивании схем не обязательно, если это позволяет четче показать ту или иную особенность объекта или процесса.

По возможности все результаты измерений необходимо сводить в таблицы. Значения одной и той же величины для удобства сопоставления лучше всего записывать в вертикальный столбик. В одной из граф таблицы нужно указать единицу измерения с таким десятичным множителем ($\times 10^n$), чтобы значения находились в пределах 0,1 …100.

При составлении таблиц и схем большей ясности способствуют соответствующие пробелы между отдельными их строками, заголовки, выделение выводов или основных результатов и т. п. Следует избегать исправлений. Лучше зачеркнуть неверные цифры и поставить рядом правильные. Все записи необходимо датировать.

3.2. Элементарные методы первичной математической обработки экспериментальных данных

Математическая обработка результатов эксперимента является обязательной и неотъемлемой частью любого исследования. Незнание элементарных методов обработки экспериментального материала нередко приводит к использованию упрощенных и недостаточно обоснованных приемов. Это неизбежно влечет за собой получение неточных, часто противоречивых результатов и, как следствие, ложных выводов, не имеющих научной ценности.

Количественный результат любого опыта в общем случае – величина не точная, содержащая некоторую ошибку. Одной из важнейших задач математической обработки опытных данных и является оценка истинного значения измеряемой величины с возможно меньшей ошибкой. Все ошибки, которые содержат отдельные значения измеряемой величины, могут быть подразделены на три основные группы: грубые (промахи), систематические, случайные.

Грубые ошибки возникают вследствие описок, допущенных в записи значений измеряемой величины в лабораторном журнале, при ошибочной оценке величины по слабоосвещенной шкале прибора, в результате временного нарушения или ослабления контакта входного датчика с исследуемым объектом, из-за усталости исследователя.

Результаты измерений, содержащие грубую ошибку, необходимо отбрасывать в процессе накопления экспериментального материала или в ходе последующей первичной обработки. В первом случае критерием для обнаружения результата, содержащего грубую ошибку, является его резкое отличие по величине или знаку от результатов остальных измерений. При обнаружении промаха на этапе накопления материала можно повторить измерение и заменить ранее полученный ошибочный результат новым.

Однако оценка по критерию резкого отличия весьма субъективна и нередко в конечном счете приводит к получению ложной информации об исследуемом объекте. Чтобы избежать этого, целесообразно использовать специальную методику, основанную на правиле трех сигм.

Систематические ошибки измерения возникают в результате самых разнообразных причин. Например, неточная установка стрелки на нулевую отметку шкалы измерительного прибора приводит к смещению всех значений в ту или иную сторону на какую-то постоянную величину. Измерение с высокой точностью размеров крупногабаритных отливок без учета изменений температуры окружающей среды также может привести к получению результатов, содержащих систематическую ошибку. В этом случае ошибка возникает вследствие того, что не учитывается термическое расширение или сжатие исследуемого объекта. Подобных примеров можно привести множество,

Общих, универсальных методов предупреждения и устранения систематических ошибок нет. Однако отдельные приемы можно рекомендовать в качестве достаточно эффективных: тщательная проверка частной методики и схемы экспериментальной установки, тарировка входных преобразователей и датчиков (термопар, тензодатчиков и др.) по эталонным; периодическая контрольная проверка измерительной аппаратуры; измерение одних и тех же величин различными методами; стабилизация или учет изменения условий опыта и т. д.

Таков далеко не полный перечень приемов выявления систематических ошибок. Обнаружив и определив величины систематических ошибок, их устраняют в экспериментальном материале посредством введения соответствующих поправок или коэффициентов.

Случайные ошибки вызываются большим количеством случайных причин, которые при данном уровне развития экспериментальной техники не могут быть в отдельности выявлены и учтены. Случайные ошибки неустранимы; именно они определяют собой точность опытных данных. Однако с помощью методов теории вероятностей можно в среднем учесть погрешность опыта, вносимую случайными причинами, и определить среднее значение измеряемой величины с меньшей ошибкой, чем ошибки отдельных измерений.

Для оценки случайных величин, какими являются любые экспериментальные данные, используют их средние значения. Средние величины определяются различными способами в зависимости от характера взаимосвязи между усредняемыми величинами и свойствами исследуемого объекта. При этом наиболее распространенной оценкой является средняя арифметическая:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum x_i \tag{3.1}$$

или

$$\bar{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + ... + m_n x_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}, \tag{3.2}$$

где $m_1 + m_2 + ... + m_n$ – веса или частоты измерений $x_1, x_2, ..., x_n$ – соответственно.

Формулу (3.2) обычно применяют при обработке результатов неравноточных измерений. Это так называемая средняя арифметическая взвешенная. При большом количестве измерений $N = m_1 + m_2 + ... + m_n$ дискретная величина x принимает значения $x_1, x_2, ..., x_n$. Относительные частоты m_1/N, m_2/N, ..., m_n/N с определенным приближением равны вероятностям p_1, p_2, ..., p_n появления $x_1, x_2, ..., x_n$. В этом случае формула (3.2) может быть представлена в виде:

$$\sum p_i x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + ... + p_n x_n \,. \tag{3.3}$$

Значение $M(x) = \sum p_i x_i$ – называется математическим ожиданием случайной величины x. Математическое ожидание является предельной величиной, к которой стремится среднее значение $\bar{x}$ случайной величины x при большом количестве испытаний N. Среднее арифметическое соответствует наивероятнейшему значению измеряемой величины.

Мерой рассеяния значений $x_1, x_2, ..., x_n$ относительно их средней величины $\bar{x}$ является дисперсия

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + ... + (x_n - \bar{x})^2}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 . \tag{3.4}$$

Положительное значение квадратного корня из дисперсии называется средним квадратическим отклонением или стандартом:

$$\sigma^2 = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + ... + (x_n - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} . \tag{3.5}$$

Для вычисления среднего квадратического отклонения и дисперсии отдельных измерений применяют формулы:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum(\bar{x} - x_i)^2}{n-1}}; \quad \sigma^2 = \frac{\sum(\bar{x} - x_i)^2}{n-1}. \tag{3.6}$$

При больших n различие результатов, полученных по формулам (3.4), (3.5) и (3.6), незначительно.

Взвешенное среднее квадратическое отклонение определяется формулой

$$\sigma = \sqrt{\frac{m_1(x_1 - \bar{x})^2 + ... + m_n(x_n - \bar{x})^2}{m_1 + m_2 + ... + m_n}} = \sqrt{\frac{\sum m_i(x_i - \bar{x})^2}{\sum m_i}} . \tag{3.7}$$

Если область измерения какой-либо величины разбить на интервалы, то при многократном повторении измерения обнаружим, что отношение количества измерений m_i, попавших в каждый интервал, к общему числу произведенных измерений N стремится к некоторому числу, постоянному для каждого интервала. Рассматривая случайные ошибки $z = x - a$ и сами результаты измерения $x = a + z$ как случайные величины, которые могут принимать любые действительные значения, вероятность P попадания величины z в интервал $z_i < z < z_j$ можно записать в таком виде:

$$\frac{m}{N} \approx P(z_i < z < z_j) = \int_{z_i}^{z_j} P(z)dz . \tag{3.8}$$

Решение уравнения (3.8) для любого интервала производится в соответствии с законом или функцией $D(z)$ распределения вероятностей случайной величины z. Такая функция, нормированная условием

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(z)dz = 1, \tag{3.9}$$

называется плотностью распределения.

Случайные ошибки измерения наиболее часто характеризуются нормальным законом распределения (закон Гаусса), плотность которого

$$P(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}. \tag{3.10}$$

График плотности распределения вероятностей называется кривой распределения. Если в формуле (3.10) положить $1/(\sigma\sqrt{2}) = h$ и $z = x - a$, то уравнение кривой нормального распределения может быть записано в виде:

$$P(z) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 z^2} \quad \text{или} \quad y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 (x-a)^2}, \tag{3.11}$$

где a – математическое ожидание.

Кривые нормального распределения для различных значений σ, h в формулах (3.10) и (3.11) приведены на рис. 3.1. Характер кривых показывает, что плотность распределения снижается при увеличении z тем в большей степени, чем меньше σ (и больше h). Кроме того, чем меньше σ (и больше h), тем меньше разброс ошибок около нуля.

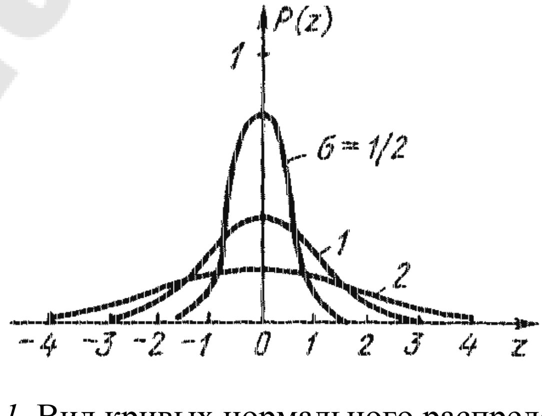

Рис. 3.1. Вид кривых нормального распределения в зависимости от σ

Вероятность (3.8) попадания случайной ошибки в интервал $(-z_i; z_i)$ можно представить в виде заштрихованной площади криволинейной трапеции под кривой распределения вероятностей (рис. 3.2). При нормальном распределении вероятность непопадания случайной ошибки в пределы, ограниченные ±3σ, является ничтожно малой. Это так называемое правило трех сигм. На основании последнего при анализе экспериментальных данных производят отбрасывание грубых ошибок-промахов. При этом с вероятностью 0,997 считают, что наибольшая возможная ошибка не превышает некоторого числа

$$\Delta = 3\sigma = 3\sqrt{\frac{\sum(\bar{x} - x_i)^2}{n-1}}. \qquad (3.12)$$

Все значения измерений, отклоняющиеся от среднего на величину, большую Δ, исключаются как содержащие грубую ошибку. Помимо средней квадратической ошибки и дисперсии при нормальном распределении используют и другие показатели точности измерений: вероятную ошибку, среднюю абсолютную ошибку и меру точности.

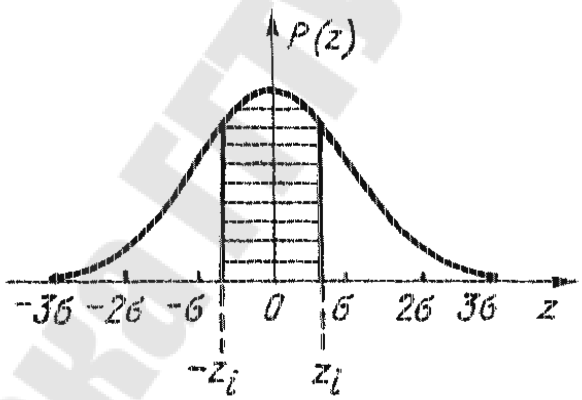

Рис. 3.2. Графическое изображение вероятности попадания случайной ошибки в заданный интервал

Вероятной ошибкой измерений называется такая величина *p*, которая при большом числе измерений делит область распределения ошибок на две равные части, т. е. с одинаковой вероятностью половина отклонений $|x_i - \bar{x}|$ будет меньше *p*, а половина – больше:

$$p = \frac{0{,}477}{h} = 0{,}675\sigma. \qquad (3.13)$$

Ранее введенная в выражения (3.11) мера точности h характеризует точность отдельных измерений:

$$h = \sqrt{\frac{n-1}{2\sum(\bar{x}-x_i)^2}} = \sqrt{\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}} = 0{,}7071\frac{1}{\sigma}. \tag{3.14}$$

Этот параметр показывает, насколько тесно концентрируются ошибки вблизи нуля. Вероятность, что ошибки отдельных измерений не превосходят по абсолютному значению заданной величины r, т. е. заключаются в пределах от $-r$ до $+r$, может быть описана функцией Ф:

$$P\left(\left|x-\bar{x}\right|<r\right) = \Phi\left(\frac{r}{\sigma\sqrt{2}}\right) = \Phi(hr). \tag{3.15}$$

Значения hr функции (3.15) при заданной вероятности P определяются по таблицам, например, работы [5]. Для практических расчетов можно использовать следующие значения, соответствующие трем наиболее часто указываемым уровням:

При *P*	**Значение *hr***
0,999	2,33
0,990	1,83
0,95	1,39

Средняя абсолютная ошибка отдельного измерения определяется из выражения

$$v = \sigma\frac{2}{\sqrt{2\pi}} = 0{,}7979\sigma. \tag{3.16}$$

Вычисление среднего значения измеряемой величины и ошибок отдельных измерений не всегда является достаточным при первичной обработке результатов эксперимента. Необходимо также оценить точность полученных результатов: найти меру точности, среднюю квадратическую, вероятную и наибольшую возможную ошибку среднего арифметического.

Меру точности среднего арифметического вычисляют по формуле

$$H = h\sqrt{n} = \sqrt{\frac{n(n-1)}{2\sum(\bar{x} - x_i)}}, \tag{3.17}$$

где h – мера точности отдельных измерений (3.14).

Средняя квадратическая ошибка σ_0 среднего арифметического определяется следующим образом:

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{\sum(\bar{x} - x_i)^2}{n(n-1)}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \tag{3.18}$$

Вероятную ошибку среднего арифметического (при $P = 0,997$) вычисляют по формуле, аналогичной (3.13):

$$p_0 = 0,675\sigma_0. \tag{3.19}$$

Наибольшую возможную ошибку среднего арифметического (при $P = 0,997$) определяют из равенства

$$\Delta_0 = 3\sigma_0. \tag{3.20}$$

При первичной обработке результатов эксперимента рекомендуется:

– определить и исключить из опытных данных систематическую ошибку;

– вычислить среднее арифметическое $\bar{x}$;

– найти среднюю квадратическую σ и наибольшую возможную Δ ошибки отдельного измерения. Провести анализ экспериментального материала с целью определения результатов, содержащих грубые ошибки (промахи). Исключить результаты, содержащие грубые ошибки, и повторить анализ;

– рассчитать среднюю квадратическую ошибку σ_0 среднего арифметического. Записать среднее арифметическое с указанием его средней квадратической ошибки;

– в зависимости от характера поставленной задачи вычислить остальные характеристики p_0, Δ_0, h и H. Исходя из условий задачи может быть принят и другой порядок первичной обработки экспериментального материала. В отдельных случаях уже первичная обработка дает исчерпывающее решение задачи.

3.3. Примеры обработки экспериментальных данных

Рассмотрим на примерах последовательность выполнения основных операций первичной обработки экспериментальных данных.

Пример 1. Методом вакуум-всасывания расплава исследовали жидкотекучесть силумина в условиях изотермической выдержки при температуре 700 °С. Схема установки показана на рис. 3.3. Величину жидкотекучести оценивали по высоте столбика металла x_i, закристаллизовавшегося в пробоотборнике – тонкостенной трубке из нержавеющей стали с внутренним диаметром 5 мм. Исходные данные по результатам 20 измерений жидкотекучести представлены в табл. 3.1.

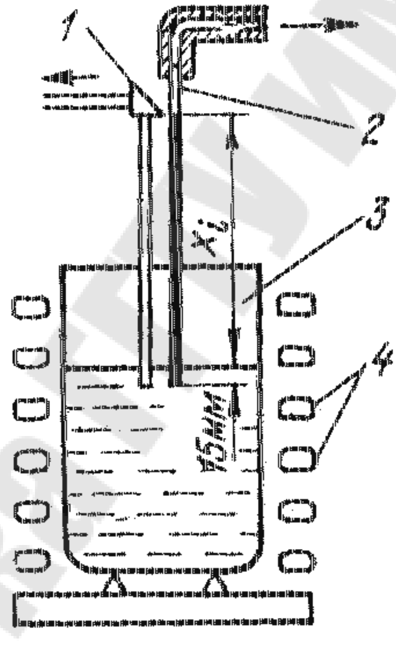

Рис. 3.3. Схема установки
для определения жидкотекучести вакуум-всасыванием:
1 – термопара; *2* – вакуумный пробоотборник;
3 – тигель с расплавом; *4* – индуктор

Проверка методики и условий проведения опытов не позволила выявить сколько-нибудь заметную систематическую ошибку. Поэтому приступаем к обработке результатов опытов.

Таблица 3.1

Результаты измерения жидкотекучести

Номер опыта	Исходные данные	Первая обработка		Вторая обработка		
	x_i	$\overline{x} - x_i$	$(\overline{x} - x_i)^2$	x_i	$\overline{x} - x_i$	$(\overline{x} - x_i)^2$
1	132	3	9	132	0,5	0,25
2	127	8	64	127	5,5	30,25
3	132	3	9	132	0,5	0,25
4	125	10	100	125	7,5	56,25
5	138	–3	9	138	–5,5	30,25
6	128	7	49	128	4,5	20,25
7	137	–2	4	137	–4,5	20,25
8	182	–47	2209	132	0,5	0,25
9	126	9	81	126	6,5	42,25
10	142	–7	49	142	–9,5	90,25
11	126	9	81	126	6,5	42,25
12	130	5	25	130	2,5	6,25
13	137	–2	4	137	–4,5	20,25
14	124	11	121	124	8,5	72,25
15	135	0	0	135	–2,5	6,25
1	2	3	4	5	6	7
16	149	–14	196	149	–16,5	272,25
17	138	–3	9	138	–5,5	30,25
18	129	6	36	129	3,5	12,25
19	132	3	9	132	0,5	0,25
20	131	4	16	131	1,5	2,25
Σ	2700	0	3080	2650	0	775

1. Проводим предварительную оценку экспериментального материала с целью выявления грубых ошибок. Наиболее отличающиеся значения жидкотекучести получены в 8-м и 16-м опытах. Их, по-видимому, следовало бы исключить как промахи и заменить результатами повторных опытов. Однако для большей обоснованности такого решения проведем анализ с помощью правила трех сигм, т. е. с учетом наибольшей возможной ошибки.

2. По формуле (3.1) или (3.2) находим среднее арифметическое:

$$\overline{x_1} = \frac{2700}{20} = 135.$$

3. Используя выражение (3.12), рассчитываем наибольшую возможную ошибку отдельных измерений Δ. Для этого в третий столбец табл. 3.1 заносим отклонения отдельных измерений жидкотекучести

от среднего арифметического, а в четвертый – их квадраты. Равенство суммы $\sum(\overline{x_i} - x_i)$ нулю свидетельствует о правильности вычислений. Подставляя сумму значений четвертого столбца в выражение (3.12), находим:

$$\Delta_1 = 3\sqrt{\frac{3080}{20-1}} \cong 38{,}19.$$

Сравнивая Δ_1 с числами третьего столбца, видим, что значение жидкотекучести в 8-м опыте необходимо исключить из таблицы как содержащее грубую ошибку: |47| > 38,19. Значение жидкотекучести, полученное в 16-м опыте, следует оставить для последующей обработки, так как |14| < 38,19.

4. Для выяснения причины грубой ошибки в 8-м опыте проводим повторное измерение высоты пробы, соответствующей этому опыту, и проверяем черновые записи результатов эксперимента. Обнаруживаем, что значение жидкотекучести – высота вакуум-пробы – в 8-м опыте составляет 132 мм, а число 182 было занесено в рабочий журнал вследствие нечеткого написания цифры «3» в черновых записях.

5. Заносим в таблицу правильное значение замера в 8-м опыте и проводим повторную обработку данных в соответствии с пунктами 2 и 3:

$$\overline{x_2} = \frac{2650}{20} = 132{,}5; \quad \sigma_2 = \sqrt{\frac{755}{19}} \cong 6{,}3; \quad \Delta_2 = 3 \cdot 6{,}3 = 18{,}9.$$

Сравниваем значение Δ_2 с числами шестого столбца. Все они, включая и 16,5 для 16-го опыта, меньше 18,9. Поэтому результаты всех 20 опытов должны быть учтены.

6. По формуле (3.18) вычисляем среднюю квадратическую ошибку среднего арифметического:

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{755}{20 \cdot 19}} \cong 1{,}4.$$

Результат обработки можно записать в виде:

$$\overline{x} = 132{,}5 \pm 1{,}4 \text{ или } \overline{x} = 132{,}5(1 \pm 0{,}011).$$

7. Вычисляем по формулам (3.13) и (3.19) вероятные ошибки отдельных измерений и среднего арифметического:

$$p = 0{,}675 \cdot 6{,}3 \approx 4{,}25; \quad p_0 = 0{,}675 \cdot 1{,}4 \approx 0{,}95.$$

8. Меры точности отдельных результатов и среднего арифметического находим по формулам (3.14) и (3.17):

$$h = \frac{0{,}7071}{6{,}3} \approx 0{,}11;\; H = 0{,}11\sqrt{20} \approx 0{,}49\,.$$

9. Уравнение кривой распределения вероятностей в соответствии с выражением (3.11) имеет вид:

$$\varphi(x) = \frac{0{,}11}{\sqrt{\pi}}\, e^{-(x-132{,}5)^2\, 0{,}11^2}\,.$$

Пример 2. При постоянных условиях отлита опытная партия (10 шт.) чугунных размалывающих валков. Твердость отбеленного рабочего слоя этих валков определена в единицах Роквелла методом вдавливания алмазной пирамиды. В межзаводских технических условиях (ТУ) необходимо указать нижний предел твердости валков такого типа на основании результатов, полученных при отливке опытной партии (табл. 3.2). Организация-заказчик предлагает установить нижний уровень твердости 55 *HRC*. В ТУ оговорено, что если твердость рабочего слоя поставляемых валков окажется меньше нижнего предела, они будут забракованы, а расходы по их отливке отнесены на счет завода-изготовителя.

Таблица 3.2

Обработка результатов

Номер валка	Исходные данные	Первая обработка	
	x_i	$\bar{x} - x_i$	$(\bar{x} - x_i)^2$
1	2	3	4
1	55	2	4
2	60	–3	9
3	58	–1	1
4	57	0	0
5	61	–4	16
6	56	1	1
7	62	–5	25
8	56	1	1
9	46	11	121
10	59	–2	4
Σ	570	0	182

Для установления обоснованного нижнего уровня твердости проведем следующую обработку опытных данных.

1. Определим среднее арифметическое, среднюю квадратическую и наибольшую возможную ошибки отдельных значений твердости по формулам (3.1), (3.6) и (3.12):

$$\bar{x} = \frac{570}{10} = 57; \quad \sigma = \sqrt{\frac{182}{10-1}} \cong 4{,}49; \quad \Delta = 3 \cdot 4{,}49 \approx 13{,}48.$$

Сопоставление чисел третьего столбца табл. 3.2 с наибольшей возможной ошибкой Δ уже в результате первой обработки показывает, что исходные данные не содержат грубой ошибки. Наибольшее отклонение для 9-го валка 11 < 13,48. Следовательно, все результаты, полученные в опытной партии, можно использовать для последующей обработки.

2. По формуле (3.14) вычисляем меру точности отдельного результата:

$$h = \sqrt{\frac{10-1}{2 \cdot 182}} \approx 0{,}16\,HRC.$$

В соответствии с изложенным ранее для функции (3.15) при $P = 0{,}999$ произведение $hr = 2{,}33$, откуда

$$r = \frac{2{,}33}{0{,}16} \approx 14{,}6\,HRC.$$

Следовательно, среднее арифметическое можно записать в виде $\bar{x} = 57 \pm 14{,}6\,HRC$. При этом нижний уровень твердости $x_{\text{н}} = 57 - 14{,}6 = 42{,}4\,HRC$.

Такой нижний предел обеспечивает минимальный риск для завода-изготовителя, но мало приемлем для заказчика, так как снижение твердости рабочего слоя валков приводит к уменьшению их износостойкости в эксплуатации и как следствие – к повышению расхода валков на единицу вырабатываемой продукции. В результате обсуждения договаривающимися сторонами было принято компромиссное решение понизить величину P до 0,95, т. е. до технически целесообразного уровня. Для $P = 0{,}95$ значение $hr = 1{,}39$ и $r = 1{,}39 : 0{,}16 \approx 8{,}7$. Откуда интервал твердости $\bar{x} = 57 \pm 8{,}7\,HRC$, а нижний предел – $\bar{x} = 48{,}3\,HRC$.

3. Для исключения систематической ошибки отдельных определений твердости валков были проведены контрольные испытания твердости на эталонном образце с гарантированной твердостью 50 *HRC*. По десяти измерениям получены такие результаты: 51; 49; 51; 50; 51; 49; 51; 50; 50; 51. Среднее арифметическое этой серии результатов

$$\bar{x} = \frac{503}{10} = 50{,}3\,HRC\,.$$

Разница между полученным средним и значением твердости эталона будет постоянной поправкой (систематической ошибкой) при работе на данном твердомере: |50,3 – 50| = ±0,3.

С учетом этой поправки нижний уровень твердости $\bar{x} = (57 - 0{,}3) - 8{,}7 = 48\,HRC$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Канне, М. М. Основы научных исследований в технологии машиностроения : учеб. пособие для студентов машиностроительных вузов / М. М. Кане. – Минск : Выш. шк., 1987.

2. Шенк, Х. Теория инженерного эксперимента / Х. Шенк. – Москва : Мир, 1972.

3. Адлер, Ю. П. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий / Ю. П. Адлер. – Москва : Наука, 1981.

4. Основы физико-химических методов исследований в металлургических процессах / В. Н. Линневский [и др.]. – Москва : Металлургия, 1990.

5. Зайдель, А. Н. Элементарные оценки ошибок измерения / А. Н. Зайдель. – Ленинград : Наука, 1988.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное электронное издание комбинированного распространения

Учебное издание

ОСНОВЫ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Пособие по одноименному курсу для студентов специальности 1-36 02 01 «Машины и технология литейного производства» дневной формы обучения

Авторы-составители: **Карпенко** Валерий Михайлович
Ткаченко Александр Владимирович

Редактор *С. Н. Санько*
Компьютерная верстка *Н. В. Широглазова*

Подписано в печать 05.10.07.
Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Цифровая печать. Усл. печ. л. 2,79. Уч. - изд. л. 3,11.
Изд. № 117.
E-mail: ic@gstu.gomel.by
http://www.gstu.gomel.by
.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Издательский центр учреждения образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого».
ЛИ № 02330/0131916 от 30.04.2004 г.
246746, г. Гомель, пр. Октября, 48.